



Факультет
математики та інформатики

МІЖНАРОДНА КОНФЕРЕНЦІЯ

*присвячена 75-й річниці
від дня народження
Володимира Маслюченка*

25 - 27 вересня 2025 року



ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Чернівці

2025



Зміст

Андрицуляк Тарас, Мартинюк Сергій <i>Узагальнення системи Ело для взаємодій між багатьма учасниками</i>	10
Балабуха Віктор, Василюк Нестор, Воронюк Максим <i>Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського-Бесова</i>	12
Бардан Андрій <i>Усереднення в багаточастотних системах із інтегральними збуреннями та застосування в диференціальній грі</i>	14
Бігун Ярослав, Петришин Роман, Скутар Ігор <i>Уседнення в багаточастотних системах з асимптотикою повільних і швидких змінних та частот</i>	15
Боднарчук Андрій, Куриляк Марія, Скасків Олег <i>Про абсциси збіжності випадкових гаусових рядів Діріхле</i>	17
Бондаренко Ольга, Працьовитий Микола <i>Неперервні функції з фрактальними множинами рівнів</i>	19
Бондаренко К.С., Кічмаренко О.Д., Стехун А.О., Таїрова М.С. <i>Побудова розв'язків задач оптимального керування з похідною Хукухарі</i>	20
Буртняк Іван, Малицька Ганна <i>Третя мішана крайова задача в півпросторі для одного виродженого рівняння дифузії</i>	26
Виннишин Олег <i>Множина чисел, які мають скінченну кількість різних зображень у системі з натуральною основою та надлишковим алфавітом</i>	27
Воробйова Алла <i>Асимптотичні властивості швидко змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями близькими до правильно змінних</i>	28
Гембарська Світлана <i>Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$</i>	30
Горбач Валентина <i>Розв'язність виродженої еліптичної варіаційної нерівності з різними вагами</i>	31
Городецький Василь, Колісник Руслана, Мартинюк Ольга <i>Аналітичний вигляд розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з початковою узагальненою функцією</i>	32
Городній Михайло <i>Узагальнена операторна матриця Вандермонда і обмежені розв'язки диференціальних рівнянь</i>	33
Грушка Ярослав <i>Про внутрішній час на синхронізованій орієнтованій множині</i>	35
Дмитришин Роман, Нижник Іван <i>Про аналітичне продовження деяких відношень гіпергеометричних функцій Лаурічелли-Сарана F_M</i>	38

Дробот Андрій <i>Усереднення в системах з ієрархією частот</i>	40
Дубей Святослав, Бандура Андрій <i>Про обмеженість L-індексу за напрямком цілих розв'язків рівняння Гольдберга-Стреліца</i>	41
Єлагін Володимир <i>Нескінченні згортки Бернуллі, керовані нега-двійковим рядом</i>	42
Журавльов Валерій <i>Крайові задачі для нормально розв'язних операторних рівнянь</i>	43
Заворотинський Андрій, Мурач Олександр <i>Про новий клас еліптичних крайових задач з малим параметром</i>	47
Капустян Олексій, Левенчук Людмила, Нестеренко Олексій <i>Обґрунтування методу Галеркіна глибокого навчання для апроксимації розв'язків нелінійних параболічних рівнянь з негладкою функцією взаємодії</i>	48
Кашпіровський Олексій, Митник Юрій <i>Узагальнення A-методу Дзядика поліноміального наближення розв'язків диференціальних рівнянь на випадок рівняння з нерегулярною особливістю</i>	49
Копорх Катерина <i>Порядкові властивості множини фактороб'єктів компакта</i>	50
Кусік Людмила <i>Необхідні умови існування одного класу розв'язків нелінійного диференціального рівняння другого порядку, близького до лінійного</i>	51
Кушнірчук Василь, Кушнірчук Володимир <i>Про модель оптимізації портфеля активів</i>	52
Кушнірчук Володимир, Малик Ігор <i>Аналіз умов існування та єдності розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із дробовим броунівським рухом</i>	54
Лакхва Роксолана, Могильова Вікторія <i>Метод усереднення для інтегродиференціальних задач оптимального керування на півосі</i>	56
Лека Максим <i>Про фундаментальний розв'язок спряженої задачі Коші для диференціальних рівнянь із дисипативною параболічністю</i>	59
Лисенко Ірина, Працьовитий Олександр, Плакида Віктор <i>Двосимвольна система кодування чисел з двома різнознаковими основами та ненульовою надлишковістю у задачах фрактального аналізу та теорії функцій</i>	60
Літовченко Владислав <i>Про задачу Діріхле на півосі для рівняння ізотропної супердифузії</i>	61
Малик Ігор, Івасюк Роман <i>Застосування прихованих марковських та напівмарковських моделей до аналізу часових рядів</i>	62

Макарчук Олег <i>Асимптотичні властивості модуля характеристичної функції однієї випадкової величини з незалежними Q_2-цифрами свого зображення</i>	64
Мартинюк Сергій, Сидора Михайло <i>Порівняльний аналіз дронів та наземного транспорту</i>	64
Мартинюк Сергій, Цуркан Вячеслав <i>Використання матриць результату для розв'язку дискретної динамічної кооперативної гри</i>	66
Мороз Микола <i>Про оцінку α-міри Гаусдорфа на $(0, 1]$ відносно сімейств покриттів, що породжені додатними розкладами Перрона</i>	68
Назарчук Валентина <i>Однопараметрична сім'я фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2-зображенням чисел</i>	70
Нестеренко Василь, Фотій Олена <i>Про перехідні відображення</i>	71
Нікорак Олена <i>Неперервний проєктор двійкового зображення чисел в ланцюгове A_2-зображення</i>	72
Пастула Михайло <i>Обґрунтування методу усереднення в багаточастотних системах першого наближення з інтегральними умовами</i>	73
Переґуда Олег, Перестюк Юрій <i>Оптимальне керування функціонально-диференціальним рівнянням нейтрального типу на нескінченному інтервалі</i>	75
Працьовитий Микола <i>Локально складні функції з фрактальними властивостями, означені у термінах двосимвольних зображень чисел</i>	77
Працьовитий Микола, Вовк Юлія, Васькевич Світлана <i>Системи числення з ненульовою надлишковістю і їх застосування</i>	78
Пукальський Іван, Яшан Богдан <i>Нелокальна за часом багатоточкова задача для $2b$-параболічних рівнянь з виродженням</i>	79
Ратушняк Софія <i>Неперервна ніде не диференційовна функція, означена в термінах ланцюгових A_s-дробів</i>	81
Сатур Оксана <i>Структура та стійкість нерухомих точок у параметризованій динамічній системі</i>	82
Селютін Дмитро <i>Використання теорії фільтрів у деяких питаннях математичного аналізу</i>	84
Сердюк Анатолій, Соколенко Ігор <i>Оцінки відхилень сум Фур'є на класах Вейля–Надя $W_{\beta,1}^r$</i>	85
Сливка-Тилищак Ганна, Кучінка Каталін, Маді Михайло <i>Моделювання розв'язку однорідного параболічного рівняння з випадковою початковою умовою</i>	87

Собчук Валентин, Зеленська Ірина <i>Істотно особливі функції в асимптотиці розв'язку рівняння типу Орра-Зоммерфельда з диференціальною точкою звороту</i>	88
Соліч Катерина <i>Тригонометричні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського–Бесова у просторі $B_{q,1}$</i>	90
Українець Олег <i>Моделювання поширення епідемії із врахуванням екологічних факторів</i>	91
Ферук Віктор <i>Слабкозбурена лінійна крайова задач для багаточленного диференціального рівняння дробового порядку з похідними Капуто</i>	93
Фещенко Богдан <i>Гомотопічний тип стабілізаторів функцій Морса-Ботта на поверхнях</i>	94
Чепок Ольга <i>Асимптотична поведінка $P_\omega(Y_1, Y_0, \pm\infty)$-розв'язків диференціального рівняння другого порядку, права частина якого є добутком нелінійностей різного типу</i>	95
Штефан Дмитро, Станжицький Андрій <i>Експоненціальна дихотомія в середньому квадратичному для нескінченновимірних стохастичних систем</i>	98
Baiduk Yakiv <i>Principal ideals of the magma monoid</i>	100
Balinsky Alexander, Prykarpatski Anatolij <i>On finite-dimensionality of closed subspaces in $L_p(M, d\mu) \cap L_q(M, d\nu)$</i>	101
Banakh Taras, Mazurenko Oles, Zavarzina Olesia <i>Strictly convex metric abelian groups are normed spaces</i>	106
Banakh Taras, Pshyk Vladyslav <i>A characterization of 3-dimensional affine spaces</i>	106
Bandura Andriy, Skaskiv Oleh <i>Analytic functions in a unit polydisc: conditions of boundedness of L-index in a direction for the sum of functions with bounded L-index in the direction</i>	107
Bilozero Maria, Sharai Natalia <i>Asymptotic representations of regularly varying solutions to differential equations of the fourth order with nonlinearities, close to regularly varying</i>	108
Bobyliiev Dmytro <i>Numerical homogenization and multiscale modeling of porous media</i>	111
Bondar Ivanna <i>Weakly Perturbed Boundary Value Problems for Systems of Integro-Differential Equations in the General Case. An Equivalent System of Algebraic Equations</i>	112
Chaichenko Stanislav, Savchuk Viktor, Shydlich Andrii <i>Best weighted approximation of some kernels on the real axis</i>	113
Cozma Dumitru <i>Algebraic solutions and the problem of the center for planar polynomial differential system</i>	114

Dehnerys Vitalii <i>Factorization of orthogonal projectors</i>	118
Dorosh Andrii, Dorosh Iryna, Cherevko Ihor, Pertsov Andrii <i>Modeling biomass and product accumulation dynamics in <i>Desmodesmus armatus</i> microalgae culture using a stimulating substrate</i>	119
Drin Yaroslav, Drin Irina, Drin Svitlana <i>About the solutions differential equations of variable order</i>	121
Dron Vitaly, Medynskyi Ihor <i>On Classic Fundamental Solution of the Cauchy Problem for One Class of Degenerated Parabolic Equations of Kolmogorov Type with Block Structure and Its Applications</i>	122
Gefter Sergiy, Piven' Aleksey <i>Some nonlinear partial differential equations in a module of copolynomials over a commutative ring</i>	124
Haluza Oleksii, Akhiezer Olena, Malyarets Lyudmyla, Voronin Anatoly, Lebedev Stepan <i>Method for Determining the Cyclicity of Singular Points for Quadratic Systems of Differential Equations</i>	125
Huzyk Nadiia <i>Inverse Free Boundary Problems For Degenerate Parabolic Equation</i>	128
Ilchuk Oleksii <i>Moufang Liners</i>	129
Ilika Svitlana, Matviy Oleksandr, Piddubna Larysa <i>Scheme for approximating the non-asymptotic roots of quasi-polynomials of high accuracy</i>	129
Ivasiuk Halyna, Fratavchan Tonia, Protsakh Nataliia <i>On the Homeomorphisms Arising from the Cauchy Problem for Parabolic in the Sense of Eidelman Systems of Arbitrary Order</i>	131
Kapustyan Oleksiy, Yusyypiv Taras <i>Asymptotic gain property for non-autonomous inclusion of reaction-diffusion type</i>	132
Kasimova Nina <i>Approximate optimal control for nonlinear hyperbolic inclusion with fast-oscillating coefficients</i>	134
Klevchuk Ivan <i>Investigation of difference equations with rational right-hand sides</i>	135
Kogut Peter <i>A novel statement of SAR image despeckling problem in weighted Sobolev spaces</i>	135
Konarovskyi Vitalii <i>Ill-posedness of the pure-noise Dean–Kawasaki equation</i>	136
Kozerenko Sergiy, Konchakivskyi Danylo <i>On graphs with small triameters</i>	137
Krasnokutskyi Oleksandr, Cherevko Igor <i>Approximation of Linear Systems with Delays and Their Quasi-Polynomials</i>	138
Kuduk Grzegorz <i>Problem with integral equations for evolution equations of third order</i>	140
Laptiev Oleksandr, Parkhomenko Ivan, Laptiev Serhii, Laptieva Tetiana <i>Approximation of Linear Systems with Delays and Their Quasi-Polynomials</i>	142

Lukashiv Taras, Malyk Igor, Satagopam Venkata and Nazarov Petr <i>Stabilization of stochastic dynamic systems with Markov parameters and concentration points</i>	144
Lianha Anastasiia, Maslyuchenko Oleksandr <i>Separately continuously generated pairs and sigma-continuity</i>	146
Lysynskiy Mykola, Maksymenko Sergiy <i>Classification of smooth structures on non-Hausdorff one-dimensional manifolds: from local to global</i>	147
Marko Iurii <i>Pseudoboundary of the Hilbert cube as a space of idempotent measures</i>	147
Maslyuchenko Oleksandr, Onypa Denys <i>On extensionally normal spaces that are not normal</i>	148
Mykhaylyuk Volodymyr <i>Diagonals of separately pointwise Lipschitz functions</i>	150
Nykyforchyn Oleh, Pehhryn Volodymyr <i>Sparsification of Compact Ultrametries</i>	153
Pasichnyk Halyna <i>On a dissipative ultraparabolic equation with Hölder coefficients independent of the degeneration variables</i>	154
Pokutnyi Oleksandr, Zahorulko Yulia <i>Boundary Value Problems for Linear and Nonlinear Discrete and Continuous Systems</i>	155
Pravdyvyi Oleksandr, Stanzhytskyi Oleksandr, Martynyuk Olha <i>Approximation of neutral-type delay stochastic equation with an equation without delay</i>	156
Raievska Iryna, Raievska Maryna, Sysak Yaroslav <i>Local nearrings with additive groups of order 128 and exponent 8. II</i>	159
Sadyrbaev Felix, Pokutnyi Oleksandr <i>On *-measures and *-convexity</i>	160
Savchuk Viktor <i>Fejér-type summability method for periodic rational Fourier series</i>	161
Savchuk Maryna, Savchuk Viktor <i>Best approximations for the combination of Cauchy–Szegő kernels</i>	162
Sharai Nataliya, Shinkarenko Volodymyr <i>Asymptotic representation of solutions differential equations of the third order</i>	163
Shydlich Andrii <i>Nonlinear approximation of weighted Wiener classes of functions of several variables in different metrics</i>	165
Sizhuk Andrii <i>Solving the system of N second order differential linear equations with the "cyclic" condition for the coefficients at the zero order in derivative</i>	166
Skyhar Oksana <i>Fano and Boolean liners</i>	169
Sobchuk Valentyn, Pykhnivskiy Roman <i>On synthesis of Lyapunov functions via evolutionary search</i>	169
Taranets Roman <i>Existence and asymptotic behaviour of α-entropy solutions to a nonlocal thin film equation in multi-dimensional domains</i>	170

- Yevseiev Serhii, Milevskiy Stanislav, Sokol Vladyslav, Kurtseitov Tymur**
Mathematical model of asymmetric crypto-code system based on elliptic elongated codes **171**
- Zarichnyi Mykhailo** *On *-measures and *-convexity* **173**
- Погорєлов Станіслав, Тоніца Олег, Процай Наталя, Балаба Ярослав**
Моделювання поширення епідемії вірусної інфекції в умовах воєнного стану **175**

Вступ

Рейтингові системи є ключовим інструментом для опису та моделювання антагоністичних ігор. Однією з найпоширеніших та математично інтерпретованих моделей є система Ело, запропонована Арпадом Ело[1]. Її застосування базується на парних взаємодіях та корекції рейтингів за формулою

$$r_i(k+1) = r_i(k) + K(S_i(k) - P_i(k)), \quad (1)$$

де $S_i(k)$ – фактичний результат, $P_i(k)$ – очікуваний результат, а K – коефіцієнт оновлення.

Ймовірність перемоги агента i над агента j визначається логістичною функцією:

$$P(i \succ j) = \frac{1}{1 + 10^{\frac{r_j - r_i}{400}}}. \quad (2)$$

Така інтерпретація безпосередньо відображає антагоністичний характер гри: виграш одного агента є програшем іншого, а зміна рейтингів пропорційна різниці між очікуваним та фактичним результатом. Попри ефективність, класична модель має суттєві обмеження, оскільки не придатна безпосередньо для багатокористувацьких сценаріїв, де взаємодія відбувається не лише між двома агентами та залежить від вручну підібраних параметрів.

Сучасні дослідження пропонують адаптацію системи Ело для багатокористувацьких взаємодій на основі моделі витривалості[2], де після кожного етапу виключається найслабший агент. Проте такий підхід створює дисбаланс, оскільки він краще коригує рейтинги агентів, що посідають вищі місця. Інший підхід ґрунтується на розкладанні багатокористувацької взаємодії на $n \cdot (n - 1)/2$ попарних взаємодій[3]. Водночас він не базується на системі Ело та не враховує зміну кількості агентів чи кількості взаємодій.

Щоб уникнути зазначених обмежень, у нашій роботі ми поєднуємо простоту та ефективність системи Ело з підходом розкладання багатокористувацької взаємодії на попарні підвзаємодії, доповнивши його механізмами урахування кількості агентів в окремій взаємодії та кількості взаємодій.

Методологія

Багатокористувацьку взаємодію представлено як сукупність парних підвзаємодій. Для кожної пари агентів (i, j) у взаємодії G_k визначається фактичний результат $S_{ij}^k \in \{0, 0.5, 1\}$ та очікуваний результат P_{ij}^k , що залежить від поточних рейтингів r_i^k, r_j^k .

Для оцінки узгодженості прогнозів із фактичними результатами використано логістичну функцію втрат[4]:

$$l_{ij}^k = -(S_{ij}^k \ln P_{ij}^k + (1 - S_{ij}^k) \ln(1 - P_{ij}^k)). \quad (3)$$

Рейтинги оновлюватимемо в напрямку градієнтів функції втрат. Градієнт функції втрат за рейтингом агента i у взаємодії k :

$$\frac{\partial l_{ij}^k}{\partial r_i^k} = \beta(P_{ij}^k - S_{ij}^k), \quad \beta = \frac{\ln(10)}{400}. \quad (4)$$

Враховуючи, що крок оновлення рівний η , маємо $K = \eta\beta$, і з урахуванням підвзаємодій з усіма суперниками, маємо наступне оновлення рейтингу після взаємодії:

$$r_i^{k+1} = r_i^k - K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (P_{ij}^k - S_{ij}^k) \quad (5)$$

Цей вираз є узагальненням класичної системи Ело для взаємодій між багатьма учасниками, зберігаючи її просту інтерпретацію як різницю між очікуваним та фактичним результатом.

У класичному підході фіксоване значення K може призводити до перенавчання при великих обсягах даних або надмірного згладжування при малих. Щоб уникнути цих крайнощів, пропонується адаптивний коефіцієнт:

$$K(M, N) = K_0 M^{-\gamma_{\text{interactions}}} (N - 1)^{-\gamma_{\text{agents}}}, \quad \alpha, \gamma \in (0, 1), \quad (6)$$

де M — кількість взаємодій, N — число агентів у конкретній взаємодії. Така форма зберігає стабільність оновлень у різних масштабах даних.

Для нових агентів можливі два підходи: фіксований початковий рейтинг або адаптивний, що базується на поточному розподілі. Адаптивний краще інтегрує новачків без нормування, тоді як фіксований оптимальний при попередньому нормуванні та відсутності підсередовищ.

На початку рейтинг нових агентів має високу невизначеність, яка з часом спадає. Тому коефіцієнт корекції підсилюється на старті та спадає до моменту насичення T_{sat} :

$$g(T) = 1 + \alpha \left(1 - \min \left\{ 1, \frac{T}{T_{\text{sat}}} \right\} \right)^2, \quad K(M, N, T) = K_0 \cdot g(T) M^{-\gamma_{\text{interactions}}} (N - 1)^{-\gamma_{\text{agents}}}. \quad (7)$$

Відповідно, остаточне оновлення рейтингу подано у вигляді:

$$r_i^k = r_i^k - K(M, N, T) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (P_{ij}^k - S_{ij}^k). \quad (8)$$

Параметри системи Ело налаштовуються шляхом мінімізації логістичної функції втрат, яка порівнює очікувані результати взаємодій з фактичними спостереженнями. Як показано в аналізі залежності функції логістичних втрат[5], вона залежить лише від початкових рейтингів агентів, результатів їх взаємодій та параметрів системи:

$$L = f(S, R_0, K_0, \gamma_{\text{interactions}}, \gamma_{\text{agents}}, \alpha, T_{\text{sat}}). \quad (9)$$

Для стабільного оновлення параметрів застосовується модифікований градієнтний спуск:

$$\theta^{(t+1)} = \theta^t - \eta \theta^t \nabla f(\theta^t), \quad (10)$$

що дозволяє швидше коригувати великі параметри та повільніше — малі.

Реалізація

Для прикладу застосування моделі використано дані чемпіонату світу з Формули-1 з 1950 року, розбиті на навчальний та валідаційний набори. Кожну гонку подано як набір парних взаємодій між пілотами: фініш вище трактується як перемога. Взято $T_{\text{sat}} = 10$, а також фіксований початковий рейтинг, оскільки немає підсередовищ і рейтинги нормалізуються перед кожним сезоном.

Таким чином, необхідно знайти оптимальні значення початкового рейтингу, коефіцієнту оновлення, ступенів впливу кількості взаємодій та числа агентів у гонці, а також коефіцієнту посилення зміни рейтингу під час початкових взаємодій. Після задання початкових діапазонів для параметрів та реалізації градієнтного спуску отримано наступні значення параметрів на момент ранньої зупинки: $R_0 = 1834.6$, $K_0 = 96.2$, $\gamma_{\text{interactions}} = 0.1589$, $\gamma_{\text{agents}} = 0.6174$, $\alpha = 0.76841$.

Література

- [1] A. E. Elo. *The Rating of Chess Players, Past and Present*. New York: Arco Publishing, 1978.
- [2] Ben Powell. *Generalizing the Elo rating system for multiplayer games and races: why endurance is better than speed*. Journal of Quantitative Analysis in Sports, 19. De Gruyter, 2023.
- [3] R. C. Weng and C.-J. Lin. *A Bayesian approximation method for online ranking*. Journal of Machine Learning Research, 12(1), 2011.
- [4] V. Vovk. *The fundamental nature of the log loss function*. Fields of Logic and Computation II: Essays dedicated to Yuri Gurevich on the Occasion of His 75th Birthday, pages 307–318, 2015.
- [5] Т. Л. Андрицуляк, С. В. Мартинюк. *Оптимізація параметрів системи Ело за допомогою методу градієнтного спуску*. Світ наукових досліджень. Випуск 40: матеріали Міжнародної мультидисциплінарної наукової інтернет-конференції. Тернопіль, 2025, с. 55–63.

e-mail: andrytsuliak.taras@chnu.edu.ua

Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів
періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського-Бєсова
Віктор Балабуха, Нестор Василюк, Максим Воронюк
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

В доповіді мова буде йти про найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B_{1,\theta}^\Omega$ [1] періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$ (див., наприклад, [2]). Норма в цьому просторі є більш сильною ніж L_∞ - норма. Далі вважаємо, що $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, і $w(\tau)$ - функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови Барі-Стечка (S^α) та (S_l) [3].

Означимо апроксимаційну характеристику, яка нами досліджується.

Нехай X - деякий нормований функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$ і Θ_M -довільний набір із M d -вимірних векторів $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$, з цілочисельними координатами. Для функції $f \in X$ позначимо

$$S_{\Theta_M}(f) = \sum_{j=1}^M \widehat{f}(k^j) e^{i(k^j, x)}, x \in \mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(k^j) = (2\pi)^{-d} \int_{T^d} f(t) e^{-i(k^j, t)} dt$, $T^d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$ - коефіцієнти Фур'є функції f , які відповідають набору векторів Θ_M .

Розглянемо апроксимаційну характеристику

$$e_M^\perp(f)_X := \inf_{\Theta_M} \|f - S_{\Theta_M}(f)\|_X$$

і для функціонального класу $F \subset X$ покладемо

$$e_M^\perp(F)_X := \sup_{f \in F} e_M^\perp(f)_X.$$

Величину $e_M^\perp(F)_X$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі X .

Наведемо одержаний результат.

Теорема. *Нехай $d \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, де w задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 1$ і умову (S_l) . Тоді для будь-якої послідовності $M = (M_n)_{n=1}^\infty$ натуральних чисел такої, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$ виконується співвідношення*

$$e_M^\perp(B_{1,\theta}^\Omega)_{B_{\infty,1}} \asymp w(2^{-n}) 2^n n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Література

- [1] Стасюк С.А., Федунік О.В. *Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних*, Укр. мат. журн., 2006, Т.58, №5, 692-704.
- [2] Романюк А.С., Романюк В.С. *Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$* . Укр. мат. журн., 2019, Т.71, №2, 271-282.
- [3] Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряжённых функций*. Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, Т.5, 483-522.

e-mail: vitia1488.vb@gmail.com

e-mail: Nestorwasok@gmail.com

e-mail: max.voronjuk@gmail.com

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ІНТЕГРАЛЬНИМИ
ЗБУРЕННЯМИ ТА ЗАСТОСУВАННЯ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ГРИ

Андрій Бардан

Чернівецький Національний Університет імені Юрія Федьковича, Чернівці,
Україна

Метод усереднення є одним із ефективних методів для дослідження нелінійних коливальних систем, зокрема багаточастотних. Наявність інтегральних збурень у правих частинах значно ускладнює дослідження. Отриманий результат застосований для диференціальної гри переслідування «простий рух» з інтегральними збуреннями [1]. Задачі без інтегральних збурень розглянуті у праці [2].

Розглянемо багаточастотну систему звичайних диференціальних рівнянь за наявності інтегральних збурень

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= X(\tau, a, \psi) + \int_0^\tau U(z, a, \psi) dz, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\mu} + Y(\tau, a, \psi) + \int_0^\tau V(z, a, \psi) dz,\end{aligned}\tag{1}$$

де $\tau = \mu t$, μ – малий параметр, $\mu \in (0, \mu_0]$, a і ψ – відповідно амплітудні (повільні) і фазові (швидкі) змінні, $a \in D$, D – обмежена область в \mathbb{R}^p , $p \geq 1$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, вектор-функції X, Y – 2π -періодичні за компонентами вектора ψ .

Метод усереднення полягає у заміні вихідної системи (2) на спрощену систему, одержану усередненням за швидкими змінними

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{a}}{d\tau} &= X_0(\tau, \bar{a}) + \int_0^\tau U_0(z, \bar{a}) dz, \\ \frac{d\bar{\psi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\mu} + Y_0(\tau, \bar{a}) + \int_0^\tau V_0(z, \bar{a}) dz.\end{aligned}\tag{2}$$

У роботі доведено існування і єдиність розв'язку системи (2) на відрізку $[0, L]$ з початковими умовами $a|_{\tau=0} = \bar{a}|_{\tau=0}$, $\psi|_{\tau=0} = \bar{\psi}|_{\tau=0}$. Ґрунтуючись на оцінці осциляційного інтеграла, отриманої в монографії А.М. Самойленка та Р.І. Петришина [3], встановлено оцінку похибки методу усереднення для досить малого $\mu_0 > 0$

$$\|a(\tau, \mu) - \bar{a}(\tau)\| + \|\psi(\tau, \mu) - \bar{\psi}(\tau)\| \leq c\mu^{\frac{1}{m}},\tag{3}$$

яка виконується для $\tau \in [0, L]$ і $\mu \in (0, \mu_0]$, стала $c > 0$ і не залежить від μ .

Одержаний результат проілюстровано на задачі диференціальної гри типу «простий рух» [1] із накладеними інтегральними збуреннями вигляду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u + \mu \int_0^\tau (\alpha + \cos \psi) d\psi, \quad x \in \mathbb{R}^s, \\ \dot{y} &= v + \mu \int_0^\tau (\beta + \sin \psi) d\psi. \quad y \in \mathbb{R}^s,\end{aligned}$$

де u і v – швидкості гравців $|u| \geq |v|$, α і β – сталі, ψ – фазова змінна.

Досліджено вплив інтегральних збурень на час переслідування та виявлено, що інтегральні збурення можуть як подовжувати, так і зменшувати час переслідування. Показано, що існує випадок, коли задача без збурень не має розв'язку, тоді як за наявності збурення розв'язок існує.

Література

- [1] Chikrii A. O. Conflict-controlled processes. Boston: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
- [2] Бардан А.О. Усреднення в задачі диференціальної гри переслідування за наявності багаточастотних збурень. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2024. Т. 45, № 2. С. 18–28. URL: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).18-28](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).18-28).
- [3] Самойленко А. М., Петришин Р. І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 2004. 474 с.

e-mail: bardan.andrii@chnu.edu.ua

УСРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ З АСИМПТОТИКОЮ ПОВІЛЬНИХ І ШВИДКИХ ЗМІННИХ ТА ЧАСТОТ

Ярослав Бігун, Роман Петришин, Ігор Скутар
Чернівецький національний університет, Чернівці, Україна

Методом усереднення досліджено систему диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon^{\kappa_1} X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^\kappa} + \varepsilon^{\kappa_2} Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad (1)$$

де ε - малий параметр, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\tau = \varepsilon t$ - повільний час, вектор повільних змінних $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, вектор швидких змінних $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\kappa_1 \geq 0$, $\kappa_2 \geq 0$, $\kappa > 0$. Запізнення в системі задається лінійно перетвореними аргументами $\lambda_\nu \tau$ і $\theta_j \tau$, $\lambda_\nu \in (0, 1]$, $\nu = \overline{1, p}$, $\theta_j \in (0, 1]$, $j = \overline{1, q}$.

У класичних задачах нелінійної механіки розглядаються системи рівнянь вигляду (1), коли $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, $\kappa = 1$ [1]. Системи із запізненням аргументу у випадку резонансу частот досліджувалися у працях [2, 3] та ін. Метод усереднення для системи рівнянь (1) обґрунтовано в праці [4].

Відповідна (1) усереднена за швидкими змінними $\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_q}$ система набуває вигляду

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = \varepsilon^{\kappa_1} X_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \quad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^\kappa} + \varepsilon^{\kappa_2} Y_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \quad (2)$$

Обґрунтування методу усереднення для системи рівнянь (1) із початковими умовами у точці $\tau = 0$ отримується з оцінки осциляційного інтеграла

$$I_k(\tau, s, \bar{s}, \varepsilon) = \int_t^{t+\tau} f(s, \varepsilon) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^\kappa} \int_{\bar{s}}^s \gamma_k(z) dz\right) ds, \quad (3)$$

де функцією

$$\gamma_k(\tau) = \sum_{\nu=1}^q \left(k_\nu, \theta_\nu \omega(\theta_\nu \tau) \right)$$

задається умова резонансу в системі (1) в точці $\tau \geq 0$:

$$\gamma_k(\tau) = 0$$

Для оцінки норми інтеграла (3) припустимо, що виконується така умова.

Умова А. Нехай функції $\omega_\nu \in \mathbb{C}^{mq}(\mathbb{R}_+)$, $\nu = \overline{1, m}$, рівномірно неперервні на \mathbb{R}_+ і побудований за системою функцій $\{\omega(\theta_1\tau), \dots, \omega(\theta_q\tau)\}$ визначник Вронського порядку mq

$$W(\omega(\theta_1\tau), \dots, \omega(\theta_q\tau)) \neq 0.$$

Теорема 1. Нехай для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $\tau \in \mathbb{R}_+$, вектор-функція $f \in \mathbb{C}^1[\tau, \tau + L]$, обмежена разом із похідною на $G_1 = [\tau, \tau + L] \times (0, \varepsilon_0]$ і виконується умова А.

Тоді можна вказати таке $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$, що справджується оцінка

$$\|I_k(\tau, s, \bar{s}, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^\alpha \left(\sup_{G_1} \|f(\tau, \varepsilon)\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \sup_{G_1} \left\| \frac{df(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \right\| \right), \quad \alpha = \kappa/ml, \quad (4)$$

де $c_2 > 0$ і не залежить від k , ε , $\|k\|_\Theta = \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \|k_\nu\|$.

Обґрунтування методу усереднення і відповідна оцінка похибки даються у такій теоремі

Теорема 2. Нехай:

1. Вектор-функції X і Y неперервно диференційовні за змінними τ , a_Λ , φ_Θ в області $G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}^p \times \mathbb{R}^{mp}$ й обмежені разом із похідними сталою $\sigma_2 > 0$.

2. Для коефіцієнтів Фур'є F_k вектор-функцій X і Y в області $G_2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}^p$ справджується оцінка

$$\sum_{k \neq 0} \left(\sup_{G_2} \|F(\tau, a_\Lambda)\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \left(\sup_{G_2} \left\| \frac{\partial F}{\partial \tau} \right\| + \sum_{G_2} \lambda_k \sup_{G_2} \left\| \frac{\partial F_k}{\partial a_{\lambda_\nu}} \right\| \right) \right) \leq \sigma_3.$$

3. Виконується умова А.

4. Існує єдиний розв'язок $\bar{a} = \bar{a}(\tau, \varepsilon)$ першого рівняння з (2), $\bar{a}(0, \varepsilon) = \bar{y}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, графік якого лежить в області \mathbb{D} разом із деяким ρ -околом.

Тоді для досить малого $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_1]$ існує єдиний розв'язок системи рівнянь (1) із початковими умовами $(\bar{y}, \bar{\psi})$ при $\tau = 0$ і для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L\varepsilon^{-\kappa_1}] \times (0, \varepsilon^*]$ виконується оцінка

$$\varepsilon^{\kappa_2} \|a(\tau, \varepsilon) - \bar{a}(\tau, \varepsilon)\| + \varepsilon^{\kappa_1} \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{\alpha + \kappa_1 + \kappa_2},$$

де $\alpha = \kappa/(mq)$, $a|_{\tau=0} = \bar{a}|_{\tau=0} = \bar{y}$, $\varphi|_{\tau=0} = \bar{\varphi}|_{\tau=0} = \bar{\psi}$, $c_1 > 0$ і не залежить від ε .

Розглянуто випадок виконання умови 2 теорема 1 уздовж розв'язку усередненої системи (2).

Результат теорема 2 проілюстровано на модельному прикладі одночасотної системи вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = \sqrt[3]{\varepsilon} (b_1 + b_2 \cos(k\varphi + l\varphi_\theta)), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d_1 + 2d_2\tau}{\sqrt{\varepsilon}},$$

де $b_\nu, d_\nu \in \mathbb{R}$, $b_2 \neq 0$, $d_1, d_2 \neq 0$; $\theta \in (0, 1)$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k + l\theta = 0$; $a(0, \varepsilon) = \bar{y}$, $\varphi(0, \varepsilon) = 0$.

Оцінка похибки методу усереднення для повільної на інтервалі часу $[0, 1/\sqrt[3]{\varepsilon}]$ змінної така:

$$\|a(\tau, \varepsilon, \bar{y}) - \bar{a}(\tau, y)\| \leq |b_2| \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + O(\varepsilon^{13/12}) \right) \varepsilon^{7/12} \exp(|b_1| \sqrt[3]{\varepsilon} \tau) \leq |b_3| e^{|b_1|} \varepsilon^{7/12} + O(\varepsilon^{13/12}) = O(\varepsilon^{7/12}).$$

Література

- [1] Самойленко А.М., Петришин Р.І. *Математичні аспекти теорії нелінійних коливань*. Київ: Наукова думка, 2004. 474 с.
- [2] Bihun Ya., Skutar I. Averaging in multifrequency systems with multi-point conditions and a delay. *Acta et Commentationes. Exact and Natural Sciences*, 2023, nr. 2(16), pp. 13–24.
- [3] Bihun Ya., Skutar I. Averaging in Multifrequency Systems with Delay and Local-Integral Conditions. *Bukovynian Mathematical Journal*, 2020, 8(2), pp. 14-23.
- [4] Bihun Ya., Petryshyn R., Skutar I. Averaging in a generalized multifrequency system with a delay. *Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems*. Springer Nature Switzerland AG, 2025, pp. 281-294.

e-mail: y.bihun@chnu.edu.ua

ПРО АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ ГАУСОВИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ
Андрій Боднарчук, Марія Куриляк, Олег Скасків
Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів, Україна

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – фіксований ймовірнісний простір, $(f_n(\omega))$ – послідовність комплекснозначних випадкових величин, $\Lambda = (\lambda_n(\omega))$ – послідовність невід’ємних дійсних випадкових величин на цьому ймовірнісному просторі, причому попарно різних, тобто таких, що майже напевно (м.н.) $\lambda_k(\omega) \neq \lambda_n(\omega)$, якщо $k \neq n$.

Через \mathcal{D} позначимо клас випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}, \quad (1)$$

де $z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega$, таких що кожний ряд $F(z, \omega)$ з цього класу задовольняє умову: $(\forall \omega \in \Omega)(\exists x_* = x_*(F, \omega) < 0)$:

$$f_k(\omega) e^{x_* \lambda_k(\omega)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty) \text{ м.н.}$$

Доведено, що для абсциси $\sigma_\mu(F, \omega)$ існування максимального члена ряду Діріхле $F(z) = F(z, \omega)$, вигляду (1) виконується наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Тоді*

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \alpha_0(F, \omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |f_n|}{\lambda_n}$$

м.н.

У випадку, якщо виконується умова $\ln n = o(\ln |f_n(\omega)|)$ ($n \rightarrow +\infty$), то абсциси збіжності і абсолютної збіжності ряду Діріхле дорівнюють абсцисі існування максимального члена. Отримані твердження застосовано до гаусових рядів Діріхле.

З твердження 1 отримуємо наслідки.

Наслідок 1. Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо виконується умова $\ln k = o(\ln |f_k(\omega)|)$ ($k \rightarrow +\infty$), то м.н.

$$\sigma_a(F, \omega) = \sigma_{зб}(F, \omega) = \alpha_0(F, \omega) = \sigma_\mu(F, \omega).$$

Наслідок 2. Нехай $F \in \mathcal{D}$. Тоді $\sigma_a(F, \omega) \leq \sigma_{зб}(F, \omega) \leq \alpha_0(F, \omega)$ ($\forall \omega \in \Omega$), і

$$\sigma_a(F, \omega) \geq \gamma(\omega)\alpha_0(F, \omega) - \delta(\omega) \geq \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F, \omega) - \delta(\omega)$$

для довільних дійсних випадкових величин γ, δ і для всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) > 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty.$$

Розглянемо випадкові ряди Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) e^{z\lambda_n} \quad (z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega), \quad (2)$$

де $\xi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_n^2)$ є комплекснозначними гаусовими випадковими величинами, тобто, такими, що випадкові величини $\eta_n = \frac{\xi_n}{\sigma_n}$, $\sigma_n > 0$ ($n \geq 0$), мають щільність розподілу p_η таку, що

$$p_\eta(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Нехай $\tau(\Lambda) := \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k}$. Справджується таке твердження.

Твердження 2. Нехай $\xi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_n^2)$. Якщо для послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ виконується умова $\tau(\Lambda) = 0$ або для послідовності (σ_n) виконується умова $\ln n = o(\ln \sigma_n)$ ($n \rightarrow +\infty$), то для абсцис збіжності ряду (2) виконується

$$\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega) = \sigma_\mu(F, \omega) = \sigma_* \quad \text{м.н.}$$

Література

- [1] Боднарчук А., Куриляк М., Скасків О. Про абсцису існування максимального члена випадкових рядів Діріхле з довільними додатними показниками // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2022. – Т.94. – С. 79–88. <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.079-088>

e-mail: sandriy1111@gmail.com
kuryliakmariya@gmail.com
olskask@gmail.com

Більшість функцій простору $C[0;1]$ мають фрактальні властивості, зокрема: мають графіки, що є самоафінними або автомодельними; характеризуються фрактальними множинами несталості; мають фрактальні рівні тощо.

Останнім часом зростає інтерес до локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями, а саме до сингулярних функцій; ніде не монотонних; функцій, які не мають проміжків монотонності, окрім проміжків сталості. Серед них і функції канторівського типу (функції, що мають ніде не щільну множину несталості). Рівні таких функцій можуть бути досить масивними, зокрема мати додатну фрактальну розмірність.

Нехай $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ — множина послідовностей елементів алфавіту; (Θ_n) — двостороння послідовність додатних дійсних чисел (функція, визначена на множині цілих чисел) така, що

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{-n} \equiv u < 1, \quad 0 < \sum_{n=0}^{+\infty} \Theta_n \equiv v < 1, \quad u + v = 1; \quad b_n \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i = b_{n-1} + \Theta_{n-1}.$$

Теорема 1. Для будь-якого $x \in (0;1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що виконується одна з рівностей

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^m b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^B(\emptyset), \quad x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^B \quad (1)$$

Символічний запис числа x однією із двох рівностей (1) називається *B-зображенням* цього числа, а $\alpha_n = \alpha_n(x)$ — n -ою його цифрою. Із-за єдиності *B-зображення* числа цифра $\alpha_n = \alpha_n(x)$ є коректно означеною функцією числа x .

Нехай $\|p_{ik}\|$ ($i \in Z, k \in N$) — нескінченна матриця, яка задовольняє умови:

- 1) $|p_{ik}| < 1 \quad \forall i \in Z, \forall k \in N$; 2) $\sum_{i \in Z} p_{ik} = 1 \quad \forall k \in N$; 3) $0 < \sum_{k=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{k-1} p_{ijj} < \infty \quad \forall i_j \in Z$;
- 4) $0 < \sigma_{ik} \equiv \sum_{j=-\infty}^{i-1} p_{jk} < 1 \quad \forall i \in Z, \forall k \in N$.

Функція f на множині $(0;1)$ означається рівностями

$$\begin{cases} f(x = \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}^B) = \sigma_{i_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{ijj} \equiv \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}^f, \\ f(x = \Delta_{i_1 \dots i_m}^B(\emptyset)) = \sigma_{i_1 1} + \sum_{k=2}^m \sigma_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{ijj} \equiv \Delta_{i_1 \dots i_m}^f(\emptyset). \end{cases}$$

Теорема 2. Варіація $V_0^1(f)$ функції f на інтервалі $(0;1)$ обчислюється за формулою

$$V_1^0(f) = \prod_{k=1}^{\infty} V_k, \quad \text{де } V_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{ik}|, \quad \text{зокрема має необмежену варіацію тоді і лише тоді, коли } \sum_{k=1}^{\infty} (1 - V_k) = -\infty.$$

Теорема 3. Якщо серед елементів матриці $\|p_{ik}\|$ немає нулів і в кожному стовпці існує нескінченна кількість від'ємних елементів, то функція f має масивні континуальні рівні, зокрема рівні додатної фрактальної розмірності.

У доповіді буде деталізовано останнє твердження.

e-mail: o.i.bondarenko@udu.edu.ua, prats4444@gmail.com

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ПОХІДНОЮ
ХУКУХАРИ

Бондаренко К.С., Кічмаренко О.Д., Стехун А.О., Таїрова М.С.

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна

Розглянемо керовану систему, яка описується рівнянням з похідною Хукухари:

$$\begin{aligned} D_h \chi &= F(t)\chi(t) + F_0(t) + B(t)u(t), \quad u \in U \\ \chi(0, u(0)) &= \chi_0. \end{aligned} \quad (1)$$

де час t заданий на визначеному дійсному проміжку $t \in [0; T]$, $T > 0$ задана стала, $\chi_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $\chi : [t_0, T] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $F : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_0 : [t_0, T] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

В задачі (1) останній доданок може бути описаний різними способами:

1. $B(t)$ — вектор в \mathbf{R}^n , $u(t)$ — скалярна функція, $u(t) \in U \subset \text{comp}(\mathbf{R}^n)$.
2. $B(t)$ — матриця в $\mathbf{R}^{n \times r}$, $u(t)$ — вектор в \mathbf{R}^r .
3. $B : t \rightarrow \text{comp}(\mathbf{R}^n)$ — множиннозначне відображення, $u(t)$ — скалярна функція керування, $u(t) \in U \subset \text{comp}(\mathbf{R}^n)$
4. $B : t \rightarrow \text{comp}(\mathbf{R}^n)$ — множиннозначне відображення, $u(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — матриця деформації.

Для побудови числового розв'язку, випишемо рівняння, (1) в інтегральній формі

$$\chi_0(t) \equiv \chi_0$$

$$\chi_{k+1}(t) = \chi_0 + \int_{t_0}^t [F(s)\chi_k(s) + F_0(s) + B(s)u(s)] ds, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для кожного окремого випадку опишемо алгоритм побудови числового розв'язку рівняння (1) за допомогою ламаних Ейлера, та наведемо приклади застосування цього алгоритму. У роботі [4] виведено формулу "ламаной" Ейлера для випадку розмірності простору $n = 2$.

Нехай $B(t)$ —вектор, $u(t)$ — скалярна функція керування або $B(t)$ — матриця в $\mathbf{R}^{n \times r}$, $u(t)$ — вектор в \mathbf{R}^r . Тоді

$$\chi_m(t) = \chi_m(t_k) + (t - t_k) [F(t_k)\chi(t_k) + F_0(t_k) + B(t_k)u(t_k)], \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{0, m-1}$$

Використовуючи апарат опорних функцій, отримуємо при $t = t_{k+1}$

$$c(\chi_m(t_{k+1}), \psi) = c(\chi_m(t_k), \psi) + \delta \cdot [c(\chi_m(t_k), F^T(t_k)\psi) + c(F_0(t_k), \psi) + (B(t_k)u(t_k), \psi)]$$

Для побудови зовнішньої апроксимації множини $\chi_m(t_{k+1})$ знайдемо

$$c(\chi_m(t_{k+1}), \psi), \quad \psi_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \frac{2\pi i}{p}, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

З цього випливає

$$c(\chi_m(t_{k+1}), \psi_i) = c(\chi_m(t_k), \psi_i) + \delta \cdot [c(\chi_m(t_k), F^T(t_k)\psi_i) + c(F_0(t_k), \psi_i) + (B(t_k)u(t_k), \psi_i)]$$

Так як

$$c(\chi_m(t_k), F^T(t_k)\psi_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } F^T(t_k)\psi_i = 0, \\ \|F^T(t_k)\psi_i\| c\left(X_m(t_k), \frac{F^T(t_k)\psi_i}{\|F^T(t_k)\psi_i\|}\right) & \text{при } F^T(t_k)\psi_i \neq 0. \end{cases}$$

При $F^T(t_k)\psi_i = 0$:

$$c(\chi_m(t_{k+1}), \psi_i) = c(\chi_m(t_k), \psi_i) + \delta c(F_0(t_k), \psi_i) + \delta (B(t_k)u(t_k), \psi_i).$$

Також при $F^T(t_k)\psi_i \neq 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} c(\chi_m(t_{k+1}), \psi_i) &\approx \\ &\approx c(\chi_m(t_k), \psi_i) + \delta \left[\|F^T(t_k)\psi_i\| c(\chi_m(t_k), \tilde{\psi}_{ik}) + c(F_0(t_k), \psi_i) + (B(t_k)u(t_k), \psi_i) \right] \end{aligned}$$

де $\tilde{\psi}_{ik}$ знаходимо з умови

$$\left\| \tilde{\psi}_{ik} - \frac{F^T(t_k)\psi_i}{\|F^T(t_k)\psi_i\|} \right\| = \min_{j=\overline{0, p-1}} \left\| \psi_j - \frac{F^T(t_k)\psi_i}{\|F^T(t_k)\psi_i\|} \right\|.$$

Знаходимо значення опорної функції розв'язку, та знаходимо точки перетину опорних гіперплощин до множини $\chi_m(t_k)$ у напрямку векторів ψ_i та ψ_{i+1} , $i = \overline{0, p-1}$, також враховуємо $\psi_p = \psi_0$.

Приклад 1.

Нехай задані значення вектора та функція керування $B(t), u(t)$:

$$B(t) = [(2t + 1)^2, \cos(t) + 1]^T$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ -1 & \text{при } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

Також задані

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Початкове значення, та доданок $F_0(t)$ візьмемо

$$F_0(t) = \text{co} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Опорна функція цієї множини є

$$c(F_0(t), \psi_i) = \max\{|\psi_1|, \psi_2\}$$

Ця функція відповідає опорній функції рівнобедреного трикутника, вершини якого зростають зі збільшенням t . Тоді за вищеписаним алгоритмом будемо графік розв'язку

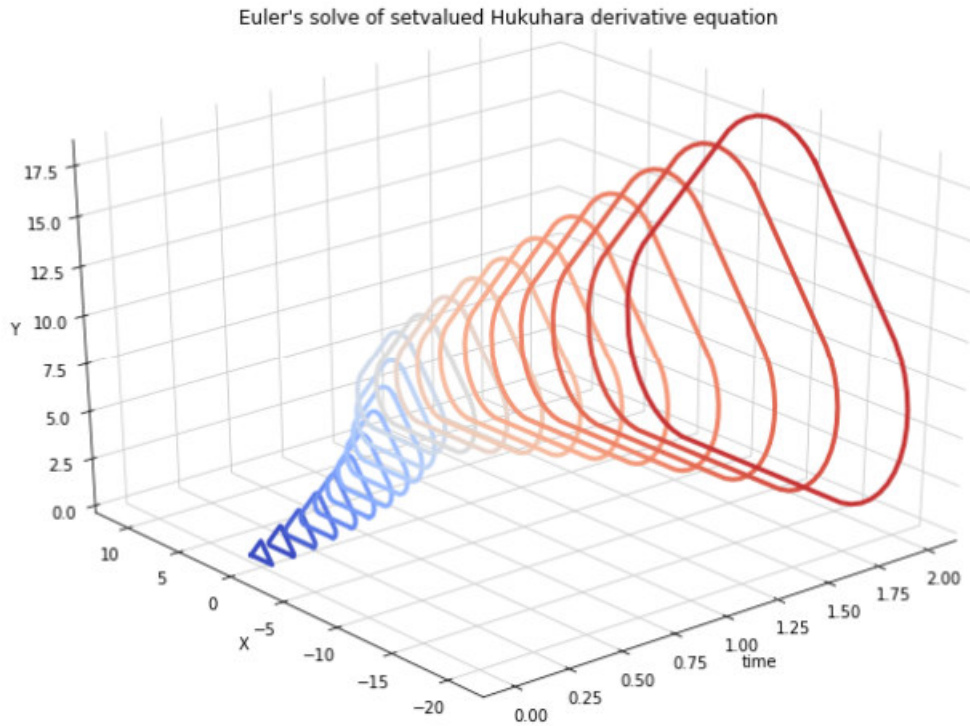


Рис. 1: Числовий розв'язок рівняння з прикладу 1.

Приклад 2.

Розглянемо тепер випадок, коли

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1-t & t^2 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

та функція керування має вигляд

$$u(t) = \begin{cases} [0.5; 0.5]^T & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ [1; 1]^T & \text{при } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

Також задані

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) & -2 \\ 0 & -(\cos(t)) \end{pmatrix}$$

Початкова множина

$$X_0 = \|\psi\|$$

Функцію $F_0(t)$ залишимо, яка була для першого прикладу, отримуємо графік розв'язку

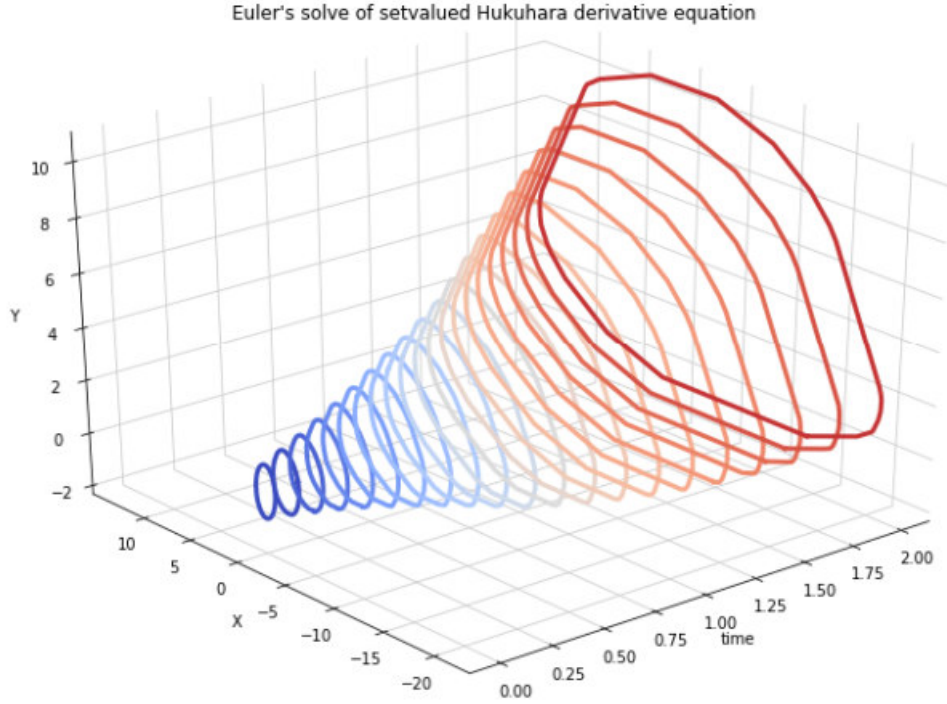


Рис. 2: Числовий розв'язок рівняння з прикладу 2.

Розглянемо способи, у яких $B(t)$ — множиннозначне відображення.

Якщо, $B(t)$ множиннозначне відображення, при $F^T(t_k)\psi_i = 0$ тоді розрахункові формули набувають вигляду:

$$c(\chi_m(t_{k+1}), \psi_i) = c(\chi_m(t_k), \psi_i) + \delta [c(F_0(t_k), \psi_i) + c(B(t)u(t), \psi_i)].$$

Якщо, $F^T(t_k)\psi_i \neq 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} c(\chi_m(t_{k+1}), \psi_i) &\approx \\ &\approx c(\chi_m(t_k), \psi_i) + \delta \left[\|F^T(t_k)\psi_i\| c(\chi_m(t_k), \tilde{\psi}_{ik}) + c(F_0(t_k), \psi_i) + c(B(t_k)u(t_k), \psi_i) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

Приклад 3.

Покладемо

$$B(t) = S_{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) & -2 \\ 0 & -(\cos(t)) \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \max\{|0.5\psi_1|, 0.5\psi_2\}$$

$$F_0(t) = 0.5(|\psi_1| + |\psi_2|)$$

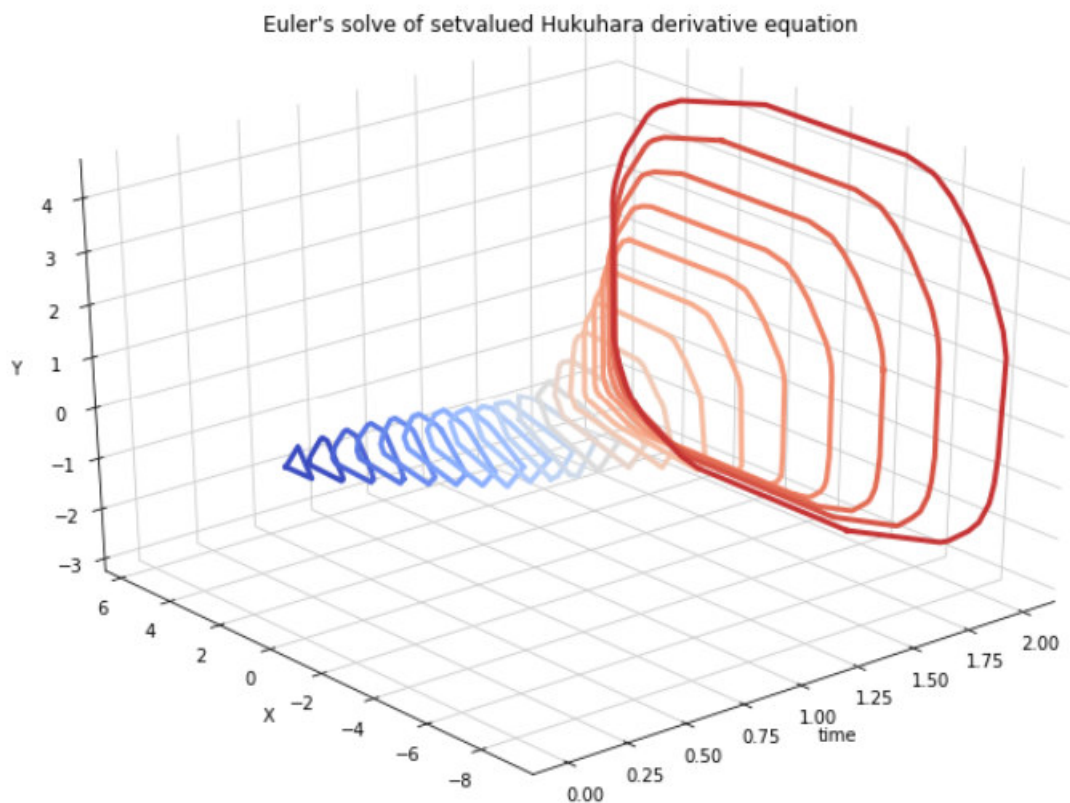


Рис. 3: Числовий розв'язок рівняння з прикладу 3.

Приклад 4.

Нехай функція керування $u(t) \in R^{2 \times 2}$ тоді за властивостями опорних функцій отримуємо доданок $c(B(t), u^T(t)\psi_i)$.

Для розрахунків покладемо значення

$$B(t) = \Pi_{(0.5;1)} \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ \cos^2 t \end{pmatrix}.$$

Функція керування має вигляд

$$u(t) = \begin{cases} E \in R^{2 \times 2} & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ -E \in R^{2 \times 2} & \text{при } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) & -2 \\ 0 & -(\cos(t)) \end{pmatrix}$$

$$F_0(t) = 2t\|\psi\|, \quad X_0 = \|\psi\|$$

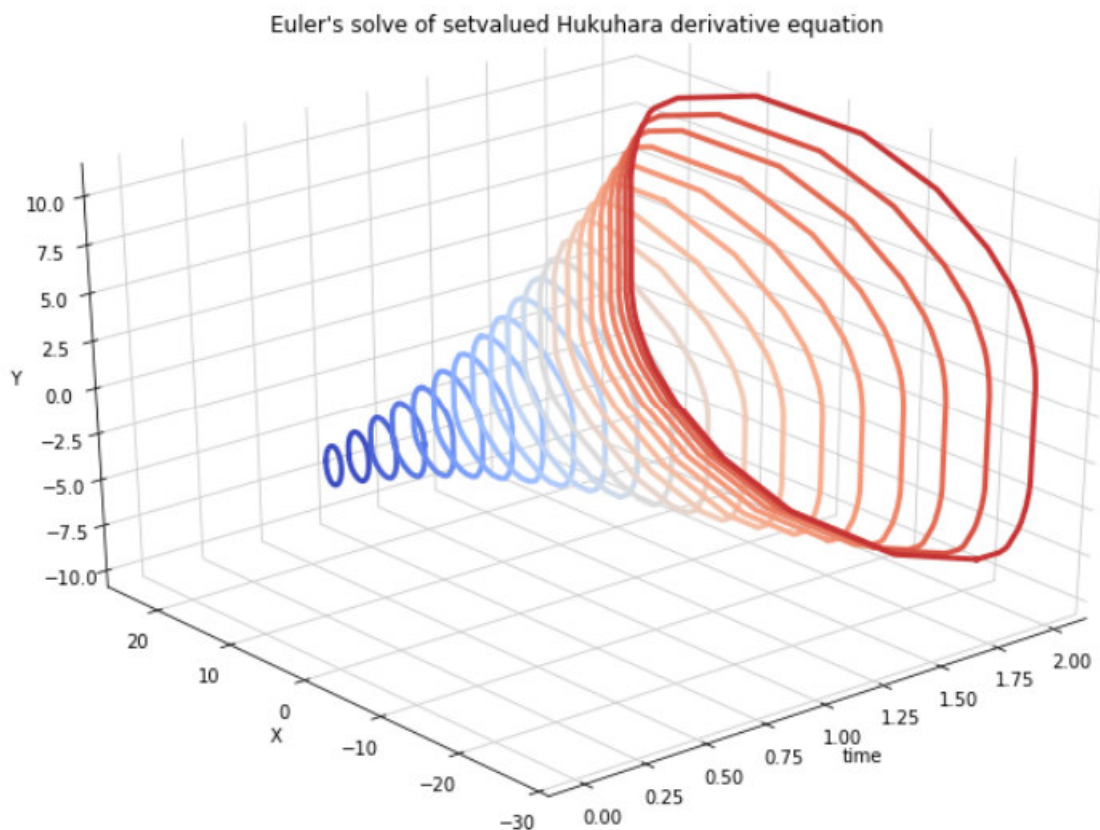


Рис. 4: Числовий розв'язок рівняння з прикладу 4.

Отже, в нашій роботі застосовано апарат опорних функцій для розробки алгоритму побудови числового розв'язку керованої системи, яка описується рівнянням з похідною Хукухари.

Література

- [1] Hukuhara M. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // *Funkc. ekvacioj*, 1967, №10, P. 205 – 223.
- [2] F. S. de Blasi, F. Iervolino, Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso, *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2, No 4–5, 491–501 (1969).
- [3] Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы: монография / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, Одесса : Астропринт, 2009. — 192 с.
- [4] А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы, АстроПринт, Одесса (2009).
- [5] Kichmarenko O.D. Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2017, V.115, №1., P.93–114. doi: 10.12732/ijpam.v115i1.8
- [6] A. A. Martynyuk, Qualitative analysis of set-valued differential equations, Springer Nature Switzerland AG, Birk-hauser, Cham (2019).

- [7] Е. В. Очеретнюк, В. И. Слынько, Оценки площади решений псевдолинейных дифференциальных уравнений спроизводной Хукухары в пространстве $\text{conv}(R2)$, Укр. мат. журн., 69, No 2, 189 – 214 (2017).
- [8] A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative, J. Uncertain Systems, 13, No 1, 3 – 13 (2019)
- [9] N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik, Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities, De Gruyter Stud. Math., 40, Walter De Gruyter GmbH & Co, Berlin; Boston (2011).

e-mail: kirill.bondarenko@onu.edu.ua

ТРЕТЯ МІШАНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В ПІВПРОСТОРІ ДЛЯ ОДНОГО ВИРОДЖЕНОГО РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

Іван Буртняк, Ганна Малицька

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

Робота є узагальненням дослідження опублікованого в [1]. Методом потенціалів ми знаходимо розв'язок мішаної крайової задачі в півпросторі для рівняння типу рівняння Колмогорова з трьома групами змінних виродження параболічності за якими є змінна інерція.

Нехай $n_j \in N, j = \overline{1, 4}, n_j \geq n_{j+1}, \sum_{j=1}^4 n_j = n_0, x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_j \in R^{n_j}, x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}), x \in R^{n_0}, \tilde{x}' = (0, x_{12}, \dots, x_{1n_1})$, відповідно, $\xi \in R^{n_0}, 0 < t \leq T < +\infty$.

В $\{\Pi = (t, x) : 0 < t \leq T < +\infty, \xi \in R^{n_0-1}, x_{11} > 0\}$, розглянемо задачу

$$\partial_t u(t, x) - \sum_{j=1}^3 \sum_{\mu=1}^{n_{j+1}} x_{1\mu} \partial_{x_{j+1\mu}} u(t, x) - \alpha^2 \sum_{k=1}^{n_1} \partial_{x_{1k}^2} u(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), x \in R^{n_0-1} \cup \{x_{11}, x_{11} > 0\} \quad (2)$$

$$\partial_{x_{11}} u(t, \tilde{x}') + \beta(t) u(t, \tilde{x}') = g(t, \tilde{x}'), \quad (3)$$

де $\beta(t)$ неперервна і обмежена функція, $f(t, x), g(t, \tilde{x}'), u_0(x)$ неперервні і обмежені функції, $f(t, x)$ задовольняє рівномірно по t умову Гельдера по x з показником $\gamma, 0 < \gamma \leq 1$.

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(t, x) = \int_0^t d\beta \int_{R^{n_0}} \Gamma(t, x; \beta, \xi) f(\beta, \xi) d\xi + \int_{R^{n_0}} \Gamma(t, x; 0, \xi) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t d\beta \int_{R^{n_0-1}} \Gamma(t, x; \beta, \tilde{\xi}') \varphi(\beta, \tilde{\xi}') d\xi', \varphi(0, \tilde{x}') = 0,$$

де $\varphi(t, \tilde{x}')$ шукана функція, підібрана так, щоб задовольнялася умова (3), $\Gamma(t, x; \beta, \xi)$ -функція Гріна рівняння (1), $f(t, x)$ і $u_0(x)$ довізначені нулем, щоб мали зміст формули. $\varphi(t, \tilde{x}')$ задовольняє відповідне інтегральне рівняння, встановлено множину функцій де інтегральне рівняння є рівнянням стиску, встановлено існування $\varphi(t, \tilde{x}')$. Єдиність розв'язку (1)-(3) впливає із принципу максимуму в класі неперервних і обмежених функцій.

Література

- [1] Malytska G.P. (1993). *The third mixed problem in a half-space for the Sonin equation*, *Ukrainian Mathematical Journal*, 8, 1109–1114.

e-mail: ivan.burtnyak@pnu.edu.ua

МНОЖИНА ЧИСЕЛ, ЯКІ МАЮТЬ СКІНЧЕННУ КІЛЬКІСТЬ РІЗНИХ ЗОБРАЖЕНЬ У СИСТЕМІ З НАТУРАЛЬНОЮ ОСНОВОЮ ТА НАДЛИШКОВИМ АЛФАВИТОМ

Олег Виннишин

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Нехай s, r – фіксовані натуральні числа, $1 < s \leq r$, $A = \{0, 1, \dots, r\}$. Відомо, що для довільного числа $x \in [0, \frac{r}{s-1}]$ існує послідовність (α_n) , $\alpha_n \in A$, така що

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k} \alpha_k \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_s}$$

Останній символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_s}$ називається r_s -зображенням числа x (зображенням числа x у системі числення з основою s і надлишковим алфавітом A). В залежності від параметрів s та r кількість зображень у чисел може бути різною.

Лема 1. *Якщо $r < 2s - 2$, то кожне число $x_0 \in [0; \frac{r}{s-1}]$, яке має чисто періодичне r_s -зображення з періодом (c) , де $c \in \{0, r - s + 2, \dots, s - 2, r\}$, має єдине зображення.*

Лема 2. *Якщо $r < 2s - 2$, то кожне число $x_0 \in [0; \frac{r}{s-1}]$, яке має чисто періодичне r_s -зображення з періодом (c) , де $c \in \{1, 2, \dots, r - s, s, s + 1, \dots, r\}$, має континуальну множину різних r_s -зображень.*

Лема 3. *Якщо $r < 2s - 2$, то кожне число $x_0 \in [0; \frac{r}{s-1}]$, яке має чисто періодичне r_s -зображення з періодом (c) , де $c \in \{r - s + 1, s - 1\}$, має зліченну множину різних r_s -зображень.*

Теорема 1. *За умови $r < 2s - 2$, розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини чисел, що мають єдине r_s -зображення, та множини чисел, що мають скінченну кількість r_s -зображень, обчислюється за формулою*

$$D = \frac{\ln(2s - r - 1)}{\ln s}.$$

Література

- [1] Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. *Singular distributions of random variables with independent digits of representation in numeral system with natural base and redundant alphabet*, *Mat.Stud.*63(2025), 199–209.
- [2] Гончаренко Я.В., Микитюк І.О. *Представлення дійсних чисел в системах з надлишковим набором цифр та їх використання*. Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004, №5, с.255-275.

- [3] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. -Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. с. 296.
- [4] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.

e-mail: oleh.vynnyshyn@imath.kiev.ua

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ШВИДКО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ БЛИЗЬКИМИ
ДО ПРАВИЛЬНО ЗМІННИХ

Воробйова Алла

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) f(t, y, y'), \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) – неперервна функція і $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ є неперервно диференційовною, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} має вид або $[y_i^0, Y_i]^1$ або $]Y_i, y_i^0]$.

Покладемо

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{то } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{то } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Вважаємо, що функція f у (1) задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \gamma \text{ рівномірно по } (v_0, v_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \quad (2)$$

та для кожного $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{v_k \rightarrow y_k \\ v_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \sigma_k \quad (3)$$

рівномірно по $t \in [a, \omega[$ та рівномірно по $v_j \in \Delta_{Y_j}$, $j \neq k$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$, причому $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Функції f , що задовольняють умови (2) та (3) є близькими до правильно змінних функцій по кожній зі змінних. Прикладом можуть слугувати зокрема функції виду $|\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^\sigma |y'|^{\sigma_1} \exp(|\ln |\pi_\omega(t) y y'|^\mu|)$, $0 < \mu < 1$. Важливою особливістю таких функцій є неможливість їх навіть асимптотично зобразити у вигляді добутку функції, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

В силу (2) та (3), $f(t, y, y')$ має вигляд

$$f(t, v_0, v_1) = |\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^\sigma |y'|^{\sigma_1} \cdot \Theta(t, y, y'), \quad (4)$$

де функція Θ задовольняє умову

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} = 0 \text{ рівномірно по } (v_0, v_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}, \quad (5)$$

а також для кожного $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{v_k \rightarrow y_k \\ v_k \in \Delta Y_k}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_k}(\Theta, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = 0 \quad (6)$$

рівномірно по $t \in [a, \omega[$ та рівномірно по $v_j \in \Delta Y_j, j \neq k$.

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, якщо він заданий на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ та для кожного $i \in \{0, 1\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (7)$$

Введемо необхідні позначення

$$I_2(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega^2}^t p(\tau) d\tau, \quad A_\omega^2 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$J_4(t) = \int_{B_\omega^4}^t |I_2(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau, \quad B_\omega^4 = \begin{cases} b, & \text{якщо } \int_b^\omega |I_2(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_b^\omega |I_2(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай у рівнянні (1) $\sigma_1 = 1$. Тоді, для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язків необхідно, а якщо*

$$\sigma_0 I_2(t) < 0, \quad (8)$$

то і достатньо виконання умов

$$y_0^0 \alpha_0 > 0, \quad \sigma_0 y_1^0 I_2(t) < 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega[, \quad (9)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_0^0 |J_4(t)|^{-1} = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_1^0 |J_4(t)|^{-1} = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{J_4(t) I_2'(t)}{J_4'(t) I_2(t)} = \sigma_0. \quad (10)$$

Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$

$$\frac{1}{y'(t) \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = -J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)], \quad (11)$$

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = -\frac{J_4(t)}{J_4'(t)} [1 + o(1)]. \quad (12)$$

Література

- [1] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 494 p.
- [2] Evtukhov V.M., Samoilenko A.M. Conditions of existence of disappearing in the critical point solutions to rear nonautonomous systems of quasilinear differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. (рос.)

- [3] Євтухов В.М. Про один клас монотонних розв'язків нелінійного диференціального рівняння n -го порядку типу Емдена–Фаулера // Повідомл. АН Грузії. – 1992. – Т. 145, №2. – С. 269–273 (рос.)
- [4] Євтухов В.М., Білозерова М.О. Асимптотичні представлення розв'язків суттєво нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, №3. – С. 310–331 (рос.)
- [5] Євтухов В.М., Кусик Л.І. Асимптотичні представлення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку // Дифференц. рівняння. – 2013. – Т. 49, №4. – С. 424–438 (рос.)
- [6] Гержановська Г.А. Асимптотичні представлення швидкозмінних розв'язків суттєво нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Нелінійні коливання. – 2017. – Т. 20, №3. – С. 329–345 (рос.)
- [7] Marić V. Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2000. 128 p.

e-mail: alla.vorobyova@stud.onu.edu.ua

НАЙКРАЩІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ
ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ $B_{\infty,1}$

Світлана Гембарська

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

Досліджуються класи періодичних функцій багатьох змінних $B_{p,\theta}^{\Omega}$ [1] типу Нікольського-Бесова, де $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, і w - задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови Барі-Стечка (S^{α}) та (S_l) [2]. Одержано точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень цих класів у просторі $B_{\infty,1}$ (див., наприклад, [3]).

Зазначимо, що норма у просторі $B_{\infty,1}$ є сильнішою, ніж L_{∞} - норма.

Нехай \mathbb{R}^d , $d \geq 2$ - евклідов простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$. Через $L_p(T^d)$, $T^d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$, позначимо простір функцій f , які є 2π -періодичними за кожною змінною зі стандартною нормою.

Нехай X - деякий нормований функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$ і Θ_m - довільний набір із m d - вимірних векторів $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $j = \overline{1, m}$, з цілочисельними координатами. Для функції $f \in X$ позначимо

$$S_{\Theta_m}(f) := S_{\Theta_m}(f, x) = \sum_{j=1}^m \widehat{f}(k^j) e^{i(k^j, x)}, x \in \mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(k^j) = (2\pi)^{-d} \int_{T^d} f(t) e^{-i(k^j, t)} dt$, - коефіцієнти Фур'є функції f , які відповідають набору векторів із Θ_m .

Покладемо

$$e_m^{\perp}(f)_X := \inf_{\Theta_m} \|f - S_{\Theta_m}(f)\|_X$$

і для функціонального класу $F \subset X$ позначимо

$$e_m^{\perp}(F)_X := \sup_{f \in F} e_m^{\perp}(f)_X.$$

Величину $e_m^\perp(F)_X$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі X .

Наведемо отримане твердження

Теорема 1. *Нехай $d \geq 2$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, де w задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$ і умову (S_1) . Тоді для будь-якої послідовності $m = (m_n)_{n=1}^\infty$ натуральних чисел такої, що виконується співвідношення $m \asymp 2^n n^{d-1}$ справедлива оцінка*

$$e_m^\perp(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{\infty,1}} \asymp w(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

В результаті проведених досліджень було виявлено, що відповідні апроксимаційні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторах $B_{\infty,1}$ і L_∞ є однаковими за порядком, тобто

$$e_m^\perp(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{\infty,1}} \asymp e_m^\perp(B_{p,\theta}^\Omega)_\infty.$$

Література

- [1] Yongsheng S., Heping W. *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. Tr. Mat. Inst. Steklova*, 1997, Vol. 219, 356-377.
- [2] Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряжённых функций. Тр. Моск. мат. о-ва*, 1956, Т.5, 483-522.
- [3] Романюк А.С., Романюк В.С. *Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. Укр. мат. журн*, 2019, Т.71, №2, 271-282.

e-mail: gembarskaya72@gmail.com

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ВИРОДЖЕНОЇ ЕЛІПТИЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ З РІЗНИМИ
ВАГАМИ

Горбач Валентина

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Розглянемо наступну вироджену еліптичну варіаційну нерівність:

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial(v-y)}{\partial x_i} \rho_2 dx + \int_{\Omega} y(v-y) \rho_1 dx \geq \int_{\Omega} f(v-y) dx, \quad (1)$$

$$u \in U_{ad}, \quad \forall v \in K, \quad (2)$$

$$I(u, y) = \int_{\Omega} |y(x) - z_\sigma(x)|^2 \rho_1 dx \rightarrow \inf, \quad (3)$$

де $f \in L^2(\Omega)$ – задана функція; Ω – обмежена відкрита підмножина \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) з Ліпшицевою межею; ρ_i , $i = 1, 2$ – вироджені вагові функції в \mathbb{R}^N : $\rho_i(x) > 0$ м.с. в \mathbb{R}^N , $\rho_i + \rho_i^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $\rho_i + \rho_i^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$ у загальному випадку; ρ_i належать

класу Маккенгаупта $A_2(\Omega)$; K – непорожня опукла замкнена підмножина вагового простору Соболева

$$H(\Omega, \rho dx), \quad \rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_2),$$

$0 \in K$; $H(\Omega, \rho dx)$ – замикання $C_0^\infty(\Omega)$ у $W(\Omega, \rho dx)$ відносно норми

$$\|y\|_\rho = \left(\int_\Omega |y|^2 \rho_1 dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^2 \rho_2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

$W(\Omega, \rho dx)$ – множина функцій $y \in W_0^{1,1}(\Omega)$, для яких норма (4) є скінченною.

Розглянемо множину всіх симетричних матриць

$$u_{ad} = \{a_{ij}(x)\}_{i \leq j \leq N} \text{ в } L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N).$$

Нехай виконуються такі умови:

$$|a_{ij}(x)| \leq \rho \text{ м. с. в } \Omega, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\};$$

$$(u(x)(\xi - \eta), \xi - \eta)_{\mathbb{R}^N} \geq 0, \text{ м. с. в } \Omega, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N;$$

$$(u(x)(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \text{ м. с. в } \Omega; \text{ де } \alpha > 0.$$

За описаних умов на параметри задачі має місце наступний результат.

Теорема 1. *Множина оптимальних розв'язків задачі (1)–(3) є непорожньою для кожного $f \in L^2(\Omega)$.*

e-mail: valyshka10.01@kpi.ua

АНАЛІТИЧНИЙ ВИГЛЯД РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛОКАЛЬНОЇ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ
ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З ПОЧАТКОВОЮ УЗАГАЛЬНЕНОЮ
ФУНКЦІЄЮ

Василь Городецький, Руслана Колісник, Ольга Мартинюк

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці,
Україна*

У роботі досліджується рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \varphi \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1)$$

де φ – функція, яка задовольняє певні умови.

Дослідження рівняння (1) здійснюється у просторах типу W , у яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності використовуються не степеневі, а довільні опуклі функції [1].

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + Au(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega. \quad (2)$$

де $A = \varphi\left(i\frac{d}{dx}\right)\Big|_{W^{\Omega_1}(\mathbb{R})}$ – звуження оператора $\varphi\left(i\frac{d}{dx}\right)$ на простір $W^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, який складається з функцій з простору W^{Ω_1} , заданих на \mathbb{R} .

Для рівняння (2) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв’язок рівняння (2), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k u(t_k, \cdot) = f, \quad f \in (W_*^{\Omega_1})', \quad (3)$$

де границя розглядається в просторі $(W^{\Omega_1})'$, $u(0, x) := \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа, причому $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Задача (2), (3) є розв’язною, розв’язок дається формулою*

$$u(t, x) = f * G(t, x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

де G – фундаментальний розв’язок задачі (2), (3).

Література

- [1] Городецький В. В., Мартинюк О. В. Задача Коші та нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною. Чернівці: Видавничий дім "Родовід", 2015. 400 с.

e-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, r.kolisnyk@chnu.edu.ua, o.martyniuk@chnu.edu.ua

УЗАГАЛЬНЕНА ОПЕРАТОРНА МАТРИЦЯ ВАНДЕРМОНДА І ОБМЕЖЕНІ РОЗВ’ЯЗКИ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Михайло Городній

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір; $L(X)$ – простір лінійних неперервних операторів, що діють із X в X ; I, O – відповідно одиничний і нульовий оператори в X , $C_b(\mathbb{R}, X)$ – банахів простір неперервних і обмежених на \mathbb{R} функцій $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ з нормою $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$, $C_b^{(k)}(\mathbb{R}, X)$ – банахів простір функцій $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, що мають неперервну і обмежену на \mathbb{R} k -ту похідну, з нормою $\|x\|_{\infty, k} = \|x\|_\infty + \|x^{(k)}\|_\infty$.

Зафіксуємо натуральне число p і розглянемо диференціальне рівняння

$$x^{(p)}(t) = A_1 x^{(p-1)}(t) + \dots + A_{p-1} x'(t) + A_p x(t) + y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

в якому $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$, A_1, A_2, \dots, A_p – фіксовані оператори з $L(X)$. Як звичайно, обмеженим розв’язком рівняння (1) будемо називати таку функцію $x \in C_b^{(p)}(\mathbb{R}, X)$, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ виконується рівність (1).

Якщо $p = 1$, то за теоремою М. Г. Крейна (див. [1], гл. 2, п. 4) диференціальне рівняння

$$x'(t) = A_1 x(t) + y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

має єдиний обмежений розв'язок x для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ в тому і тільки в тому випадку, коли спектр $\sigma(A_1)$ оператора A_1 не перетинається з уявною віссю $i\mathbb{R} = \{it \mid t \in \mathbb{R}\}$. При цьому відповідний до функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ єдиний обмежений розв'язок x рівняння (2) зображується у вигляді

$$x(t) = (G_{A_1} * y)(t) = \int_{\mathbb{R}} G_{A_1}(t-s)y(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

де G_{A_1} – головна функція Гріна диференціального рівняння (2). Також виконується

Теорема 1. *Наведені нижче умови еквівалентні.*

(i1) рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок x для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$;

(i2) для кожного $z \in i\mathbb{R}$ оператор $\Delta(z) = z^p I - A_1 z^{p-1} - \dots - A_{p-1} z - A_p$ неперервно оборотний.

У загальному випадку перевірка умови (i2) теореми 1 нетривіальна. Ми досліджуємо випадок, коли для цієї перевірки можна використати властивості відповідного до (1) «алгебраїчного» операторного рівняння

$$Q(\Lambda) \equiv \Lambda^p - A_1 \Lambda^{p-1} - \dots - A_{p-1} \Lambda - A_p = O, \quad (3)$$

яке розглядається в $L(X)$.

Означення 1. Будемо казати, що операторне рівняння (3) має корені Z_1, Z_2, \dots, Z_q кратностей $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_q$, якщо $Z_i \neq Z_j$ при $i \neq j$, $n_1 + n_2 + \dots + n_q = p$, а також для кожного $1 \leq k \leq q$

$$Q(Z_k) = Q'(Z_k) = \dots = Q^{(n_k-1)}(Z_k) = O.$$

Означення 2. Корені Z_1, Z_2, \dots, Z_q рівняння (3) будемо називати розділеними, якщо для довільних $1 \leq i < j \leq q$ оператор $Z_i - Z_j$ неперервно оборотний.

У подальшому вважаємо, що виконується таке припущення.

Припущення 1. Операторне рівняння (3) має розділені і попарно комутівні корені Z_1, Z_2, \dots, Z_q кратностей $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_q$ відповідно.

Покладемо для $Z \in L(X)$

$$f(Z) = \begin{pmatrix} Z^{p-1} \\ Z^{p-2} \\ \dots \\ Z \\ I \end{pmatrix}, \quad \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} = \begin{pmatrix} C_{p-1}^k Z^{p-1-k} \\ C_{p-2}^k Z^{p-2-k} \\ \dots \\ C_{k+1}^k Z \\ C_k^k I \\ O \\ \dots \\ O \end{pmatrix}.$$

Набору коренів Z_1, Z_2, \dots, Z_q рівняння (3) покладемо у відповідність узагальнену операторну матрицю Вандермонда

$$\mathbb{T} = \left(f(Z_1) \quad \frac{f'(Z_1)}{1!} \quad \dots \quad \frac{f^{(n_1-1)}(Z_1)}{(n_1-1)!} \quad \dots \quad f(Z_q) \quad \frac{f'(Z_q)}{1!} \quad \dots \quad \frac{f^{(n_q-1)}(Z_q)}{(n_q-1)!} \right).$$

Позначимо через D визначник матриці \mathbb{T} , який визначається так же, як і в скалярному випадку. Зауважимо, що $D \in L(X)$. Справджується

Теорема 2. *Нехай виконується припущення 1. Тоді мають місце такі твердження:*

- (j1) оператор D є неперервно оборотним;
 (j2) диференціальне рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок x для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ тоді і тільки тоді, коли $\left(\bigcup_{k=1}^q \sigma(Z_k)\right) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. При цьому відповідний до функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ єдиний обмежений розв'язок x рівняння (1) зображується у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{n_1} G_{k-1, Z_1} * D_{1k} D^{-1} y + \sum_{k=1}^{n_2} G_{k-1, Z_2} * D_{1(n_1+k)} D^{-1} y + \dots + \sum_{k=1}^{n_q} G_{k-1, Z_q} * D_{1(n_1+n_2+\dots+n_{q-1}+k)} D^{-1} y,$$

де для довільних $k \geq 0$, $1 \leq j \leq q$

$$G_{k, Z_j}(t) = \frac{t^k}{k!} G_{Z_j}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

D – визначник узагальненої операторної матриці Вандермонда \mathbb{T} і для кожного $1 \leq j \leq p$ D_{1j} – алгебраїчне доповнення до елемента цієї матриці, розташованого в першому рядку і j -му стовпчику.

Література

- [1] Ju. L. Daleckii, M. G. Krein. *Stability of solutions of differential equations in Banach space*. Translations of Mathematical Monographs, volume 43, Providence, R.I. American Mathematical Society. VI. 1974.

e-mail: horodnii@knu.ua

ПРО ВНУТРІШНІЙ ЧАС НА СИНХРОНІЗОВАНІЙ ОРІЄНТОВАНІЙ МНОЖИНІ Ярослав Грушка

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Означення 1. *Орієнтованою множиною називається довільна реляційна система виду $\mathcal{M} = \left(\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}), \overset{\leftarrow}{\leftarrow}_{\mathcal{M}}\right)$ з одним рефлексивним бінарним відношенням $\overset{\leftarrow}{\leftarrow}_{\mathcal{M}}$ на $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$.*

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину \mathcal{M} йде мова, в позначенні $\overset{\leftarrow}{\leftarrow}_{\mathcal{M}}$ символ \mathcal{M} будемо опускати, вживаючи позначення “ \leftarrow ”. Множину $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ також будемо називати базовою, або множиною елементарних станів орієнтованої множини \mathcal{M} .

Орієнтовані множини можна трактувати як найпримітивніші абстрактні моделі сукупностей мінливих об'єктів, що еволюціонують в рамках однієї (фіксованої) системи відліку. Також орієнтовані множини є найпростішими математичними структурами, на яких можна ввести поняття часу.

Означення 2. Нехай, \mathcal{M} — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbb{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина. Відображення $\psi : \mathbb{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ називається **часом** на \mathcal{M} , якщо виконуються такі умови:

- 1) Для довільного елемента $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbb{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$.
- 2) Якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).

При цьому елементи $t \in \mathbb{T}$ будемо називати **моментами часу**, а пару $\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbb{T}, \leq), \psi)$ — **хронологізацією** \mathcal{M} .

Означення 3. Нехай, \mathcal{M} — орієнтована множина і $\psi_1 : \mathbb{T}_1 \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$, $\psi_2 : \mathbb{T}_2 \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ деякі часи для \mathcal{M} , визначені на лінійно упорядкованих множинах $\mathbb{T}_1 = (\mathbb{T}_1, \leq_1)$ і $\mathbb{T}_2 = (\mathbb{T}_2, \leq_2)$ відповідно. Хронологізації $\mathcal{H}_1 = (\mathbb{T}_1, \psi_1)$ та $\mathcal{H}_2 = (\mathbb{T}_2, \psi_2)$ називатимемо **еквівалентними** (позначення $\mathcal{H}_1 \uparrow \mathcal{H}_2$), якщо існує відображення $\xi : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ таке, що:

- 1) ξ є порядковим ізоморфізмом між (\mathbb{T}_1, \leq_1) і (\mathbb{T}_2, \leq_2) , тобто монотонно зростаючою бієкцією між \mathbb{T}_1 і \mathbb{T}_2 .
- 2) Для довільного $t \in \mathbb{T}_1$ має місце рівність $\psi_1(t) = \psi_2(\xi(t))$.

Використовуючи означення 3, нескладно перевірити, що бінарне \uparrow є відношенням еквівалентності на довільній множині \mathcal{W} , що складається з хронологізацій довільної орієнтованої множини \mathcal{M} .

Означення 4. Нехай $(\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbb{T}, \leq), \psi)$ — хронологізація орієнтованої множини \mathcal{M} . Множину $Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$ будемо називати **множиною одночасних станів**, породженою часом ψ .

Нехай $(\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbb{T}, \leq), \psi)$ — хронологізація орієнтованої множини \mathcal{M} , а Y_ψ — множина одночасних станів, породжена часом ψ . Тоді безпосередньо з означення 2 випливає, що $\bigcup_{A \in Y_\psi} A = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$.

Означення 5. Нехай \mathcal{M} — орієнтована множина. Довільну сім'ю множин $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ таку, що $\bigcup_{A \in \mathbf{Y}} A = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ будемо називати **одночасністю** на \mathcal{M} . При цьому пару $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ називатимемо **синхронізованою орієнтованою множиною**.

Теорема 1 ([1], див. також [2], Theorem 1.4.1). Нехай \mathcal{M} — орієнтована множина і $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ — одночасність на \mathcal{M} . Тоді на орієнтованій множині \mathcal{M} існує час ψ такий, що $\mathbf{Y} = Y_\psi$, де Y_ψ — множина одночасних станів, породжена часом ψ .

Наступна мета — дати означення внутрішнього часу на орієнтованій множині, тобто часу, який можна фіксувати “засобами”, що знаходяться “всередині” орієнтованої множини.

На довільній орієнтованій множині \mathcal{M} введемо додатково наступне бінарне відношення. Для довільних $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ будемо позначати $y \overset{+}{\leftarrow} x$ тоді і тільки тоді, коли $y \leftarrow x$ і $x \not\leftarrow y$.

Означення 6. Нехай \mathcal{M} — орієнтована множина. 1) Будемо говорити, що множина $B \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ **монотонно послідовна** множині $A \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині \mathcal{M} , якщо існують такі елементи $x \in A$ і $y \in B$, що $y \overset{+}{\leftarrow} x$. В цьому випадку будемо використовувати позначення позначення $B \leftarrow (+) A$. 2) Нехай $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ — деяка система підмножин множини $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$. Будемо говорити, що

множина $B \in \mathcal{Q}$ **транзитивно монотонно послідовна** множині $A \in \mathcal{Q}$ відносно \mathcal{Q} (використовуючи позначення $B \leftarrow(+)^{\mathcal{Q}} A$), якщо існує така послідовність множин $C_0, C_1, \dots, C_n \in \mathcal{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$), що $C_0 = A$, $C_n = B$ і для довільного $k \in \overline{1, n}$ має місце співвідношення, $C_k \leftarrow(+)^{\mathcal{Q}} C_{k-1}$.

Означення 7. Нехай \mathcal{M} — орієнтована множина, а $\psi : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}^s(\mathcal{M})}$ — час на \mathcal{M} (заданий на лінійно упорядкованій множині $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \leq)$).

Відображення $\mathbf{h} : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}^s(\mathcal{M})}$ будемо називати **хронометричним процесом** (для часу ψ), якщо:

- 1) $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$ для довільного $t \in \mathbf{T}$.
- 2) Для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ умова $t < \tau$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{h}(\tau) \leftarrow(+)^{\mathbf{h}(\mathbf{T})} \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$, де $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{T}\}$;

Час ψ на орієнтованій множині \mathcal{M} будемо називати **внутрішнім**, якщо для цього часу існує хоч один хронометричний процес.

Інтуїтивний зміст терміну “внутрішній час” полягає в тому, що якщо час на орієнтованій множині є внутрішнім, його можна “поміряти” в межах цієї орієнтованої множини, використовуючи хронометричний процес в якості “годинника”, а стани хронометричного процесу в якості “індикаторів моментів часу”.

Означення 8. Нехай \mathcal{M} — орієнтована множина.

- 1) Одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}^s(\mathcal{M})}$ будемо називати **чутливою**, якщо для довільних $x, y \in \mathfrak{B}^s(\mathcal{M})$ таких, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$ існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$, $A \neq B$ і $B \leftarrow(+)^{\mathbf{Y}} A$.
- 2) Одночасність \mathbf{Y} будемо називати **неповторною**, якщо не існує множин $A, B \in \mathbf{Y}$ таких, що $A \leftarrow(+)^{\mathbf{Y}} B$ і $B \leftarrow(+)^{\mathbf{Y}} A$.
- 3) Одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}^s(\mathcal{M})}$ на орієнтованій множині \mathcal{M} будемо називати **монотонно зв'язною**, якщо для довільних множин $A, B \in \mathbf{Y}$ таких, що $A \neq B$ має місце хоч одна з умов $A \leftarrow(+)^{\mathbf{Y}} B$ або $B \leftarrow(+)^{\mathbf{Y}} A$.

В 2012 році було доведено наступну достатню ознаку існування і єдиності внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$.

Теорема 2 ([1], див, також, [2], Theorem 1.4.3). Нехай $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ — синхронізована орієнтована множина. Якщо одночасність \mathbf{Y} чутлива, неповторна і монотонно-зв'язна на \mathcal{M} , то існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій внутрішній час ψ такий, що $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\psi$.

Зауважимо, що єдиність з точністю до еквівалентності хронологізацій в теоремі 2 слід розуміти наступним чином:

“Якщо на лінійно упорядкованих множинах \mathbb{T}_1 і \mathbb{T}_2 визначені (відповідно) внутрішні часи ψ_1 і ψ_2 такі, що $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{\psi_1} = \mathbf{Y}_{\psi_2}$, то хронологізації $\mathcal{H}_1 = (\mathbb{T}_1, \psi_1)$ і $\mathcal{H}_2 = (\mathbb{T}_2, \psi_2)$ є еквівалентними (тобто $\mathcal{H}_1 \uparrow \mathcal{H}_2$)”.

Філософський зміст теорем 2 полягає в тому, що ця теорема дає достатню ознаку існування і єдиності “власного”, “внутрішнього” часу в деякому “абстрактному світі” \mathcal{M} .

Зазначимо, що теорема 2 носить лише достатній характер. Можна навести контрприклад синхронізованої орієнтованої множини $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$, в якій існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій внутрішній час ψ такий, що $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\psi$, але при цьому одночасність \mathbf{Y} не є неповторною (тобто не задовольняє умови теорем 2).

Також можна навести приклад синхронізованої орієнтованої множини $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$, в якій існують два різні внутрішні часи ψ_1 і ψ_2 , визначені на лінійно упорядкованих множинах \mathbb{T}_1 і \mathbb{T}_2 відповідно, такі, що $\mathbf{Y} = Y_{\psi_1} = Y_{\psi_2}$, але при цьому хронологізації $\mathcal{H}_1 = (\mathbb{T}_1, \psi_1)$ і $\mathcal{H}_2 = (\mathbb{T}_2, \psi_2)$ не є еквівалентними. Тобто відповідний внутрішній час може бути і не єдиним з точністю до еквівалентності хронологізацій.

Наведені факти породжують наступні проблеми, відповідь на які на даний час мені невідома:

Проблема 1. На синхронізованій орієнтованій множині $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ знайти необхідну і достатню ознаку існування внутрішнього часу ψ , що породжує одночасність \mathbf{Y} .

Проблема 2. На синхронізованій орієнтованій множині $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ знайти необхідну і достатню ознаку існування і єдиності внутрішнього часу ψ , що породжує одночасність \mathbf{Y} (з точністю до еквівалентності хронологізацій).

В доповіді планується обговорити зазначені проблеми.



Ця робота є частиною проекту, який отримав фінансування за Програмою досліджень та інновацій Європейського Союзу «Горизонт 2020» в рамках грантової угоди Марії Склодовської-Кюрі № 873071, SOMPATY.

Робота також частково підтримана грантом від Фондації Саймонса (SFI-PD-Ukraine-00014586, Grushka Ya.I.).

Література

- [1] Я.І. Грушка. Примітивні мінливі множини та їх властивості. *Математичний вісник НТШ*, 9:52–80, 2012. URL: <https://www.researchgate.net/publication/236120647>.
- [2] Ya.I. Grushka. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). page 1–208. Preprint: ResearchGate, 2017. URL: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521>.

e-mail: grushka@imath.kiev.ua

ПРО АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ ДЕЯКИХ ВІДНОШЕНЬ
ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЛАУРІЧЕЛЛИ-САРАНА F_M

Роман Дмитришин, Іван Нижник

*Карпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна*

Гіпергеометричні функції Лаурічелли-Сарана F_M визначені у такий спосіб [1]:

$$F_M(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \mathbf{z}) = \sum_{p, q, r=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_1)_p (\alpha_2)_{q+r} (\beta_1)_{p+r} (\beta_2)_q}{(\gamma_1)_p (\gamma_2)_{q+r}} \frac{z_1^p z_2^q z_3^r}{p! q! r!}, \quad (1)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ за умови, що $\gamma_1, \gamma_2 \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, $(\cdot)_k$ – символ Похгаммера, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$.

Нехай $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ та

$$\mathcal{I}_k = \{i(k) = (i_0, i_1, i_2, \dots, i_k) : i_r \in \mathcal{I}, 0 \leq r \leq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. Нехай α_1 – комплексна стала, $\alpha_1 \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, та $\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2$ – дійсні сталі такі, що задовольняють нерівності

$$0 < \alpha_2 + 1 \leq \gamma_2, \quad \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + 1 \leq 2\gamma_2, \quad 0 \leq \beta_{i_0}, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0, \quad \beta_{i_0} \leq \gamma_2, \quad i_0 \in \mathcal{I}.$$

Тоді для кожного $i_0 \in \mathcal{I}$:

1) гіллястий ланцюговий дріб

$$v_{i_0}(\mathbf{z}) + \sum_{i_1=1}^2 \frac{u_{i(1)}(\mathbf{z})}{v_{i(1)}(\mathbf{z}) + \sum_{i_2=1}^2 \frac{u_{i(2)}(\mathbf{z})}{v_{i(2)}(\mathbf{z}) + \dots}}, \quad (2)$$

де

$$v_{i_0}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{\alpha_2 + \beta_{i_0} + 1}{\gamma_2} \frac{(1 - \delta_{i_0}^2 z_1) z_{4-i_0}}{1 - z_1} - \frac{\beta_{3-i_0}}{\gamma_2} \frac{(1 - \delta_{i_0}^1 z_1) z_{1+i_0}}{1 - z_1}$$

і для $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \in \mathbb{N}$

$$u_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{(\alpha_2 + k) \left(\beta_{i_k} + \sum_{r=0}^{k-1} \delta_{i_r}^{i_k} \right)}{(\gamma_2 + k - 1)(\gamma_2 + k)} \frac{(1 - \delta_{i_k}^2 z_1)^2 z_{4-i_k} (1 - \delta_{i_k}^1 z_1 - z_{4-i_k})}{(1 - z_1)^2},$$

та

$$v_{i(k)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{\alpha_2 + \beta_{i_k} + k + 1 + \sum_{r=0}^{k-1} \delta_{i_r}^{i_k}}{\gamma_2 + k} \frac{(1 - \delta_{i_k}^2 z_1) z_{4-i_k}}{1 - z_1} - \frac{\beta_{3-i_k} + \sum_{r=0}^{k-1} \delta_{i_r}^{3-i_k}}{\gamma_2 + k} \frac{(1 - \delta_{i_k}^1 z_1) z_{1+i_k}}{1 - z_1},$$

збігається збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області

$$\mathcal{P}_\eta = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 : \operatorname{Re} \left(\frac{z_3}{1 - z_1} \right) < \frac{1 - \eta}{2}, \operatorname{Re}(z_2) < \frac{1 - \eta}{2} \right\}, \quad 0 < \eta < 1, \quad (3)$$

до функції $f^{(i_0)}(\mathbf{z})$, голоморфної в \mathcal{P}_η ;

2) функція $f^{(i_0)}(\mathbf{z})$ є аналітичним продовженням функції

$$\frac{F_M(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \alpha_1, \gamma_2; \mathbf{z})}{(1 - \delta_{i_0}^1 z_1) F_M(\alpha_1, \alpha_2 + 1, \beta_1 + \delta_{i_0}^1, \beta_2 + \delta_{i_0}^2; \alpha_1, \gamma_2 + 1; \mathbf{z})}$$

в область (3).

Наслідок 1. Нехай $i_0 = 1$, α_1 – комплексна стала, β_2 і γ_2 – дійсні сталі такі, що

$$\alpha_1 \notin \{0, -1, -2, \dots\}, \quad 0 < \beta_2 \leq \gamma_2 - 1, \quad \gamma_2 \geq 2.$$

Тоді гіллястий ланцюговий дріб

$$v_{i_0}(\mathbf{z}) + \frac{1}{\sum_{i_1=1}^2 \frac{u_{i_1(1)}(\mathbf{z})}{v_{i_1(1)}(\mathbf{z}) + \sum_{i_2=1}^2 \frac{u_{i_2(2)}(\mathbf{z})}{v_{i_2(2)}(\mathbf{z}) + \dots}}$$

де

$$v_{i_0}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{\beta_{i_0} + 1}{\gamma_2 - 1} \frac{(1 - \delta_{i_0}^2 z_1) z_{4-i_0}}{1 - z_1} - \frac{\beta_{3-i_0}}{\gamma_2 - 1} \frac{(1 - \delta_{i_0}^1 z_1) z_{1+i_0}}{1 - z_1}$$

i для $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \in \mathbb{N}$

$$u_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{k \left(\beta_{i_k} + \sum_{r=0}^{k-1} \delta_{i_r}^{i_k} \right)}{(\gamma_2 + k - 2)(\gamma_2 + k - 1)} \frac{(1 - \delta_{i_k}^2 z_1)^2 z_{4-i_k} (1 - \delta_{i_k}^1 z_1 - z_{4-i_k})}{(1 - z_1)^2},$$

$$v_{i(k)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{\beta_{i_k} + k + 1 + \sum_{r=0}^{k-1} \delta_{i_r}^{i_k}}{\gamma_2 + k - 1} \frac{(1 - \delta_{i_k}^2 z_1) z_{4-i_k}}{1 - z_1} - \frac{\beta_{3-i_k} + \sum_{r=0}^{k-1} \delta_{i_r}^{3-i_k}}{\gamma_2 + k - 1} \frac{(1 - \delta_{i_k}^1 z_1) z_{1+i_k}}{1 - z_1}$$

за умови, що $\beta_1 = 0$, збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області (3) до функції $f^{(i_0)}(\mathbf{z})$, голоморфної в \mathcal{P}_η , і до того ж $f^{(i_0)}(\mathbf{z})$ є аналітичним продовженням функції $(1 - z_1)F_M(\alpha_1, 1, 1, \beta_2; \alpha_1, \gamma_2; \mathbf{z})$ в область \mathcal{P}_η .

Література

- [1] Sh. Saran, *Transformations of certain hypergeometric functions of three variables*, Acta Math., **93**, 293–312 (1955).

e-mail: dmytryshynr@hotmail.com, ivan.nyzhnyuk.19@pnu.edu.ua

УСЕРЕДНЕННЯ В СИСТЕМАХ З ІЄРАРХІЄЮ ЧАСТОТ

Андрій Дробот

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці,
Україна

У роботі розглядається система зв'язних осциляторів, сила зв'язку між якими має різну асимптотику. Математична модель набуває вигляду:

$$\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} + w_\nu^2(\tau_\nu) x_\nu = \varepsilon^{\kappa_\nu} f_\nu(\tau_\nu, x, \frac{dx}{dt}), \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де $t > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau_\nu = \varepsilon^{\kappa_\nu} t$, $0 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \kappa_n$, $x := (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Заміною Крилова-Боголюбова

$$x_\nu = a_\nu \cos \varphi_\nu, \quad \frac{dx_\nu}{dt} = -a_\nu w_\nu \sin \varphi_\nu$$

система (1) зводиться до системи з повільними a_ν і швидкими φ_ν змінними та ієрархією частот:

$$\frac{da_\nu}{d\tau_\nu} = X_\nu(\tau_\nu, a, \varphi), \quad \frac{d\varphi_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{\omega_\nu(\tau_\nu)}{\varepsilon^{\kappa_\nu}} + Y_\nu(\tau_\nu, a, \varphi), \quad \nu = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Системи вигляду (1), коли $\kappa_\nu = 1$, $\nu = \overline{1, n}$ досліджувалися в працях [1, 2] та багатьох інших, коли $\kappa_\nu \neq 1$ - в [3].

Відповідна (2) усереднена за швидкими змінними система набуває вигляду:

$$\frac{d\bar{a}_\nu}{d\tau_\nu} = X_{\nu,0}(\tau_\nu, \bar{a}), \quad \frac{d\bar{\varphi}_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{\omega_\nu(\tau_\nu)}{\varepsilon^{\kappa_\nu}} + Y_{0,\nu}(\tau_\nu, \bar{a}). \quad (3)$$

У роботі обґрунтовано метод усереднення і отримано оцінку похибки методу

$$|a_\nu(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) - \bar{a}_\nu(\tau; \bar{y})| + |\varphi_\nu(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) - \bar{\varphi}_\nu(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)| \leq c_\nu \varepsilon^{\alpha_\nu}, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (4)$$

де $\alpha_\nu = \kappa_\nu/qn$, $c_\nu > 0$ і не залежать від ε .

Оцінка (4) виконується для $\tau \in [0, L\varepsilon^{1-\kappa_\nu}]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$, і початкових значень $(\bar{y}, \bar{\psi})$, які збігаються для розв'язків систем (2) і (3).

Література

- [1] Бігун Я. Й., Скутар І. Д. Усереднення в багаточастотних системах із запізненням та локально-інтегральними умовами. *Буковинський математичний журнал*, 2020, т. 8, № 2, с. 14–23.
- [2] Yaroslav Bihun, Ihor Skutar. *Averaging in multifrequency systems with multi-point conditions and a delay*. *Acta et Commentationes. Exact and Natural Sciences*, 2023, Nr. 2(16), pp. 13–24.
- [3] Bihun Ya., Petryshyn R., Skutar I. *Averaging in a generalized multifrequency system with a delay*. In: *Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems*. Springer Nature Switzerland AG, 2025, pp. 281–294.

e-mail: drobot.andrii@chnu.edu.ua

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ L -ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ ЦІЛИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ

ГОЛЬДВЕРГА-СТРЕЛИЦА

Святослав Дубей¹, Андрій Бандура²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка;
79000, вул. Університетська, 1, Львів, Україна;

² Івано-Франківський національний технічний університет
нафти і газу

76019, вул. Карпатська, 15, Івано-Франківськ, Україна;

Ціла функція $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ називається ([1]) *функцією обмеженого L -індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$* , якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$ виконується $\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m!L^m(z)} \leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k!L^k(z)} : 0 \leq k \leq m_0 \right\}$, де $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) =$

$F(z)$, $\partial_{\mathbf{b}}F(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z))$, $k \geq 2$. Якщо $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$, $L = l$, $F = f$, то отримаємо означення обмеженого l -індексу для цілої функції однієї комплексної змінної. Через Q позначимо клас додатних неперервних функцій $l: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ таких, що $\lambda(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{C}} \sup_t \left\{ \frac{l(z+t)}{l(z)} : |t| \leq \frac{\eta}{l(z)} \right\}$ скінченне для будь-якого $\eta > 0$.

В аналітичній теорії диференціальних рівнянь відомо, що кожний цілий чи мероморфний розв'язок алгебраїчного диференціального рівняння на комплексній площині має скінченний порядок зростання [4]. Водночас це не завжди справджується для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Приклад такого рівняння можна знайти у А.А. Гольдберга [3]: $z_1 \frac{\partial w}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial w}{\partial z_2} = 0$. Його загальний цілий розв'язок задається $w = f(z_1 z_2)$, де $f(u)$ — довільна ціла функція однієї комплексної змінної. Нами розглянуто відповідне неоднорідне рівняння з конкретною правою частиною, для якого отримано такий результат у [2]:

Теорема 1. *Нехай $l: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $l \in Q$, $a, f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого l -індексу. Кожний цілий розв'язок $u = u(z, w)$ рівняння $z \cdot u'_z - w \cdot u'_w = z \cdot u$ має обмежений L -індекс за напрямком $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, де $u = f(z \cdot w)e^z$, $L(z, w) = \max\{1, |b_1 w + b_2 z|\} l(z \cdot w)$.*

Література

- [1] Бандура А., Скасків О.Б., Цілі функції обмеженого L -індексу за напрямом. *Мат. Студ.* — 2007. — Т. 27, №1. — С. 30–52. <https://doi.org/10.30970/ms.27.1.30-52>
- [2] Бандура А., Дубей С. (2025). Про обмеженість L -індексу за напрямком цілих розв'язків рівняння Гольдберга-Стреліца. *Прикарпатський вісник НТШ. Число.* — 2025. — 20(76). — С. 9–14. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20\(76\)-9-14](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-9-14)
- [3] Goldberg A. On the growth of entire solutions of algebraic differential equations // *Lith. Math. J.* — 2005. — V. 45, no. 1. — P. 44–49. <https://doi.org/10.1007/s10986-005-0005-8>
- [4] Laine I. *Nevanlinna theory and complex differential equations.* — Berlin, New York: de Gruyter, 1993.

*e-mail: sviatoslav.dubei@lnu.edu.ua,
andriykopanytsia@gmail.com*

НЕСКІНЧЕННІ ЗГОРТКИ БЕРНУЛЛІ, КЕРОВАНІ НЕГА-ДВІЙКОВИМ РЯДОМ

Слагін Володимир

Інститут математики Національної Академії Наук України, Київ, Україна

Нагадаємо [4], що нега-двійковим рядом називається ряд:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \dots \quad (1)$$

Означення 1. *Якщо (ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} відповідно, то розподіл випадкової величини $\xi = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(-2)^n} = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}^{-2}$ називається нескінченною згортокою Бернуллі, керованою рядом (1).*

Лема 1. Якщо випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0; 1]$, то цифри її нега-двійкового зображення є незалежними, однаково розподіленими, причому $P\{\xi_n = 0\} = P\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{2}$.

Теорема 1. Якщо (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значення 0 та 1, з ймовірностями p_{0n} і p_{1n} , то розподіл випадкових величин $\xi = \Delta_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}^{-2}$ має чистий лебегівський тип, причому:

1. Чисто дискретний, якщо $\prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} > 0$;
2. Чисто абсолютно неперервний, якщо $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2p_{0k})^2 < \infty$;
3. Чисто сингулярний, якщо $\begin{cases} \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} = 0; \\ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2p_{0k})^2 = \infty. \end{cases}$

Теорема 2. Нехай (τ_n) – послідовність випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями p_0 і p_1 і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ij}\|$, $i, j \in \{0, 1\}$. Тоді випадкова величина $\tau = \Delta_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n}^{-2}$ матиме:

- а) дискретний розподіл із двома атомами, коли матриця $\|p_{ij}\|$ перехідних ймовірностей містить два нулі,
- б) дискретний розподіл зі зліченною множиною атомів, коли матриця $\|p_{ij}\|$ перехідних ймовірностей містить один нуль та $p_{00}p_{11} \neq 0$,
- в) сингулярний розподіл канторівського типу, коли матриця $\|p_{ij}\|$ перехідних ймовірностей містить один нуль та $p_{01}p_{10} = 0$,
- г) абсолютно неперервний розподіл, коли матриця перехідних ймовірностей не містить нулів.

У доповіді акцентується увага на фрактальних властивостях розподілів вказаних випадкових величин.

Література

- [1] Працьовитий, М. В. & Гончаренко, Я. В. & Лисенко, І. М. *Нега-двійкове зображення дійсних чисел та його застосування*, випуск 17, *Збірник наукових праць Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки*. Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013.

e-mail: yelahin@imath.kiev.ua

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НОРМАЛЬНО РОЗВ'ЯЗНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ
(ДО 75-РІЧЧЯ З ДНЯ НАРОДЖЕННЯ О. А. БОЙЧУКА)

Валерій Журавльов

Поліський національний університет

30 червня мало виповнитися 75 років видатному науковцю, академіку НАН України, лауреату Державної премії України у галузі науки і техніки Олександру Андрійовичу Бойчуку.

О. А. Бойчук — відомий спеціаліст з теорії резонансних крайових задач з нормально розв'язним оператором у лінійній частині, що діє у гільбертовому або банаховому просторі.

Ним було розроблено конструктивні методи аналізу лінійних і слабконелінійних крайових задач для широкого класу рівнянь: систем звичайних неавтономних та автономних диференціальних рівнянь, систем диференціальних рівнянь із зосередженим запізненням, систем з імпульсним впливом, а пізніше — крайових задач для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у лінійній частині.

Специфіка цих крайових задач у скінченновимірних просторах полягала в тому, що, вихідні лінійні рівняння були розв'язними при будь-якій правій частині, але при цьому крайова задача була оператором, який не має оберненого. Такого типу крайові задачі для більшості систем диференціальних та функціонально-диференціальних рівнянь є нормально розв'язними задачами з фредгольмовими або нетеровими операторами у лінійній частині.

Для дослідження таких задач було запропоновано та широко використано апарат узагальнено-обернених матриць та проекторів, що дозволило суттєво просунути вперед якісну теорію крайових задач для таких систем. Уперше отримано низку оригінальних результатів, що стосуються крайових задач з умовами на нескінченності. Знайдено критерії існування обмежених на всій осі розв'язків лінійних та нелінійних систем звичайних диференціальних та різницевих рівнянь у припущенні експоненціальної дихотомії лінеаризованої однорідної системи на півосях, запропоновано алгоритми їхньої побудови. Отримано умови біфуркації та розгалуження розв'язків таких задач. Ці дослідження розвивають відомі результати Київської математичної школи з теорії нелінійних коливань.

Олександр Андрійович Бойчук сформулював та розв'язав крайові задачі, в яких кількість крайових умов не збігалася з кількістю невідомих. Це були найбільш складні та мало досліджені критичні крайові задачі, які містили в собі недовизначені та перевизначені задачі. Ним було уперше було визначено умови розв'язності та вигляд загальних розв'язків таких крайових задач.

Результати досліджень вперше було опубліковано у монографії [1], а пізніше розвинуто та доповнено у монографіях [2, 3, 4]. У цих роботах було досліджено задачу про побудову розв'язків $z(t) \in \mathbf{C}^1[a, b]$ лінійної крайової задачі

$$\dot{z}(t) = A(t)z + f(t), \quad (1)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad (2)$$

де $A(t)$ — $(n \times n)$ -вимірна матриця та $f(t)$ — n -вимірний вектор, елементи яких — неперервні на відрізку $[a, b]$ дійсні функції, $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал $\ell : \mathbf{C}^1[a, b] \rightarrow \mathbf{R}^m$, причому у загальному випадку $n \neq m$, тобто кількість крайових умов не співпадає з порядком диференціальної системи.

Крайові задачі, для яких виконується умова $\text{rank} Q = n$, або $\text{rank} Q < n$ є некритичними та критичними відповідно, де $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$ -вимірна матриця, яка отримана підстановкою у крайову умову (2) нормальної фундаментальної матриці $X(t)$ диференціальної системи (1).

Теорема 1. [1] *Нехай $\text{rank} Q = n_1$. Тоді однорідна крайова задача має $r = n - n_1$ і лише r лінійно незалежних розв'язків.*

Неоднорідна крайова задача (1), (2) має розв'язки тоді і лише тоді, коли $f(t) \in \mathbf{C}[a, b], \alpha \in \mathbf{R}^m$ задовольняють умову

$$P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell K[f](\cdot) \right\} = 0, \quad d = m - n_1, \quad (3)$$

при виконанні якої вона має r -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$z(t) = X_r(t) c_r + G[f](t) + X(t)Q^+ \alpha, \quad c_r \in \mathbf{R}^r.$$

Тут $X_r(t) = X(t) P_{N_r(Q)}, P_{N_r(Q)} - (n \times r)$ -матриця, утворена з r лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ -матриці-ортопроектора $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q)$, матриця $P_{N_d(Q^*)}$ утворена з $d = m - n_1$ лінійно незалежних рядків $(m \times m)$ -матриці-ортопроектора, $P_{N(Q^*)} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$ [1],

$$G[f](t) := K[f](t) - X(t)Q^+ \ell K[f](\cdot)$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі,

$$K[f](t) := X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s) ds$$

— оператор Коші неоднорідної крайової задачі (1), (2), Q^+ — псевдообернена матриця за Муром-Пенроузом [1, 2, 3, 4].

Теорема 1 дає чітке уявлення про задачі нефредгольмового типу, для яких альтернатива Фредгольма не виконується:

1. У випадку $\text{rank} Q = n$ маємо, що розмірність крайових умов m більше, або дорівнює розмірності n диференціальної системи і крайова задача (1), (2) може мати єдиний розв'язок, але не при будь яких неоднорідностях $f(t) \in \mathbf{C}[a, b], \alpha \in \mathbf{R}^m$.

2. Якщо $\text{rank} Q = n_1 = m < n$, то з теореми 1 маємо, що при будь яких неоднорідностях $f(t) \in \mathbf{C}[a, b], \alpha \in \mathbf{R}^m$ крайова задача (1), (2) має r -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків, оскільки умова (3) завжди виконується ($P_{N_d(Q^*)} = 0, d = 0$).

3. Отже альтернатива Фредгольма справедлива тоді і лише тоді, коли $m = n, (d = r)$.

Пізніше крайові задачі, у яких порядок системи n не співпадає з кількістю крайових умов m було названо нетеровими крайовими задачами.

Із застосуванням теорії узагальнено-обернених та псевдообернених операторів та проекторів О.А. Бойчуком та його учнями ці результати було узагальнено на випадок нетерових крайових задач для різних класів функціонально-диференціальних рівнянь.

Пізніше було побудовано загальну теорію дослідження нормально розв'язних крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у банахових та гільбертових просторах [5].

Розглянемо задачу про умови розв'язності та вигляд загальних розв'язків лінійної крайової задачі

$$(Lz)(t) = f(t), \quad (4)$$

$$(\ell z)(\cdot) = \alpha, \quad (5)$$

де $L : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — узагальнено оборотний оператор, $\ell = \text{col}(l_1, l_2, l_3, \dots) : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}$ — лінійний обмежений векторний функціонал, де \mathbf{B} — банаховий простір векторів зі сталими компонентами.

Відомо [5], що неоднорідне операторне рівняння (4) має розв'язки для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, для яких виконується умова

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0,$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) + (L^- f)(t), \quad (6)$$

де $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \rightarrow Y_L$ — нескінченновимірні обмежені проєктори, $\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}$ — загальний розв'язок відповідного (4) однорідного рівняння $Lz = 0$, $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, L^- — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора L .

Позначимо $\mathcal{L} = \ell\mathcal{P}_{N(L)}$ — узагальнено оборотний оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ у банаховий простір \mathbf{B} , $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(\mathcal{L})$ — обмежений проєктор банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ на нуль-простір оператора \mathcal{L} , $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} : \mathbf{B} \rightarrow Y_{\mathcal{L}}$ — обмежений проєктор банахового простору \mathbf{B} на підпростір $Y_{\mathcal{L}} \subset \mathbf{B}$, \mathcal{L}^- — узагальнено обернений оператор до оператора \mathcal{L} .

Теорема 2. [5] *Нехай оператор $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ та функціонал $\mathcal{L} \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$ — узагальнено оборотні. Тоді відповідна (4), (5) однорідна крайова задача має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t),$$

де $(\mathcal{P}_{N(L)} *) (t) = \mathcal{P}_{N(L)}(\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} *) (t)$ — оператор розв'язку відповідної однорідної крайової задачі (4), (5), $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Неоднорідна крайова задача (4), (5) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ та $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють систему умов

$$\begin{cases} (\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}[\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)] = 0 \end{cases} \quad (7)$$

і при цьому вона має загальний розв'язок

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) + G[f](t) + (\mathcal{P}_{N(L)}(\mathcal{L}^- \alpha))(t), \quad (8)$$

де $G = (L^- f)(t) - (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^- \ell(L^- f)(\cdot))(t)$ — узагальнений оператор Гріна.

Література

- [1] А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наук. думка, Киев, (1990).
- [2] А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Изд-во ИМ НАНУ, Киев (1995).
- [3] А. А. Boichuk, А. М. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, Boston, Utrecht, (2004).
- [4] А. А. Boichuk, А. М. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2-th edition, De Gruyter, Berlin; Boston (2016).
- [5] А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наукова думка, Киев (2019).

e-mail: vfz2008@ukr.net

ПРО НОВИЙ КЛАС ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ
Андрій Заворотинський, Олександр Мурач
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Доповідь присвячена новому класу еліптичних крайових задач з малим параметром. Він входить не лише в еліптичний і крайові диференціальні оператори, а також і в дотичні диференціальні оператори, які діють на додаткові невідомі функції, задані на межі евклідової області, де розглядається задача.

Нехай Ω — обмежена відкрита область у \mathbb{R}^n класу C^∞ , де $n \geq 2$, та $\Gamma := \partial\Omega$. Виберемо цілі числа m , μ та \varkappa такі, що $m > \mu \geq 1$ і $\varkappa \geq 1$. Нехай цілі числа $b_1, \dots, b_{m+\varkappa}$ та $\beta_1, \dots, \beta_{m+\varkappa}$ такі, що $b_j \geq \beta_j$ при $1 \leq j \leq m + \varkappa$, і виконується умова $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{\mu+\varkappa} < \beta_{\mu+\varkappa+1} \leq \dots \leq \beta_{m+\varkappa}$. Крім того, $\alpha_1, \dots, \alpha_\varkappa \in \mathbb{Z}$.

Розглядається така крайова задача, залежна від малого параметра $\varepsilon > 0$:

$$A(x; D; \varepsilon)u(x; \varepsilon) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$B_j(x; D; \varepsilon)u(x; \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}(x; D_\tau; \varepsilon)\varrho_k(x; \varepsilon) = g_j(x), \quad x \in \Gamma, \quad j = 1, \dots, m + \varkappa. \quad (2)$$

Тут функція $u(x; \varepsilon)$, аргументу $x \in \bar{\Omega}$, і функції $\varrho_1(x; \varepsilon), \dots, \varrho_\varkappa(x; \varepsilon)$, аргументу $x \in \Gamma$ є шуканими, а праві частини задачі задані і (для спрощення) не залежать від параметра ε . Розглядаються комплекснозначні функції.

Диференціальні оператори з частинними похідними, які містяться в лівій частині задачі, залежать від малого параметра $\varepsilon > 0$ поліноміальним чином:

$$A(x; D; \varepsilon) := \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A_{2m-i}(x; D), \quad B_j(x; D; \varepsilon) := \sum_{i=0}^{b_j-\beta_j} \varepsilon^{b_j-\beta_j-i} B_{j;b_j-i}(x; D),$$

$$C_{j,k}(x; D_\tau; \varepsilon) := \sum_{i=0}^{b_j-\beta_j} \varepsilon^{b_j-\beta_j-i} C_{j,k;b_j-i+\alpha_k}(x; D_\tau).$$

Тут кожне $A_{2m-i}(x; D)$ — лінійний диференціальний оператор на $\bar{\Omega}$; $B_{j;b_j-i}(x; D)$ — лінійний крайовий диференціальний оператор на Γ , а $C_{j,k;b_j-i+\alpha_k}(x; D_\tau)$ — дотичний лінійний диференціальний оператор на Γ . Їх коефіцієнти є C^∞ — функціями на $\bar{\Omega}$ та Γ відповідно, а порядки задовольняють умови $\text{ord } A_{2m-i}(x; D) = 2m-i$, $\text{ord } B_{j;b_j-i}(x; D) = b_j - i$ та $\text{ord } C_{j,k;b_j-i+\alpha_k}(x; D_\tau) = b_j - i + \alpha_k$.

Загальна теорія еліптичних крайових задач із малим параметром була започаткована в роботі М. І. Вішика та Л. А. Люстерника (1957). Сучасне переосмислення їхніх результатів надав Л. Р. Волевич (2006). На відміну від попередніх робіт крайові умови (2) містять невідомі додаткові функції $\varrho_1(x; \varepsilon), \dots, \varrho_\varkappa(x; \varepsilon)$ на Γ , залежні від параметра.

Для досліджуваної задачі введено умови еліптичності з малим параметром, що дають змогу побудувати формальний асимптотичний розв'язок задачі у вигляді ряду за степенями малого параметра та встановити апріорну оцінку розв'язку у відповідних соболевських нормах, які містять цей параметр, причому стала в оцінці не залежить від нього.

e-mail: zavorotynskiy@knu.ua, murach@imath.kiev.ua

ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ ГАЛЕРКІНА ГЛИБОКОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ
АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З НЕГЛАДКОЮ
ФУНКЦІЄЮ ВЗАЄМОДІЇ

Олексій Капустян, Людмила Левенчук, Олексій Нестеренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Національний технічний університет України "Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського Київ, Україна

В роботі пропонується теоретичне обґрунтування застосування нейронних мереж (як аналогу лінійних комбінацій базисних функцій в методі Галеркіна) для наближеного знаходження м'яких розв'язків нелінійних параболічних рівнянь з негладкими функціями взаємодії. Ми розглядаємо задачу

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \Delta u(t, x) + f(u(t, x)), \quad (t, x) \in Q_T = (0, T) \times \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\Omega \subset R^d$ - обмежена область, $f: R \mapsto R$ - неперервна (але не обов'язково гладка),

$$f(0) = 0, \quad f(s)s \leq \lambda s^2 + C \quad \forall s \in R, \quad (2)$$

де $C > 0$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$, λ_1 - перше власне число $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$.

Відомо [1], що для всіх $u_0 \in X = C_0(\Omega)$ задача (1) має (можливо, неєдиний) м'який розв'язок на $[0, T]$, тобто існує $u \in C([0, T]; X)$ така, що

$$u(t) = T(t)u - 0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3)$$

Для його апроксимації ми розглядаємо клас нейромереж [2]

$$W^N = \{v: R^{1+d} \mapsto R \mid v(t, x) = \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma(\alpha_{0,i}t + \sum_{j=1}^d \alpha_{j,i}x_j + c_i)\}, \quad (4)$$

де σ - функція активації (напр., сигмоїд), і $\theta = \{\beta_i, \alpha_{j,i}, c_i\}$ - параметри нейромережі, які вибираються із задачі мінімізації функціоналу L^2 -похибки

$$J(v) = \|v_t - \Delta v - f(v)\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v\|_{L^2((0,T) \times \partial\Omega)}^2 + \|v(0, \cdot) - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5)$$

Зауважимо, що цей функціонал не визначений, взагалі кажучи, на м'яких розв'язках (1), проте ми можемо безпосередньо обчислювати $J(v)$ на будь-яких $v \in W^N$. Чим менше значення $J(v)$, тим краще відповідна функція v "підходить" як розв'язок (1). Для обґрунтування зазначеної процедури ми використовуємо наступні ключові результати: теорему про щільність множини $W = \cup_{N \geq 1} W^N$ в $C^2(\overline{Q_T})$ [3], оригінальний результат про можливість конструктивної рівномірної апроксимації неперервної функції гладкими зі збереженням властивості (2), і результати про регулярність м'яких розв'язків нелінійних параболічних рівнянь [1].

Теорема 1. *Існують $v^N \in W^N$ такі, що*

$$J(v^N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (6)$$

і якщо для деякої послідовності $\{v^N\} \subset W$ виконується (6), то по підпослідовності

$$v^N \rightarrow u \text{ в } L^2(Q_T), \quad (7)$$

де u - м'який розв'язок (1).

Наслідок 1. *Зауважимо, що цей теоретичний результат може слугувати основою для практичної реалізації через багатозарові фізично обґрунтовані нейромережі (Physics-Informed Neural Networks) [4]*

Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, проект 2023.03/0074 «Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою».

Література

- [1] Feketa P., Kapustyan O., Kapustian O., Korol I. *Global attractors of mild solutions semiflow for semilinear parabolic equation without uniqueness*, *Appl. Math. Let.* vol.135, 2023.
- [2] Sirignano J., Spiliopoulos K. *DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations*, *Journal of computational physics*. vol.375, 2018.
- [3] Hornik K. *Approximation capabilities of multilayer feedforward networks*, *Neural Networks*. vol.4, 1991.
- [4] Kasyanov P.O., Kapustyan O.V., Levenchuk L.B., Novykov V.R. *Machine learning method for approximate solutions for reaction-diffusion equations with multivalued interaction functions*, 2024, <https://doi.org/10.20944/preprints202407.2340.v2>.

e-mail: kapustyan@knu.ua, lusi.levenchuk@gmail.com, nesterenko@ukr.net

УЗАГАЛЬНЕННЯ А-МЕТОДУ ДЗЯДИКА ПОЛІНОМІАЛЬНОГО НАБЛИЖЕННЯ
РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ВИПАДОК РІВНЯННЯ З
НЕРЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВІСТЮ

Олексій Кашпіровський, Юрій Митник

Національний університет <Киево-Могилянська академія>, Київ, Україна

Досліджуються майже найкращі наближення алгебраїчними многочленами $P_n(x)$ функції

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

на відрізках $[0; h]$, $h > 0$.

Оскільки $\varphi(x)$ нескінченно-диференційовна на $[0, +\infty)$ і належить до класу функцій Жевре, то величина $E_n(\varphi)$ найкращого наближення φ алгебраїчними многочленами має субекспонціальне спадання

$$E_n(\varphi) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{\frac{2}{3}}), \quad (1)$$

де C_1 і C_2 додатні константи, що залежать від h [1].

Враховуючи оцінку (1), многочлени $P_n(x)$ можна використати для побудови високоточних чисельних методів для диференціальних рівнянь в частинних похідних та жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь.

Оскільки диференціальне рівняння $y' = x^{-2}y$, якому задовольняє $\varphi(x)$, має при $x = 0$ нерегулярну особливість і задача Коші з початковою умовою в цій точці є

некоректною, то для реалізації алгоритму А-методу Дзядика [2] візьмемо початкову умову в точці $x = h$.

При певних значеннях параметрів τ_1 і τ_2 та $u = h - x$ розв'язком інтегрального рівняння

$$(h - u)^2 y(u) + \int_0^u (1 + 2h - 2t)(y(t)dt) = h^2 e^{-\frac{1}{h}} + \tau_1 T_{n+1}^* \left(\frac{u}{h} \right) + \tau_2 T_{n+2}^* \left(\frac{u}{h} \right) \quad (2)$$

є многочлен степеня n , який реалізує майже найкраще наближення функції $\varphi(h - u)$ на $[0, h]$. $T_{n+1}^*(x)$ і $T_{n+2}^*(x)$ - зміщені многочлени Чебишева: $T_n^*(x) = T_n(2x - 1) = T_{2n}(\sqrt{x}) = \cos(n \arccos(2x - 1))$. Коефіцієнти цього многочлена та параметри τ_1 і τ_2 визначають методом невизначених коефіцієнтів із сумісної системи лінійних рівнянь порядку $n + 3$, яка одержується з рівняння (2).

Література

- [1] О.І.Кашпіровський, Ю.В.Митник. *Апроксимація розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою операторних поліномів. Український математичний журнал*, 50(11):1506-1516, 1998.
- [2] В.К.Дзядик. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. Наукова думка, Киев, 1988.

e-mail: o.kashpirovskiy@ukma.edu.ua, yuriy.mytnyk@ukma.edu.ua

ПОРЯДКОВІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ ФАКТОРОБ'ЄКТІВ КОМПАКТА

Катерина Копорх

*Карпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна*

Розглядаємо неперервні сюр'єкції з фіксованого компакта (тобто компактного гаусдорфового простору) X у компакт.

Означення 1. *Вважаємо, що неперервна сюр'єкція $f : X \rightarrow Y$ передує неперервній сюр'єкції $g : X \rightarrow Z$, пишучи $f \leq g$, якщо існує така неперервна сюр'єкція $i : Z \rightarrow Y$, що $f = g \circ i$.*

Очевидно, що “ \leq ” є рефлексивним і транзитивним відношенням на класі (не множині!) всіх неперервних сюр'єкцій компактів з фіксованим початком X .

Означення 2. *Якщо для неперервних сюр'єкцій $f : X \rightarrow Y$ та $g : X \rightarrow Z$ істинне $f \leq g$, $g \leq f$, то називаємо f та g еквівалентними, пишучи $f \sim g$.*

Неважко довести, що “ \sim ” є рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням, і класи еквівалентності щодо нього, які називають *фактороб'єктами* компакта X , утворюють множину. Позначаємо її $\Phi(X)$.

Якщо $f \sim f'$, $g \sim g'$ (тобто $[f] = [f']$, $[g] = [g']$ для відповідних класів), то $f \leq g$, якщо і тільки якщо $f' \leq g'$. Звідси випливає коректність наступного означення.

Означення 3. Вважаємо, що фактороб'єкт $[f]$ передує фактороб'єктові g у $\Phi(X)$, пишучи $[f] \leq [g]$, якщо неперервна сюр'єкція $f : X \rightarrow Y$ передує неперервній сюр'єкції $g : X \rightarrow Z$.

Так отримуємо частково впорядковану множину $(\Phi(X), \leq)$, яка є повною ґраткою з найменшим елементом – класом сталого відображення і найбільшим елементом – класом тотожного відображення [2].

Означення 4. Кажемо, що у частково впорядкованій множині (L, \leq) елемент x_0 є значно нижче [1] за x , пишучи $x_0 \ll x$, якщо у кожній напрямленій вгору множині $D \subset L$, для якої $x \sup D$, існує елемент d , для якого $x_0 \leq d$.

Означення відношення значно вище, позначеного “ \gg ” [1], є двоїстим.

У доповіді будуть описані відношення “значно нижче” та “значно вище” (які також називають відношеннями апроксимації) на множині $(\Phi(X), \leq)$.

Література

- [1] Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M., Scott, D.S.: Continuous Lattices and Domains. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 93. Cambridge University Press (2003)
- [2] Копорх, К. Простір фактороб'єктів компактного топологічного простору. Вісник Львівського університету, Серія механіко-математична, 68, С. 152–157 (2008)

e-mail: kateryna.koporkh@pnu.edu.ua

НЕОБХІДНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, БЛИЗЬКОГО ДО ЛІНІЙНОГО
Людмила Кусік

Одеській національній морський університет, Одеса, Україна

Розглядаємо диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} L_0(y), \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L_0 : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна та повільно змінна при $y \rightarrow Y_0$ функція, Δ_{Y_i} ($i \in \{0, 1\}$) – однібічний окіл Y_i і $Y_i \in \{0; \pm\infty\}$ ($i \in \{0, 1\}$), $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$. Припускаємо, що числа μ_i ($i = 0, 1$), які визначено формулами,

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_i = +\infty \text{ або } Y_i = 0 \text{ і } \Delta_{Y_i} - \text{правий окіл } 0, \\ -1, & \text{якщо } Y_i = -\infty \text{ або } Y_i = 0 \text{ і } \Delta_{Y_i} - \text{лівий окіл } 0, \end{cases}$$

задовольняють нерівності

$$\mu_0 \mu_1 > 0 \quad \text{при } Y_0 = \pm\infty \quad \text{і} \quad \mu_0 \mu_1 < 0 \quad \text{при } Y_0 = 0. \quad (2)$$

Умови (2) є необхідними для існування розв'язків ДР (1), визначених в лівому околі ω і такими, що задовольняють умови

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{for } t \in [t_0, \omega[\quad , \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1). \quad (3)$$

Рівняння (1) досліджуємо на класі $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків.

Означення 1. Розв'язок y рівняння (1), що визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називаємо $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо виконано наступні умови: $y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i}$ при $t \in [t_0, \omega[$, $\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i$ ($i = 0, 1$), $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0$.

Введемо необхідні функції та позначення:

$I_0(t) = \int_{A_0}^t p^{\frac{1}{2}}(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{-\frac{\sigma_1}{2}} d\tau$, $\Phi(y) = \int_{B_0}^y \frac{ds}{sL_0^{\frac{1}{2}}(s)}$, де A_0, B_0 обрано так, щоб відповідні інтеграли прямували або до 0, або до $\pm\infty$. Очевидно, що для функції Φ існує обернена $\Phi^{-1} : \Delta_{Z_0} \rightarrow \Delta_{Y_0}$, $Z_0 = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(y) \in \{0, \pm\infty\}$.

Теорема 1. Нехай $L_0(\Phi^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \rightarrow Z$ функцією, $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$. Тоді для існування $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язків рівняння (1) необхідно виконання умов (2), (3),

$$\lim_{t \uparrow \omega} \mu_0 \mu_1 \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \right|^{\frac{\sigma_1}{2}} I_0(t) = Z_0, \alpha_0 > 0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) \left(p(t) |\pi_\omega(t)|^{-\sigma_1} L_0 \left(\Phi^{-1} \left(\mu_0 \mu_1 \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \right|^{\frac{\sigma_1}{2}} I_0(t) \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \pm\infty.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку при $t \uparrow \omega$ мають місце асимптотичні зображення

$$\Phi(y(t)) = \mu_0 \mu_1 \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \right|^{\frac{\sigma_1}{2}} I_0(t) [1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \mu_0 \mu_1 \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \right|^{\frac{\sigma_1}{2}} \left(p(t) |\pi_\omega(t)|^{-\sigma_1} L_0 \left(\Phi^{-1} \left(\mu_0 \mu_1 \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \right|^{\frac{\sigma_1}{2}} I_0(t) \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} [1 + o(1)].$$

e-mail: lk09032017@gmail.com

ПРО МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ АКТИВІВ
Василь Кушнірчук, Володимир Кушнірчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Розглянута модель Марковіца модифікована додатковими критеріями максимізації ліквідності портфеля активів та екологічної/соціальної відповідальності (ESG). Наведено метод зважених сум для розв'язування одержаної чотирикритеріальної задачі оптимізації.

Оптимізація портфеля цінних паперів описується класичною моделлю Марковіца [1]. У чотирикритеріальній моделі додаються дві додаткові цільові функції, які відображають ліквідність активів та ESG-фактори, що мають важливе значення для сучасного інвестора, особливо в контексті сталого розвитку [3-6]. Тоді чотирикритеріальна модель виглядає так:

- Максимізація очікуваної дохідності:

$$\max \mu_p = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i.$$

- Мінімізація ризику (дисперсії дохідності):

$$\min \sigma_p^2 = w^T(\sigma)w.$$

- Максимізація ліквідності портфеля:

$$\max l_p = \sum_{i=1}^n l_i w_i.$$

- Максимізація ESG-критерію:

$$\max e_p = \sum_{i=1}^n e_i w_i.$$

При таких обмеженнях:

- Сума часток активів дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

- Частки активів обмежені знизу для збереження ефекту диверсифікації інвестиційного портфеля:

$$w_i \geq 0,05, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тут n – кількість активів, μ_i – очікуваний дохід активу i , де $i = 1, 2, \dots, n$, w_i – частка коштів, вкладених в актив i (ваги портфеля), (σ) – коваріаційна матриця між доходами активів (ризик активів), де σ_{ij} – коваріація між доходами активів i та j , l_i – ліквідність активу i (обсяг торгів, оборотність тощо), e_i – ESG-рейтинг активу i (екологічні, соціальні та управлінські показники).

Для розв'язування одержаної задачі запропоновано метод зважених сум [2], який перетворює багатокритеріальну задачу на скалярну шляхом комбінування критеріїв з вагами. Допоміжна функція для мінімізації:

$$L(w) = -\alpha\mu_p + \beta\sigma_p^2 - \gamma l_p - \delta e_p,$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ – вагові коефіцієнти, що відображають пріоритети інвестора (наприклад, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0,5, \delta = 0,5$). Знак "–" застосовується для максимізаційних критеріїв. Задача стає квадратичним програмуванням і може бути розв'язана чисельними методами, наприклад, у Python з використанням бібліотеки SciPy (метод SLSQP).

Цей підхід дозволяє знайти Парето-оптимальні розв'язки шляхом варіювання ваг, що є ефективним для інтеграції ESG у портфельну оптимізацію. Альтернативою може бути метод можливих напрямків [2] з розширеною допоміжною функцією:

$$\max \left\{ -\mu_p, \sigma_p^2, -l_p, -e_p, \sum w_i - 1, 1 - \sum w_i, 0.05 - w_i \ (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

Висновок

Чотирикритеріальна модель Марковіца дозволяє інвестору одночасно враховувати дохідність, ризик, ліквідність та ESG-фактори. Ця модель більш гнучка та комплексна порівняно з класичною, допомагає приймати зважені інвестиційні рішення, враховуючи сталість та етичні аспекти.

Література

- [1] Гадецька С.В., Дубницький В.Ю., Кушнірук Ю.І., Ходирев О.І., Шкодіна І.В. Багатокритеріальна (векторна) оптимізація портфеля валют при нестохастично невизначеному зовнішньому економічному середовищі. Системи обробки інформації. 2021. № 3(166). С. 6-21.
- [2] Григорків В. С., Кушнірчук В. Й. Багатокритеріальна оптимізаційна модель з нелінійним еколого-економічним міжгалузевим балансом // Економічна кібернетика. – 2003. – № 3-4 (21-22). – С. 43-50.
- [3] Doumpos M. Incorporating ESG Factors in Multicriteria Portfolio Optimization: An Overview and Empirical Evaluation // EURO Working Group on Multicriteria Decision Aiding. 2025.
- [4] Liagkouras K., Metaxiotis K. On ESG Portfolio Construction: A Multi-Objective Optimization Approach // Mathematics. 2022. Vol. 10(20). P. 3861. <https://doi.org/10.3390/math10203861>.
- [5] Gomez J.P., Miralles-Quiros J.L., Miralles-Quiros M.M. The integration of environmental, social and governance criteria in portfolio optimization // Corporate Social Responsibility and Environmental Management. 2023. Vol. 31(3). P. 2364-2380. <https://doi.org/10.1002/csr.2682>.
- [6] Utz S., Wimmer M., Hirschberger M., Steuer R.E. Tri-criterion inverse portfolio optimization with application to socially responsible mutual funds // European Journal of Operational Research. 2014. Vol. 234(2). P. 491-498. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.026>.

e-mail: v.kushnirchuk@chnu.edu.ua

АНАЛІЗ УМОВ ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДРОБОВИМ БРОУНІВСЬКИМ
РУХОМ

Володимир Кушнірчук, Ігор Малик

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

У роботі досліджено достатні умови існування та єдиності розв'язків лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР) нейтрального типу з інтегралом за дробовим броунівським рухом $B^{(H)}(t)$, де параметр Херста $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, що відповідає процесам з довготривалою пам'яттю [3, 4]. Розглянуто рівняння виду:

$$dDx_t = Lx_t dt + Gx_t dB^{(H)}(t), \quad t \in [0, T],$$

з початковою умовою $x_t = \phi$, де D, L, G – лінійні функціонали на просторі неперервних функцій $C([-h, 0])$, а x_t – сегмент траєкторії процесу.

Доведено представлення розв'язку у формі:

$$x(t) = y(t) + \int_0^t X(t-s)Gx_s dB^{(H)}(s),$$

де $y(t)$ – розв’язок відповідного детермінованого рівняння, а $X(t)$ – фундаментальний розв’язок. Це представлення є аналогом методу варіації сталих для стохастичних рівнянь і може бути використано для аналізу стійкості.

Встановлено достатні умови існування та єдиності розв’язку на скінченному інтервалі $[0, T]$: якщо функція r_D задовольняє

$$V_{-h}^0 r_D \leq K_D < 1,$$

варіації r_L та r_G обмежені, а початкова умова $\phi \in L^2([-h, 0])$, то задача Коші має єдиний розв’язок з точністю до стохастичної еквівалентності

$$(E|x(t) - \tilde{x}(t)|^2 = 0).$$

Доведення базується на наближеннях Пікара, нерівності Коші–Буняковського, властивостях дробового броунівського руху та лемі Гронуолла–Белмана.

Проведено чисельне моделювання для рівняння з фіксованою затримкою:

$$dx(t) = (-ax(t) - bx(t-r)) dt + \sigma x(t) dB^{(H)}(t),$$

використовуючи метод Ейлера та Монте-Карло (2000 кроків на $[0, 10]$, 10 реалізацій). Досліджено випадки в області стійкості (за [1]: $a \approx -1.0806$, $b = 2.0$, $r = 0.5$) та поза нею ($a = 0.2$, $b = 2.0$) для $H \in \{0.5, 0.7, 0.95\}$ та $\sigma \in \{0.3, 0.6\}$. Результати показують, що при великих H та малих σ траєкторії стабілізуються навіть у номінально нестійких випадках, підкреслюючи роль пам’яті процесу [5].

Висновки: Отримані умови та метод варіації сталих дозволяють аналізувати експоненціальну стійкість у середньому квадратичному. Перспективи: розширення на нелінійні рівняння та достатні критерії стійкості для $H > \frac{1}{2}$.

Література

- [1] Hale, J.K. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer, New York, 1977. ISBN: 978-1-4612-9894-5.
- [2] Малик, І.В., Ясинський, В.К. Асимптотична поведінка в середньому квадратичному розв’язків систем стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу. *Доп. Нац. Акад. Наук Укр.* 2009, 10, 15–20.
- [3] Guo, Q., Mao, X., Yue, R. *Almost Sure Exponential Stability of Stochastic Differential Delay Equations*. *SIAM J. Control Optim.* 2016, 54(4), 1919–1933. doi:10.1137/15M1019465.
- [4] Mishura, Y. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Springer, Berlin, 2008. doi:10.1007/978-3-540-75873-0.
- [5] Кушнірчук, В.В.; Малик, І.В. Дослідження умов існування та єдиності розв’язків лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із дробовим броунівським рухом. *Буковинський математичний журнал*. 2025, 13 <https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.12>

e-mail: kushnirchuk.volodymyr@chnu.edu.ua

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО
КЕРУВАННЯ НА ПІВОСІ

Роксолана Лახва, Вікторія Могильова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Національний технічний університет України "Київ. політехн. ін-т ім.

І.Сікорського", Київ, Україна

Розглянемо лінійну за керуванням задачу оптимального керування інтегро/диференціальною системою на півосі з малим параметром і швидкоосцилюючими коефіцієнтами

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right) + f_1(x(t))u(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0,$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^\infty [e^{-jt}(A(t, x(t)) + B(t, u(t)))] dt \rightarrow \inf, \quad (2)$$

тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $j > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор з \mathbb{R}^d , $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, який приймає значення у деякій множині $U \subset \mathbb{R}^m$. Позначимо

$$\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x) ds.$$

Нехай існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ границя, для кожного $t \geq 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left[f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(\tau, x)\right) - f_0(x) \right] d\tau = 0. \quad (3)$$

Тоді задачі оптимального керування (1), (2) зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами на півосі ставиться у відповідність більш проста усереднена задача керування:

$$\dot{\xi} = f_0(\xi) + f_1(\xi)u(t), \quad \xi(0, u(0)) = x_0, \quad (4)$$

з критерієм якості

$$J_0[u] = \int_0^\infty [e^{-jt}(A(t, \xi(t)) + B(t, u(t)))] dt \rightarrow \inf. \quad (5)$$

Для задачі (1), (2) та відповідної усередненої задачі (4), (5) вважатимемо виконаними наступні умови.

Умова 1. Допустимими керуваннями будемо вважати m -вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L^2(0, \infty)$, що приймають значення у замкнутій, опуклій множині $V \subset \mathbb{R}^m$, вважаємо також, що $0 \in V$.

Умова 2. Функція $f(t, x, u)$ визначена й неперервна за сукупністю змінних в області $Q_1 = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}^m\}$, а $n \times m$ -вимірна матриця $f_1(x)$ визначена для $x \in \mathbb{R}^d$ і виконані умови:

- 1) $f(t, x, y)$ і $f_1(x)$ обмежені в областях визначення сталою $M > 0$;
- 2) $f(t, x, y)$ і $f_1(x)$ задовольняють у областях визначення умову Ліпшиця за змінною x зі сталою Ліпшиця $\lambda > 0$.

Умова 3. Функція $\varphi(t, s, x)$ визначена й неперервна у області $Q_2 = \{t \geq 0, s \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\}$ і задовольняє умови лінійного росту та Ліпшиця відносно x , тобто існує L_φ така, що

$$|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x_1)| \leq L_\varphi |x - x_1|,$$

$$|\varphi(t, s, x)| \leq L_\varphi (1 + |x|).$$

Умова 4. Рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ існує границя (3).

Умова 5. Скалярні функції $A(t, x)$, $B(t, u)$ і $\frac{\partial B}{\partial u}(t, u)$ визначені при $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, u \in V$, і неперервні за сукупністю змінних, причому:

- 1) $A(t, x) \geq 0$ і задовольняє за $x \in \mathbb{R}^d$ умову лінійного росту зі сталою M , тобто $|A(t, x)| \leq M(1 + |x|)$, для кожного $t \geq 0$ і $x \in \mathbb{R}^d$;
- 2) $a_1|u|^2 \geq B(t, u) \geq a|u|^2$ для деяких сталих $a > 0, a_1 > 0$ та для кожного $t \geq 0, B(t, u)$ опукла за $u \in V$ та існує $a_2 > 0$ така, що

$$\left| \frac{\partial B}{\partial u}(t, u) \right| \leq a_2 |u|.$$

Зазначимо, що в силу умов Умов 1, 2 і Теорема 3.1 [2] випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок $x(t, u)$ задачі Коші (1) існує та єдиний на $[0, \infty)$ та є абсолютно неперервною функцією.

При цьому для розв'язку задачі (1), аналогічно до нелінійного випадку, маємо оцінку для кожного $t > 0$:

$$|x(t)| \leq |x_0| + Mt + Mt^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_2}. \quad (6)$$

Тому для критерію якості (2), врахувавши (6) та пункти 1) та 2) із Умови 5 маємо

$$|J_\varepsilon[u]| \leq \int_0^\infty e^{-jt} M(1 + |x(t)|) dt + \int_0^\infty B(t, u(t)) dt$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-jt} M \left(1 + |x_0| + Mt + Mt^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_2} \right) dt + a_1 \|u\|_{L_2}^2 < \infty.$$

Таким чином, критерій якості (2) має сенс для всіх допустимих керувань. Із Умови 4 випливає, що аналогічні висновки справедливі і для усереднених задач.

Наступна теорема описує зв'язок між оптимальними керуваннями, оптимальними траєкторіями і критеріями якості точної (1), (2) та усередненої задачі (4), (5).

Позначимо $J_\varepsilon^* = \inf_u J_\varepsilon[u]$, $J_0^* = \inf_u J_0[u]$, де інфімум береться по всіх допустимих керуваннях. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. Нехай виконані Умови 1 - 5. Тоді задачі (1), (2) та (4), (5) мають відповідно розв'язки $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ і $(\xi^*(t), u^*(t))$.

При цьому справедливі наступні варіаційні співвідношення:

1) $J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*, \quad \varepsilon \rightarrow 0;$

2) для кожного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$ таке, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ маємо

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| < \eta;$$

3) існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ така, що

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightarrow \xi(t) \tag{7}$$

рівномірно на кожному відрізку $[0, T]$ для довільного $T > 0$, а

$$u_{\varepsilon_n}^* \rightharpoonup u^* \tag{8}$$

в $L^2(0, \infty)$.

Якщо при цьому усереднена задача (1), (2) має єдиний розв'язок, то збіжності (7) і (8) мають місце при всіх $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нехай $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ розв'язок задачі (1), (2) на півосі. Зафіксуємо $T > 0$ і розглянемо задачу (4) із функціоналом

$$I_{0T}[u] = \int_0^T e^{-jt} (A(t, \xi(t)) + B(t, u(t))) dt \rightarrow \inf \tag{9}$$

на відрізку $[0, T]$. Тоді з Теорема 2.2 [1] випливає, що дана задача має розв'язок (ξ_T^*, u_T^*) на $[0, T]$.

Для задачі (4), (5) визначимо допустиме керування на $[0, \infty)$, наступним чином

$$\bar{u}_{T, \infty}(t) = \begin{cases} u_T^*(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t > T, \end{cases} \tag{10}$$

через $\xi_{T, \infty}$ позначимо допустиму траєкторію.

Позначимо $I_{0T}^* = \inf_u I_{0T}[u]$.

Теорема 2. *Нехай виконуються Умови 1 - 5. Тоді*

1)

$$|I_\varepsilon^* - I_{0T}^*| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty;$$

2) існують послідовності $T_n \rightarrow \infty, \varepsilon_n \rightarrow 0$, такі що для будь-якого $t > 0$ виконуються

$$|x_{\varepsilon_n}^*(t) - \xi_{T_n, \infty}(t)| \rightarrow 0, \quad T_n \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0; \tag{11}$$

3)

$$u_{\varepsilon_n}^* - \bar{u}_{T_n, \infty} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad T_n \rightarrow \infty \tag{12}$$

в $L^p(0, \infty)$.

Якщо при цьому усереднена задача (4), (5) має єдиний розв'язок, то збіжності у (11), (12) мають місце при всіх $T \rightarrow \infty$.

Література

- [1] R. Lakhva, R. Uteshova, O. Stanzhytskyi, V. Mogylova, *The averaging method in optimal control problems for integro-differential equations*, Open Mathematics, June 2024, DOI: <https://doi.org/10.1515/math-2025-0167>.
- [2] V. Mogylova, R. Lakhva, V. Kravets, *Optimal control problem for systems of integro-differential equations*, J. Math. Sci. (United States), 282(2024), no. 6, 983-1007, DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07229-3>.

e-mail: roksolanalakhva@knu.ua
e-mail: mogylova.viktoria@gmail.com

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК СПРЯЖЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДИСИПАТИВНОЮ ПАРАБОЛІЧНІСТЮ

Максим Лека

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці,
Україна*

Для фіксованого t з $(0; T]$ розглянемо рівняння

$$\partial_\tau v_t(\tau; \xi) = -\{A_0^*(\tau; i\partial_\xi) + A_1^*(\tau, \xi; i\partial_\xi)\}v_t(\tau; \xi), \quad (\tau; \xi) \in \Pi_{[0;t]}, \quad (1)$$

де $A_0^*(\tau; i\partial_\xi)$ — диференціальний оператор порядку p із неперервно залежними від τ коефіцієнтами, $A_1^*(\tau, \xi; i\partial_\xi)$ — диференціальний вираз порядку p_1 зі змінними коефіцієнтами, які є неперервними за змінною τ і нескінченно диференційовними за ξ .

Припустимо, що відповідне рівняння

$$\partial_\tau v_t(\tau; \xi) = -A_0^*(\tau; i\partial_\xi)v_t(\tau; \xi), \quad (\tau; \xi) \in \Pi_{[0;t]},$$

на множині $\Pi_{[0;T]}$ є обернено $\{p, h\}$ — параболічним (тобто перетворюється в параболічне за Шиловим підстановкою $\beta = -\tau$) з від'ємним родом μ . Також вважатимемо, що $p_1 < h$.

Означення 1. *Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1) назвемо функцію $Z^*(\tau, \xi; t, x)$ визначену для всіх $\tau, \xi \in \Pi_{[0;t]}$ і залежну від параметричної точки $(t; x) \in \Pi_{(0;T]}$ таку, що формула*

$$v_t(\tau; \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z^*(\tau, \xi; t, x)\varphi(x)dx, \quad (\tau; \xi) \in \Pi_{[0;t]},$$

визначає класичний розв'язок рівняння (1) в $\Pi_{[0;t]}$, який задовольняє умову

$$v_t(\tau; \xi) \Big|_{\tau=t} = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

при довільному $t \in (0; T]$ і кожному $\varphi(\cdot) \in S_{1-\alpha}$, де $\alpha = \frac{\mu}{h}$, а S_α — відповідний простір основних функцій типу S .

Правильне таке твердження

Теорема 1. За вказаних умов на коефіцієнти диференціальних виразів A_0^* і A_1^* на множині Π_T^2 існує фундаментальний розв'язок задачі Коші $Z^*(\tau; \xi; t, x)$, який диференційований за змінною τ і нескінченно диференційований за змінною ξ такий, що

$$|\partial_\tau Z^*(\tau; \xi; t, x)| \leq C_0(t - \tau)^{-\frac{n+p}{h}} e^{-\delta_0 \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

$$|\partial_\xi^k Z^*(\tau; \xi; t, x)| \leq C_1(t - \tau)^{-\frac{n+p+|k|}{h}} e^{-\delta_1 \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

(тут C_0, C_1, δ_0 і δ_1 — додатні сталі, незалежні від t, τ, x і ξ).

При побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для (1) використовується методика, розроблена в [1].

Література

- [1] Літовченко В.А. Системи Шилова у просторах типу S та S' : монографія. Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, 2019, с. 156–158.

e-mail: leka.maksym@chnu.edu.ua

ДВОСИМВОЛЬНА СИСТЕМА КОДУВАННЯ ЧИСЕЛ З ДВОМА РІЗНОЗНАКОВИМИ ОСНОВАМИ ТА НЕНУЛЬОВОЮ НАДЛИШКОВІСТЮ У ЗАДАЧАХ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ

Ірина Лисенко, Олександр Працьовитий, Віктор Плакида

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Нехай $A = \{0, 1\}$ — двосимвольний алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ — множина всіх послідовностей з нулів та одиниць, g_0, d_0 — додатні, а g_1, d_1 — від'ємні дійсні числа, причому $-g_1 < g_0 < 1, -d_1 < d_0 < 1$.

Розглядається відображення $f : L \xrightarrow{f} R$, означене рівністю

$$f(\alpha_n) = x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^G, \delta_{\alpha_k} = \alpha_k g_{1-\alpha_k}. \quad (1)$$

Символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^G$ називається G -зображенням числа x . При $g_0 = g_1 = 1$ це відоме G_2 -зображення чисел відрізка $[0; g_0]$, яке має нульову надлишковість і неперервний оператор лівостороннього зсуву цифр та розривний інверсор цифр [1, 2].

Теорема 1. Множина значень відображення f є відрізком $[0; g_0]$, якщо $g_0 = g_1 \geq 1$; ніде не щільною самоподібною множиною з розмірністю, що є розв'язком рівняння $g_0^x + |g_1|^x = 1$, якщо $g_0 = g_1 < 1$.

G -циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^G = \{x = \Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^G, (\alpha_k) \in L\}.$$

Якщо $g_0 = g_1 \geq 1$, то G -циліндр є відрізком. Якщо $g_0 = g_1 < 1$, то два циліндри одного рангу спільних точок не мають. Якщо $g_0 = g_1 > 1$, то циліндри $\Delta_{c_1 \dots c_m 0}^G$ і $\Delta_{c_1 \dots c_m 1}^G$ перекриваються, а при $g_0 = g_1 = 1$ вони мають одну спільну точку.

Теорема 2. *За умови $g_0 - g_1 \geq 1$ при обчисленні фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича борелівських підмножин відрізка $[0; g_0]$ можна обмежуватись покриттями G -циліндрами.*

У доповіді пропонуються результати дослідження неперервних та майже скрізь у розумінні міри Лебега неперервних функцій, визначених у термінах G -зображення чисел, які мають локально складну тополого-метричну структуру та фрактальні властивості, а також формулюються нерозв'язані задачі.

Література

- [1] Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. *Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані* // Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2. — С. 50–62.
- [2] M.V. Pratsiovytyi, I.M. Lysenko, Yu.P. Maslova, *Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2 -representation of numbers*, Algebra and Discrete Mathematics, N.1, Vol. 29, 2020, pp. 99-108.

e-mail: i.m.lysenko@udu.edu.ua, plakyda1@gmail.com, alexandr.pratsiovytyi@gmail.com

ПРО ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ НА ПІВОСІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗОТРОПНОЇ СУПЕРДИFUЗІЇ

Владислав Літовченко

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці,
Україна*

Розглянемо рівняння

$$\partial_t u(t; x) + a(-\Delta)_x^{\alpha/2} u(t; x) = f, \quad t \in (0; T], x \in \Omega, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(t; \cdot)|_{t=0} = \varphi(\cdot) \quad (2)$$

(тут $a > 0$, u – невідома функція, $(-\Delta)_x^{\alpha/2}$ – дробовий Лапласіан порядку $\alpha \in (0; 2)$, що діє за змінною x , а ∂_t – частинна похідна за змінною t).

Рівняння (1) знайшло широке застосування в багатьох галузях науки й техніки. При $\Omega = \mathbb{R}$ це рівняння описує поширення резонансних фотонів у плазмі та дифузійні процеси в фрактальних середовищах, через що воно отримало назву «рівняння ізотропної супердифузії». За допомогою (1) описуються локальні завихрення гравітаційних полів Рісса, спричинених випадково розподіленими рухомими об'єктами. Важливий приклад для мотивації вивчення рівняння ізотропної супердифузії наведено в [6, с. 2], де запропоновано ймовірнісну модель випадкового стрибкоподібного блукання на \mathbb{R} частинки X і показано, що ймовірність $u(t; x)$ присутності X у момент часу t у просторовій точці x є розв'язком рівняння (1). Типовим прикладом такого блукання є рискання голодної акули або політ полюючого стрижа.

Фундаментальний розв'язок $G_\alpha(t; x)$ задачі Коші (1), (2) при $\Omega = \mathbb{R}$, є щільністю розподілу α -стійкого стохастичного процесу Леві. Вивчення задачі Коші (1), (2) та функції $G_\alpha(t; x)$ проводилося в багатьох працях. Були розроблені різні методи

дослідження властивостей функції $G_\alpha(t; x)$ та сформульовані твердження про коректну розв'язність задачі Коші в різних функційних класах. Також з'ясовано типові властивості класичних розв'язків рівняння (1) та деяких його узагальнень.

Меншою мірою досліджена крайова задача для (1), при цьому дослідження в основному проводилися в обмеженій області (випадок $\Omega = [c; d]$), де зазвичай розглядалися нульові або сталі граничні умови Діріхле та акцентувалася увага на розробці методики знаходження числових розв'язків.

Майже зовсім поза увагою дослідників залишився неменш важливий випадок дослідження рівняння (1) в напівобмеженій області $\Omega = [0; +\infty)$. Також мало уваги приділено питанням встановлення єдиності розв'язку крайових задач для рівняння (1), його неперервної залежності від вихідних даних задачі, опису класів допустимих початкових та граничних даних задачі тощо. Все це свідчить про необхідність подальшого розвитку аналітичної теорії крайових задач для (1).

Покладемо $\Omega = (0; +\infty)$ і доповнимо рівняння (1) такими умовами:

$$u(t; x)|_{x=0} = \nu(t), \quad t \in (0; T]; \quad (3)$$

$$|u(t; x)| < +\infty, \quad t \in [0; T], x \geq 0. \quad (4)$$

Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

(А): на множині $(0; T] \times \Omega$ неоднорідність $f(t; x)$ рівняння (1) неперервна за змінною t і для неї існують $\rho < 1$ та $\lambda \in (0; \alpha)$ такі, що:

$$|f(t; x)| \leq ct^{-\rho}, \quad t \in (0; T], x > 0;$$

$$|f(t; x) - f(t; y)| \leq ct^{-\rho}|x - y|^\lambda, \quad t \in (0; T], \{x, y\} \subset \Omega;$$

(В): початкова функція $\varphi(x)$ обмежена та неперервна на множині Ω , окрім, можливо, скінченного числа точок розриву I-го роду x_j ;

(С): гранична функція $\nu(t)$ обмежена на $[0; T]$, неперервно диференційовна на $(0; T]$ така, що

$$|\nu'(t)| \leq ct^{-\gamma}, \quad \gamma < 1, t \in (0; T].$$

Правильне таке твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (А), (В) і (С). Тоді на множині $(0; T] \times \Omega$ для відповідної крайової задачі (1)–(5) існує єдиний регулярний розв'язок $u(t; x)$, який задовольняє початкову умову (2) у сенсі*

$$u(t; x) \xrightarrow{t \rightarrow +0} \varphi(x), \quad x \in (0; +\infty) \setminus \{x_j\}.$$

Література

- [1] Bucur, C., Valdinoci, E.: *Nonlocal diffusion and applications*. Lect. Notes Unione Mat. Ital. **20**. Springer, Berlin (2016). doi:10.1007/978-3-319-28739-3

e-mail: v.litovchenko@chnu.edu.ua

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИХОВАНИХ МАРКОВСЬКИХ ТА НАПІВМАРКОВСЬКИХ МОДЕЛЕЙ
ДО АНАЛІЗУ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Малик Ігор, Івасюк Роман

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьківця, Чернівці, Україна

Розглянуто застосування прихованих марковських моделей (НММ) та прихованих напівмарковських моделей (НСММ) для аналізу фінансових часових рядів, зокрема динаміки цін акцій. Метою є порівняння можливостей НММ і НСММ у відтворенні режимів ринку та описі тривалостей перебування у прихованих станах.

Нехай $\mathcal{S} = \{1, \dots, K\}$ — скінченна множина станів, $X_t \in \mathcal{S}$ — прихований стан у момент часу t , а Y_t — спостереження. Для НММ задаються початкові та перехідні ймовірності і емісійні розподіли:

$$\pi_i = \Pr(X_1 = i), \quad A_{ij} = \Pr(X_{t+1} = j \mid X_t = i),$$

$$f_j(y_t; \theta_j) = \Pr(Y_t = y_t \mid X_t = j, \theta_j).$$

Ймовірність (правдоподібність) послідовності спостережень $y_{1:T} = (y_1, \dots, y_T)$ за параметрів $\Theta = (\pi, A, \theta)$ записується як

$$L(\Theta) = \Pr(y_{1:T} \mid \Theta) = \sum_{x_{1:T} \in \mathcal{S}^T} \pi_{x_1} \left[\prod_{t=1}^T f_{x_t}(y_t; \theta_{x_t}) \right] \left[\prod_{t=1}^{T-1} A_{x_t x_{t+1}} \right].$$

Класична НММ фактично припускає геометричний розподіл *тривалості перебування у стані*. У НСММ це обмеження знімається шляхом введення явного розподілу тривалості для кожного стану $i \in \mathcal{S}$:

$$d_i(\tau) = \Pr(\text{перебування у стані } i \text{ триває } \tau).$$

$\tau \in \mathbb{N}$ для дискретного часу

Наявність $d_i(\tau)$ робить модель гнучкішою щодо фіксації довгих або коротких інтервалів стабільної волатильності, що характерно для фінансових рядів.

Здійснено порівняльне моделювання цін акцій провідних компаній із використанням НММ та НСММ (2024 р.). Показано, що НСММ надає точніший опис динаміки та дає кращу інтерпретацію *режимів* за рахунок явного моделювання тривалостей. Отримані результати підтверджують доцільність застосування НСММ у задачах аналізу та прогнозування фінансових часових рядів, коли емпіричні тривалості суттєво відхиляються від геометричного розподілу.

Подальший розвиток підходу може передбачати інтеграцію НСММ з методами машинного навчання. Це дозволить не лише підвищити точність прогнозування, а й адаптувати моделі до складних структур залежностей та мінливих умов фінансового ринку.

Крім того, перспективним напрямом є застосування цієї моделі до аналізу інших типів даних, зокрема макроекономічних показників, валютних курсів чи криптовалютних ринків. Подібний напрям відкриває можливості для нових досліджень та створення універсальних інструментів, здатних працювати з різними видами фінансових та економічних часових рядів.

Література

- [1] Малик І.В., Івасюк Р.В.. ПММ ТА НММ У ЧАСОВИХ РЯДАХ. Буковинський математичний журнал. 12, 2 (2024), 119-127.

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДУЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ
ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ З НЕЗАЛЕЖНИМИ Q_2 -ЦИФРАМИ СВОГО ЗОБРАЖЕННЯ

Олег Макарчук

*Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка,
Кропивницький, Україна*

Нехай задано $q_0 \in (0; 1)$, $A = \{0; 1\}$ — алфавіт, $T = A \times A \times \dots \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту. Покладемо $q_1 = 1 - q_0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$. Відомо [1], що для кожного $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in T$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right). \quad (1)$$

Подання числа x у вигляді (1) називається Q_2 -представленням. В подальшому для числа x будемо використовувати наступне Q_2 -зображення:

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}.$$

Нехай (ξ_k) — послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин, які набувають значень 0, 1 з ймовірностями p_0 , p_1 відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_2}.$$

Відомо [1], що випадкова величина ξ має чистий розподіл, зокрема: дискретний лише коли $p_0 \in \{0; 1\}$, абсолютно неперервний лише при $p_0 = \frac{1}{2}$ та сингулярний у всіх інших випадках.

Для характеристичної функції $f_\psi(t)$ випадкової величини ψ розглянемо значення:

$$L_\psi = \overline{\lim}_{|t| \rightarrow +\infty} |f_\psi(t)|.$$

Теорема 1. *Нехай $q_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, тоді для кожного $p_1 \in (0; 0,0142)$ виконується умова:*

$$L_\xi > 0,$$

більш того

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0} L_\psi = 1.$$

Література

- [1] Працевитый Н.В. *Распределения случайных величин с независимыми Q -символами // Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций.* — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.— С. 92-101.

e-mail: makolpet@gmail.com

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДРОНІВ ТА НАЗЕМНОГО ТРАНСПОРТУ

Сергій Мартинюк, Михайло Сидора

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці,
Україна*

Розширення математичних моделей для логістики дронів логічно приводить до необхідності враховувати поряд із ними й традиційні транспортні засоби. Пропонується підхід, що дозволяє порівняти ефективність безпілотних літальних апаратів (БПЛА) з автомобільним транспортом. Побудована узагальнена модель одночасно охоплює обидва типи перевізників та створює умови для визначення найкращих стратегій доставки залежно від особливостей конкретного сценарію [1].

Дрони й автомобілі: ключові відмінності. Безпілотники здатні долати відстані прямолінійними траєкторіями, що дає значний вигравш у часі для малих і термінових відправлень. У деяких випадках швидкість доставки може перевищувати автомобільну в кілька разів, причому витрати на одне замовлення залишаються нижчими. Водночас обмежена вантажопідйомність та запас батареї роблять їх менш придатними для масових перевезень. Автомобільні кур'єри, особливо електровантажівки, ефективніше справляються із великим обсягом посилок і здатні обслуговувати цілий район за один рейс. У сільській місцевості БПЛА демонструють перевагу завдяки прямим маршрутам та нижчим витратам палива, тоді як у міських умовах електротранспорт фактично зрівнюється з ними за екологічністю [2].

Узагальнена математична модель. Нехай: V — множина наземних транспортних засобів, D — множина дронів, N — множина замовлень. Мета — мінімізувати час завершення усіх доставок: $\min T$, де T — момент повернення до бази останнього із задіяних перевізників. Кожне замовлення повинне виконуватись рівно одним засобом:

$$\sum_{k \in V} x_{ik} + \sum_{l \in D} y_{il} = 1, \quad \forall i \in N,$$

де $x_{ik} = 1$, якщо завдання i виконує автомобіль k , а $y_{il} = 1$, якщо його обслуговує дрон l . У моделі також враховано обмеження на місткість авто, запас ходу та вантажність дронів, а за потреби — й часові вікна. Таким чином, вона узагальнює класичну VRP для змішаного парку і залишається NP-складною. Для практичного розв'язання найбільш перспективними є метаевристичні методи, зокрема алгоритми табу-пошуку та ройової оптимізації [3].

Постановка задачі та отримані результати. На основі моделі розв'язано приклад задачі «останньої милі» з одним депо та $N = 36$ адресами у змішаній місько-приміській зоні. Порівнювали три сценарії за критерієм мінімізації T : (i) лише авто (2 електровантажівки), (ii) лише дрони (6 БПЛА, радіус дії 12 км, вантажопідйомність 2 кг), (iii) гібрид (2 авто + 4 БПЛА). За однакових часових вікон і швидкостей, отримано: $T_{\text{auto}} \approx 165$ хв, $T_{\text{uav}} \approx 108$ хв (з урахуванням обмежень радіусу/ваги), $T_{\text{hybrid}} \approx 92$ хв. Таким чином, гібридний сценарій забезпечує найменший час завершення партії доставок за рахунок паралелізації та «розвантаження» критичних ділянок маршруту (деталі постановки та розв'язання подано у статті). Отже, гібридний сценарій «авто+БПЛА» забезпечує найменший час завершення доставок: $T_{\text{hybrid}} \approx 92$ хв проти $T_{\text{uav}} \approx 108$ хв і $T_{\text{auto}} \approx 165$ хв, що означає скорочення часу приблизно на 44% порівняно з лише авто та на 15% порівняно з лише дронами.

Умови ефективності. Запропонована модель дозволяє показати, що дрони найвигідніші у сценаріях із низькою щільністю адрес та вимогами до швидкої доставки на невеликих відстанях. Натомість у випадку великих замовлень або високої концентрації клієнтів на обмеженій території більш раціональним рішенням залишається автомобільний транспорт. Критичними параметрами є відстань між точками, технічні характеристики БПЛА та транспортної мережі. За радіусу до 10 км та невеликих пакунків повітряна доставка переважає за часом; у протилежних умовах перевага переходить до авто [2].

Гібридні рішення. Оптимальні результати дають змішані стратегії, коли автомобіль доставляє вантаж до проміжних точок, а дрони виконують останній етап маршруту. Це дозволяє скоротити логістичний цикл та поєднати сильні сторони обох типів транспорту. Сучасні експерименти показують, що такий підхід здатен істотно знизити час доставки й підвищити ефективність мережі навіть у складних умовах [3].

Література

- [1] Martyniuk S.V., Sydora M.I. Optimization of drone routes in logistics.
<https://surl.luh.gov.ua/xqnnjh>
- [2] Raghunatha A., Lindkvist E., Thollander P., Hansson E., Jonsson G. Critical assessment of emissions, costs, and time for last-mile goods delivery by drones versus trucks.
<https://www.nature.com/articles/s41598-023-38922-z>
- [3] Tong B., Wang J., Wang X., Zhou F., Mao X., Zheng W. Optimal Route Planning for Truck–Drone Delivery Using Variable Neighborhood Tabu Search Algorithm.
<https://www.mdpi.com/2076-3417/12/1/529>

e-mail: s.martyniuk@chnu.edu.ua, sydora.mykhailo@chnu.edu.ua

ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЦЬ РЕЗУЛЬТАТУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ДИСКРЕТНОЇ ДИНАМІЧНОЇ КООПЕРАТИВНОЇ ГРИ

Сергій Мартинюк, Вячеслав Цуркан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

У роботі досліджується практичне використання матриць результату для знаходження оптимальної стратегії для дискретної динамічної кооперативної гри. Математична модель гри, яка охоплює всі ігрові дії команди у волейболі, може бути представлена графом та розбита на комплекси. Дане розбиття можна розглядати як класичне [1].

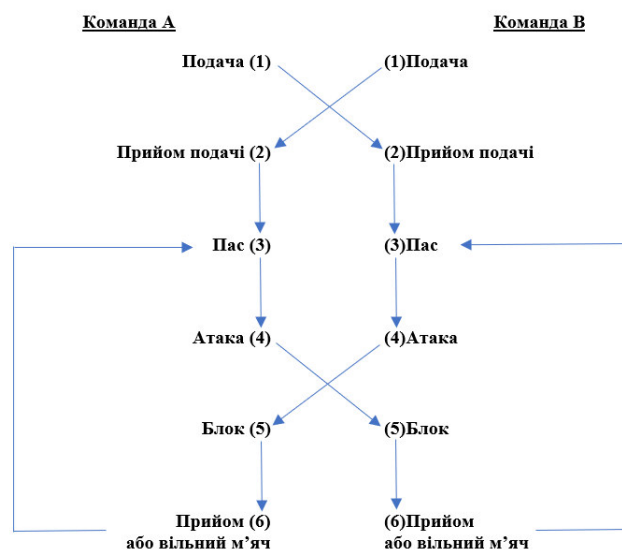


Рис. 1. Графічне зображення гри

Комплекс атаквальний Attack Process (AP): Послідовні дії від прийому подачі (2) до пасу (3) та атаки (4). Цей процес ініціюється подачею суперника та закінчується, коли команда повертає м'яч супернику.

Комплекс контратакувальний Counterattack Process (CP): Послідовні дії від блоку (5) до прийому або вільного м'яча (6) до пасу (3) та атаки (4). Цей процес ініціюється атакою суперника та закінчується, коли команда повертає м'яч супернику.

Кожний із даних комплексів AP та CP, можемо розглядати як дискретну динамічну кооперативну гру для кількості гравців $N = 6$ та кількості етапів $M = 3$ або 4 відповідно. Дискретний підхід дозволяє чітко моделювати послідовні етапи прийняття рішень. Динамічність ринкового середовища характеризується швидкими змінами технологій, законодавства, появою нових конкурентів. Динамічні ігри дозволяють враховувати зміни стану системи від етапу до етапу і передбачати їхній вплив на стратегії гравців. У корпоративному середовищі важливо враховувати наслідки дій у довгостроковій перспективі, а не тільки миттєву вигоду, тому з допомогою дискретних динамічних ігор можна моделювати ситуації, коли теперішні рішення впливають на майбутні можливості [2].

Збір даних для формування матриць результату проводився з використанням даних волейбольної статистики проведених офіційних матчів жіночих волейбольних команд майстрів Вищої ліги України. Тобто для кожної ігрової дії, для кожного гравця ми маємо сформовані матриці результату [3]. У абсолютних величинах задані матриці використаємо для формування векторів ймовірності дій.

Нехай P_{win}^k , P_{lost}^k , P_{pass}^k ймовірності виграшу, програшу та передачі ходу іншому гравцю на k -му ($k \in [1; M]$) етапі гравця G_i ($j \in [1; N]$). Тобто у матричній

$$\text{формі } P_{win} = \begin{pmatrix} P_{win}^1 \\ P_{win}^2 \\ \dots \\ P_{win}^M \end{pmatrix}, P_{lost} = \begin{pmatrix} P_{lost}^1 \\ P_{lost}^2 \\ \dots \\ P_{lost}^M \end{pmatrix}, P_{pass} = \begin{pmatrix} P_{pass}^1 \\ P_{pass}^2 \\ \dots \\ P_{pass}^M \end{pmatrix}, \text{ де } P_{win}^k, P_{lost}^k, P_{pass}^k$$

вектори ймовірностей для кожного гравця розмірністю N , і ($k \in [1; M]$).

Щоб гра дійшла до гравця, потрібно, щоб гравці на попередніх етапах передали хід далі, не виконуючи дії. Ця схема є ланцюгом Маркова першого порядку. Цю послідовність запишемо в матрицю ймовірності переходу:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & \dots & p_{2N} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & \dots & p_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Для визначення ймовірності отримання ходу гравцем на визначеному етапі, визначимо початковий вектор стану.

$$V^1 = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_N),$$

де елементами будуть ймовірності отримання першого ходу гравцем. Для k -го етапу рівність набуде такого вигляду:

$$V^k = (V^{k-1} \cdot P_{pass}^{k-1}) \times T = (V^1 \cdot P_{pass}^1 \cdot P_{pass}^2 \cdot \dots \cdot P_{pass}^{k-1}) \times T^{k-1}$$

Отже, загальна ймовірність виграшу гравців на всіх етапах, можна зобразити у вигляді матриці:

$$W^k = V^k \cdot P_{win}^k$$

Для визначення ймовірності виграшу гравців на k -му етапі W_k , обчислимо як добуток Адамара ймовірності досягнення ходу до гравця на k -му етапі та ймовірності виграшу

гравця при здійсненні дії на даному етапі: $W = \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ \dots \\ W^M \end{pmatrix}$, де W^k вектор ймовірностей

виграшу для кожного гравця розмірністю N на етапі k ($k \in [1; M]$).

Знайдена матриця і є ймовірністю виграшу гравців на будь-якому етапі при виконанні дії, що передбачає врахування всіх можливих рішень гравців на попередніх етапах.

Література

- [1] Eom H. J., Schutz R. W. (1992). Statistical Analyses of Volleyball Team Performance. Research Quarterly for Exercise and Sport, Vol. 63, No 1, 11-18.
- [2] Drikos S., Ntzoufras I., Apostolidis N. (2019, June). Bayesian analysis of skill importance in world champions men's volleyball across ages. International Journal of Computer Science in Sport.
- [3] Мартинюк Сергій, Цуркан Вячеслав. Побудова математичної моделі гравця з використанням матриці результатів. Збірник статей, «Математика. Інформаційні технології. Освіта», №11 (2024). м. Луцьк. С. 86XIII

e-mail: s.martyniuk@chnu.edu.ua, vi.tsurkan@gmail.com

ПРО ОЦІНКУ α -МІРИ ГАУСДОРФА НА $(0, 1]$ ВІДНОСНО СІМЕЙСТВ ПОКРИТТІВ,
ЩО ПОРОДЖЕНІ ДОДАТНИМИ РОЗКЛАДАМИ ПЕРРОНА

Микола Мороз

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Означення 1 ([3]). *Додатним розкладом Перрона дійсного числа $x \in (0, 1]$ називають його розклад в ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 \cdots r_n}{(p_1 - 1)p_1 \cdots (p_n - 1)p_n p_{n+1}}, \quad (1)$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ та $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовності натуральних чисел такі, що $p_n \geq r_{n-1} + 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Розклади Перрона є узагальненням додатних розкладів Люрота, класичних та модифікованих розкладів Енгеля, розкладів Сильвестера, *ДКВ*-розкладів тощо.

Зафіксуємо послідовність P функцій φ_n таких, що $\varphi_0 = \text{const} \in \mathbb{N}$ та $\varphi_n: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ для $n \in \mathbb{N}$. Якщо $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то розклад (1) називають P -представленням числа x та позначають $\Delta_{p_1 p_2 \dots}^P$, а число $p_n = p_n(x)$ називають n -ною P -цифрою числа x . Для довільної послідовності P кожне число $x \in (0, 1]$ має єдине P -представлення [3], а тому P -цифри числа визначені однозначно.

Для натуральних чисел c_1, \dots, c_k , що задовольняють умову $c_i > \varphi_i(c_1, \dots, c_{i-1})$ при всіх $1 \leq i \leq k$, визначимо множину

$$\Delta_{c_1 \dots c_k}^P = \{x \in (0, 1]: p_1(x) = c_1, \dots, p_k(x) = c_k\}, \quad (2)$$

яку називають P -циліндром рангу k з основою $c_1 \dots c_k$. Відомо [3], що P -циліндри є проміжками виду $(a, b]$.

Для кожного P -представлення розглянемо два сімейства покриттів:

- \mathfrak{P} — сімейство множин, які є об'єднанням послідовних P -циліндрів однакового рангу та містяться в одному P -циліндрі попереднього рангу. Іншими словами, сімейство \mathfrak{P} складається з усіх множин наступних двох видів:

$$\bigcup_{\substack{i=n \\ n \geq r_k+1}}^m \Delta_{c_1 \dots c_k i}^P, \quad \bigcup_{\substack{i=n \\ n \geq r_k+1}}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_k i}^P,$$

де $r_k = \varphi_k(c_1, \dots, c_k)$.

- \mathfrak{P}_0 — сімейство, що є частиною сімейства \mathfrak{P} та складається лише зі скінченних об'єднань P -циліндрів.

Означення 2. α -мірою Гаусдорфа множини $E \subset (0, 1]$ відносно сімейства \mathfrak{P} називається величина

$$H^\alpha(E, \mathfrak{P}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\inf_{|E_j| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\} \right), \quad (3)$$

де інфімум обчислюється за всіма не більш ніж зчисленими ε -покриттями множини E проміжками E_j із сімейства \mathfrak{P} .

Аналогічно означається α -міра Гаусдорфа відносно сімейства \mathfrak{P}_0 .

Лема 1. Довільний проміжок $U = (x_1, x_2] \subset (0, 1]$ можна покрити не більше ніж трьома множинами із сімейства \mathfrak{P} , діаметр яких не перевищує $|U|$.

Теорема 1. Для кожної множини $E \subset (0, 1]$ та довільного $\alpha > 0$ між класичною α -мірою Гаусдорфа $H^\alpha(E)$ та α -мірою Гаусдорфа відносно сімейства \mathfrak{P} має місце співвідношення

$$H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E, \mathfrak{P}) \leq 3H^\alpha(E). \quad (4)$$

Теорема 1 покращує відомі оцінки для $H^\alpha(E, \mathfrak{P})$ у випадках, коли P -представлення є додатним розкладом Люрота [2, 5], класичним розкладом Енгеля [1, 2] чи розкладом Сильвестера [2], та узагальнює їх.

Теорема 2. Для кожної множини $E \subset (0, 1]$ та довільного $\alpha > 0$ між α -мірами Гаусдорфа відносно сімейств \mathfrak{P} та \mathfrak{P}_0 має місце співвідношення

$$H^\alpha(E, \mathfrak{P}) = H^\alpha(E, \mathfrak{P}_0). \quad (5)$$

Теорема 2 уточнює результат із [4] для розкладів Оппенгейма та узагальнює його на більш широкий клас додатних розкладів Перрона.

Література

- [1] Барановський О.М., Гетьман Б.І., Працьовитий М.В. Циліндричні множини E -зображення чисел і фрактальна розмірність Гаусдорфа–Безиковича, Буковинський математичний журнал, **11** (2023), 63–70.

- [2] Garko I., Nikiforov R., Torbin G. *On the G -isomorphism of probability and dimensional theories of representations of real numbers and fractal faithfulness of systems of coverings*, Theory of Probability and Mathematical Statistics **94** (2017), 17–36.
- [3] Moroz M. *Representation of Real Numbers by Perron Series, Their Geometry, and Some Applications*, Journal of Mathematical Sciences **279** (2024), 384–399.
- [4] Sun Yu, Zhang Zh., Liu J. *On the Hausdorff dimension faithfulness of Oppenheim expansion*, Acta Arithmetica **180** (2017), 89–99.
- [5] Zhykharyeva Yu., Pratsiovytyi M. *Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers*, Algebra and Discrete Mathematics **14** (2012), 145–160.

e-mail: moroznik22@gmail.com

ОДНОПАРАМЕТРИЧНА СІМ'Я ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНИХ З
 Q_2 -ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ
Валентина Назарчук

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Нехай $A_2 = \{0, 1\}$ – двосимвольний алфавіт, $L_2 = A_2 \times A_2 \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць), Φ – сім'я фінітних функцій φ двох змінних, а саме $\varphi : A_2 \times A_2 \rightarrow A_2$.

Нехай $\varphi_n \in \Phi$ для будь-якого $n \in N$. Розглядається функція, означена рівністю

$$f_a(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{\varphi_1(a_1, \alpha_1) \varphi_2(a_2, \alpha_2) \dots \varphi_n(a_n, \alpha_n) \dots}^{Q_2}, \quad (1)$$

де $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$ – Q_2 -зображення чисел [1] з параметром $q_0 \in (0; 1)$ і $q_1 = 1 - q_0$, тобто

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2} = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n q_{1-\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i},$$

і $a = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{Q_2}$ – фіксований параметр з $[0; 1]$.

Означення функції f_a рівністю (1), взагалі кажучи, є некоректним, оскільки для формально різних зображень одного і того ж числа $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q_2} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_n-1](1)}^{Q_2}$ має місце нерівність $f_a(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n(0)}^{Q_2}) \neq f_a(\Delta_{\alpha_1 \dots [\alpha_n-1](1)}^{Q_2})$. Тому домовимось не використовувати одне із зображень Q_2 -бінарного числа, а саме те, що містить період (1).

Якщо a – довільне число з $[0; 1]$ і $\varphi_n(u, v) = v \forall n \in N$, то $f_a(x) = x$, якщо ж $\varphi_n(u, v) = 1 - v \forall n \in N$, то $f(x) = I(x)$ – неперервна строго спадна функція, яка при $q_0 = \frac{1}{2}$ є сингулярною (неперервною, відмінною від константи, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

Зрозуміло, що за умови $\varphi_n(u, v) = u$ або $\varphi_n(u, v) = 1 - u$, то $f_a(x) = \text{const}$.

Теорема 1. *Якщо $\varphi_n(u, v) = uv$ для будь-якого $n \in N$, то при $a = \Delta_{(1)}^{Q_2}$ функція $f_a(x) = x$; при $a = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n(1)}^{Q_2}$ функція $f(x)$ є кусково-лінійною на $[0; 1]$ і лінійною на кожному циліндрі $(n + 1)$ рангу. Якщо ж $\varphi_n(u, v) = 1 - uv$ і у зображенні числа a , починаючи з деякого номера $k \in N$, $a_{k+i} = 1 \forall i \in N$, то функція $f_a(x)$ сингулярна на кожному циліндрі $(k + 1)$ -го рангу при $q_0 \neq \frac{1}{2}$.*

Нехай $\varphi_n(u, v) = uv \forall n \in \mathbb{N}$. Якщо в Q_2 -зображенні числа a скінченна кількість одиниць, то множина значень функції f_a є скінченим об'єднанням точок; якщо кількість нулів серед цифр Q_2 -зображення a скінченна, то множина значень є об'єднанням відрізків; в решті випадків множиною значень функції $f_a(x)$ є множина канторівського типу (ніде не щільна множина нульової міри Лебега).

У доповіді будуть представлені результати дослідження деяких представників класу функцій f_a , зокрема приділяється увага питанню фрактальних властивостей множин значень, множин рівнів та графіків функцій.

Література

- [1] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.

e-mail: nazarchukvalentyna@imath.kiev.ua

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, N.V.)

ПРО ПЕРЕХІДНІ ВІДОБРАЖЕННЯ Василь Нестеренко, Олена Фотій

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці,
Україна*

Поняття перехідності для функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ було введено Володимиром Маслюченком в праці [1]. Воно легко переноситься на випадок дійснозначних функцій, які визначені на довільних топологічних просторах.

Означення 1. *Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається перехідною в точці $x \in X$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують числа y_1, y_2 , такі, що $f(x) - \varepsilon < y_1 < f(x) < y_2 < f(x) + \varepsilon$ та існує окіл U точки x в X , такий, що $U \cap f^{-1}(\{y_1, y_2\}) = \emptyset$. Якщо функція перехідна в кожній точці, то вона називається перехідною.*

Як з'ясувалося, перехідність є досить простою умовою. Так кожна функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ сумою двох перехідних функцій. Кожна монотонна функція, чи кожна неперервна функція, а також кожна функція із замкненим графіком є перехідною. Однак, не всі функції є перехідними.

Поняття перехідності було перенесено на випадок довільних топологічних просторів у праці [2].

Означення 2. *Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається перехідним у точці $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y , такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$ і просто перехідним, якщо воно є таким у кожній точці з X .*

Поряд з поняттям перехідності виникли деякі її послаблення, такі, як слабка перехідність та слабка квазіперехідність. У все тій же праці [2] було показано, що слабка квазіперехідність пов'язана з відомою властивістю відображень під назвою "властивість типу Чезаро": відображення має властивість типу Чезаро тоді і тільки тоді, коли воно не є слабко квазіперехідним.

Виявилося, що дослідженням подібних властивостей відображень приблизно в цей же час займалися і інші математики. Так в праці [3] Н. Левін увів поняття w^* -неперервності і довів, що для довільних топологічних просторів X і Y відображення $f : X \rightarrow Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно слабо неперервне і w^* -неперервне. Р. Мімна та Д. Розе узагальнили поняття w^* -неперервності, увівши в [4] поняття локальної w^* -неперервності (а пізніше, і поняття локальної відносної неперервності). Ці поняття застосовувалися для встановлення результатів про декомпозицію неперервності, в яких неперервність розкладалася на два типи ослаблень: ослаблення типу перехідності та ослаблення типу зв'язності графіка.

В [2] вдалося отримати наступний результат про декомпозицію неперервності.

Теорема 1. *Нехай X – локально зв'язний простір і Y – топологічний простір. Відображення $f : X \rightarrow Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно має слабку властивість Дарбу (образ кожної області є зв'язною множиною) і є перехідним.*

Цей результат узагальнює всі попередні відомі результати на цю тему, зокрема, добре відомий результат про неперервність дійсної функції із замкненим і зв'язним графіком.

Література

- [1] Крецу В.І., Маслюченко В.К. Неперервність за Стеллінгзом, нарізна неперервність та функції з замкненим графіком. – Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007, – С. 50 - 54.
- [2] Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Декомпозиція неперервності та перехідні відображення. – Математичний вісник НТШ. – 2011 р. – Т.8. – С. 132 - 150.
- [3] Levine N. A decomposition of continuity in topological spaces. – Am. Math. Mon. – 1961. – 68. – P. 44–46.
- [4] Mimna R., Rose D. On local relative continuity. – Real Anal. Exch. – 1995. – 20, 2. – P. 823–830.

e-mail: v.nesterenko@chnu.edu.ua, o.fotij@chnu.edu.ua

НЕПЕРЕРВНИЙ ПРОЄКТОР ДВІЙКОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ В ЛАНЦЮГОВЕ
 A_2 -ЗОБРАЖЕННЯ

Олена Нікорак

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Нехай $A_2 = \{\frac{1}{2}; 1\}$ – алфавіт, $L_2 = A_2 \times A_2 \times \dots \times A_2 \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту. Тоді [1, 2] для будь-якого $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ існує послідовність $(a_n) \in L_2$ така, що

$$x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}, \text{ де } a_i \in A_2. \quad (1)$$

Розклад числа x в ланцюговий дріб (1) називається *ланцюговим A_2 -представленням*, а скорочений запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}$ – *ланцюговим A_2 -зображенням*.

Існують числа, що мають два ланцюгових зображення (A_2 -бінарні). Це числа виду

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}1)}^{A_2} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1(\frac{1}{2})}^{A_2}$$

A_2 -бінарні числа утворюють зліченну всюди щільну у $[\frac{1}{2}; 1]$ множину. Решта чисел мають єдине зображення. Їх називають A_2 -унарними.

Розглядається функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\dots}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{1-\alpha_1}(\frac{1}{2})^{\alpha_2}\dots(\frac{1}{2})^{1-\alpha_{2n-1}}(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}}\dots}^{A_2},$$

де $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}$ – класичне двійкове зображення числа $x \in [0; 1]$.

Означення функції f є коректним, оскільки має місце рівність для будь-якого набору $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$

$$f(\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_{2n}1(0)}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{1-\alpha_1}\dots(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}}1(\frac{1}{2})}^{A_2} = f(\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_{2n}0(1)}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{1-\alpha_1}\dots(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})}^{A_2}$$

Теорема 1. *Функція f є неперервною строго спадною сингулярною функцією (неперервною функцією, відмінною від константи, похідна якої дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).*

Теорема 2. *Графік Γ_f функції є автомодельною множиною $\Gamma_f = \bigcup_{(i,j) \in A \times A} g_{ij}(\Gamma_f)$, де*

$$g_{ij} : \begin{cases} x' = \frac{x}{2^2} + \frac{2i+j}{2^2}, \\ y' = \frac{1}{2^{i-1} + \frac{1}{2^{-j+y}}}, \end{cases} \quad (i, j) \in A \times A.$$

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, диференціальних та інтегральних властивостей функції f .

Література

- [1] Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Pratsiovytyi M.V. *A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry* // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [2] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.

e-mail: 23fmif.o.nikorak@std.edu.edu.ua

ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ
ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Михайло Пастула

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Метод усереднення для багаточастотних диференціальних рівнянь обґрунтовано в працях А.М. Самойленка, Р.І. Петришина [1] та інших вчених. Багаточастотні системи із запізненням аргументу й інтегральними умовами методом усереднення досліджувалися в працях Я.Й. Бігуна, І.Д. Скутаря [2], [3]. Задачі з багатоточковими умовами розглянуті у праці [4].

У даній роботі метод усереднення обґрунтований для багаточастотної системи першого наближення вигляду

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= X_0(\tau, a) + \varepsilon X_1(\tau, a, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_1(\tau, a, \varphi),\end{aligned}\tag{1}$$

де $\tau \geq 0$, вектор-функції X_0, X_1, Y_1 і ω визначені при $\tau \in [0, +\infty)$, $a \in D$ - обмежена область в \mathbb{R}^n , $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$. Для розв'язку системи рівнянь задані інтегральні умови

$$\begin{aligned}\int_0^L f(\tau, a, \varphi) d\tau &= d_1, \\ \int_0^L [g(\tau, a)\varphi + h(\tau, a, \varphi)] d\tau &= d_2,\end{aligned}\tag{2}$$

де f, g, h - задані вектор-функції, визначені при $\tau \in [0, +\infty)$, $d_1 \in \mathbb{R}^n$, $d_2 \in \mathbb{R}^m$.

Відповідна (1) усереднена система рівнянь за швидкими змінними $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ набуває вигляду

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \bar{a}) + \varepsilon X_{10}(\tau, \bar{a}), \quad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_{10}(\tau, \bar{a}),\tag{3}$$

із інтегральними умовами

$$\begin{aligned}\int_0^L f_0(\tau, \bar{a}) d\tau &= d_1, \\ \int_0^L [g(\tau, \bar{a})\bar{\varphi} + h_0(\tau, \bar{a})] d\tau &= d_2,\end{aligned}\tag{4}$$

Зауважимо, що усереднена задача значно простіша, ніж (1), (2), оскільки повільні змінні \bar{a} визначаються незалежно від швидких змінних $\bar{\varphi}$.

Складністю обґрунтування методу усереднення є наявність резонансів, умова яких

$$k_1\omega_1(\tau, a) + \dots + k_m\omega_m(\tau, a) \cong 0, \quad |k_1| + \dots + |k_m| \neq 0.$$

Умову виходу із малої резонансної зони запишемо у вигляді

$$\det(W_p^\tau(t)W_p(\tau)) \neq 0, \quad W_p(\tau) = \left(\frac{d^{j-1}}{d\tau^{j-1}} \omega_v(\tau) \right)_{j,v=1}^{p,m}\tag{5}$$

для всіх $\tau \in [0, +\infty]$.

Основним результатом роботи є теорема

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

- 1) вектор-функції X_0, X_1, Y_1 визначені і неперервні разом із частинними похідними до порядку $m + 1$ в області $[0, +\infty) \times D \times \mathbb{R}^m$;
- 2) вектор-функція ω визначена і неперервна разом із частинними похідними в області $[0, +\infty) \times D$ до порядку m ;

- 3) існує єдиний розв'язок задачі (3),(4), який лежить в D разом із ρ -околом;
 4) виконується умова (5) при деякому мінімальному $p \geq m$;
 5) нормальна фундаментальна матриця $Q(\tau, t)$, $Q(t, t) = E_m$ рівняння у варіаціях

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial X(\bar{a}(\tau), \tau)}{\partial a} z$$

спрваджує оцінку

$$\|Q(\tau, t)\| \leq Ke^{-\gamma(r-t)} \quad \forall \tau \geq t \geq 0.$$

Тоді для досить малого $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок усередненої задачі, такий що для будь-якого $\tau \in [0, +\infty)$ виконується нерівність

$$\|a(\tau; \bar{y} + \mu, \psi + \zeta, \varepsilon) - \bar{a}(\tau; \bar{y}, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^\alpha, \quad (6)$$

де $\alpha = \frac{1}{m}$, $c > 0$ і не залежить від ε .

Література

- [1] Samoilenko A., Petryshyn R. Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. Dordrecht: Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2004. 317 p.
- [2] Бігун Я. Й., Скутар І. Д. Усереднення в багаточастотних системах із запізненням та локально-інтегральними умовами. Буковинський математичний журнал. 2020. Т. 8, № 2. С. 14–23.
- [3] Скутар І.Д. Дослідження системи з лінійно перетвореними аргументами і нелінійними інтегральними умовами. Science and Education a new Dimension. Budapest, 2021. Natural and Technical Sciences, IX(31), Issue 250, P. 18-22.
- [4] Пастула М.О. Усереднення в багаточастотних системах першого наближення із залежністю частот від повільних змінних. Буковинський математичний журнал. 2025. Т. 13, № 1. С. 34–44.

e-mail: pastula.mykhailo@chnu.edu.ua

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ НА НЕСКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ

Олег Перегуда, Юрій Перестюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Розглядається задача оптимального керування функціонально-диференціальним рівнянням нейтрального типу

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t) + g(t, u_t)) = Au + f_1(t, u_t) + f_2(t, u_t)z(t), \\ u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

з критеріями якості

$$J[z] = \int_0^\tau (e^{-\gamma t} G(t, u_t) + B(t, z(t))) dt \rightarrow \min \quad (2)$$

та

$$J[z] = \int_0^\tau (e^{-\gamma t} G(t, u_t) + |z(t)|^2) dt \rightarrow \inf, \quad (3)$$

де $h > 0$ - інтервал запізнення, $t \geq 0$, $u_t = u(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

Нехай X - рефлексивний банаховий простір, A - лінійний оператор в банаховому просторі $X(A : X \rightarrow X)$ з нормою $\|\cdot\|_X$ з областю $D(A)$ яка є щільною в X і $\sigma(-A)$ є спектром $(-A)$, $Re(\sigma(-A)) > \delta > 0$ та A^{-1} є компактним оператором в X . Тоді згідно [2] для будь якого $\alpha \in [0, 1]$ можемо визначити дробову степінь $(-A)^\alpha$ оператора $(-A)$ який є замкненим лінійним оператором з областю $D((-A)^\alpha)$.

Позначимо через X_α - банаховий простір $D((-A)^\alpha)$ з нормою $\|u\|_\alpha := \|(-A)^\alpha u\|$.

Для всіх $t \geq 0$ u_t належить простору $C = C([-h, 0], X)$ - неперервних функцій зі стандартною нормою $\|\varphi\|_C := \max_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|_X$, D - деяка область в $[-h, \infty] \times C$, ∂D -

її межа і $\bar{D} = D \cup \partial D$, τ - момент першого виходу розв'язку (t, u_t) на ∂D .

Відображення f_1 і f_2 визначені на D наступним чином: $f_1 : D \rightarrow X$, $f_2 : D \rightarrow L(X, X)$, де $L(X, X)$ - простір лінійних обмежених операторів, що діють з X в X з нормою $\|\cdot\|_L$, $z(t)$ - параметр керування.

Розв'язок початкової задачі (1) будемо розуміти в м'якому сенсі.

Задачі оптимального керування (1)-(2), (1)-(3) розглядаються при умовах:

A1) допустимі керування є функції $z(t) \in L^p((0, \infty); X)$ ($p > 1$) з відповідною нормою $\|z\|_p^p = \int_0^\infty \|z(t)\|^p dt$, $z(t) \in F$ м.с., $t \geq 0$, де F є опуклою, замкненою множиною в X , $0 \in X$ і $J[z] < \infty$.

A2) f_1, f_2 є неперервні по φ для фіксованих t , f_1, f_2 є вимірні по t для фіксованих φ .

A3) $\exists K > 0$ - const:

$$\|f_1(t, \varphi)\| + \|f_2(t, \varphi)\|_L \leq K(1 + \|\varphi\|_C)$$

для всіх $(t, \varphi) \in D$.

A4)

$$\|f_1(t, \varphi_1) - f_1(t, \varphi_2)\| + \|f_2(t, \varphi_1) - f_2(t, \varphi_2)\|_L \leq K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C$$

для всіх $(t, \varphi_1), (t, \varphi_2) \in D$.

A5) $\exists \alpha \in [0, 1]$, $M_g \in (0, \frac{1}{2})$ такі, що $g : D \rightarrow X_\alpha$;

A6) $\|g(t, \varphi_1) - g(t, \varphi_2)\|_\alpha \leq M_g \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C$ для всіх $(t, \varphi_1), (t, \varphi_2) \in D$;

A7) функція $g(t, \varphi)$ є неперервною по t в нормі X_α рівномірно відносно φ ;

A8) $\exists L > 0$:

$$\|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\| \leq L \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| d\theta + M_g \|\varphi(0) - \psi(0)\|$$

для всіх $(t, \varphi), (t, \psi) \in D$;

A9) відображення $G : D \rightarrow R^1$ є неперервним за сукупністю змінних, $G(t, \varphi) \geq 0$. Існує стала K_G така, що

$$G(t, \varphi) \leq K_G(1 + \|\varphi\|_C);$$

A10) відображення $B : [0, \infty) \times X \rightarrow R^1$ є вимірним за сукупністю змінних, опуклим по змінній z для всіх t . Існують додатні сталі a_0, a_1 такі, що

$$a_1 \|z\|^p \geq B(t, z) \geq a_0 \|z\|^p, \quad t \geq 0;$$

A11) $B(t, z)$ для всіх $t \geq$ сильно диференційовано по z і похідна Фреше $\frac{\partial B}{\partial z}$ задовольняє оцінку

$$\left\| \frac{\partial B}{\partial z} \right\|_{X^*} \leq a_3 \|z\|_{L^p}^{p-1}$$

при $t \geq 0$, $a_3 > 0$ - стала, $\|\cdot\|_{X^*}$ - рівномірна операторна норма в просторі лінійних неперервних функціоналів над X .

Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови A1)-A11). Тоді задачі оптимального керування (1)-(2), (1)-(3) мають розв'язки $(u^*(t), z^*(t))$, де $z^*(t)$ - оптимальне керування, $u^*(t)$ - відповідна оптимальна траєкторія, τ^* - момент першого виходу u_t^* на межу ∂D області D .*

Встановлено варіаційні співвідношення, а саме, доведена слабка збіжність оптимальних керувань, сильна збіжність оптимальних траєкторій, збіжність критеріїв якості задач на скінченних інтервалах до відповідних оптимальних керувань, оптимальних траєкторій та критерія якості задачі на нескінченному інтервалі.

Зазначимо, що момент виходу τ залежить від керування z , що суттєво ускладнює задачу. Відомо, [1], що на відміну від рівнянь без запізнення, розв'язок початкової задачі (1) може і не досягати області D .

В роботі [3] розглядалася аналогічна задача оптимального керування на скінченному інтервалі.

Література

- [1] Hale J.K. *Theory of Functional Differential Equation*, New York : Springer-Verlag 1977.
- [2] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Functional Differential Equations*, New York : Springer-Verlag, , 1983.
- [3] Perehuda O.V., Stanzhytskiy O.M., Klimchuk T.V., Ospanov M.N., *Optimal Control for Functional-Differential Equation of Neutral Type in Banach Spaces // Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*. 2025. – V 33, № 1.– P. 182–207.

e-mail: perehuda.o@knu.ua
e-mail: perestyuk.yuriy@knu.ua

ЛОКАЛЬНО СКЛАДНІ ФУНКЦІЇ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ, ОЗНАЧЕНІ У
ТЕРМІНАХ ДВОСИМВОЛЬНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЧИСЕЛ

Микола Працьовитий

УДУ імені Михайла Драгоманова, ІМ НАН України, Київ, Україна

Нехай задано: $A = \{0; 1\}$ – двосимвольний алфавіт, $L = A \times A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць), (q_0, q_1) , (d_0, d_1) – пари додатних дійсних чисел, менших 1, $q_1 = 1 - q_0$.

Для довільної послідовності $(\alpha_n) \in L$ покладемо

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2} \equiv \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} [\alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i}], \quad \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^D \equiv \alpha_1 d_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} [\alpha_k d_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} d_{\alpha_i}]$$

і означимо функцію f рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^D \quad (1)$$

Оскільки для Q_2 -бінарного числа $x_0 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n(0)}^{Q_2} = \Delta_{c_1 c_2 \dots [c_n-1](1)}^{Q_2}$ формула (1) дає різні значення, коли $d_0 + d_1 \neq 1$, то ради коректності означення функції домовимось використовувати лише одне з зображень Q_2 -бінарного числа, а саме з періодом (0).

Теорема 1. 1. Якщо $d_0 + d_1 = 1$, то $f(x) = x$, коли $d_0 = q_0$; і f є строго зростаючою сингулярною функцією розподілу на $[0, 1]$, носій якого має фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича $\frac{\ln d_0^{d_0} d_1^{d_1}}{\ln d_0^{d_0} d_1^{d_1}}$, коли $d_0 \neq q_0$.

2. Якщо $d_0 + d_1 < 1$, то множина значень функції є ніде не щільною фрактальною множиною, розмірність якої є розв'язком рівняння $d_0^x + d_1^x = 1$.

3. Якщо $d_0 + d_1 > 1$, то множиною значень функції f є відрізок $[0; \frac{d_0}{1-d_1}]$. У цьому випадку функція має фрактальні рівні.

У доповіді детально аналізуються структурні, тополого-метричні та фрактальні властивості рівнів функції та автомодельні властивості графіка, а також задання функції системою функціональних рівнянь.

Ще одним з об'єктів розгляду є випадкова величина $Y = f(X)$, де X – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[0; 1]$. Аналізується лебегівська структура розподілу та спектральні властивості випадкової величини Y .

Випадок, коли $d_0 + d_1 = 1 + d_0 d_1$ є особливим, саме йому планується у доповіді приділити найбільше уваги.

Література

- [1] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [2] Працьовитий М. В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.

e-mail: prats4444@gmail.com

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ З НЕНУЛЬОВОЮ НАДЛИШКОВІСТЮ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
Микола Працьовитий¹, Юлія Вовк², Світлана Васькевич³
*Інститут математики НАН України^{1,3}, УДУ імені Михайла Драгоманова¹,
 ЧОШПО імені К.Д. Ушинського², Україна*

Нехай a – фіксоване додатне дійсне число, більше 1; m – натуральне число, більше a ; $A = \{0, 1, \dots, m\}$ – алфавіт; $L = A \times A \times \dots$ – множина послідовностей з елементів алфавіту.

Розглядається відображення $\gamma : L \rightarrow [0; \frac{m}{a-1}]$, а саме

$$\gamma(\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{a^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{m_a} = x \in \left[0; \frac{m}{a-1}\right].$$

Символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{m_a}$ ми називаємо m_a -зображенням числа x , α_n при цьому називаємо n -ою цифрою даного зображення.

Легко довести, що умова $m > a$ гарантує існування чисел, які мають більше двох зображень, що породжує ненульову надлишковість даного $(m + 1)$ -символьного кодування чисел.

Аналізуючи надлишковість системи кодування чисел, масивність, тополого-метричні і фрактальні властивості множин $\gamma^{-1}(x)$, де $x \in [0; \frac{m}{a-1}]$, які називаються *рівнями відображення*, ми пропонуємо конкретні (однозначні) твердження.

Другим об'єктом дослідження є функція

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{m+1}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{m_a},$$

яка не має проміжків монотонності і має континуальні і навіть фрактальні рівні.

Третім об'єктом дослідження є випадкова величина

$$\xi = \frac{\xi_1}{a} + \frac{\xi_2}{a^2} + \dots + \frac{\xi_n}{a^n} + \dots,$$

де (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, що набувають значень $0, 1, 2, \dots, s - 1$ з ймовірностями p_0, p_1, \dots, p_{s-1} , яка згідно з теоремою Джессена-Вінтнера, має чистий лебегівський тип розподілу (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний). Знайдено достатні умови сингулярності і достатні умови абсолютної неперервності розподілу ξ , вираз її характеристичної функції. Випадок $m = 1$ в силу різних причин заслуговує на окрему увагу. На кілька задач у цьому випадку, ми даємо вичерпні відповіді.

Лема 1. *Характеристична функція $f_\xi(t) = Me^{it\xi}$ розподілу випадкової величини ξ має вираз*

$$f_\xi(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t), \quad \text{де } \varphi_n(t) = p_0 + p_1 e^{\frac{it}{a^n}}$$

і задовольняє рівність

$$f_\xi(t) = \varphi_1(t) f_\xi\left(\frac{t}{a}\right), \quad \text{де } \varphi_1(t) = p_0 + p_1 e^{\frac{it}{a}}.$$

Зокрема, якщо $\varphi_1(t_0) = 1$, то $f_\xi(t_0) = f_\xi(\frac{t_0}{a})$ і $f_\xi(2a\pi) = f_\xi(2\pi)$.

e-mail: prats4444@gmail.com, freeeidea@ukr.net, svetaklymchuk@gmail.com

This work was supported by a grant from the Simons Foundation

(SFI-PD-Ukraine-00014586, P.M., V.S.)

НЕЛОКАЛЬНА ЗА ЧАСОМ БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ 2b-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Іван Пукальський, Богдан Яшан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Нехай $\eta, t_0, t_1, \dots, t_{N+1}$ фіксовані числа, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, $\eta \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1, \dots, N\}$, Ω - деяка обмежена область, $\dim \Omega \leq n - 1$, $D = \{(t, x) | t \in [t_0, t_{N+1}], x \in \bar{\Omega}\} \cup \{(t, x), t = \eta, x \in R^n\}$.

Розглянемо в області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times R^n$ задачу знаходження функції $u(t, x)$, яка задовольняє при $(t, x) \in \Pi \setminus D$, $t \neq t_\lambda$ рівняння

$$(Lu)(t, x) = \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t, x) \partial_x^k - \sum_{|p| \leq 2b-1} A_p(t, x) \partial_x^p \right] u(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

і багатоточкову умову за змінною t

$$u(t_0, x) + \sum_{\lambda=1}^N d_\lambda(x) u(t_\lambda, x) = \varphi(x), \quad x \in R^n \setminus \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}, \quad |k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Степеневі особливості коефіцієнтів фундаментального виразу L у точці $P(t, x) \in \Pi \setminus D$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$: $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = |t - \eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t - \eta| \leq 1$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = 1$ при $|t - \eta| \geq 1$; $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \leq 1$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = 1$ при $\rho(x) \geq 1$, $\rho(x) = \inf_{z \in \partial\Omega} |x - z|$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)}, \dots, \beta_n^{(\nu)})$, $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$.

Позначимо через $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_0^{(\nu)}$ – дійсні невід'ємні числа, $[l]$ – ціла частина числа l , $l > 0$, $\{\lceil l \rceil\} = l - [l]$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(1)})$, $H_r(t^{(1)}, x^{(2)})$ – довільні точки із Π , $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{r-1}^{(1)}, x_r^{(2)}, x_{r+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, Q – довільна замкнена область, $\bar{Q} \subset \Pi$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(2). $C^l(\gamma; \beta; q; \Pi)$ – множина функцій $u : u(t, x) \in \bar{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $\bar{Q} \setminus Q_D$ вигляду $\partial_t^j \partial_x^k u$, $2bj + |k| \leq [l]$, для яких скінченна норма

$$\|u; \gamma; \beta; q; \Pi\|_l = \sum_{2bj+|k| \leq [l]} \|u; \gamma; \beta; q; \Pi\|_{2bj+|k|} + \langle u; \gamma; \beta; q; \Pi \rangle_l,$$

де, наприклад,

$$\|u; \gamma; \beta; 0; \Pi\| = \sup_{P \in \bar{Q}} |u(P)| \equiv \|u; \Pi\|_0,$$

$$\begin{aligned} \langle u; \gamma; \beta; q; \Pi \rangle_l = & \sum_{2bj+|k|=[l]} \left\{ \sum_{r=1}^n \sup_{(P_1, H_r) \subset \bar{Q}} \left[S(q; s_1, s_2; [l], t^{(1)}, \tilde{x}) \times \right. \right. \\ & \times s_1(\{\lceil l \rceil\}(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)}), t^{(1)}) s_2(\{\lceil l \rceil\}(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)}), \tilde{x}) |x_r^{(1)} - x_r^{(2)}|^{-\{\lceil l \rceil\}} \times \\ & \left. \times \left| \partial_t^j \partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u(H_r) \right| \right] + \sup_{(P_1, P_2) \in \bar{Q}} S(q; s_1, s_2; [l], \tilde{t}, x^{(1)}) \times \\ & \left. \times s_1(\{\lceil l \rceil\} \gamma^{(1)}, \tilde{t}) s_2(\{\lceil l \rceil\} \gamma^{(2)}, x^{(1)}) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2b}\}} \left| \partial_t^j \partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u(P_2) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Тут позначено $s_1(a, \tilde{t}) = \min(s_1(a, t^{(1)}), s_1(a, t^{(2)}))$, $S(q; s_1, s_2; [l]; t, x) \equiv s_1(q^{(1)} + [l]\gamma^{(1)}, t) \times$
 $\times s_2(q^{(2)} + [l]\gamma^{(2)}, x) \prod_{i=1}^n s_1(-k_i \beta_i^{(1)}, t) s_2(-k_i \beta_i^{(2)}, x)$, $s_2(a, \tilde{x}) = \min(s_2(a, x^{(1)}), s_2(a, x^{(2)}))$.

Щодо задачі (1)–(2) вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t, x) S_1(k; s_1; s_2; t, x) \in C^\alpha(\Pi)$,

$A_p(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(p_i \mu_{p_i}^{(1)}, t) \times s_2(p_i \mu_{p_i}^{(2)}, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; \Pi)$, $1 \leq |p| \leq 2b - 1$, $A_0(t, x) \leq$

$K < \infty$ $A_0(t, x) s_1(\mu_0^{(1)}, t) s_2(\mu_0^{(2)}, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; \Pi)$, $d_\lambda(x) \in C^{2b+\alpha}(R^n)$ і виконується умова рівномірної параболічності [1] для рівняння (1);

б) функції $f(t, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi)$, $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; R^n)$.

$$\sup_{\Pi} \sum_{i=1}^n |d_\lambda(x)| \int_{R^n} |Z(t_\lambda, x, t_0, \xi)| d\xi \leq h \leq 1, \tilde{\beta} = (0, \beta^{(2)}), \tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)}), \gamma^{(\nu)} = \max \left\{ \max_i \beta_i^{(\nu)}, \max_{i, p_i} \frac{p_i \left(\mu_{p_i}^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)} \right)}{2b - |p|}, \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b} \right\}, \nu \in \{1, 2\}.$$

$Z(t, x, \tau, \xi)$ – фундаментальний розв’язок задачі Коші.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1)–(2) виконані умови а)–б). Тоді існує єдиний розв’язок задачі (1)–(2) в просторі $C^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi)$ і справджується нерівність*

$$\|u; \gamma; \beta; 0; \Pi\|_{2b+\alpha} \leq C \left(\|f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi\|_\alpha + \|\varphi; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; R^n\|_{2b+\alpha} \right). \quad (3)$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку роз’язність допоміжних багатоточкових за часом задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв’язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв’язком задачі (1), (2).

Література

- [1] Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. Київ: Інститут математики НАН України, 1999. 176 с.

e-mail: i.pukalsky@chnu.edu.ua, b.yashan@chnu.edu.ua

НЕПЕРЕРВНА НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНА ФУНКЦІЯ, ОЗНАЧЕНА В ТЕРМІНАХ ЛАНЦЮГОВИХ A_s -ДРОБІВ

Софія Ратушняк

Інститут математики НАН України, УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Нагадаємо, що нескінченним ланцюговим дробом називається вираз виду

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}} \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots].$$

Нехай $2 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s = \{e_{0s}, e_{1s}, \dots, e_{[s-1]s}\}$ – алфавіт (набір дійсних чисел), $0 < e_{0s} < e_{1s} < \dots < e_{[s-1]s}$, $L_s = A_s \times A_s \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту, $d_{0s} = \{[0; (e_{[s-1]s}, e_{0s})]\}$, $d_{1s} = \{[0; (e_{0s}, e_{[s-1]s})]\}$. Тоді, якщо для всіх $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ виконується $e_{is} - e_{[i-1]s} \leq d_{1s} - d_{0s}$, то для будь-якого $x \in [d_{0s}; d_{1s}]$ існує послідовність $(a_n) \in L_s$ така, що

$$x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]^{A_s}, \text{ де } a_i \in A_s. \quad (1)$$

Розклад числа x в ланцюговий дріб (1) називається *ланцюговим A_s -представленням*, а скорочений запис $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]^{A_s}$ – *ланцюговим A_s -зображенням*.

Теорема 1. Для того щоб множина значень усіх ланцюгових A_s -дробів була відрізком, а система кодування чисел A_s -дробами мала нульову надлишковість, необхідно і достатньо, щоб числа $e_{0s}, e_{1s}, \dots, e_{[s-1]s}$ були послідовними членами арифметичної прогресії з різницею $d_s \equiv d_{1s} - d_{0s}$ (в цьому випадку $e_{0s}e_{[s-1]s} = \frac{(s-1)^2}{s}$).

Здійснимо перекодування ланцюгового A_s -зображення засобами класичного s -кового алфавіту $\mathcal{A}_s = \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$:

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{A_s} = x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]^{A_s}, e_{\alpha_n, s} = a_n, a_n \in A_s.$$

Розглядається функція f , означена рівністю:

$$f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{A_s}) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots}^{A_2}, \quad (2)$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1 = s-1, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_n \neq s-1, \end{cases} \quad \beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n, & \text{якщо } \alpha_n + \alpha_{n+1} \neq s-1, \\ 1 - \beta_n, & \text{якщо } \alpha_n + \alpha_{n+1} = s-1. \end{cases}$$

Теорема 2. Функція f є неперервною і ніде не монотонною. Якщо $e_{12} < e_{0s}$, то f є ніде не диференційовною.

У доповіді планується висвітлення тополого-метричної складової теорії ланцюгового A_s -зображення чисел та її використання для задання та дослідження функцій зі складними диференціальними властивостями.

Література

Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.

e-mail: ratush404@gmail.com

СТРУКТУРА ТА СТІЙКІСТЬ НЕРУХОМИХ ТОЧОК У ПАРАМЕТРИЗОВАНІЙ ДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Сатур Оксана

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Моделювання еволюції систем, що складаються з багатьох взаємодіючих компонентів, є фундаментальним завданням у численних наукових галузях. Такі моделі застосовуються для опису соціальних та економічних процесів, а також для прогнозування розподілу ринкових часток чи політичного впливу. В цій роботі досліджується дискретна динамічна система (див. [1, 2]), що описує перерозподіл ресурсів в просторі станів $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Стан системи задається стохастичним вектором $\mathbf{p}^t = (p_1^t, \dots, p_n^t)$, де p_i^t — частка ресурсу, якою володіє i -й компонент.

Динаміка визначається набором сталих параметрів $\{c_1, \dots, c_n\}$, де $c_i \in [0; 1]$ представляє інваріантні в часі сприятливі умови, пов'язані з кожним компонентом. Еволюція системи описується рівнянням:

$$p_i^{t+1} = p_i^t \cdot \frac{n-1 + c_i(1-p_i^t)}{n-1 + L_c^t}, \quad \text{де} \quad L_c^t = \sum_{j=1}^n c_j p_j^t (1-p_j^t). \quad (1)$$

У цій роботі проаналізовано, як набір сталих параметрів c_i визначає єдиний стійкий рівноважний стан системи $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t$. Встановлено аналітичну формулу для \mathbf{p}^∞ , досліджено стійкість рівноваги та описано біфуркації, що структурують фазовий простір системи. Динамічні системи схожого типу розглянуто в роботах [3, 4, 5, 6].

Теорема 1. *Нехай $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $n > 3$. Припустимо, що для кожного $i = \overline{1, n}$, починаючи з деякого моменту часу t , виконується одна з умов: $\kappa_i^t > L_c^t$ або $\kappa_i^t < L_c^t$. Тоді кожна траєкторія динамічної конфліктної системи (1) збігається до граничного стану, який є нерухомою точкою:*

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t.$$

Для будь-якого $i = \overline{1, n}$ виконується одна з таких рівностей:

1. $p_i^\infty = 0$, якщо $c_i \leq \Lambda(M^*)$.

2. $p_i^\infty = 1 - \frac{\Lambda(M^*)}{c_i}$, якщо $c_i > \Lambda(M^*)$,

де $\Lambda(M^*) = \frac{\gamma(M^*)-1}{\sum_{k \in M^*} \frac{1}{c_k}}$, $\gamma(M^*)$ – потужність множини M^* .

Для систем низької розмірності цей загальний результат дає прості аналітичні розв’язки. Наприклад, у системі з двох компонентів ($n = 2$) рівноважний стан має вигляд $\mathbf{p}^\infty = \left(\frac{c_1}{c_1+c_2}, \frac{c_2}{c_1+c_2} \right)$. Ця внутрішня нерухома точка є локально асимптотично стійкою, тоді як граничні стани $(1, 0)$ та $(0, 1)$ є нестійкими репелерами.

Твердження 1. *Для будь-якої розмірності $n \geq 2$ та будь-якого набору додатних констант $\{c_i\}$ єдина нерухома точка \mathbf{p}^∞ зі строго додатними компонентами (внутрішня точка) є локально асимптотично стійкою. Будь-які граничні рівноважні точки (де принаймні одна координата $p_i^\infty = 0$) є нестійкими.*

Література

- [1] Koshmanenko V., A theorem on conflict for a pair of stochastic vectors, Ukrainian Math. J., 2003, **55**, No. 4, pp. 671–678.
- [2] Koshmanenko V., Theorem of conflicts for a pair of probability measures, Math. Methods of Operations Research, 2004, **59**, No. 2, p. 303–313.
- [3] Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K. Mean field model of a game for power, Physica A, 2019, **525**, P. 535–547.
- [4] Karataeva T., Koshmanenko V. Society, Mathematical model of a dynamical system of conflict, Journal of Mathematical Sciences, 2020, **247**.
- [5] Koshmanenko V. The conflict problem and opinion formation models. In: Timokha, A. (eds) Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems, Understanding Complex Systems, Springer, Cham, 2025.
- [6] Karataieva T., Koshmanenko V. Characteristics of equilibrium states in the models of struggle between alternative opponents in the presence of external assistance only to individual players, Ukrain’s’kyi Matematychnyi Zhurnal, 2025, **77**, No. 3, pp. 163–186.

e-mail: orlassat@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ФІЛЬТРІВ У ДЕЯКИХ ПИТАННЯХ МАТЕМАТИЧНОГО
АНАЛІЗУ

Дмитро Селютін

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна

Фільтром на непорожній множині Ω називають таку сім'ю підмножин $\mathfrak{F} \subset 2^\Omega$, яка задовольняє наступним аксіомам:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;
2. $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$;
3. $D \subset \Omega, A \supset D \Rightarrow D \in \mathfrak{F}$.

Нехай X, Y – топологічні простори, $f : X \rightarrow Y$ – функція, $y \in X$, \mathfrak{F} – фільтр на X . Говорять, що функція f збігається до y за фільтром \mathfrak{F} (позначення: $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$), якщо для довільного околу U точки y існує елемент фільтра $A \in \mathfrak{F}$ такий, що $\{f(t) : t \in A\} \subset U$. Більше про теорію можна прочитати, наприклад, у чудовому підручнику [1].

Добре відомо, що і похідна функції однієї змінної, і визначений інтеграл Рімана визначаються як границі певних величин. Тобто дані поняття можна узагальнити, якщо замінити відповідні збіжності на збіжності за відповідними фільтрами.

В роботах [2] та [3] ми наводимо концепції похідної та визначеного інтеграла в термінах фільтрів, показуємо зв'язок між класичними поняттям похідної та інтегралу з новими об'єктами, та вивчаємо властивості, притаманні отриманим результатам.

Означення. Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, визначена в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Нехай \mathfrak{F} – фільтр на \mathbb{R} . *Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 відносно фільтра \mathfrak{F}* будемо називати

$$\frac{df}{d\mathcal{F}}(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}} D_{x_0}(f, h),$$

де

$$D_{x_0}(f, h) = \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)).$$

Нехай $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – функція. Позначимо $\Pi = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = b\}$ – розбиття відрізка $[a, b]$, тобто, $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Розглянемо множину точок $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, такі, що для довільного $k \in \{1, \dots, n\}$ $t_k \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Для $k \in \{1, \dots, n\}$ позначимо

$$\Delta_k := |\xi_k - \xi_{k-1}|.$$

Через $TP[0, 1]$ множину всіх відмічених розбиттів відрізка $[0, 1]$. Для розбиття $(\Pi, T) \in TP[0, 1]$ позначимо

$$S(f, \Pi, T) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k.$$

Означення. Нехай $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, \mathfrak{F} – фільтр на $TP[0, 1]$. Будемо називати функцію f *інтегрованою відносно фільтра \mathfrak{F}* (коротше: \mathfrak{F} -інтегрованою), якщо існує таке число $I \in \mathbb{R}$, що

$$I = \lim_{\mathfrak{F}} S(f, \Pi, T).$$

Число I при цьому будемо називати *інтегралом функції f відносно фільтра \mathfrak{F}* (\mathfrak{F} -інтегралом функції f). Позначення:

$$I = \int_0^1 f d\mathfrak{F}.$$

Теорема. Нехай $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, визначені в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Нехай \mathfrak{F} – фільтр на \mathbb{R} , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\frac{d(\alpha f + \beta g)}{d\mathfrak{F}}(x_0) = \alpha \frac{df}{d\mathfrak{F}}(x_0) + \beta \frac{dg}{d\mathfrak{F}}(x_0),$$

іншими словами, похідна за фільтром від суми двох функцій – це сума похідних за фільтром від цих двох функцій.

Означення. Нехай \mathfrak{F} – фільтр на $TP[0, 1]$, $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, f, g – інтегровні відносно фільтра \mathfrak{F} , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді $(\alpha f + \beta g)$ також інтегровна відносно фільтра \mathfrak{F} .

Тези підготовлено в рамках виконання держбюджетної теми Міністерства освіти і науки України № БФ/32-2021(11).

1. Кадець В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. - Львів: Видавець І. Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека").
2. Seliutin D. On integration with respect to filter, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2023. Vol. 98. P. 25-35. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-02.
3. Seliutin D. On differentiation with respect to filter. <https://arxiv.org/pdf/2506.17751>

e-mail: d.seliutin@karazin.ua

ОЦІНКИ ВІДХИЛЕНЬ СУМ ФУР'Є НА КЛАСАХ ВЕЙЛЯ–НАДЯ $W_{\beta,1}^r$

Анатолій Сердюк, Ігор Соколенко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Нехай L_p , $1 \leq p < \infty$, – простір 2π -періодичних сумовних в p -му степені на $[-\pi, \pi)$ функцій φ з нормою

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p};$$

L_∞ – простір 2π -періодичних вимірних та істотно обмежених функцій φ в якому норма задана рівністю

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |\varphi(t)|;$$

C – простір 2π -періодичних неперервних функцій φ з нормою

$$\|\varphi\|_C = \max_t |\varphi(t)|.$$

Нехай, далі, $W_{\beta,p}^r, r > 0, \beta \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$, — класи 2π -періодичних функцій f , що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0, \quad (1)$$

з ядрами Вейля-Надя $B_{r,\beta}$ вигляду

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

функцій φ , що задовольняють умову $\varphi \in B_p$, де

$$B_p := \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \leq 1\}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (3)$$

Класи $W_{\beta,p}^r$ називають класами Вейля-Надя, а функцію φ в зображенні (1) називають (r, β) -похідною в сенсі Вейля-Надя функції f і позначають через f_{β}^r .

Якщо $r \in \mathbb{N}$ і $\beta = r$, то функції вигляду (2) є відомими ядрами Бернуллі, а відповідні класи $W_{\beta,p}^r$ збігаються з відомими класами W_p^r 2π -періодичних функцій f , які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$ -го порядку включно і такі, що $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$. При цьому майже скрізь виконується рівність $f^{(r)}(x) = f_r^r(x)$, $r \in \mathbb{N}$. Якщо $r > 0$ і $\beta = r$, то класи $W_{\beta,p}^r$ є відомими класами Вейля W_p^r .

При довільних $1 \leq p \leq \infty, r > \frac{1}{p}, \beta \in \mathbb{R}$ виконуються вкладення $W_{\beta,p}^r \subset C$. Розглядатиметься випадок $r > 2$ і, отже, класи Вейля-Надя в цій ситуації складатимуться лише з неперервних функцій.

Нехай $f \in L$. Через $S_{n-1}(f) = S_{n-1}(f; x)$ позначають частинну суму Фур'є порядку $n-1$ функції f :

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (4)$$

де a_k і b_k — коефіцієнти Фур'є функції f .

Нехай \mathfrak{N} — деякий функціональний клас з простору C . Розглядається величина

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) := \sup_{f \in \mathfrak{N}} |\rho_n(f; x)| = \sup_{f \in \mathfrak{N}} |f(x) - S_{n-1}(f; x)| \quad (5)$$

і досліджується задача про відшукання асимптотичної рівності для величини $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})$ у випадку, коли у ролі \mathfrak{N} виступають класи Вейля-Надя $W_{\beta,1}^r, r > 2, \beta \in \mathbb{R}$. Центральним результатом є теорема 2, яка дозволяє отримувати рівномірні по всіх розглядуваних параметрах асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)$ при $n \rightarrow \infty$ і $r \rightarrow \infty$ в залежності від співвідношень між параметрами r і n .

Теорема 1. *Нехай $r > 2, \beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді має місце формула*

$$\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r) = \frac{1}{n^r} \frac{n}{r} \left(\frac{1}{\pi} + \bar{\theta} \left(\frac{1}{r-2} + \frac{r}{n} \right) \right), \quad (6)$$

в якій $\bar{\theta} = \bar{\theta}_{r,n,\beta} \in \left(-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$.

З теореми 1, а також теореми 1 роботи [1] та теорем 1 і 2 роботи [2] випливає загальне твердження.

Теорема 2. Нехай $r > 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді має місце формула

$$\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r) = \frac{1}{n^r} \left(\frac{1}{\pi(1 - e^{-r/n})} + \mathcal{O}(1)\delta_{r,n} \right), \quad (7)$$

де

$$\delta_{r,1} := e^{-r}, \quad \delta_{r,n} := \begin{cases} \frac{n}{r(r-2)}, & 2 < r \leq n+1, \\ \frac{r}{n^2} e^{-r/n}, & n+1 \leq r \leq n^2, \quad n \geq 2. \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r}, & n^2 \leq r, \end{cases} \quad (8)$$

а $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.



Ця робота є частиною проекту, який отримав фінансування за Програмою досліджень та інновацій Європейського Союзу «Горизонт 2020» в рамках грантової угоди Марії Складовської-Кюрі № 873071, SOMPATY.

Робота також частково підтримана the VolkswagenStiftung project "From Modeling and Analysis to Approximation" і грантами від Фундації Саймонса (SFI-PD-Ukraine-00014586, AS) and (SFI-PD-Ukraine-00014586, IS).

Література

- [1] A.S. Serdyuk, I.V. Sokolenko. *Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness*. Methods of Functional Analysis and Topology, 2019, 4, pp. 381–387.
- [2] A.S. Serdyuk, I.V. Sokolenko. *Approximation by Fourier Sums in the Classes of Weyl–Nagy Differentiable Functions with High Exponent of Smoothness*. Ukrainian Math. J. 2022, 74(5), pp. 783–800. doi:10.1007/s11253-022-02101-6.

e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОРІДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З
ВИПАДКОВОЮ ПОЧАТКОВОЮ УМОВОЮ

Ганна Сливка-Тилищак, Каталін Кучінка, Михайло Маді

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна,

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II, Берегове, Україна

Результатом цієї роботи є побудова моделі, яка апроксимує розв'язок рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами Орліча. У [1] знайдено умови, за яких розв'язок крайової задачі для однорідного параболічного рівняння існує з ймовірністю одиниця і може бути представлений у вигляді певного неперервно диференційовного ряду. Деякі методи моделювання випадкових процесів та випадкових полів можна знайти в роботах Ю. В. Козаченка та його учнів (наприклад [2]). У цих роботах автори не лише будують моделі стохастичних процесів та полів, але й досліджують точність та надійність цих моделей.

Основним результатом цього дослідження є побудова моделі розв'язку параболічного рівняння із заданою надійністю та точністю. Розглянемо диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = 0$$

$$V(t, 0) = 0 \quad V(t, \pi) = 0, \quad V(0, x) = \xi(x),$$

де $\xi(x) \in L_u(\Omega)$.

Нехай $\xi(x)$ – випадковий процес з простору Орліча $L_u(\Omega)$. Для процесу ξ_k ми побудуємо модель:

$$\hat{\xi}_k = \int_0^\pi \rho(x) X_k(x) \hat{\xi}(x) dx.$$

Позначимо

$$V_N(t, x) \doteq \sum_{k=1}^{N-1} \xi_k e^{-\lambda_k t} X_k(x);$$

і

$$\hat{V}_N(t, x) \doteq \sum_{k=1}^{N-1} \hat{\xi}_k e^{-\lambda_k t} X_k(x). \quad (1)$$

В роботі отримано умови за яких модель (1) апроксимує розв'язок даного однорідного параболічного рівняння із заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці.

Література

- [1] Козаченко Ю.В., Кучінка К.Й., Сливка-Тилищак Г.І. *Випадкові процеси в задачах математичної фізики*. Монографія. Ужгород: Вид-во ТОВ «РІК-У», 2017. 256с.
- [2] Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. *Моделювання випадкових процесів та полів*, К.: ВПЦ Задруга, 2007. – 230с.

e-mail: anna.slyvka@uzhnu.edu.ua

ІСТОТНО ОСОБЛИВІ ФУНКЦІЇ В АСИМПТОТИЦІ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТИПУ
ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

Валентин Собчук, Ірина Зеленська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Рівняння Орра-Зоммерфельда є одним з ключових рівнянь теорії гідродинамічної стійкості. Спектр виродженого оператора складається з двох груп елементів: стабільної та нестабільної. Кожна з цих груп в асимптотиці розв'язку задає порядок росту відносно малого параметра. Головна проблема, яка виникає для векторних рівнянь вищих порядків з точками звороту, полягає в описанні та дослідженні істотно особливих функцій, які виникають при побудові асимптотики розв'язку.

Постановка задачі

Розглянемо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь (ССЗДР):

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = H(x), \quad (1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \in [-l, 0]$, $Y(x, \varepsilon) = \text{column}(y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon), y_3(x, \varepsilon), y_4(x, \varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $H(x) = \text{column}(0, 0, 0, h(x))$ - задана вектор-функція,

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}$$

відома матриця, елементи якої $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - нескінченно диференційовні функції на відрізку $[-l; 0]$.

Опишемо простір, в якому будемо розв'язувати дану задачу

$$\begin{aligned} D_{1k} &= \alpha_{1k}(x, \varepsilon)U_1(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{1k}(x, \varepsilon)U_1'(t), \\ D_{2k} &= \alpha_{2k}(x, \varepsilon)U_2(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{2k}(x, \varepsilon)U_2'(t), \\ D_{3k} &= f_k(x, \varepsilon)\nu(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x, \varepsilon)\nu'(t), \\ D_{4k} &= \bar{\omega}_k(x, \varepsilon), \end{aligned}$$

де $U_i(t)$, $(i = \overline{1, 2})$ - функції Ейрі-Лангера [2].

Точка $\varepsilon = 0$ є особливою точкою рівняння (1), а тому для цього рівняння не виконується класична теорема про аналітичну залежність розв'язку від малого параметра. У розв'язкові рівняння (1) ця точка породжує деякі особливості, які будемо називати **істотно особливими функціями** (ІОФ), тобто функціями, які не є аналітичними відносно малого параметра $\varepsilon > 0$.

В даному випадку для однорідної задачі ми використовуємо модельний оператор Ейрі-Лангера

$$U''(t) - tU(t) = 0. \quad (2)$$

Тому істотно особливі функції, які виникають в розв'язках однорідної задачі мають вигляд

$$\text{Ai}(t) = \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{t}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \xi^{-k}, \quad \text{Bi}(t) = \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{t}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{-k},$$

та

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{t}} \left\{ \sin \gamma \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k} \xi^{-2k} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \gamma \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1} \xi^{-2k-1} \right\}, \\ \text{Bi}(-t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{t}} \left\{ \cos \gamma \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k} \xi^{-2k} + \right. \\ &\quad \left. + \sin \gamma \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1} \xi^{-2k-1} \right\}, \end{aligned}$$

де

$$c_0 = 1, \quad \xi = \frac{2}{3}t^{3/2}; \quad c_k = \frac{(2k+1)(2k+3)\dots(6k-1)}{216^k \cdot k!}; \quad \gamma = \frac{2}{3}t^{3/4} + \frac{\pi}{4}.$$

Для неоднорідної задачі вигляду (1) будемо використовувати модельний оператор

$$U''(t) - tU(t) = \pi^{-1}.$$

Істотно особлива функція, яка виникає у розв'язках неоднорідної задачі

$$\nu(t) = \text{Bi}(t) \int_{+\infty}^t \text{Ai}(\tau) d\tau - \text{Ai}(t) \int_0^t \text{Bi}(\tau) d\tau,$$

коли $t \in [0; +\infty)$.

Оскільки $\nu(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \tilde{\nu}(t)$, то

$$\nu'(t) = -\pi^{-1} \int_0^{\infty} s \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + st\right) ds.$$

Література

- [1] Abramowitz and Stegun Handbook of Mathematical Functions // Scanned version of the classic reference work. 1979. 832 p
- [2] Бобочко В.М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту // К.: Наукова думка, 2002. 310 с.
- [3] Собчук В.В., Зеленська І.О., Побудова асимптотики розв'язку системи СЗДР 4-го порядку з диференціальною точкою звороту методом істотно особливих функцій, Науковий вісник Ужгородського університету, Т. 41, № 2, (2022), С. 78–90, DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).78-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).78-90).

e-mail: v.v.sobchuk@gmail.com

e-mail: korchuk@gmail.com

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ
ЗМІННИХ ТИПУ НІКОЛЬСЬКОГО–БЕСОВА У ПРОСТОРИ $B_{q,1}$

Катерина Соліч

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

Досліджуються тригонометричні поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ [1] періодичних функцій багатьох змінних ($d \geq 2$) у просторі $B_{q,1}$ (див., наприклад, [2]). Норма в цьому просторі є більш сильною, ніж L_q -норма. Надалі $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ – задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови Барі–Стечка (S $^\alpha$) та (S $_l$) [3].

Означимо апроксимативну характеристику, яка нами досліджується.

Нехай $F \subset B_{q,1}$ – деякий функціональний клас. Тоді тригонометричний поперечник класу F у просторі $B_{q,1}$ (позначення $d_m^T(F, B_{q,1})$) визначається за формулою

$$d_m^T(F, B_{q,1}) := \inf_{\theta_m} \sup_{f \in F} \inf_{t(\theta_m)} \|f - t(\theta_m)\|_{B_{q,1}}, \quad (1)$$

де $t(\theta_m) := t(\theta_m, x) = \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, x)}$, $\theta_m := \{k^1, \dots, k^m\}$ – всеможливі набори векторів $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $j = \overline{1, m}$, з цілочислової решітки \mathbb{Z}^d , c_j – довільні комплексні числа і $(k^j, x) = k_1^j x_1 + \dots + k_d^j x_d$.

Тригонометричний поперечник $d_m^T(F, L_q)$ був введений в роботі [4].

Сформулюємо отриманий результат.

Теорема 1. *Нехай $d \geq 2$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(q, p) \in \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l) . Тоді для будь-якої послідовності $m = (m_n)_{n=1}^\infty$ натуральних чисел такої, що $m \asymp 2^n n^{d-1}$ справедливе співвідношення*

$$d_m^T(B_{p,\theta}^\Omega, B_{q,1}) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \quad (2)$$

Співставивши (2) з відповідною оцінкою поперечника $d_m^T(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$ [1] отримаємо наступне.

Наслідок 1. *За винятком випадку $\theta = 1$, оцінки тригонометричних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторах $B_{q,1}$ і L_q є різними за порядком.*

Література

- [1] Yongsheng S., Heping W. *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness.*, Tr. Mat. Inst. Steklova, 1997, Vol. 219, P. 356–377.
- [2] Катерина Пожарська, Анатолій Романюк, Сергій Янченко. *Найкращі наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою домінуючою мішаною похідною.* Укр. Мат. Журн., 2024., Т. 76, № 7, С. 1007–1023.
- [3] Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций.* Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, Т. 5, С. 483–522.
- [4] Исмагилов Р.С., *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами.* Успехи мат. наук, 1974, Т. 29, № 3, С. 161–178.

e-mail: solichkatia@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЕПІДЕМІЇ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЕКОЛОГІЧНИХ
ФАКТОРІВ

Українець Олег

*Чернівецький Національний Університет імені Юрія Федьковича, Чернівці,
Україна*

Математичному моделюванню поширення епідемії присвячено значну кількість праць, наприклад [1], [2]. У різних модифікаціях моделей враховано такі фактори як втрата імунітету, інкубаційний період та інші чинники, які описуються рівняннями із запізненням аргументу або диференціально-функціональними системами [3].

Більшість відомих підходів базується на класичній SIR-моделі, де $S(t), I(t), R(t)$ – кількість сприйнятливих, інфікованих та тих, хто одужав на момент часу t . На перебіг епідемії впливають численні зовнішні фактори, зокрема медичні, соціальні та організаційні. Додатковим фактором є стан довкілля, зокрема при хворобах, що уражають дихальні шляхи.

У роботі запропоновано модифікацію SIR-моделі поширення епідемії, яка враховує негативний вплив забруднення навколишнього середовища з узагальненим показником $E(t), t \geq 0$, вигляду

$$E(t) = \alpha_1 E_1(t) + \dots + \alpha_m E_m(t),$$

де $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, а $E_i(t)$ описують різні компоненти забруднення.

Нехай $K > 0$ – пороговий рівень забруднення такий, що при $E(t) > K$ ризик інфікування зростає, а при $0 \leq E(t) < K$ – зменшується. Враховуючи, що відновлення довкілля зазвичай має коливний характер і стабілізується відносно $E = K$ при $t \rightarrow \infty$, припустимо, що $E(t)$ задовольняє рівняння Хатчінсона [4]:

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{E(t - \Delta)}{K} \right) E(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

де $r > 0$ – коефіцієнт росту, а $\Delta > 0$ – середній час відновлення екологічного стану.

Модифікована SIR-модель із врахуванням зовнішніх факторів впливу та втрати імунітету за час τ , а також із врахуванням народжуваності і смертності, набуває вигляду:

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - \beta S(t)I(t) - \alpha I(t - \tau) + \varepsilon(E(t) - K) - \mu S(t), \quad (2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma(E)I(t) - \mu I(t), \quad (3)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma(E)I(t) - \alpha I(t - \tau) - \varepsilon(E(t) - K) - \mu R(t), \quad (4)$$

де $b > 0$ і $\mu > 0$ – коефіцієнти народжуваності і смертності в популяції, коефіцієнт γ обернено пропорційний середньому часу перебігу захворювання T , де $\gamma(E) = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E(t) - K)}$, β, γ, γ_0 і γ_1 – додатні коефіцієнти.

Для системи (2)–(4) стани рівноваги визначаються умовами

$$\begin{cases} b - \beta SI - \alpha I + \varepsilon(E - K) - \mu S = 0, \\ \beta SI - \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E - K)} I - \mu I = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Стан рівноваги

$$I_1 = 0, \quad E_1 = K, \quad S_1 = \frac{b}{\mu}, \quad R_1 = 0 \quad (6)$$

відповідає відсутності епідемії.

При $I \neq 0$ отримуємо ще один розв'язок

$$E_2 = K, \quad S_2 = \frac{\gamma_0 + \mu}{\beta}, \quad I_2 = \frac{\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)}{\beta(\gamma_0 + \mu - \alpha)},$$

який існує при виконанні умов

$$\gamma_0 + \mu \leq \beta, \quad 0 < \beta b - \mu(\gamma_0 + \mu) < \beta(\gamma_0 + \mu - \alpha).$$

У роботі доведено існування та обмеженість розв'язків системи рівнянь (2)–(4). Досліджено стійкість станів рівноваги. Зокрема, якщо базове репродуктивне число

$$R_0 = \frac{(\beta b - \mu)^2(1 + \gamma_1 K) - \mu \gamma_0}{\mu(1 + \gamma_1 K)} < 1,$$

то стан рівноваги (6) локально асимптотично стійкий. Змодельовано динаміку факторів моделі, а також досліджено області стійкості станів рівноваги.

Отримані результати дозволяють оцінити умови, за яких епідемія не виникає або поширюється, проаналізувати вплив екологічних факторів на динаміку поширення епідемії.

Література

- [1] Martcheva M. An Introduction to Mathematical Epidemiology. Springer. New York, Heidelberg, Dordrecht, London, 2015. 453 p.
- [2] Brauer F., Van den Driessche P., Wu J. Mathematical Epidemiology. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 2008. 412 p.
- [3] Huang G., Takeuchi Y., Ma W., Wei D. Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with nonlinear incidence rate. Bulletin of mathematical biology. 2010. No. 72. Pp. 1192–1207.
- [4] Smith H. An Introduction to Delay Differential Equations where Applications to the Life Sciences. Springer Science+Business Media, 2011.
- [5] Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. ActaEX. Moldova, Jan. 2025. Vol. 18, No. 2. Pp. 7-17.

e-mail: o.ukrainets@chnu.edu.ua

СЛАБКОЗБУРЕНА ЛІНІЙНА КРАЙОВА ЗАДАЧ ДЛЯ БАГАТОЧЛЕННОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ З ПОХІДНИМИ КАПУТО

Віктор Ферук

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Розглядається слабкозбурена лінійна крайова задача для багаточленного диференціального рівняння дробового порядку

$${}^C D_{a+}^{\alpha_n} x(t) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(t) + \varepsilon b_k(t)) {}^C D_{a+}^{\alpha_k} x(t) + (a_n(t) + \varepsilon b_n(t)) x(t) = f(t), \quad (1)$$

$$lx(\cdot) = q + \varepsilon Jx(\cdot), \quad (2)$$

де $1 \geq \alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1 > 0$, $\alpha_i/\alpha_j \in \mathbb{Q}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, ${}^C D_{a+}^{\alpha_k}$ — лівосторонні похідні Капуто, $a_k(t) \in C[a, b]$, $b_k(t) \in C[a, b]$, $k = \overline{1, n}$, $f(t) \in C[a, b]$,

$$l = \text{col}(l_1, l_2, \dots, l_p) : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad J = \text{col}(J_1, J_2, \dots, J_p) : L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$$

— обмежені лінійні векторні функціонали,

$$l_\nu, J_\nu : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nu = \overline{1, p}, \quad q = \text{col}(q_1, q_2, \dots, q_p) \in \mathbb{R}^p,$$

ε — малий параметр.

Досліджується випадок, коли неоднорідна породжуюча задача, тобто задача [1]

$${}^C D_{a+}^{\alpha_n} x(t) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) {}^C D_{a+}^{\alpha_k} x(t) + a_n(t)x(t) = f(t), \quad (3)$$

$$lx(\cdot) = q \quad (4)$$

не має розв'язку, а однорідна породжуюча крайова задача (3), (4) ($f(t) = 0, q = 0$) має сім'ю розв'язків. Знайдено умови на лінійні збурення $b_k(t) \in C[a, b], k = \overline{1, n}$ та $J_\nu, \nu = \overline{1, p}$, за яких крайова задача (1), (2) є розв'язною та побудовано її загальний розв'язок у вигляді ряду Лорана за степенями малого параметра ε з сингулярністю в точці $\varepsilon = 0$. Отримані результати узагальнюють відповідні результати для випадку однієї дробової похідної Капуто встановлені у роботі [2].

Література

- [1] О. А. Бойчук, В. А. Ферук, *Крайова задача для багаточленного дифференциального рівняння дробового порядку з похідною Капуто*, Буковинський математичний журнал, **11**, № 2, 85–92 (2023).
- [2] О. А. Boichuk, V. A. Feruk, *Weakly perturbed linear boundary-value problem for system of fractional differential equations with Caputo derivative*, Results in Appl. Math., **21**, 100424 (2024).

Цю роботу було частково підтримано проектом “Якісний аналіз та керування в нелінійних інтегро-диференціальних рівняннях із імпульсними та стохастичними збуреннями” ДО “ВЦП КНУ ім. Т. Шевченка при НАН України”, державний реєстраційний номер 0124U002140.

e-mail: feruk.viktor@gmail.com

ГОМОТОПІЧНИЙ ТИП СТАБІЛІЗАТОРІВ ФУНКЦІЙ МОРСА-БОТТА НА ПОВЕРХНЯХ

Богдан Феценко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Нехай M — гладка і компактна поверхня. Група дифеоморфізмів $\mathcal{D}(M)$ поверхні M природно діє на просторі гладких функцій $C^\infty(M)$ за таким правилом:

$$\gamma : C^\infty(M) \times \mathcal{D}(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad \gamma(f, h) = f \circ h.$$

Позначимо через $\mathcal{S}(f)$ стабілізатор гладкої функції f відносно дії γ , тобто $\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f \circ h = f\}$. Наділимо $\mathcal{D}(M)$ сильною топологією Уїтні, ця топологія індукує деяку топологію на $\mathcal{S}(f)$. Позначимо через $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ зв'язну компоненту $\mathcal{S}(f)$, що містить id_M .

Наступна теорема узагальнює відомий результат про гомоторічний тип $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ для локально-постійних на межі функцій Морса на M .

Теорема 1 ([1]). *Нехай M — орієнтовна, гладка і компактна поверхня, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — функція Морса-Ботта на M , яка є локально-постійною на ∂M . Тоді $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є або стягнутим простором, або є гомотопічно еквівалентним колу S^1 . Причому $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є стягнутим, якщо f має принаймні одне сідло.*

Література

- [1] Bohdan Feshchenko. *Homotopy type of stabilizers of circle-valued functions with non-isolated singularities on surfaces*, *arXiv:2305.08255*, 9p. 2023.

e-mail: fb@imath.kiev.ua

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА $P_\omega(Y_1, Y_0, \pm\infty)$ -РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ПРАВА ЧАСТИНА ЯКОГО Є ДОБУТКОМ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ РІЗНОГО ТИПУ

Ольга Чепок

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Одеса, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y') \varphi_1(y), \quad (1)$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, функції $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) та $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($i \in \{0, 1\}$) є неперервними у своїх областях визначення, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, проміжок Δ_{Y_i} – деякий однібічний окіл точки Y_i , $i \in \{0, 1\}$.

Крім того, будемо вважати, що функція $\varphi_1 : \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ є правильно змінною (див. [1], с. 17) порядку σ_1 при прямуванні аргументу до Y_1 , а функція $\varphi_0 : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та задовольняє умови:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\}, \quad \varphi_0'(y) \neq 0 \text{ при } y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(y) \varphi_0''(y)}{(\varphi_0'(y))^2} = 1. \quad (2)$$

Для рівнянь типу (1) розглянемо наступний клас ров'язків.

Означення 1. *Розв'язок у рівняння (1), визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називається $P_\omega(Y_1, Y_0, \lambda_0)$ -розв'язком ($-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$), якщо справедливими є наступні твердження*

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_{1-i}}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_{1-i} \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

Для досліджуваних $P_\omega(Y_1, Y_0, \pm\infty)$ -розв'язків у роботі [2] було встановлено наступні апріорні асимптотичні співвідношення:

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = [1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = o(1) \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (4)$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Для формулювання основних результатів наведемо наступне означення.

Означення 2. Нехай $Y \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_Y – деякий однобічний окіл Y . Говорять, що повільно змінна при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) функція $\theta : \Delta_Y \rightarrow]0; +\infty[$ задовільняє умову S при прямуванні аргументу до Y (див., наприклад, у [2]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) функції $L : \Delta_Y \rightarrow]0; +\infty[$ ([3], с.2-3) має місце співвідношення

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Доведено наступну теорему, яка також вказує на необхідні умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_1, Y_0, \pm\infty)$ -розв'язків.

Теорема 1. Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція $\varphi_1(y)|y|^{-\sigma_1}$ задовільняє умову S при $y \rightarrow Y_1$ ($y \in \Delta_{Y_1}$). Тоді, кожен $P_\omega(Y_1, Y_0, \pm\infty)$ – розв'язок диференціального рівняння (1) може бути представлений у вигляді

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t), \quad (5)$$

де $L : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ – двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$y_0^0 \pi_\omega(t)L(t) > 0, \quad L'(t) \neq 0 \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \quad (6)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} L(t) \in \{0; \pm\infty\}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)L(t) = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 0. \quad (7)$$

При цьому, у випадку існування скінченної або нескінченної границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}, \quad (8)$$

мають місце наступні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} = -1, \quad \alpha_0 L'(t) > 0 \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \quad (9)$$

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left(L(t) \left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (10)$$

Означення 3. Будемо говорити, що виконується умова N , якщо для деякої неперервно диференційовної функції $L(t) : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ ($t_0 \in [a, \omega]$), яка задовільняє умови (5)–(9) та (10), має місце зображення

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left(L(t) \left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + r(t)], \quad (11)$$

де $r(t) : [t_0, \omega[\rightarrow]-1; +\infty[$ – неперервна функція, яка прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Для формулювання наступної теореми введемо позначення

$$\theta_1(y) = \varphi_1(y)|y|^{-\sigma_1}, \quad X(t) = L(t) \cdot e_1(t), \quad (12)$$

$$H(t) = \frac{L^2(t)\varphi_0'(X(t))}{\pi_\omega(t)L'(t)\varphi_0(X(t))}, \quad q_1(t) = \frac{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)} \right)'}{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)} \right)^2} \Bigg|_{y=X(t)}, \quad (13)$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \quad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}. \quad (14)$$

Розглянемо випадок, коли

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} |H(t)|^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (15)$$

Також надалі вважати, що існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(1 + q_1(t) + \frac{X(t)}{e_2(t) \cdot L'(t)} \right) \cdot (e_1(t) - 1) \cdot e_1(t) \cdot H(t) = \gamma_1. \quad (16)$$

Теорема 2. Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція θ_1 задовольняє умову S , виконується умова N та (15). Тоді диференціальне рівняння (1) має принаймні один $P_\omega(Y_1, Y_0, \pm\infty)$ -розв'язок, для якого мають місце наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$:

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t)(1 + o(1)), \quad (17)$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot |H(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot o(1). \quad (18)$$

Більш того, якщо $\omega < +\infty$, то при виконанні однієї з умов

$$\text{або } 1 < \gamma_1 < 0, \text{ або } \gamma_1 = 0 \text{ та } \alpha_0 \cdot \mu_0 > 0,$$

диференціальне рівняння (1) має однопараметричну $P_\omega(Y_1, Y_0, \pm\infty)$ -розв'язків з асимптотичними зображеннями (17)-(18), а якщо $\omega = +\infty$, то таких розв'язків існує двопараметрична сім'я у випадках, коли

$$\text{або } 1 < \gamma_1 < 0, \text{ або } \gamma_1 = 0 \text{ та } \alpha_0 \cdot \mu_0 < 0,$$

і однопараметрична сім'я у випадках, коли

$$-\infty < \gamma_1 < -1 \text{ або } 0 < \gamma_1 < +\infty.$$

Отже у теоремах було встановлено необхідні і достатні умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_1, Y_0, \pm\infty)$ -розв'язків, а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

Література

- [1] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. *Cambridge university press*. Cambridge. 1987. 494p.
- [2] Evtukhov, V., Samoilenko, A. (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities *Differential Equations*, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649
- [3] Maric V. Regular Variation and differential equations *Springer (Lecture notes in mathematics, 1726)*. 2000. 127p.

e-mail: olachepok@ukr.net

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ДИХОТОМІЯ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ДЛЯ
НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ

Дмитро Штефан, Андрій Станжицький

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Розглядаються слабкі розв'язки системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx(t) = (A + B(t))x(t)dt + D(t)x(t)dW(t), \quad (1)$$

визначеної на півосі $[0, \infty)$, де X — сепарабельний гільбертовий простір, A — генератор компактної напівгрупи $S(t) = e^{tA}$, $t > 0$ в X , $D(t), B(t) \in L(X)$ — детерміновані обмежені лінійні оператори при $t \geq 0$, а $W(t)$ — скалярний одновимірний вінерівський процес, заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Систему (1) будемо називати *експоненційно дихотомічною в середньому квадратичному* на півосі, якщо існують сталі $C_1, C_2, \alpha > 0$ та розбиття простору X у пряму суму двох підпросторів X^+ та X^- таких, що для довільного розв'язку з початковою умовою $x(0) = x \in X^-$ справедлива оцінка

$$\mathbb{E}\|x(t)\|^2 \leq C_1 e^{-\alpha t} \|x\|^2, \quad t \geq 0,$$

і для розв'язку з $x(0) = x \in X^+$ виконується

$$\mathbb{E}\|x(t)\|^2 \geq C_2 e^{\alpha t} \|x\|^2, \quad t \geq 0,$$

де $C_1, C_2, \alpha > 0$ не залежать від x .

Теорема 1. *Нехай оператор A на X , є генератором C_0 -напівгрупи $T(t) = e^{tA}$, причому $T(t)$ компактна для кожного $t > 0$, і спектр $\sigma(A)$ не перетинає уявну вісь:*

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset.$$

Тоді, якщо оператори $B(t)$ і $D(t)$ системи (1) по операторній нормі прямують до нуля при $t \rightarrow \infty$, то існує $t_0 > 0$, починаючи з якого система (1) є експоненційно дихотомічною в середньому квадратичному.

Приклад. Розглянемо задачу на відрізку з граничними умовами Діріхле:

$$du(t, x) = (u_{xx}(t, x) + \lambda u(t, x)) dt + f(t) u(t, x) dW(t), \quad t > 0, 0 < x < \pi, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \pi) = 0,$$

де $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ — параметр, $f(t)$ — неперервна функція, що прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. Тоді, поклавши $X = L^2(0, \pi)$ та $A = \frac{d^2}{dx^2} + \lambda I$ на $D(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$, з теореми маємо, що рівняння (2) є експоненційно дихотомічним при $t \geq t_0$.

Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, проект 2023.03/0074 «Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою».

Література

- [1] O. Stanzhytskyi, G. Petryna, M. Hrysenko. On the Asymptotic Equivalence of Ordinary and Functional Stochastic Differential Equations. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*, 2023, Vol. 31 (1), P. 125–142.
- [2] A. V. Skorokhod. *Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 78, 1989, 339 pp.
- [3] Ju. L. Daleckii, M. G. Krein. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 43, AMS, Providence, RI, 1974, 386 pp.
- [4] G. Da Prato, J. Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, 2nd ed., 2014, 512 pp.

e-mail: dmitrijstefan396@gmail.com
a.stanzhytskyi@gmail.com

Let X be some set. Denote by \mathcal{M} the set of all binary operations on X . Define a binary operation \square on \mathcal{M} in the following way [1, Definition 1.1]:

$$a(\circ\square\star)b := (a \circ b) \star (b \circ a)$$

for all $\circ, \star \in \mathcal{M}$ and all $a, b \in X$. It turns out, that \square is an associative operation on \mathcal{M} .

Proposition 1 ([1, Theorem 1.2]). *For any set X , the pair (\mathcal{M}, \square) , denoted further as simply \mathcal{M} , is a semigroup. Moreover, the left zero operation $\pi_l(a, b) := a$ is the identity for \square in \mathcal{M} .*

We aim at characterizing principal left and right ideals of arbitrary binary operations in \mathcal{M} . To do so for left ideals, we need to define a special equivalence relation on $X \times X$.

Definition 1. *Let $\star \in \mathcal{M}$. Define the equivalence relation π_\star on $X \times X$ as $(a, b)\pi_\star(u, v) \iff a \star b = u \star v$ and $b \star a = v \star u$.*

Theorem 1. *The principal right ideal generated by \star is*

$$\star\mathcal{M} = \{\diamond \in \mathcal{M} \mid \pi_\star \subset \pi_\diamond\}.$$

To characterize principal right ideals one needs to consider a special directed graph derived from a given binary operation.

Definition 2. *For a binary operation \star , define its pairmorph graph $G(\star)$ as a directed graph with the vertex set $V = \binom{X}{2} \cup \binom{X}{1}$ and the arcs of the following three types:*

- $(\{a, b\}, \{u, v\}) \in A \iff (a \star b, b \star a) \in \{(u, v), (v, u)\}$;
- $(\{a, b\}, \{y\}) \in A \iff a \star b = b \star a = y$;
- $(\{x\}, \{y\}) \in A \iff x \star x = y$.

Proposition 2. *There is a bijection between \mathcal{M} and the set of all (not always proper) 2-colorings of all possible pairmorph graphs.*

Theorem 2. *The principal left ideal generated by \star is*

$$\mathcal{M}\star = \{\diamond \in \mathcal{M} \mid im_p \diamond \subset im_p \star\},$$

where $im_p \star$ is the set of all non-source vertices in $G(\star)$.

References

- [1] Sergio R. López-Permouth, Isaac Owusu-Mensah, and Asiyeh Rafeipour. *A monoid structure on the set of all binary operations over a fixed set. Semigroup Forum*, 104:667–688, 2022. DOI: 10.1007/s00233-022-10280-8
- [2] Asiyeh Rafeipour. *The Magma Monoid and Related Algebraic Structures*. PhD dissertation, Ohio University, College of Arts and Sciences, December 2023.

- [3] Hee Sik Kim, Joseph Neggers. *The semigroups of binary systems and some perspectives. Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 45(4):651–661, November 2008. DOI: 10.4134/BKMS.2008.45.4.651.

e-mail: ybaiduk@kse.org.ua

ON FINITE-DIMENSIONALITY OF CLOSED SUBSPACES IN $L_p(M, d\mu) \cap L_q(M, d\nu)$

Alexander Balinsky, Anatolij Prykarpatski

*Mathematics Institute at the Cardiff University, Cardiff CF24 4AG, Great Britain
National University Lviv Polytechnic, Lviv, Ukraine, and the University of Science and
Technology, Cracow, Poland*

It is a well known interesting problem to find effective criteria for closed subspaces in L_p , endowed with some additional functional constraints, to be finite dimensional. In the work we are interested in some sufficient constraints on closed functional subspaces $S_p \subset L_p$, whose finite-dimensionality is not fixed *a priori* and can not be checked directly. This case often happens in diverse applications, when a closed subspace $S_p \subset L_p$ is constructed by means of some additional conditions and constraints on L_p with no direct exemplifying the functional structure of its elements. We consider a closed topological subspace $S_p^{(q)}$ of the functional Banach space $L_p(M, d\mu)$ and, moreover, one assumes that additionally $S_p^{(q)} \subset L_q(M, d\nu)$ subject to a probability measure ν on M . Then we have shown that closed subspaces of $L_p(M, d\mu) \cap L_q(M, d\nu)$ for $q > \max\{1, p\}$, $p > 0$, are finite dimensional. The finite dimensionality result concerning the case when $q > p > 0$ is open and needs more sophisticated techniques, mainly based on analysis of the complementary subspaces to $L_p(M, d\mu) \cap L_q(M, d\nu)$.

Introduction

The problems, concerned with finite dimensionality of closed functional subspaces in L_p (in part, in $L_p(0, 1; \mathbb{C})$), are of long time interest in analysis, being related with their many applications in operator and approximation theories [2, 5, 18, 7, 12], in dynamical systems theory [8, 11, 13, 14, 17, 21] and other applied fields. As an example one can recall here a central problem in Banach space theory to classify the complemented subspaces of L_p up to isomorphism; the finite dimensional analogue is to find for any given $S_p \subset L_p$ a description of the finite dimensional spaces which are S_p -isomorphic to S_p -complemented subspaces of L_p . These problems were thoroughly studied before [1], in particular finite dimensional versions of this complemented subspaces of the L_p problem, yet in neither case their classification is far to be closed.

It was observed that sometimes happens that the finite dimensional version of an infinite dimensional problem leads to a theory which is much more interesting than the infinite dimensional theory. Recall here the problem of describing the subspaces of L_p which embed isomorphically into a “smaller” L_p space; namely, the space l_p , for which there is a fairly good answer [1]. Recall that a density on a probability space M is a strictly positive measurable function $h : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ for which $\int h d\mu = 1$. Such a density h induces for fixed $0 < p < \infty$ an isometry $J_h^{(p)}$ from $L_p(M, d\mu)$ onto $L_p(M, hd\mu)$. The next result, due to D. Lewis [15, 10], gives useful information about chosen *a priori* finite dimensional subspaces $S_p \subset L_p$.

Theorem 1. *Let μ be a probability measure on M and let S_p be a N -dimensional subspace of $L_p(M, d\mu)$, $0 < p < \infty$, with full support. Then there is a density $h > 0$ so that the image $J_h^{(p)} S_p$ has a basis $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\} \subset L_2(M, hd\mu)$, which is orthonormal in $L_2(M, hd\mu)$ and such that $\sum_{j=1, \overline{1, N}} |\varphi_j|^2 = N$.*

Assuming, that S_p is already a subspace of L_p for some finite $\dim S_p \in \mathbb{N}$, one can pick randomly a few coordinates and hope that the natural projection onto these coordinates restricted to S_p is a good isomorphism. If we do it with *no additional preparation*, this will not work. Indeed, the subspace S_p may contain a vector with small support, say one of the unit vector basis elements of l_∞^N , in which case the chance that a coordinate in its support is picked is small, of course if no such coordinate is picked, the said projection cannot be an isomorphism on S_p . The point is that one wants to change S_p first to another isometric copy of S_p in which each element of S_p is spread out. This can be done by a change of density. This method was used with other tools to produce the best known results.

Finite-dimensionality of closed subspaces in $L_p \cap L_q$

As the imbedding structure of a priori taken finite dimensional subspaces in L_p is in many cases very important and instructive, nonetheless finding the effective criteria for closed subspaces in L_p endowed with some additional functional constraints to be finite dimensional remains very important and hard both from theoretical and applied points of view. Below we will be interested in some sufficient constraints on functional closed subspaces $S_p \subset L_p$, whose finite-dimensionality is not fixed *a priori* and can not be checked directly. This case often happens in diverse applications, when a closed subspace $S_p \subset L_p$ is constructed by means of some additional conditions and constraints on L_p with no direct presenting the functional structure of its elements. In particular, we consider a topological subspace $S_p^{(q)}$ of the functional Banach space $L_p(M, d\mu)$, where μ is a probability measure on measurable space M . Moreover, one assumes that additionally $S_p^{(q)} \subset L_q(M, d\nu)$ subject to a probability measure ν on M . Then we prove the following theorem first announced in [3].

Theorem 2. *Let a closed topological subspace $S_p^{(q)} \subset L_p(M, d\mu)$ belong to $L_q(M, d\nu)$, $q > \max\{1, p\}$, $p > 0$, where measures μ, ν are probabilistic and the measure μ is absolutely continuous with respect to the measure ν on M . Then the subspace $S_p^{(q)}$ is finite dimensional, that is $\dim S_p^{(q)} < \infty$.*

Let us consider a closed topological subspace $S_p^{(q)}$ of the functional Banach space $L_p(M, d\mu)$, where μ is a probability measure absolutely continuous with respect to the measure ν on M , and satisfying, in addition, the constraint $S_p^{(q)} \subset L_q(M, d\nu)$ subject to a probability measure ν on M . In order to state Theorem 2, formulated above, we need some lemmas.

Lemma 1. *For any $q > p > 0$, there exists a bounded positive constant $K_{p,q}$, such that*

$$\|f\|_{q,\nu} \leq K_{p,q} \|f\|_{1,\nu} \quad (1)$$

for any $f \in S_p^{(q)} \subset L_p(M, d\mu) \cap L_q(M, d\nu)$.

As a useful consequence from Lemma 1 and the obvious norm property $\|f\|_1 \leq \|f\|_q$ for any $f \in L_1(M, d\nu)$ we can deduce that $S_p^{(q)} \subset L_1(M, d\nu) \cap L_q(M, d\nu)$, what makes it possible to single out from the subspace $S_p^{(q)} \subset L_q(M, d\nu)$ linear independent functions

$\varphi_j \in S_p^{(q)} \subset L_1(M, d\nu), j = \overline{1, N}$, for some $N \in \mathbb{N}$ and construct the closed N -dimensional subspace

$$S_{p,N}^{(q)} := \text{span}_{\mathbb{C}}\{\varphi_j \in S_p^{(q)} \subset L_1(M, d\nu) : \|\varphi_j\|_{1,\nu} = 1, j = \overline{1, N}\}. \quad (2)$$

For fixed $N \in \mathbb{N}$ the subspace $S_{p,N}^{(q)} \subset S_p^{(q)} \subset L_1(M, d\nu), q > \max\{1, p\}, p > 0$, characterizes the next lemma.

Lemma 2. *Given the N -dimensional subspace $S_{p,N}^{(q)} \subset S_p^{(q)} \subset L_1(M, d\nu) \cap L_q(M, d\nu)$, defined by (2), $q > \max\{1, p\}, p > 0$. Then there exists an N -dimensional subspace $\tilde{S}_{p,N}^{(q),*} \subset L_\infty(M, d\nu)$ such that*

$$\tilde{S}_{p,N}^{(q),*} := \text{span}_{\mathbb{C}}\{\psi_j \in S_{p,N}^{(q),*} \subset L_\infty(M, d\nu) : j = \overline{1, N}\}, \quad (3)$$

$\dim S_{p,N}^{(q),*} = N$, and whose basis functions satisfy the biorthogonality condition

$$\left\{ \int_M \psi_k \varphi_j d\nu = \delta_{jk} : j, k = \overline{1, N} \right\} \quad (4)$$

for all $j, k = \overline{1, N}$. Moreover, owing to the canonical isomorphisms $L_q(M, d\nu) \simeq L_{\tilde{q}}(M, d\nu)$, $1/\tilde{q} + 1/q = 1$, and $L_1(M, d\nu) \simeq L_\infty(M, d\nu)$, the corresponding subspace $S_{p,N}^{(q),*} \subset L_\infty(M, d\nu) \cap L_{\tilde{q}}(M, d\nu)$ is also closed and $S_{p,N}^{(q),*} \subset S_p^{(q),*}$.

Remark 1. *It is interesting to note here [2] that the spaces $L_\infty(M, d\nu) \cap L_{\tilde{q}}(M, d\nu)$ and $L_\infty(M, d\nu) \cup L_{\tilde{q}}(M, d\nu)$ are not isomorphic.*

Доказательство. Proof of Theorem 2. As follows from Lemma 2, the closed subspace $S_{p,N}^{(q),*} \subset L_\infty(M, d\nu) \cap L_{\tilde{q}}(M, d\nu)$ a priori contains the finite dimensional subspace $S_{p,N}^{(q),*} \subset L_\infty(M, d\nu) \cap L_{\tilde{q}}(M, d\nu)$, $\dim S_{p,N}^{(q),*} = N$. The latter makes it possible to reduce the finite dimensionality problem subject to the closed subspace $S_p^{(q)} \subset L_1(M, d\nu) \cap L_q(M, d\nu)$ to the one of the closed subspace $S_{p,N}^{(q),*} \subset L_\infty(M, d\nu) \cap L_{\tilde{q}}(M, d\nu)$, following the Grothendieck [9] scheme. First, we observe that the embedding mapping $S_{p,N}^{(q),*} \subset L_{\tilde{q}}(M, d\nu) \rightarrow S_{p,N}^{(q),*} \subset L_\infty(M, d\nu)$ is a closed operator, giving rise owing to the Banach closed operator theorem to the inequality

$$\|g\|_\infty \leq R\|g\|_{\tilde{q}} \quad (5)$$

for any $g \in S_{p,N}^{(q),*} \subset L_\infty(M, d\nu)$ and some positive and bounded number $R < \infty$. Moreover, making use of the Young inequality, for any $\infty > \tilde{q} > 0$ one can find such a positive constant $R_{\tilde{q}} < \infty$ that

$$\|g\|_\infty \leq R_{\tilde{q}}\|g\|_2 \quad (6)$$

for any $g \in S_{p,N}^{(q),*} \subset L_\infty(M, d\nu)$. Taking into account that, owing to (5), any $g \in S_{p,N}^{(q),*} \subset L_2(M, d\nu) \cap L_\infty(M, d\nu)$, one can choose the finite dimensional subspace (3) such that the set of functions $\psi := \{\psi_j \in S_{p,N}^{(q),*} : j = \overline{1, N}\}$ to be orthonormal, that is

$$\int_M \bar{\psi}_j \psi_k d\nu = \delta_{jk} \quad (7)$$

for all $j, k = \overline{1, N}$. Let now $Q \subset \mathbb{D}_1(0)$ be a countable everywhere dense subset of the unit disc $\mathbb{D}_1(0)$ of the Euclidean space $\mathbb{E}^N := (\mathbb{C}^N; \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Then for every vector $c \in \mathbb{D}_1(0)$ one gets that the function $g_c := \langle c | \psi \rangle \in L_2(M, d\nu)$, that is $\|g_c\|_2 \leq 1$, for owing to (6)

$$\|g_c\|_\infty \leq R_{\tilde{q}}. \quad (8)$$

Taking into account that the set $Q \subset \mathbb{D}_1(0)$ is countable, one can find such a measurable subset $M' \subset M$ that the measure $\nu(M') = 1$ and $|g_c(u)| \leq R_{\tilde{q}}$ for all vectors $c \in Q \subset \mathbb{D}_1(0)$ and all points $u \in M'$. Since at a fixed point $u \in M'$ the mapping $\mathbb{D}_1(0) \ni c \rightarrow |g_c(u)| \in \mathbb{R}$ is continuous on $\mathbb{D}_1(0) \subset \mathbb{E}^N$, one can extend this function on the whole disc $\mathbb{D}_1(0)$, getting the inequality

$$|g_c(u)| \leq R_{\tilde{q}} \quad (9)$$

already for all $c \in \mathbb{D}_1(0)$ and $u \in M'$. Making use of the arbitrariness of the vector $c \in \mathbb{D}_1(0)$, it can be chosen as $c := \frac{\bar{\psi}(u)}{|\psi(u)|} \in \mathbb{D}_1(0) \cap S_p^{(q),*}$, $u \in M'$, giving rise to the following inequality $|\psi(u)| \leq R_{\tilde{q}}$, or

$$|\psi(u)|^2 \leq R_{\tilde{q}}^2. \quad (10)$$

Having integrated the inequality (10) over $M \simeq M'$ one obtains that $N \leq R_{\tilde{q}}^2 < \infty$. The latter means that $\dim S_p^{(q),*} \leq \max N < \infty$, being equivalent to the condition that $\dim S_p^{(q)} \leq \max N < \infty$, thus proving the theorem. \square

As a consequence, we have also stated that the closed subspace $S_p^{(q)} \subset L_p(M, d\mu) \cap L_q(M, d\nu)$ is isomorphic to L_2 -subspace of $L_\infty(M, d\nu) \cap L_{\tilde{q}}(M, d\nu)$, $1/q + 1/\tilde{q} = 1$.

Conclusion

We have studied a classical problem of finding effective criteria for closed subspaces in L_p , endowed with some additional functional constraints, to be finite dimensional. We considered a closed topological subspace $S_p^{(q)}$ of the functional Banach space $L_p(M, d\mu)$ and, moreover, assumed that additionally $S_p^{(q)} \subset L_q(M, d\nu)$ subject to a probability measure ν on M . Then we have shown that closed subspaces of $L_p(M, d\mu) \cap L_q(M, d\nu)$ for $q > \max\{1, p\}$, $p > 0$, are finite dimensional, if the measures μ, ν are probabilistic on M and the measure μ is absolutely continuous with respect to the measure ν on M . The finite dimensionality result concerning the case when $q > p > 0$ is open and needs more sophisticated techniques, mainly based on analysis of the complementary subspaces to $L_p(M, d\mu) \cap L_q(M, d\nu)$.

Acknowledgements

The authors are indebted to Profs. T. Banach, Ya. Mykytyuk and A. Plichko for instructive discussions and suggestions. Especially they are indebted to Natalia K. Prykarpatska for help in preparation of a manuscript.

References

- [1] Alspach D.E., Odell E.W., Functional Analysis: Proceedings of the Seminar at the University of Texas, Editors: E.W. Odell and P. Rosenthal, Austin, TX, USA, 1986-87
- [2] Astashkin S.V. and Maligranda L. $L_p + L_\infty$ and $L_p \cap L_\infty$ are not isomorphic for all $1 \leq p < \infty, p \neq 2$. Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), p. 2181-2194

- [3] Balinsky A.A., Prykarpatski A.K. On finite-dimensionality of closed subspaces in $L_p(M, d\mu) \cap L_q(M, d\nu)$. Abstracts of the International Conference in complex and functional analysis. (Dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi), held on 13 - 16 September, 2021, Drohobych, Ukraine
- [4] Banach S., Theorie des operations lineaires, PWN, Warszawa, 1932.
- [5] Banakh I., Banakh T., Plichko A., Prykarpatsky A.K. On local convexity of nonlinear mappings between Banach spaces. Cent. Eur. J. Math., 10(6), (2012), p. 2264-2271
- [6] Banakh T., Lyantse W.E. , Mykytyuk Ya.V. ∞ -Convex sets and their applications to the proof of certain classical theorems of functional analysis. Matematychni Studii. 11(1), (1999), p. 83-84
- [7] Butzer P.L., Berens H., Approximation, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967
- [8] Foias C., Sell G.R., Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolution equations. J. Diff. Eqns., 73, (1988), p. 309-353
- [9] Grothendieck A., Sur certains sous-espaces vectoriels de L_p . Canadian J. Math. 6 (1954), p. 158–160
- [10] Johnson W.B. , Schechtman G. Finite dimensional subspaces of L_p . Elsevier Preprint, January 31, 2001, p. 1-40
- [11] Kato T. Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proceed. Symp. On Pure Appl. Math., 45(2), (1986), p. 9-23
- [12] Kreĭn S.G. , Petunĭn Yu.I, and Semĕnov E.M. Interpolation of linear operators, Translations of Mathematical Monographs, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1982.
- [13] Ladyzhenskaya O.A. Finite-dimensionality of bounded invariant sets for Navier–Stokes systems and other dissipative systems, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1987, 163, 105–129
- [14] Ladyzhenskaya O.A. Estimates of the fractal dimension and of the number of deterministic modes for invariant sets of dynamical systems, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1987, 163, p. 105–129; https://www.researchgate.net/publication/2428834_Finite_dimensional_subspaces_of_L_p
- [15] Lewis D.R., Ellipsoids defined by Banach ideal norms, Mathematika, 26(1), (1979), p. 18-29
- [16] Lieb E.H., Loss M. Analysis, Graduate Studies in Mathematics, v. 14, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1997
- [17] Ninomiya H. Some remarks on inertial manifolds. J Math.Kyoto Univ., 32(4), 1992, p. 667-688
- [18] Prykarpatsky A.K., Blackmore D. A solution set analysis of a nonlinear operator equation using a Leray Schauder type fixed point approach. Topology 48 (2009), p. 182-185

- [19] Reed M., Simon B. Functional Analysis. v.1. Methods of Mathematical Physics. Academic Press, 1972
- [20] Tao T. An introduction to measure theory, Graduate Studies in Mathematics, v. 126, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2011
- [21] Temam R. Infinite-dimensional Dynamical systems in fluid mechanics, Proceed. Symp. On Pure Appl. Math., 45(2), (1986), p. 431-445

e-mail: pryk.anat@cybergal.com

STRICTLY CONVEX METRIC ABELIAN GROUPS ARE NORMED SPACES

Taras Banakh, Oles Mazurenko, Olesia Zavarzina

Ivan Franko Lviv National University, Lviv, Ukraine

V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine.

Definition 1. *A metric space (X, d) is strictly convex if for all points $x, y \in X$ and radii $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ such that $d(x, y) = r_1 + r_2$, the intersection of the closed balls $B[x, r_1] \cap B[y, r_2]$ contains exactly one element.*

Theorem 1. *Every strictly convex metric abelian group is a normed real vector space.*

Problem 1. *Is every strictly convex metric group abelian?*

References

- [1] T.O. Banakh, O.V. Mazurenko, O.O. Zavarzina. *Strictly convex metric abelian groups are normed spaces*, in preparation.

e-mail: t.o.banakh@gmail.com, oles.mazurenko@lnu.edu.ua, olesia.zavarzina@yahoo.com

A CHARACTERIZATION OF 3-DIMENSIONAL AFFINE SPACES

Taras Banakh, Vladyslav Pshyk

Ivan Franko Lviv National University, Lviv, Ukraine

In this talk we will present a simple characterization of an affine 3-dimensional space X by merely 4 axioms describing properties of lines. A *liner* is a pair (X, \mathcal{L}) consisting of a set X of points and a family \mathcal{L} of subsets of X , called *lines*.

A set of point $A \subseteq X$ in a liner (X, \mathcal{L}) is called *flat* if a line $L \in \mathcal{L}$ is a subset of A whenever it has at least two common points with L . For a set of point $A \subseteq X$ we denote by \overline{A} the smallest flat subset of X that contains the set A . The *rank* of a subset $A \subseteq X$ is defined as the smallest cardinality $|B|$ of a subset $B \subseteq X$ such that $A \subseteq \overline{B}$. Flat subsets of rank 3 in liners are called *planes*.

The principal result of this talk is the following theorem characterizing 3-dimensional affine spaces over corps.

Theorem 1. *Assume that a liner (X, \mathcal{L}) satisfies the following four axioms:*

- (Euclid) *Any two distinct points belong to a unique line;*
- (Playfair) *For every plane $P \subseteq X$, line $L \subseteq P$ and point $x \in P \setminus L$ there exists a unique line Λ in X such that $x \in \Lambda \subseteq P \setminus L$;*
- (Hilbert) *If two planes in X have a common point, then they have at least two common points;*
- (Rank) *There exist four points that do not belong to any plane.*

Then there exists a 3-dimensional vector space V over a skew-field R and a bijective function $f : X \rightarrow V$ such that

$$\{f[L] : L \in \mathcal{L}\} = \{x + R \cdot v : x \in V, v \in V \setminus \{0\}\}.$$

References

- [1] T. Banakh. *Geometry and Algebra in Liners*, Lviv, 2025
<https://www.researchgate.net/publication/383409915>.
- [2] T. Banakh, V. Pshyk. *Foundation of the Affine 3-Dimensional Geometry*, (in preparation).
- [3] V. Pshyk. *A characterization of 3-dimensional affine spaces*, Bachelor Thesis, Lviv, 2025.

e-mail: vladyslav.pshyk@lnu.edu.ua

ANALYTIC FUNCTIONS IN A UNIT POLYDISC: CONDITIONS OF BOUNDEDNESS OF L -INDEX IN A DIRECTION FOR THE SUM OF FUNCTIONS WITH BOUNDED L -INDEX IN THE DIRECTION

Andriy Bandura¹, Oleh Skaskiv²

¹*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine*

²*Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine*

Let $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ be a given direction, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{D}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ be the unit polydisc, $L : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a continuous function such that for all $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{D}^n$

$$L(z) > \beta \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|b_j|}{1 - |z_j|}, \quad \beta = \text{const} > 1. \quad (1)$$

An analytic function $F : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{C}$ is called a function of *bounded L -index in a direction \mathbf{b}* , if there exists $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that for every $m \in \mathbb{Z}_+$ and every $z \in \mathbb{D}^n$ one has $\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m! L^m(z)} \leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k! L^k(z)} : 0 \leq k \leq m_0 \right\}$, where $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z)$, $\partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$,

$\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}} \left(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z) \right)$, $k \geq 2$. The least such integer $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ is called the L -index in the direction \mathbf{b} of the analytic function F and is denoted by $N_{\mathbf{b}}(F, L) = m_0$. For a given $z \in \mathbb{D}^n$ we denote $D_z = \{t \in \mathbb{C} : z + t\mathbf{b} \in \mathbb{D}^n\}$ and $\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sup_{t_1, t_2 \in D_z} \left\{ \frac{L(z+t_1\mathbf{b})}{L(z+t_2\mathbf{b})} : |t_1 - t_2| \leq \frac{\eta}{\min\{L(z+t_1\mathbf{b}), L(z+t_2\mathbf{b})\}} \right\}$. The notation $Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{D}^n)$ stands for

a class of positive continuous functions $L : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, satisfying (1) and $(\forall \eta \in [0, \beta])$ one has $\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$. Denote $A = \{z \in \mathbb{D}^n : \langle z, \mathbf{b} \rangle = 0\}$, where $\langle z, \mathbf{b} \rangle := \sum_{j=1}^n z_j b_j$. Let $z^0 \in A$ be a given point. If $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$ as a function of variable $t \in \mathbb{C}$, then there exists $t_0 \in D_{z^0}$ such that $F(z^0 + t_0\mathbf{b}) \neq 0$. Then we denote

$$B(z^0, t) = \left\{ t_0 \in D_{z^0} : |t_0 - t| < \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{\beta}{2L(z^0 + t\mathbf{b})}, \frac{1 - |z_j^0 + b_j t|}{2|b_j|} \right\}, F(z^0 + t_0\mathbf{b}) \neq 0 \right\},$$

Theorem 1 ([1]). *Let $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{D}^n)$, $\alpha \in (1/\beta, 1)$ and F, G be analytic function in \mathbb{D}^n satisfying conditions:*

- 1) $G(z)$ has bounded L -index in the direction $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- 2) for every $z = z^0 + t\mathbf{b} \in \mathbb{D}^n$, where $z^0 \in A$, and some $t_0 \in B(z^0, t)$, and $r = |t - t_0|L(z^0 + t\mathbf{b})$ one has $\max_{|t' - t_0| = \frac{2r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}} |F(z^0 + t'\mathbf{b})| \leq \max_{0 \leq k \leq N_{\mathbf{b}}(G_{\alpha}, L_{\alpha})} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k G(z^0 + t\mathbf{b})|}{k!L^k(z^0 + t\mathbf{b})}$.
- 3) $c := \sup_{z^0 \in A} \frac{\max \left\{ |F(z^0 + t'\mathbf{b})| : |t' - t_0| = \frac{2\lambda_{\mathbf{b}}^{\mathbf{b}}(1)}{L(z^0 + t_0\mathbf{b})} \right\}}{|F(z^0 + t_0\mathbf{b})|} < \infty$ where t_0 is chosen in 2).

If $|\varepsilon| \leq \frac{1-\alpha}{2c}$, then the function $H(z) = G(z) + \varepsilon F(z)$ has bounded L -index in the direction \mathbf{b} with $N_{\mathbf{b}}(H, L) \leq N_{\mathbf{b}}(G_{\alpha}, L_{\alpha})$, where $G_{\alpha}(z) = G(z/\alpha)$, $L_{\alpha}(z) = L(z/\alpha)$.

References

- [1] Bandura, A., Skaskiv, O., Hural, I., Shehda, L., Smolovyk, L. Analytic functions in a unit polydisc: conditions of directional boundedness of L -index for the sum of functions with directionally bounded L -index. Journal of Mathematical Sciences (2025). Vol. 288, No. 2, P.155-162. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07674-8>

e-mail: andriykopanytsia@gmail.com, olskask@gmail.com

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF REGULARLY VARYING SOLUTIONS TO
DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER WITH NONLINEARITIES, CLOSE
TO REGULARLY VARYING

Maria Bilozero, Natalia Sharai

Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine

Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine

The differential equation

$$y^{(4)} = \alpha_0 p(t) \prod_{i=0}^3 \varphi_i(y^{(i)}) \exp \left(\gamma \left| \sum_{i=0}^3 \ln |y^{(i)}| \right|^{\mu} \right), \quad (1)$$

where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mu \in]0; 1[$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$), $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($i = 0, 1, 2, 3$) are the continuous functions, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} is either the interval $[y_i^0, Y_i]^2$ or the interval $]Y_i, y_i^0]$, is considered.

¹If $\omega > 0$ we will take $a > 0$.

We suppose also, that every $\varphi_i(z)$ is regularly varying as $z \rightarrow Y_i$ ($z \in \Delta_{Y_i}$) of index σ_i and $\sum_{i=0}^3 \sigma_i \neq 1$.

According to properties of regularly varying functions (see for example the monograph [2]) the equation (1) is in some sense similar to the well known differential equation of Emden-Fowler type.

Definition 1. We call defined on $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ solution y of the equation (1) the $P_\omega(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \lambda_0)$ -solution ($-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$) if next conditions take place

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'''(t))^2}{y^{(4)}(t) y''(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

The improvement of mathematical models of physical phenomena contributed to the growth of the number of results for equations of greater than the general form. In the works V. M. Evtukhov and A. V. Drozhzhyna (see for example [7]) the differential equation of general form

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

was researched. Here $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\Delta_{Y_{i-1}}$ is some one-sided neighbourhood of Y_{i-1} , Y_{i-1} equals to zero or to $\pm\infty$, $i = 1, \dots, n$. The subject of the research is $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -solutions of this equation, conditions of their existence and also asymptotic as $t \uparrow \omega$ representations of such solutions and their derivatives up to the order $n-1$. The class of $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -solutions was introduced in works of V. M. Evtukhov and it appeared to be an enough wide class of monotone solutions. It includes regularly, slowly and rapidly varying as $t \uparrow \omega$ solutions and also some types of singular solutions. every of the mentioned above $n+2$ types of $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -solutions of the differential equation of the n -th order of general form is studied separately by the fulfillment of the condition $(RN)_{\lambda_0}$. The kernel of the condition is the fact, that onto the any of such solutions the equation is in some sense asymptotically near to the equation

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{j=1}^n \varphi_{j-1}(y^{(j-1)}), \quad (4)$$

where $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ is a continuous function, $\varphi_{j-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \rightarrow]0, +\infty[$ is a continuous regularly varying function of the order σ_{j-1} as $y^{(j)} \rightarrow Y_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$.

In the equation (1) the nonlinearity is not near to the form (4) because of the type of the function $\exp\left(\gamma \left|\sum_{i=0}^3 \ln |y^{(i)}|\right|^\mu\right)$.

Definition 2. We call the solution y of the equation (1), that satisfies (2), the $P_\omega(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \lambda_0)$ -solution ($-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$) if the next condition takes place

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'''(t))^2}{y^{(4)}(t) y''(t)} = \lambda_0. \quad (5)$$

The next theorem is proved for noncritical $P_\omega(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \lambda_0)$ -solutions to the equation (1).

²If $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ we take $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) correspondingly.

Theorem 1. *The next conditions are necessary for the existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \lambda_0)$ -solutions ($\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$) of the equation (1)*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_0'(t)}{I_0(t)} = \frac{\gamma_0}{\lambda_{n-1}^0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_i^0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0i+1}}{\lambda_{n-1}^0 - 1}} = Y_i, \quad (6)$$

$$y_i^0 y_{i+1}^0 a_{0i+1} (\lambda_{n-1}^0 - 1) \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{as } t \in [a, \omega[, \quad (7)$$

where $y_3^0 = \alpha_0$, $i = 0, \dots, 3$.

If the equation

$$\sum_{k=0}^3 \sigma_k \prod_{i=k+1}^3 a_{0i} \prod_{i=1}^k (a_{0i} + \lambda) = (1 + \lambda) \prod_{i=1}^3 (a_{0i} + \lambda)$$

has no roots with zero real part, then the conditions (6), (7) are sufficient for the existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \lambda_0)$ -solutions of the equation (1). For any such solution the next asymptotic representations as $t \uparrow \omega$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_0} \exp\left(-\gamma \left| \sum_{i=0}^3 \ln |y^{(i)}| \right|^\mu\right)}{\prod_{j=0}^{n-1} \theta_j(y^{(j)}(t))} = \gamma_0 I_0(t) [1 + o(1)],$$

$$\frac{y^{(i)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{[(\lambda_{n-1}^0 - 1) \pi_\omega(t)]^{n-i-1}}{\prod_{j=i+1}^{n-1} a_{0j}} [1 + o(1)],$$

where $i = 0, \dots, 2$, take place.

References

- [1] E. Seneta *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., vol. 508, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [2] Seneta E. *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., vol. 508, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [3] Belozeroва M.A., Gerzhanovskaya G.A. *Asymptotic representations of solutions of second order differential equations with nonlinearities close to regularly varying* Mat. Stud. No. 44 (2015), 204–214.
- [4] Marić V., Tomić M. *Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = p(t)\varphi(y)$* . *Math. Z.* 1976. 149. P. 161–166.
- [5] Taliaferro S. D. *On the positive solutions of $y'' + \psi(t)y^{-\lambda} = 0$* . *Nonlinear anal.* 1978. V. 3. P. 437–444.
- [6] Belozeroва M.A., Gerzhanovskaya G.A. *Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of essentially nonlinear ordinary differential equations of the second order*. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*. 2019. V. 77. P. 1 – 12

- [7] Evtukhov V.M., Drozhzhyna A. V. Asymptotic of rapidly varying solutions, that are asymptotically close to differential equations close to equations with regularly varying nonlinearities. *Nonlinear oscillations*. 2019. T.22, 3. P. 350–368

e-mail: Marbel@ukr.net

NUMERICAL HOMOGENIZATION AND MULTISCALE MODELING OF POROUS MEDIA

Dmytro Bobylyev

Kryvyi Rih State Pedagogical University, Kryvyi Rih, Ukraine

The analysis of porous media with heterogeneous microstructures requires effective methods capable of bridging multiple spatial scales. Consider the elliptic boundary value problem

$$-\nabla \cdot \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^\varepsilon(x) \right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

where $A(x/\varepsilon)$ is a rapidly oscillating tensor describing permeability or stiffness. Direct simulation for small ε is computationally infeasible.

The homogenized approximation $u^0(x)$ satisfies

$$-\nabla \cdot (A^* \nabla u^0(x)) = f(x), \quad u^0|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

where the effective tensor A^* is computed from the cell problems

$$-\nabla_y \cdot (A(y)(e_i + \nabla_y \chi_i(y))) = 0, \quad y \in Y = [0, 1]^d, \quad (3)$$

with periodic boundary conditions. Then

$$A_{ij}^* = \int_Y A(y)(e_i + \nabla_y \chi_i(y)) \cdot (e_j + \nabla_y \chi_j(y)) dy. \quad (4)$$

The negative sign in front of the divergence operator reflects the physical principle that flows occur in the direction opposite to the gradient of potential, for instance heat flux or Darcy flow in porous media. From the mathematical viewpoint, it ensures that the operator is elliptic and positive definite in the Hilbert space $H_0^1(\Omega)$, thus guaranteeing well-posedness of the problem.

Computational experiments confirm convergence of u^0 to u^ε in the H^1 norm with error $O(\varepsilon)$. Finite element simulations with adaptive refinement demonstrate efficiency in capturing fine-scale oscillations and computing macroscopic transport coefficients. For multiscale porous structures, numerical experiments illustrate that permeability tensors calculated through homogenization provide reliable approximations of effective flow rates compared to direct simulations.

Several numerical strategies have been developed to implement this approach, including the Multiscale Finite Element Method (MsFEM) and the Heterogeneous Multiscale Method (HMM). These frameworks allow constructing special basis functions or coupling fine- and coarse-scale solvers, significantly reducing the computational cost while retaining essential information from microscopic structures.

Applications include groundwater flow, composite membranes, biomechanics of tissues, and mechanics of engineered porous solids. The methodology also has potential in geophysics for oil and gas recovery, in civil engineering for modeling concrete and asphalt, and in environmental science for predicting contaminant transport in soil.

Future perspectives involve stochastic homogenization to capture uncertainty in random microstructures, machine learning techniques to accelerate the construction of effective coefficients, and the use of high-performance computing for large-scale three-dimensional problems. Such developments will further strengthen the role of numerical homogenization as a key tool in multiscale modeling of complex porous systems.

WEAKLY PERTURBED BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF
 INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE GENERAL CASE. AN EQUIVALENT
 SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS

Ivanna Bondar

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Consider a boundary value problem for a linear system of integrodifferential equations with a small parameter ε :

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)] ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b [K(t, s)x(s) + K_1(t, s)\dot{x}(s)] ds, \quad (1)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{R}^q \quad (2)$$

Using perturbation theory methods, the coefficient conditions for the existence of a solution to the boundary value problem (1), (2) are found in the general case. The structure of the solution set for this problem is constructed in the space $D_2[a, b]$ n -dimensional absolutely continuous differentiable vector-functions $x = x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a, b], \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0]$. It is proven that for arbitrary inhomogeneities on the right sides of equations (1), (2), there exists a unique solution in the form of a convergent series

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=-(k+1)}^{\infty} \varepsilon^i x_i(t, c_i) \text{ for } \varepsilon \in (0, \varepsilon_*] \subseteq (0, \varepsilon_0].$$

Here, $A(t), B(t), \Phi(t)$ are $m \times n, m \times n, n \times m$ -dimensional matrices whose components belong to the space $L_2[a, b]$; the column vectors of the matrix $\Phi(t)$ are linearly independent on $[a, b]$, $f(t)$ is an n -dimensional vector-function from $L_2[a, b]$; ℓ, ℓ_1 are linear bounded q -dimensional vector functionals, $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^q$. $K(t, s), K_1(t, s)$ are $(n \times n)$ -dimensional matrices whose components are defined in the space of functions integrable on the interval $L_2[a, b]$.

An equivalent algebraic system for the given problem is constructed. *This work was carried out within the framework of the research project for young scientists of the NAS of Ukraine for 2024–2025 (0124U002111), and was also supported by the Simons Foundation Grant (1290607, I.A.B.).*

References

- [1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*, Utrecht, Boston: VSP, 2004, 317 p.; 2nd edition, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016, 314 p.
- [2] Boichuk O.A., Holovats'ka I.A. *Boundary-Value Problems for Systems of Integrodifferential Equations*, Journal of Mathematical Sciences, 203, 306–321 (2014). DOI: 10.1007/s10958-014-2135-1
- [3] Bondar I.A. *Linear Boundary-Value Problems for Systems of Integrodifferential Equations with Degenerate Kernel. Resonance Case for a Weakly Perturbed Boundary-Value problem*, Journal of Mathematical Sciences, 274, 822–832 (2023). DOI: 10.1007/s10958-023-06645-1

BEST WEIGHTED APPROXIMATION OF SOME KERNELS ON THE REAL AXIS

Stanislav Chaichenko*, Viktor Savchuk**, Andrii Shydlich***

* Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;

** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine;

*** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

We calculate the exact value and find the polynomial of the best weighted polynomial approximation of kernels of the form $\mathcal{K}_{n,s}^\lambda(t, A, B) := \frac{A+Bt}{(t^2+\lambda^2)^{s+1}}$, where A and B are fixed complex numbers, $\lambda > 0$, $s \in \mathbb{N}$, in the mean square metric.

Let us note, for $A = s = 0$ and $B = \frac{1}{\pi}$, the kernel $\mathcal{K}_{n,s}^\lambda(t, A, B)$ coincides with the Poisson kernel $P_t(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{\lambda^2+t^2}$ as function of the variable λ . A special case of kernels $\mathcal{K}_{n,s}^\lambda(t, A, B)$ are integral kernels defined in the upper half-plane by the well-known biharmonic Poisson integrals

$$\mathcal{B}(f; t; \lambda) := \frac{2\lambda^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)}{(x^2+\lambda^2)^2} dx.$$

which give the solution of the biharmonic equation $\nabla^2(\nabla^2 U) = 0$, $\nabla := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}$, in the upper half-plane of the complex plane ($\lambda > 0$) under the boundary conditions $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} U(x, \lambda) = f(x)$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{\partial}{\partial \lambda} U(x, \lambda) = 0$.

Denote by P_{n-1} the set of all algebraic polynomials with complex coefficients of degree at most $n-1$ and consider the quantity

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{K}_{n,s}^\lambda)_{2,\rho_n} := \inf_{p \in P_{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A+Bt}{(t^2+\lambda^2)^{s+1}} - p(t) \right|^2 \frac{dt}{|\rho_n(t)|^2} \right)^{1/2}$$

of best weighted approximation of the kernel $\mathcal{K}_{n,s}^\lambda(t, A, B)$ by all possible polynomials from the set P_{n-1} in the mean square metric with the weight $\frac{1}{|\rho_n(t)|^2}$, $\rho_n(t) = \rho_0 \prod_{k=1}^n (t - a_k)$, where $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, and $\rho_0 \neq 0$ is a constant.

Theorem 1. *Let A, B be any fixed real numbers, $\lambda > 0$ and $s \in \mathbb{N}$. Then for any $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n^2(\mathcal{K}_{n,s}^\lambda)_{2,\rho_n} = \frac{4\pi}{(2\lambda)^{2s+3} \mu_n(\lambda, \mathbf{a}) |\rho_0|^2} \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^s \binom{l+k}{l} G_k \bar{G}_l,$$

where $\mu_n(\lambda, \mathbf{a}) = \prod_{k=1}^n \left[\alpha_k^2 + (\beta_k + \lambda)^2 \right]$, $a_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$G_k = G_k(\lambda, \mathbf{a}) = \sum_{j=0}^{s-k} \frac{\binom{s+j}{s} i^{s-k-j} \nu_{s-k-j}(i\lambda, \bar{\mathbf{a}})}{(2\lambda)^{k+j}} \left(\frac{B\lambda(s(s+j)-2j)}{s(s+j)} - iA \right).$$

Similar extremal problems for the kernels $\mathcal{K}_{n,s}^\lambda(t, A, B)$ was solved: in the case of $s = 0$ in [1] (see, also [2]), in the case of $s = 1$ in [3].

References

- [1] Voskanyan A.A. *On some extremal problems of approximation theory on the entire real axis.* Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoi SSR. 1979; 14 (2): pp. 107-123.
- [2] Ahiezer N.I.: *Lectures on the theory of approximation.* New York, 1956.
- [3] Savchuk V.V., Chaichenko S.O., Shydlich A.L. *Extreme problems of weight approximation on the real axis.* Journal of Mathematical Sciences United. 2024; 2: pp. 129-145.

e-mail: s.chaichenko@gmail.com

ALGEBRAIC SOLUTIONS AND THE PROBLEM OF THE CENTER FOR PLANAR
POLYNOMIAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

Dumitru Cozma

Ion Creangă State Pedagogical University of Chişinău, Republic of Moldova

1. The problem of the center. We consider a planar system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

where $P(x, y)$, $Q(x, y)$ are coprime polynomials in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ with real coefficients. The degree n of this polynomial system is the maximum degrees of the polynomials P and Q , $n = \max\{\deg P(x, y), \deg Q(x, y)\}$. Associated to this polynomial differential system there is the polynomial vector field $\mathcal{X} = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$.

Let $O(0, 0)$ be a singular point of differential system (1), i.e. $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$, and consider the linearization of (1) at $O(0, 0)$:

$$\frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y, \quad \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y. \quad (2)$$

The most important question which is still open for planar systems of differential equations is the following one [1], [3]:

Problem 1. *Under which conditions do the original system (1) and the linearized system (2) have the same qualitative behavior and the same topological structure around a singular point $O(0, 0)$?*

This problem has been solved for (1) unless if the singular point $O(0, 0)$ is of a center or a focus type, i.e. the eigenvalues of the linearized system are purely imaginary $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $i^2 = -1$, $\beta \neq 0$ and $n \geq 3$. In this case, by using a nondegenerate transformation of variables and a time rescaling, the system (1) can be brought to the canonical form

$$\frac{dx}{dt} = y + \sum_{j=2}^n P_j(x, y) \equiv P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x + \sum_{j=2}^n Q_j(x, y) \equiv Q(x, y), \quad (3)$$

where P_j and Q_j are homogeneous polynomials of degree j with real variables and coefficients. A singular point $O(0, 0)$ is either a focus or a center for (3), called a *weak focus*, a *fine focus* or a *monodromic singular point*.

The problem of distinguishing between a center or a focus is called *the problem of the center* or *the center–focus problem*. The interest in solving the problem of the center for differential systems (3) arose as part of investigation of the local 16th Hilbert problem.

Lyapunov proved that the problem of the center is equivalent to the problem of local integrability of a differential system (3) in the neighborhood of a singular point $O(0,0)$. A singular point $O(0,0)$ is a center for system (3) if and only if the system has in some neighborhood of $O(0,0)$ a nonconstant analytic first integral

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} F_k(x, y) = C \quad (4)$$

or an analytic integrating factor of the form

$$\mu(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x, y), \quad (5)$$

where F_k, μ_k are homogeneous polynomials of degree k .

2. Focus quantities. Lyapunov proved that the problem of the center can be reduced to the problem of solving an infinite system of polynomial equations whose variables are parameters of the differential system. It is known that there exists a formal power series $F(x, y) = \sum F_k(x, y)$, defined in a neighbourhood of the origin, such that the rate of change of $F(x, y)$ along trajectories of system (3) is

$$\frac{dF}{dt} = L_1(x^2 + y^2)^2 + L_2(x^2 + y^2)^3 + \dots \quad (6)$$

where the quantities $L_k, k = 1, 2, \dots$ are polynomials in the coefficients of system (3) called *the Lyapunov (focus) quantities*. The stability of the origin is determined by the first nonvanishing Lyapunov quantity.

The origin is a fine focus of order m if $L_k = 0, k = \overline{1, m-1}$ and $L_m \neq 0$. In this case at most m small amplitude limit cycles can bifurcate from a fine focus of order m .

Theorem 2. *The origin is a centre for differential system (3) if and only if all the Lyapunov quantities vanish ($L_k = 0, k = \overline{1, \infty}$).*

By the Hilbert's basis theorem, there is a natural number N such that $L_k = 0$ for all k if and only if $L_k = 0$ for all $k \leq N$. It is only necessary to find a finite number of Lyapunov quantities, though in any given case it is not known a priori how many are required. We come to the following Open Problem [3]:

Problem 2. *For any degree n of the differential system (3) to find such $N = N(n)$ that vanishing the first N Lyapunov quantities implies the existence of a center.*

The problem of the center was solved for: quadratic differential systems, $N = 3$; cubic symmetric differential systems, $N = 5$; the Kukles differential system, $N = 8$.

3. Algebraic solutions. An important problem concerning the integrability of differential systems (3) is whether the trajectories to (3) can be described implicitly by an algebraic formula, for example, $\Phi(x, y) = 0$, where Φ is a polynomial.

Definition 1. *An invariant algebraic curve of system (3) is the solution set in \mathbb{C}^2 of an equation $\Phi(x, y) = 0$, where Φ is a polynomial in x, y with complex coefficients such that*

$$\mathcal{X}\Phi = P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} = K\Phi, \quad (7)$$

for some polynomial in $x, y, K = K(x, y)$ of degree $n - 1$ with complex coefficients, called *the cofactor of the invariant algebraic curve $\Phi(x, y) = 0$.*

Definition 2. An invariant algebraic curve $\Phi(x, y) = 0$ is called an algebraic solution of (3) if $\Phi(x, y)$ is an irreducible polynomial in $\mathbb{C}[x, y]$.

Let $\Phi = 0$ be an algebraic solution for (3) of degree m . This algebraic solution is:

- 1) an *invariant straight line* if $m = 1$, and it has the form $a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0$;
- 2) an *invariant conic* if $m = 2$, and it has the form

$$a_{20}x^2 + a_{11}xy + c_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0;$$

- 3) an *invariant cubic* if $m = 3$, and it has the form

$$a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0.$$

Since Darboux found in 1878 connections between invariant algebraic curves and the existence of first integrals of planar polynomial differential systems, the theory of invariant algebraic curves is still full of open questions [2], [4].

Problem 3. Give a method to find an upper bound M to the degree of the algebraic solutions for a fixed polynomial system (1) of degree $n \geq 2$.

Problem 4. What is the maximum number $\alpha(n)$ of algebraic invariant curves in the set of all polynomial differential systems of degree $n > 1$ having finitely many invariant algebraic curves ?

For a given polynomial system (1) of degree n the calculation of the invariant algebraic curves is a very hard problem because in general we don't have any evidence about the number of invariant algebraic curves and the degree of a curve.

4. Darboux integrability. Invariant algebraic curves are central object in the theory of integrability of polynomial differential systems. This motivates the growing interest of researchers in application and development of the algebraic method of integrability for polynomial systems. This kind of integrability is usually called *Darboux integrability*, and it provides a link between the *integrability of polynomial systems and the number of invariant algebraic curves* they have [2], [3].

Suppose the polynomial differential system (1) of degree n has q invariant algebraic curves $\Phi_j(x, y) = 0$, $j = \overline{1, q}$. Darboux proposed to search for a first integral (an integrating factor) in the form

$$\Phi_1^{\alpha_1} \Phi_2^{\alpha_2} \dots \Phi_q^{\alpha_q}, \quad (8)$$

where Φ_j are invariant algebraic curves and $\Phi_j \in C[x, y]$, $\alpha_j \in C$.

Problem 5. For polynomial systems of degree n determine the relations between the number q of invariant algebraic curves, their degrees and the existence of first integrals.

A partial answer to this problem was given by Darboux in the following Theorem [2].

Theorem 3. Suppose system (1) has q distinct irreducible invariant algebraic curves $\Phi_j = 0$, $j = 1, \dots, q$. If $q \geq \frac{1}{2}n(n + 1)$, then either we have a Darboux first integral or a Darboux integrating factor.

The method of Darboux is very useful and elegant one to prove integrability for some families of differential systems if we have "enough" invariant algebraic curves. This motivates the following problem for polynomial differential systems (3).

Problem 6. Find the polynomial differential systems (3) with a fewer number of invariant algebraic curves than $n(n + 1)/2$ for which a singular point $O(0, 0)$ is a center.

In [2] Schlomiuk proved that the method of Darboux can be applied to prove centers in all cases of the quadratic systems: any quadratic system ($n = 2$) with a singular point of a center type is Darboux integrable.

5. Cubic differential systems with a center. As application we consider the cubic system of differential equations $\{(3), (n = 3)\}$ with a singular point of a center or a focus $O(0, 0)$, written in the form

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3, \\ \frac{dy}{dt} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3), \end{aligned} \quad (9)$$

in which variables and coefficients are assumed to be real.

For cubic differential system (9) we study the following problems:

(i) Find the subclass of systems (9) which has a given number M of invariant algebraic curves of respective degrees d_1, d_2, \dots, d_M .

(ii) For this subclass find the integrability conditions such that the singular point $O(0, 0)$ is a center.

We discuss the difficulty of these problems and present the results concerning the relation between the existence of invariant algebraic curves, the Lyapunov quantities and the integrability of polynomial differential systems. It was proved:

Theorem 4. *Let the cubic differential system (9) have two invariant straight lines (real or complex conjugated) and one invariant cubic. Then a singular point $O(0, 0)$ is a center if and only if the first three Lyapunov quantities vanish ($N = 3$).*

Theorem 5. *Let the cubic differential system (9) have two invariant straight lines (real or complex conjugated) and one invariant conic. Then a singular point $O(0, 0)$ is a center if and only if the first four Lyapunov quantities vanish ($N = 4$).*

Theorem 6. *Let the cubic differential system (9) have one invariant straight line and one invariant cubic. Then a singular point $O(0, 0)$ is a center if and only if the first five Lyapunov quantities vanish ($N = 5$).*

It was determined the conditions under which the cubic differential system (9) has Darboux first integrals of the forms:

$$1) \quad l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi_2^\beta = C, \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

where $l_1 = 0, l_2 = 0$ are invariant straight lines and $\Phi_2 = 0$ is an invariant conic;

$$2) \quad l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi_3^\beta = C, \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

where $l_1 = 0, l_2 = 0$ are invariant straight lines and $\Phi_3 = 0$ is an invariant cubic;

$$3) \quad l_1^\alpha \Phi_3^\beta = C, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

where $l_1 = 0$ is an invariant straight line and $\Phi_3 = 0$ is an invariant cubic.

Finally, we consider several families of cubic differential systems (9) and show that the existence of invariant algebraic curves influences the number of limit cycles.

Acknowledgements. This work was supported by the National Agency for Research and Development of the Republic of Moldova under project number "25.80012.5007.76SE Qualitative and algebraic investigation of differential models".

References

- [1] Romanovski V.G., Shafer D.S. *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach*. Boston, Basel: Birkhäuser, 2009.
- [2] Schlomiuk D. *Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields. Bifurcations and periodic orbits of vector fields*. Kluwer Academic Publishes, 1993, p. 429–467.
- [3] Cozma D. *Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics*. Chişinău: Ştiinţa, 2013.
- [4] Xiang Zhang. *Integrability of Dynamical Systems: Algebra and Analysis*. Singapore: Springer Nature Singapore, 2017.

e-mail: cozma.dumitru@upsc.md

FACTORIZATION OF ORTHOGONAL PROJECTORS

Vitalii Dehnerys

Ivan Franko Lviv National University, Lviv, Ukraine

Definition 1. *We say that an operator $A \in \mathcal{B}$ admits UL-factorisation if there exist $A_+ \in \mathcal{B}^+$, $A_- \in \mathcal{B}^-$ such that $A = A_+A_-$.*

Definition 2. *Let $A \in \mathcal{B}$ and $A \geq 0$. We say that A admits a special factorisation if there exists $A_+ \in \mathcal{B}^+$ such that $A = A_+A_+^*$.*

Problem 1. *Does every orthogonal projector $P \in \mathcal{B}$ with $\dim \ker P < \infty$ admit a special factorisation in the form $P = VV^*$, where V is an isometric operator in \mathcal{B}^+ ?*

Lemma 1. *For an arbitrary $x \in \Delta_k$ ($k = 1, \dots, m + 1$) the operator*

$$A_k(x) := A(x)|_{G_k}$$

is invertible in G_k . Moreover, the function $x \mapsto A_k^{-1}(x)$ is continuous on Δ_k .

Definition 3. *Denote by $A^b : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(G)$ the function acting by the formula*

$$A^b(x) := A_k^{-1}(x) \oplus O_k, \quad x \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, m + 1,$$

where O_k is a null-operator in F_k .

Remark 1. *It follows from Lemma 1 that the function $x \mapsto A^b(x)$ is continuous on every interval Δ_j , and its points of discontinuity can only be points ξ_j , $j = 1, \dots, m$. Moreover, in view of Lemma 1 and*

$$A(x) := \int_{-\infty}^x \Phi^*(t)\Phi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

we have for almost every $x \in \Delta_k$ ($k = 1, \dots, m + 1$) the equality

$$A(x)A^b(x)\Phi^*(x) = \Phi^*(x).$$

Theorem 1. *The formula*

$$(Vf)(x) := f(x) - \int_x^\infty \Phi(x) A^b(t) \Phi^*(t) f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, f \in H. \quad (1)$$

defines an isometric upper-triangular operator such that $VV^ = P$.*

Lemma 2. *Assume that the operator V is introduced by the formula (1) and $U := I - V$. For an arbitrary $f \in C_0$ the equality*

$$\|Uf\|^2 = (Uf | f) (f | Uf)$$

holds.

Corollary 1. *The operator V that is defined by the formula (1) is an isometric upper-triangular operator.*

Lemma 3. *For every $g \in C_0$ the equality*

$$\|U^*g\|^2 = (U^*g)g + (g | U^*g) \|P^\perp g\|^2, \quad (P^\perp := I - P).$$

holds.

e-mail: dehnerysvitalii@gmail.com

MODELING BIOMASS AND PRODUCT ACCUMULATION DYNAMICS IN DESMODESMUS
 ARMATUS MICROALGAE CULTURE USING A STIMULATING SUBSTRATE
Andrii Dorosh, Iryna Dorosh, Ihor Cherevko, Andrii Pertsov
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Mathematical modeling of biological processes has a long study history and remains widely applied. The complexity and uniqueness of ecological and biological systems largely define the specific challenges of their modeling [1].

Various mathematical models have been developed to describe the dynamics of both microalgal biomass growth and the accumulation of target products [2, 3]. Each model represents a simplified abstraction of the actual system and therefore requires validation and calibration using experimental data. Moreover, model parameters often need adjustment depending on the particular species of microalgae and the environmental conditions under study [4].

Experimental results indicate that the Pert model [5] is suitable for cases involving a stimulating substrate, since stimulation of product accumulation occurs only up to a certain threshold. At higher substrate concentrations, inhibition of biomass growth can be effectively described using the Bergter equation [6].

In this context, the mathematical model of carotenoid and biomass accumulation under the influence of activating substrates is expressed as a system of equations:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{\mu_m K_{CS}}{K_S + K_{CS}} CS - \bar{\mu}C, \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{q_1 S}{K_S + S} C - kPC, \\ -\frac{dS}{dt} &= \left(\frac{\mu_m}{Y_{CS}} + \frac{q_p}{Y_{PS}} \right) C, \end{aligned} \quad (1)$$

where S is the substrate concentration, P is the concentration of the target product, and C is the biomass concentration.

Solving the system (1) will make it possible to obtain the dynamics of all the main parameters of this process and determine the initial conditions at which the optimal values of the final product are achieved.

To model the dynamics of carotenoid biosynthesis processes, software applications have been developed using Python and Wolfram Mathematica with user-friendly interfaces that allow tracking changes in the dynamics of the mathematical model when any of the parameters change, for example, the initial amount of biomass, substrate, etc. Sliders for each parameter allow users to quickly and conveniently change their values and observe their impact on the model behavior.

The results obtained when modeling the accumulation process of carotenoids and biomass in *D. armatus* culture in both applications correlate with experimental data.

The developed software products with graphical interfaces for configuring process parameters and observing dynamics in real time are designed for users without a mathematical background and have convenient tools for analyzing and visualizing results [7]. They can be used for laboratory research on optimizing microorganism growth conditions, as well as for educational purposes for students.

References

- [1] J. Makinia and E. Zaborowska. *Mathematical Modelling and Computer Simulation of Activated Sludge Systems*. IWA Publishing, Alliance House, 2020. 670 p.
- [2] F. Brauer, C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer New York, NY, 2012. 508 p.
- [3] J. Muller, C. Kuttler. *Methods and Models in Mathematical Biology*. Springer Berlin, Heidelberg, 2015. 711 p.
- [4] S. S. Jesus and R. M. Filh. *Modeling growth of microalgae Dunaliella salina under different nutritional conditions*. *Biochem & Biotech*, 2010. Vol. 4(6), pp. 279–283.
- [5] S. J. Pirt. *Principles of Microbe and Cell Cultivation*. New York : Halsted Press, 1976. 274 p.
- [6] O. Forrest-Owen. *Mathematical Modelling and Its Applications in Biology, Ecology and Population Study*. University of Chester, United Kingdom, 2016. 124 p.
- [7] A. Dorosh, I. Dorosh, I. Cherevko, M. Marchenko, L. Cheban. *Mathematical modeling of biomass and carotenoid accumulation in microalgae. 2024 14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT) (19–21 September 2024)*. Czech Republic, 2024. Pp. 36–39.

e-mail: a.dorosh@chnu.edu.ua, i.malishchuk@chnu.edu.ua, i.cherevko@chnu.edu.ua, a.pertsov@chnu.edu.ua

In this paper we obtain algorithm for solving a class of linear variable-order fractional differential equations. We utilized a combination of Caputo fractional derivatives with the Haar wavelet collocation method to numerically solve linear variable order fractional differential equations.

The following fractional derivative of variable order $\alpha(t) > 0$ is introduced by Caputo [1] in the form

$$D_{0,t}^{\alpha(t)} f(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha(t))} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau, x) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha(t)-1-m}}, & m-1 < \alpha(t) \leq m, \operatorname{Re}\alpha(t) > 0, m \in N, t > 0, \\ \frac{\partial^m f(t, x)}{\partial t^m}, & \alpha(t) = m, \end{cases}$$

there $\frac{\partial^m f(t, x)}{\partial t^m}$ is the m -partial derivative of $f(t, x)$ with respect to t , if $0 < \alpha(t) < 1$ then $m = 1$, similarly if $1 < \alpha(t) < 2$ then $m = 2$.

In Haar wavelet two functions, scalling $h_1(t)$ [2] and mother function $h_2(t)$ [3], play an essential role:

$$h_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b), \\ 0, & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad h_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right), \\ -1, & t \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right), \\ 0, & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

Problem. We consider the problem for the equation in form

$$D_{0,t}^{\alpha(t)} U(t, x) = U(t, x)b(t) + \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2}, \quad m = 1, 0 < x < l, t > 0,$$

$$U(0, x) = \lambda, \quad U(0, t) = U(l, t) = 0,$$

$\lambda \in R, l > 0, b(t)$ – are known, and we obtain the approximate solution $U(t, x)$ by the application Haar wavelets collocation method [4].

References

- [1] M. Caputo. *Elasticata e Dissapazione*, Zani-chelti, Bologna, 1969.
- [2] U. Lepik, H. Hein. *Haar wavelets with applications*, Springer, Switzerland, 2024.
- [3] R. Amin, K. Shah, M. Asif, I. Khan, E. Ullah. An efficient algorithm for numerical solution of fractional integro-differential equations via Haar wavelet. *J. Comput. Appl. Math.*, 381(2021), 113028.
- [4] Khursheed J. Ansari, Rohul Amin, Hafsa, Atif Nawaz, Fazli Hadi. A computational algorithm for solving linear fractional differential equations of variable order. Published by Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia, *Filomat* 37:30(2023), 10383-10393.

ON CLASSIC FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE CLASS
OF DEGENERATED PARABOLIC EQUATIONS OF KOLMOGOROV TYPE WITH BLOCK
STRUCTURE AND ITS APPLICATIONS

Vitaly Dron, Ihor Medynskyi

Institute for Applied Mathematics and Mechanics, Lviv, Ukraine

We consider a class of the equations

$$\left(S_B - \sum_{|k_1| \leq 2b} a_{k_1}(t, x) \partial_{x_1}^{k_1} \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]} \quad (1)$$

where $S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 x_{1s} \right) \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} \left(\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} \right) \partial_{x_{3j}}$, n, n_1, n_2 and n_3 be given positive integers such that $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$ and $n = n_1 + n_2 + n_3$; spatial variable $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$ with components $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$; multi-index $k := (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$ with $k_j := (k_{j1}, \dots, k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $|k_j| := |k_{j1}| + \dots + |k_{jn_j}|$, $j \in \{1, 2, 3\}$; $\Pi_H := \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, if $H \subset \mathbb{R}$.

The differential expression S_B has its matrix form $S_B = \partial_t - (x, B D_x)$, where B is a $n \times n$ -matrix which has the following structure:

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad (2)$$

B^1, B^2 are matrices which composed of real numbers b_{ij}^1 , $i \in \{1, \dots, n_1\}$, $j \in \{1, \dots, n_2\}$, b_{ij}^2 , $i \in \{1, \dots, n_2\}$, $j \in \{1, \dots, n_3\}$, O is a null-matrices of corresponding dimensions, $D_x := \text{col}(\partial_{x_{11}}, \dots, \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, \dots, \partial_{x_{2n_2}}, \partial_{x_{31}}, \dots, \partial_{x_{3n_3}})$, (\cdot, \cdot) is a scalar product in \mathbb{R}^n .

We will use the following conditions:

A₁. In the matrix (2), the blocks B^1 and B^2 are written in the form $\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} B_1^2 \\ B_2^2 \end{pmatrix}$ respectively, where matrices B_1^1, B_2^1, B_1^2 and B_2^2 have dimensions $n_2 \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ and $(n_2 - n_3) \times n_3$ respectively, and they satisfy the such conditions: $\det B_i^i \neq 0$, $i \in \{1, 2\}$;

A₂. There exists a constant $\delta > 0$ such that for any point $(t, x) \in \Pi_{[0, T]}$ and $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ the inequality

$$\text{Re} \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t, x) (i\sigma_1)^{k_1} \leq -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b}$$

holds.

The class of the equations (1) under conditions **A₁** and **A₂** is a generalization of the class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type **E₂₁** from the monograph [1].

Also we will use the following conditions with $X(h) := (X_1(h), X_2(h), X_3(h))$, $X_i(h) := (X_{i1}(h), \dots, X_{in_i}(h))$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $X_{1j}(h) := x_{1j}$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$, $X_{2j}(h) := x_{2j} + h \sum_{i=1}^{n_1} b_{ij}^1 x_{1i}$, $j \in \{1, \dots, n_2\}$, $X_{3j}(h) := x_{3j} + h \sum_{i=1}^{n_2} b_{ij}^2 x_{2i} + \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 b_{is}^1 x_{1i}$, $j \in \{1, \dots, n_3\}$, $h \in \mathbb{R}$; $\Delta_{x_1}^{\xi_1} f(\cdot, x) := f(\cdot, (x_1, x_2, x_3)) - f(\cdot, (\xi_1, x_2, x_3))$, $\Delta_{x_2}^{\xi_2} f(\cdot, x) := f(\cdot, (x_1, x_2, x_3)) - f(\cdot, (x_1, \xi_2, x_3))$, $\Delta_{x_3}^{\xi_3} f(\cdot, x) := f(\cdot, (x_1, x_2, x_3)) - f(\cdot, (x_1, x_2, \xi_3))$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$; $m_i = i + 1/(2b) - 1$, $i \in \{1, 2, 3\}$:

A₃. The coefficients of the of the equations (1) (that is, the functions a_{k_1} , $|k_1| \leq 2b$) are bounded, continuous on t on the segment $[0, T]$ and they satisfy the Hölder condition

with respect to spatial variables in the following sense:

$$\begin{aligned} \exists H_1 > 0, \quad \exists \alpha_1 \in (0, 1] \quad \forall (t, x) \in \Pi_{[0, T]}, \quad \forall z_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : \quad |\Delta_{x_1}^{z_1} a(t, x)| \leq H_1 |x_1 - z_1|^{\alpha_1}, \\ \exists H_2 > 0, \quad \exists \alpha_2 \in (m_1(m_2)^{-1}, (m_2)^{-1}] \quad \forall (t, x) \in \Pi_{[0, T]}, \quad \forall z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \forall h \in [0, T] : \end{aligned}$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t, x)| \leq H_2 (h^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}),$$

$$\exists H_3 > 0, \quad \exists \alpha_3 \in (m_2(m_3)^{-1}, (m_2)^{-1}] \quad \forall (t, x) \in \Pi_{[0, T]}, \quad \forall z_3 \in \mathbb{R}^{n_3}, \quad \forall h \in [0, T] :$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t, x)| \leq H_3 (h^{m_3 \alpha_3} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha_3}).$$

A₄. The coefficients of the equations (1) (that is, the functions a_{k_1} , $|k_1| \leq 2b$) satisfy the Hölder condition with respect to spatial variables in the following sense:

$$\exists H_4 > 0 \quad \forall (t, x) \in \Pi_{[0, T]}, \quad \forall z_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad \forall h \in [0, T] :$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} \Delta_{x_2}^{z_2} a(t, x)| \leq H_4 |x_1 - z_1|^{\alpha_1} (h^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}),$$

$$\exists H_5 > 0 \quad \forall (t, x) \in \Pi_{[0, T]}, \quad \forall z_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i \in \{1, 3\}, \quad \forall h \in [0, T] :$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} \Delta_{x_3}^{z_3} a(t, x)| \leq H_5 |x_1 - z_1|^{\alpha_1} (h^{m_3 \alpha_3} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha_3}),$$

where the constants α_1 , α_2 and α_3 are the same as in the condition **A₃**.

Theorem 1. *Let the coefficients of the equation (1) satisfy the conditions **A₁**–**A₄**. Then there is a classical fundamental solution of the Cauchy problem (CFSCP) Z for the equation (1) and*

$$|\partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-M - M_k} \hat{E}_c(t, x; \tau, \xi), \quad m_1 |k_1| + |k_2| + |k_3| \leq 1,$$

$$k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (3)$$

$$|S_B Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-M - 1} \hat{E}_c(t, x; \tau, \xi), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

where $M := \sum_{i=1}^3 m_i n_i$, $M_k := \sum_{i=1}^3 (2b(i - 1) + 1) |k_i| / (2b)$ for $k \in \mathbb{Z}_+^n$; $\hat{E}_c(t, x; \tau, \xi) :=$

$$:= \exp \left\{ -c(t - \tau)^{1-q} |x_1 - \xi_1|^q \right\} \sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{C} \Gamma(m_3 \alpha_3) (t - \tau)^{m_3 \alpha_3})^i (\Gamma(im_3 \alpha_3 + 1))^{-1} E_{c\delta^i}(t, x; \tau, \xi),$$

$$E_c(t, x; \tau, \xi) := \exp \left\{ -c \sum_{i=1}^3 (t - \tau)^{1-q_i} |X_i(t - \tau) - \xi_i|^q \right\}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n;$$

$q := 2b / (2b - 1)$; \tilde{C} , C , c are some positive constant, Γ is Euler Gamma function.

To prove the Theorem we used the results of the work [2].

We studied the properties of the CFSCP and used it to construct an integral representation of the classic solution of the Cauchy problem for the equations (1).

References

- [1] Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Ser. Operator Theory: Adv. and Appl.*, volume 152. Basel: Birkhäuser, 2004.
- [2] Ivashyshen S.D., Medynsky I.P. *The fundamental solution of the Cauchy problem for degenerate parabolic Kolmogorov type equations of arbitrary order // Math. methods and phis.-mech. fields*, **62** (1), 2019, 7–24 (in Ukrainian).

SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A MODULE OF
COPOLYNOMIALS OVER A COMMUTATIVE RING

Sergiy Gafter, Aleksey Piven'

B. Verkin ILTPE of NASU, V. N. Karazin Kharkiv National University

Let K be an arbitrary commutative integral domain with identity of characteristic 0 and let $K[x_1, \dots, x_n]$ be a ring of polynomials with coefficients in K .

Definition 1. By a copolynomial over the ring K we mean a K -linear functional defined on the ring $K[x_1, \dots, x_n]$, i.e. a homomorphism from the module $K[x_1, \dots, x_n]$ into the ring K .

We denote the module of copolynomials over K by $K[x_1, \dots, x_n]'$. If $T \in K[x_1, \dots, x_n]'$ and $p \in K[x_1, \dots, x_n]$, then for the value of T on p we use the notation (T, p) . We also write the copolynomial $T \in K[x_1, \dots, x_n]'$ in the form $T(x)$, where $x = (x_1, \dots, x_n)$ is regarded as the argument of polynomials $p(x) \in K[x_1, \dots, x_n]$ subjected to the action of the K -linear mapping T .

Definition 2. For a multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ the derivative $D^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ ($|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$) of a copolynomial T is defined in the same way as in the classical theory of generalized functions: $(D^\alpha T, p) = (-1)^{|\alpha|} (T, D^\alpha p)$, $p \in K[x_1, \dots, x_n]$.

Example 1. The copolynomial δ -function is given by the formula $(\delta, p) = p(0)$, $p \in K[x_1, \dots, x_n]$.

Definition 3. Let $T \in K[x_1, \dots, x_n]'$ and $s = (s_1, \dots, s_n)$. Consider the following formal Laurent series from the ring $\frac{1}{s_1 s_2 \dots s_n} K[[\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \dots, \frac{1}{s_n}]]$:

$$C(T)(s) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(T, x^\alpha)}{s^{\alpha+\iota}},$$

where $\iota = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}_0^n$. The Laurent series $C(T)(s)$ will be called the *Cauchy-Stieltjes transform* of a copolynomial T .

Proposition 1. For any $T \in K[x_1, \dots, x_n]'$ the equality $C\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial s_j}(C(T))$, ($j = 1, \dots, n$) holds.

The Cauchy-Stieltjes transform and Proposition 1 allow to introduce the multiplication operation on the module of copolynomials such that this operation is consistent with the differentiation.

Definition 4. Let $T_1, T_2 \in K[x_1, \dots, x_n]'$, i.e. T_1, T_2 are copolynomials. Define their *product* by the following equality: $C(T_1 T_2) = C(T_1) C(T_2)$, i.e. $T_1 T_2 = C^{-1}(C(T_1) C(T_2))$, where $C : K[x_1, \dots, x_n]' \rightarrow \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_n} K[[\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \dots, \frac{1}{s_n}]]$ is a Cauchy-Stieltjes transform.

Example 2. Let $n = 1$. We find the square of δ -function:

$$C(\delta^2)(s) = (C(\delta))^2(s) = \frac{1}{s^2} = \left(\frac{-1}{s}\right)' = (-C(\delta))' = C(-\delta'),$$

i.e.

$$\delta^2 = -\delta'.$$

The ring of formal power series of the form $u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)t^k$ with coefficients $u_k(x) \in K[x_1, \dots, x_n]'$ will be denoted by $K[x_1, \dots, x_n]'[[t]]$.

The partial derivative with respect to t of the series $u(t, x) \in K[x_1, \dots, x_n]'[[t]]$ is defined by the formula $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} k u_k(x)t^{k-1}$. The partial derivatives D^α with respect to variables x_1, \dots, x_n of the series $u(t, x) \in K[x_1, \dots, x_n]'[[t]]$ is defined as follows: $D^\alpha u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (D^\alpha u_k)(x)t^k$.

Theorem 1. Let $K \supset \mathbb{Q}$ and $a \in K$. Then the Cauchy problem in $K[x_1, \dots, x_n]'[[t]]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}, \quad u(0, x) = \delta(x)$$

has a unique solution. This solution has the form $u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \delta^{2k+1}(x)t^k$, where $u_0 = 1$ and $u_k \in K$ satisfy recurrence equation

$$u_{k+1} = (k+1)^{-1}(-1)^n a \sum_{j=0}^k (2j+1)^n u_j u_{k-j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Theorem 2. Let $a \in K$. Then the Cauchy problem in $K[x_1, \dots, x_n]'[[t]]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^n a \prod_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u(0, x) = \delta(x)$$

has a unique solution. This solution has the form $u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(n+1, n^2)}{nk+1} a^k \delta^{nk+1}(x)t^k$, where $A_k(r, m) = \frac{r}{r+mk} \binom{r+mk}{k}$ are Fuss–Catalan–Raney numbers and $\frac{A_k(n+1, n^2)}{nk+1} \in \mathbb{Z}$.

References

- [1] S.L. Gifter and A.L. Piven', *Nonlinear Partial Differential Equations in Module of Copolynomials over a Commutative Ring*, J. Math. Phys. Anal. Geom. **21** (2025), No. 3, 319–345.

e-mail: gifter@karazin.ua, aleksei.piven@karazin.ua

METHOD FOR DETERMINING THE CYCLICITY OF SINGULAR POINTS FOR QUADRATIC SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Oleksii Haluza, Olena Akhiezer

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine

Lyudmyla Malyarets, Anatoly Voronin, Stepan Lebedev

Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkiv, Ukraine

In the theory of nonlinear dynamic systems, which are described using differential equations with polynomial right-hand sides, the identification of hidden periodic regimes (so-called limit cycles) is still relevant. These periodic dynamic trajectories emerge in the vicinity of equilibrium points in a phenomenal way. They are the ones that determine the characteristic features of self-oscillatory behavior, which are inherent only to purely nonlinear objects as a result of the emergence of Andronov-Hopf bifurcations. The methods for studying bifurcations of this type are quite well known for cases where the emerging limit cycle is the only one with a well-defined type of stability [1]. It should be emphasized that the most important problem in the study of Hopf bifurcation is the search for the maximum number of limit cycles that can arise from the equilibrium point with small perturbations of the parameters of the system under study. This problem was completely solved only for the quadratic case of polynomial systems, which were considered by N. N. Bautin's and E. A. Andronova's [2]. They proved that the maximum number of limit cycles that can arise from an equilibrium position (a singular point of the focus type) in objects described by a system of two differential equations with a quadratic part is three. The authors of this study have studied in detail a special case of the Andronova's system, which has two equilibrium points of the focus type, and have proven that three limit cycles arise around each of these foci [3]. However, it should be noted that the Bautin's and Andronova's systems contain only five nonlinear parameters, i.e. these systems are special cases of a general type system in which all six coefficients of the quadratic terms are nonzero. Thus, the search for a rational way to determine the cyclicity of a singular point for a six-parameter system of differential equations with quadratic right-hand sides is relevant.

Let us consider a system of two differential equations containing polynomials of no higher than the second degree:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + \gamma y + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 \\ \frac{dy}{dt} = \delta x + \beta y + \beta_{20}x^2 + \beta_{11}xy + \beta_{02}y^2 \end{cases} \quad (1)$$

where all coefficients of quadratic terms are not equal to zero.

It is obvious that system (1) has a trivial equilibrium position $x = 0, y = 0$. In the neighborhood of this singular point the characteristic polynomial for system (1) has the following form:

$$\lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta - \gamma\delta = 0. \quad (2)$$

Assuming that $\beta = 2\mu - \alpha$, where μ is a small variable, then in this case the characteristic polynomial (2) takes the form:

$$\lambda^2 - 2\mu\lambda - \gamma\delta - \alpha^2 + 2\alpha\mu = 0. \quad (3)$$

If $\mu = 0$, then the characteristic polynomial (3) has imaginary solutions: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, where $\omega = \sqrt{-\gamma\delta - \alpha^2}$. This means that for this type of equilibrium of the system (1) at the point $(0; 0)$ is a complex focus, because when differentiating expression (3) with respect to the parameter we obtain:

$$\left. \frac{d\lambda}{d\mu} \right|_{\mu=0} = 1 - \frac{\alpha}{\omega}i. \quad (4)$$

The presence of a complex focus in system (1) gives grounds to assume the existence of one or more limit cycles in the system under consideration.

For further analysis of the problem under study, it is necessary to transform system (1) to the Poincaré normal form. This can be done using variable substitution: $x = \gamma x_1$, $y = -\alpha x_1 - \omega x_2$. Moreover, using the relation $-\gamma\delta - \alpha^2 = 1$ we obtain that $\omega = 1$. This allows us to significantly simplify subsequent computational procedures. Assuming that $\mu = 0$, system (1) can be written as follows:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + a_{20}\frac{x_1^2}{2} + a_{11}x_1x_2 + a_{02}\frac{x_2^2}{2} \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + b_{20}\frac{x_1^2}{2} + b_{11}x_1x_2 + b_{02}\frac{x_2^2}{2} \end{cases} \quad (5)$$

where the parameters a_{20} , a_{11} , a_{02} , b_{20} , b_{11} , b_{02} are expressed algebraically in terms of the original parameters α_{20} , α_{11} , α_{02} , β_{20} , β_{11} , β_{02} .

We transform system (5) into a complex differential equation using the variable $z = x_1 + i \cdot x_2$:

$$\frac{dz}{dt} = z + g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z \cdot \bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2}, \quad (6)$$

where $\bar{z} = x_1 - i \cdot x_2$, and the parameters of equation (6) have the following form:

$$\begin{aligned} g_{20} &= 0.25(a_{20} - a_{02} + 2b_{11} + i \cdot (b_{20} - b_{02} - 2a_{11})), \\ g_{11} &= 0.25(a_{20} + a_{02} + i \cdot (b_{20} + b_{02})), \\ g_{02} &= 0.25(a_{20} - a_{02} - 2b_{11} + i \cdot (b_{20} - b_{02} + 2a_{11})). \end{aligned}$$

To determine the maximum limit cycle multiplicity for equation (6), it is necessary to calculate the values of the first three Lyapunov focal quantities. In accordance with the work of H. Zoldek [4], we obtain:

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{1}{2}\text{Im}(g_{20}g_{11}), \\ l_2 &= -\frac{1}{12}\text{Im}((g_{20} - 4\bar{g}_{11})(g_{20} + \bar{g}_{11})\bar{g}_{11}g_{02}), \\ l_3 &= -\frac{5}{64}\text{Im}((4g_{11}^2 - g_{02}^2)(g_{20} + \bar{g}_{11})\bar{g}_{11}^2g_{20}). \end{aligned} \quad (7)$$

Thus, in accordance with (7), it can be assumed that there is such a type of relationship between the parameters of equation (6):

$$g_{20} = k\bar{g}_{11}, \quad (8)$$

from which it follows that:

1. for a complex value of the coefficient k there is only one limit cycle;
2. for a real value of k (but $k \neq -1$ and $k \neq 4$) there are two limit cycles;
3. if $k = 4$, there are three limit cycles;
4. if $k = -1$, the system is conservative.

Using relations (6) and (8), we obtain parametric conditions for the existence of three limit cycles:

$$\begin{cases} 2b_{11} = 3a_{20} + 5a_{02} \\ 2a_{11} = 5b_{20} + 3b_{02} \end{cases} \quad (9)$$

System (9) describes the dependence of two parameters of the six-parameter quadratic system of differential equations (5) on its other four parameters, which are free. This is a consequence of the fact that the first two Lyapunov quantities are equal to zero. The obtained result confirms the conclusions of N. N. Baunin and E. A. Andronova about the degree of limit cycle multiplicity equal to three for a system of two differential equations with quadratic nonlinearity.

References

- [1] Chow S.-N., Li C., Wang D. *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511665639>
- [2] Gaiko V. *Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem*. Springer Science & Business Media, LLC, 2003. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9168-3>
- [3] Voronin A., Lebedev S. *Quadratic system of two differential equations with six limit cycles: two approaches to problem*. 2023. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.32572.92808>
- [4] Zoladek H. *Quadratic systems with center and their perturbations*, volume 109(2) of *Journal of Differential Equations*. 1994. P. 223-273. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1049>

e-mail: oleksii.haluza@khpi.edu.ua

INVERSE FREE BOUNDARY PROBLEMS FOR DEGENERATE PARABOLIC EQUATION Nadiia Huzyk

Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy, Lviv, Ukraine

In a free boundary domain $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, where $h = h(t)$ is an unknown function, it is considered an inverse problems for determination of the time dependent functions $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$ in the minor coefficient in one-dimensional degenerate parabolic equation

$$u_t = t^\beta a(t)u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x, t)u + f(x, t) \quad (1)$$

with initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \quad (2)$$

boundary conditions

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(h(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

and overdetermination conditions

$$\int_0^{h(t)} u(x, t) dx = \mu_3(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

$$\int_0^{h(t)} xu(x, t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$\int_0^{h(t)} x^2u(x, t)dx = \mu_5(t), \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

It is known, that $a = a(t)$ is a strongly positive continuous function and degeneration of the equation (1) is caused by power function t^β .

Using the apparatus of Green's functions for the initial-boundary value problems for the parabolic equation and Schauder Fixed Point Theorem the existence of the local solution to the problem (1)-(6) is established for both cases of weak ($0 < \beta < 1$) and strong ($\beta \geq 1$) degeneration. The proof of the uniqueness of the local solution to these problems is based on the properties of the solutions to the homogeneous integral equations with integrable kernels.

e-mail: hryntsiw@ukr.net

MOUFANG LINERS

Oleksii Ilchuk

Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy, Lviv, Ukraine

Subject of my work is the structure called Moufang Liners. Liners are the set endowed with ternary relation satisfying two basic geometric properties:

- for every two distinct points exists unique line passing through them;
- for every line there exist two distinct points which belong to it.

With this geometric structure, all other known properties of different geometries can be seen as a specific subset of all liners, for which certain additional axioms are satisfied. Using notion of liners, I've studied Moufang planes - classical object in geometry and generalized requirements for geometry to be Moufang and established some additional results for Moufang planes as well as preserving already known ones.

Main results in my work are two following theorems:

Theorem 1. *The projective completion of regular Moufang affine liner is the Moufang projective liner.*

Theorem 2. *The affine liner is Moufang if and only if it is a shear liner.*

Shear liners are specific liners arising from automorphisms of a plane (or space) which have hyperplane of fixed points.

e-mail: alexilchuk4@gmail.com

SCHEME FOR APPROXIMATING THE NON-ASYMPTOTIC ROOTS OF
QUASI-POLYNOMIALS OF HIGH ACCURACY

Svitlana Ilika, Oleksandr Matviy, Larysa Piddubna

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Consider the linear system of differential-difference equations

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^k B_i x(t - \tau_i), \quad (1)$$

where $A, B_i, i = \overline{1, k}$ fixed $n \times n$ matrix, $x \in \mathbb{R}^n, 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = \tau, \varphi(t) \in [\tau, 0]$.

Analyzing the schemes of approximation of linear differential-difference equations, it was found that the approximate value of asymptotic roots of their quasi-polynomials can be found using the roots of characteristic polynomials of the corresponding approximating systems of linear differential equations [1]-[2].

We present a scheme for approximating the non-asymptotic roots of quasi-polynomials of high accuracy for equation (1) in the form [3]

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + \sum_{i=1}^k B_i z_i(t), \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= z_{m+j}(t), \\ \frac{dz_{m+j}(t)}{dt} &= 2\mu^2 [z_{j-1}(t) - z_j(t)] - 2\mu z_{m+j}(t), \\ j &= \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}, l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau} \right], m \in N. \end{aligned} \quad (2)$$

Lemma 1. *The following relation holds for the characteristic polynomial of system (2)*

$$\begin{aligned} D_{2m+1}(\lambda) &= \det \left((A - \lambda E) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \right) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m} \right) \right)^m + \\ &+ \sum_{i=1}^k B_i \left(\left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \right) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m} \right) \right)^{m-l_i} \left(\left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \right) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m} \right) \right)^{nm}. \end{aligned} \quad (3)$$

Lemma 2. *For a fixed $\lambda \in Z$ a sequence of functions*

$$H_m(\lambda) = \frac{D_{2m+1}(\lambda)}{\left(\left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \right) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m} \right) \right)^{nm}}, m \in N, \quad (4)$$

coincides with the quasi-polynomial of system (2) when $m \rightarrow \infty$.

References

- [1] Matviy O.V., Cherevko I.M. About approximation of system with delay and them stability. *Nonlinear oscillations*. 2004. **7**, No.2. 208-216.
- [2] Ilika S.A., Piddubna L.A., Tuzyk I. I., Cherevko I.M. Approximation of linear differential-difference equations and their application. *Bukovinian Mathematical Journal*. 2018. **6**, No.3-4. 80-83.
- [3] Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability. 11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, Deggendorf, Germany, 15-17 September 2021. 49-52.

e-mail: s.ilika@chnu.edu.ua, o.matviy@chnu.edu.ua, l.piddubna@chnu.edu.ua

ON THE HOMEOMORPHISMS ARISING FROM THE CAUCHY PROBLEM FOR
PARABOLIC IN THE SENSE OF EIDELMAN SYSTEMS OF ARBITRARY ORDER

Ivasiuk Halyna, Fratavchan Tonia, Protsakh Nataliia

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

National University "Lviv Polytechnic", Lviv

We consider the Cauchy problem for a system of partial differential equations

$$\partial_t^{n_k} u_k(t, x) - \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{\|\bar{\alpha}\| \leq 2bn_j, \\ (\alpha_0 < n_j)}} a_{\bar{\alpha}}^{kj}(t, x) \partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} u_j(t, x) = f_k(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

$$\partial_t^{\mu-1} u_k(t, x)|_{t=0} = \varphi_k^\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \{1, \dots, n_k - 1\},$$

where all notations correspond to [1], [2].

The system is assumed to be uniformly parabolic in the sense of Eidelman in the layer $\bar{\Pi}_T = \mathbb{R}^n \times [0, T]$. The coefficients satisfy Hölder conditions in the spatial variables and are continuous in time. The solution of the Cauchy problem is represented through the Green's matrix of the system as

$$u_k(t, x) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{kj}(t, x; \tau, \xi) f_j(\tau, \xi) d\xi + \sum_{\mu=1}^{n_k} \int_{\mathbb{R}^n} G_j^{k\mu}(t, x; \xi) \varphi_j^\mu(\xi) d\xi \right),$$

where $G = (G_0, G_1, \dots, G_N)$ is the Green's matrix, which generates the integral operators

$$\widehat{G_0^{kj}} f = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{kj}(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad \widehat{G_j^{k\mu}} \varphi_j = \int_{\mathbb{R}^n} G_j^{k\mu}(t, x; \xi) \varphi_j(\xi) d\xi.$$

The main result is the proof that the operator induced by the solution of the Cauchy problem defines a homeomorphism between the corresponding Hölder spaces. Namely,

$$\widehat{G_0^{kj}} : H_{\circ}^{s+\lambda} \longrightarrow H_{\circ}^{2bn_k+s+\lambda}, \quad \widehat{G_j^{k\mu}} : \overset{\circ}{H}^{s-2bn_j+\lambda} \longrightarrow \overset{\circ}{H}^{s+\lambda},$$

where $s \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq \max_j(2bn_j)$, $\lambda \in (0; 1)$.

The spaces $H_{\circ}^{s+\lambda}$ and $\overset{\circ}{H}^{s+\lambda}$ consist of functions that satisfy homogeneous initial or final conditions, respectively. This allows one to study different problems for the systems and to develop a functional-analytic approach to their solutions.

References

- [1] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhauser, 2004.
- [2] Ivasyshen S.D., Ivasyuk H.P. Parabolic initial problems of Solonnikov–Eidelman type // Visnyk of Lviv University. Series Mech.-Math. 2011. Issue 74. P. 98–108.

ASYMPTOTIC GAIN PROPERTY FOR NON-AUTONOMOUS INCLUSION OF
REACTION-DIFFUSION TYPE

Oleksiy Kapustyan, Taras Yusypiv

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine

We investigate global resolvability and stability of attractors for parabolic inclusion with multi-valued interaction function of reaction-diffusion type and non-autonomous disturbances. For the class of L^2 -disturbances we prove existence of global solutions in the phase space L^2 . In the class of translation-bounded disturbances we prove that obtained global solutions generate the family of multi-valued semiprocesses which possesses uniform attractor. Finally, for L^∞ -disturbances we show that the global attractor of unperturbed system is stable w.r.t. disturbances in the asymptotic gain sense [1].

Global attractors play an important role in the qualitative theory of dissipative infinite-dimensional dynamical systems [2]. In recent years, many works have appeared in which the classical theory of global attractors was extended to problems with non-autonomous, stochastic, impulsive, and multi-valued perturbations [3, 4, 5]. For evolutionary inclusions, such results were first obtained by V.S. Melnik and J. Valero, who introduced the concept of a multi-valued semiflow generated by integral solutions of inclusions of subdifferential type [6]. In subsequent works, the topological and metric properties of attractors of dissipative inclusions, their structure and stability in the sense of Lyapunov were investigated [7]. For inclusions with multi-valued non-autonomous right-hand sides of linear growth in [8], results on existence of uniform attractors of the corresponding semiprocesses were obtained. In the present work, we investigate an evolutionary inclusion with a multi-valued interaction function of the polynomial growth in the presence of non-autonomous perturbations. The global solvability in the phase space L^2 and the existence of a uniform attractor for the corresponding family of multivalued semiprocesses is proved. Using the general approach developed in [9, 10, 11], the robust stability of the global attractor of an unperturbed system with respect to the magnitude of non-autonomous perturbations is shown.

In the bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, we consider the problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \in f(u) + d(t, x), & (t, x) \in Q = (0, +\infty) \times \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

where $d \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ is a non-autonomous disturbance function, $u_0 \in L^2(\Omega)$, and the multi-valued function f satisfies the following assumptions:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow C_v(\mathbb{R}) \text{ is upper semicontinuous,} \\ &\exists C > 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0, p \geq 2, \text{ such that} \\ \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in f(s) &\quad -C - \alpha_1|s|^p \leq \xi \cdot s \leq C - \alpha_2|s|^p. \end{aligned} \quad (2)$$

Here $C_v(\mathbb{R})$ denotes the set of all non-empty, convex, compact sets in \mathbb{R} , upper semicontinuity is understood in the standard sense [12].

Assume that $d \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))$, and

$$\|d\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \|d(t)\| \leq R, \quad (3)$$

where $R \geq 0$ is a fixed number.

Theorem 1. Under conditions (2), (3) there exists $\gamma \in \mathcal{K}$ such that $\forall u_0 \in X$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|U_d(t, 0, u_0)\|_{\Theta} \leq \gamma(\|d\|_{\infty}), \quad (4)$$

where Θ is the global attractor of the unperturbed problem (1).

This research was supported by NRFU project 2023.03/0074 "Infinite-dimensional evolutionary equations with multi-valued and stochastic dynamics".

References

- [1] Kapustyan O., Yusypiv T., Ospanov M., Alday M., *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 33(1) of *Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA)*. 2025. Pp. 1–14. <http://dx.doi.org/10.15421/142501>
- [2] Robinson J.C., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*. Cambridge University Press. 2001.
- [3] Chepyzhov V.V., Vishik M.I., *Attractors for equations of mathematical physics*, volume 49 of *AMS, Providence, RI*. 2002.
- [4] Caraballo T., Langa J.A., Melnik V.S., Valero J., *Pullback Attractors of Nonautonomous and Stochastic Multivalued Dynamical Systems*, volume 11(2) of *Set-Valued Analysis*. 2003. Pp. 153–201.
- [5] Kapustyan O.V., Perestyuk M.O., *Global Attractors in Impulsive Infinite-Dimensional Systems*, volume 68(4) of *Ukrainian Mathematical Journal*. 2016. Pp. 583–597.
- [6] Melnik V.S., Valero J., *On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions*, volume 6 of *Set-Valued Analysis*. 1998. Pp. 83–111.
- [7] Kapustyan O.V., Kasyanov P.O., Valero J., *Structure and regularity of the global attractor of a reaction-diffusion equation with non-smooth nonlinear term*, volume 34(10) of *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A*. 2015. Pp. 4155–4182.
- [8] Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., Toscano S., *Solutions of Cauchy and periodic problems for evolution inclusions with multi-valued W_{λ_0} -pseudomonotone maps*, volume 249(6) of *Journal of Differential Equations*. 2010. Pp. 1258–1287.
- [9] Dashkovskiy S., Kapustyan O., *Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equations*, volume 11(5) of *Evolution Equations and Control Theory*. 2022. Pp. 1565–1577.
- [10] Kapustyan O.V., Kurylko O.B., Yusypiv T.V., Pankov A.V., *Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness*, volume 30(2) of *Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA)*. 2022. Pp. 49–61.
- [11] Kapustyan O.V., Sobchuk V.V., Yusypiv T.V., Pankov A.V., *Stability w.r.t. disturbances for the global attractor of multi-valued semiflow generated by nonlinear wave equation*, volume 31(1) of *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications (JODEA)*. 2023. Pp. 111–124.

APPROXIMATE OPTIMAL CONTROL FOR NONLINEAR HYPERBOLIC INCLUSION WITH
FAST-OSCILLATING COEFFICIENTS

Nina Kasimova

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Problem 1. Let $\Omega \in \mathbb{R}^n$ be a bounded domain. In cylinder $Q_T = (0, T) \times \Omega$ we consider the following optimal control problem for hyperbolic inclusion:

$$\begin{cases} y_{tt}(t, x) \in \Delta y(t, x) + f\left(\frac{t}{\varepsilon}, y(t, x)\right) + g(y(t, x))u(t, x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0(x), y_t|_{t=0} = y_1(x) \end{cases} \quad (1)$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} J(y, u) = & \alpha_1 \left(\int_{\Omega} q_1(x)y(T, x)dx - \psi_1 \right)^2 + \\ & + \left(\int_{\Omega} q_2(x)y_t(T, x)dx - \psi_2 \right)^2 + \int_{Q_T} u^2(t, x)dtdx \rightarrow \inf. \end{aligned} \quad (3)$$

Here $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L_2(\Omega)$ are given initial data, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\psi_1 \in \mathbb{R}$, $\psi_2 \in \mathbb{R}$ are given constants, $q_1, q_2 \in L^2(\Omega)$ are given functions. Functions $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R})$ and $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and control u satisfy the following conditions:

(f) mapping $(t, y) \mapsto f(t, y)$ satisfies the continuity condition in Hausdorff metric, and the following growth condition: $\exists C_1, C_2 > 0$ such that

$$\forall t \geq 0 \forall y \in \mathbb{R} \|f(t, y)\|_+ := \sup_{\xi \in f(t, y)} \|\xi\|_{\mathbb{R}} \leq C_1 \|y\|_{\mathbb{R}} + C_2, \quad (4)$$

where $\|\xi\|_{\mathbb{R}}$ denotes the Euclidian norm of $\xi \in \mathbb{R}$;

(g) g is continuous function and there exists $C_3 > 0$ such that:

$$\forall y \in \mathbb{R} \|g(y)\|_{\mathbb{R}} \leq C_3; \quad (5)$$

(U) U is closed and convex set, $0 \in U$.

We assume that uniformly w.r.t. $y \in \mathbb{R}$ we have

$$\text{dist}_H \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(s, y)ds, \bar{f}(y) \right) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty, \quad (6)$$

where $\text{dist}_H(A, B)$ is Hausdorff metric between sets A and B , $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

We consider the problem of finding an approximate solution of (1)-(3) by transition to the averaged coefficients. The main results establishes the solvability of problem (1)-(3) and that fact that the optimal value of the perturbed problem is close to the optimal value of the corresponding problem with averaged coefficients. Namely, the following two theorems take place.

Theorem 1. Under conditions (f), (g), (γ), (U) for every $\varepsilon > 0$ there exists at least one solution $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ of the problem (1)-(3).

Theorem 2. *Suppose that the assumptions $(f), (g), (U), (\gamma)$ and (6) are fulfilled, and, moreover, that for every $u \in U$ there exists a unique solution of the averaged problem. We additionally assume that $\forall \eta > 0 \exists \delta > 0 \forall t \geq 0 \forall z, y \in \mathbb{R}$ we have*

$$\|y - z\|_{\mathbb{R}} < \delta \Rightarrow \text{dist}_H(f(t, y), f(t, z)) < \eta. \quad (7)$$

Then

$$J(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \rightarrow J(\bar{y}, \bar{u}) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

e-mail: kasimova@knu.ua

INVESTIGATION OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH RATIONAL RIGHT-HAND SIDES

Ivan Klevchuk

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

We investigate of some properties of solutions of nonlinear difference equations [1, 2]. A period doubling bifurcation in a discrete dynamical system leads to the appearance of deterministic chaos. We use permutable rational functions for study of some classes of one-dimensional mappings. Also n-dimensional generalizations of permutable polynomials may be obtained. We investigate polynomial and rational mappings with invariant measure and construct equivalent piecewise linear mappings. These mappings have countably many cycles. We applied the methods of symbolic dynamics to the theory of unimodal mappings. We use whole p -adic numbers for study the invariant set of some mapping in the theory of universal properties of one-parameter families. Feigenbaum constants play an important role in this theory. We investigate of Mandelbrot sets and Julia sets of some mappings in complex plane.

References

1. *Klevchuk I.I.* Investigation of difference equations with rational right-hand sides // Nonlinear differential equations and their applications: Collection of scientific works – K.: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 1992. – P. 27 – 40.
2. *Klevchuk I.I.* Investigation of difference equations with a rational right-hand sides // Bukovyn. Mat. Zh. – 2020. – **8**, No. 2. – P. 71 – 82.

A NOVEL STATEMENT OF SAR IMAGE DESPECKLING PROBLEM IN WEIGHTED SOBOLEV SPACES

Peter Kogut

Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine

Mostly motivated by the practical applications especially in the field of satellite remote sensing of agricultural territories, we develop a novel approach to SAR image despeckling based on minimization of a special anisotropic energy functional. We propose a new statement of this problem in the weighted Sobolev spaces, provide a rigorous mathematical analysis of the proposed optimization problem, establish sufficient conditions of its solvability, show that the objective functional is Gateaux differentiable, and derive the corresponding optimality conditions. To illustrate the validity of the obtained results, we give some examples of numerical simulations with the real satellite SAR images.

We mainly focus on the variational approach to the SAR image despeckling problem. Namely, to remove a speckle noise from SAR images, we propose the following variational model: we define a reconstructed SAR image v^{rec} as the minimizer of the cost functional

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla v, D[\nabla u_{\sigma}^{pan}] \nabla v) dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (v - \widehat{v}_{SAR})^2 dx \quad (1)$$

in the suitable functional space V . Here, \widehat{v}_{SAR} stands for the image obtained through a median filtering operation with the original SAR image v_{SAR} , and $D[\nabla u_{\sigma}^{pan}]$ is a symmetric, bounded and strictly degenerate matrix in the following sense

$$(\xi, D[\nabla u_{\sigma}^{pan}] \xi) \geq \rho(x) |\xi|^2 \text{ in } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

where, in general, the weight function $\rho(x) := (1 - \tau(|\nabla u_{\sigma}^{pan}(x)|^2))$ does not belong to any class of Muckenhoupt weights A_p .

We show that this problem can be reformulated as follows

$$I_A(u) := \frac{1}{2} \|\nabla^A u\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u - \widehat{v}_{SAR}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \inf_{u \in W_A^{1,2}(\Omega)}, \quad (3)$$

where $A = D^{\frac{1}{2}}[\nabla u_{\sigma}^{pan}] \in L^{\infty}(\Omega, \div; \mathbb{R}^{2 \times 2}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$, and $W_A^{1,2}(\Omega)$ stands for a special weighted Sobolev space.

Our main result is: Let $v_{SAR} : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ be a given SAR image, and let $\widehat{v}_{SAR} \in L^2(\Omega)$ be its median filtered version. Let $\vec{u}_{opt} = [u_R, u_G, u_B]^t \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ be an optical image of the same territory. Then there exists a unique element $u_{SAR}^{opt} \in W_A^{1,2}(\Omega)$ such that

$$I_A(u_{SAR}^{opt}) = \inf_{u \in W_A^{1,2}(\Omega)} I_A(u). \quad (4)$$

List of the references:

1. N. Ivanchuk, P. Kogut. On Anisotropic Variational Model for SAR Image Despeckling, *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*, 33 (1), 2025, 86–109.

ILL-POSEDNESS OF THE PURE-NOISE DEAN–KAWASAKI EQUATION

Vitalii Konarovskiy

University of Hamburg, Hamburg, Germany,

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The Dean–Kawasaki equation

$$\partial \mu_t = \frac{\alpha}{2} \Delta \mu_t + \nabla \cdot \left(\mu_t \nabla \frac{\delta F}{\delta \mu_t}(\mu_t) \right) + \nabla \cdot (\sqrt{\mu_t} \xi_t) \quad (1)$$

is a central equation in macroscopic fluctuation theory, used to describe the evolution of particle density in a fluid, where particles interact through a potential F . The equation combines diffusive, interaction-driven, and stochastic components to model collective particle behavior at a mesoscopic scale. Note that ξ_t denotes a space-time white noise and $\alpha \geq 0$ is a parameter. A specific mathematical interest in (1) arises in part from the structure of the noise term and its relation to the geometry of the L_2 -Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein space $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ — the space of probability measures on \mathbb{R}^d with finite second moments. Indeed, in the free case ($F = 0$) and for $\alpha = 1$, any solution μ to (1) can be interpreted as a stochastic perturbation of the gradient flow of the Boltzmann-Shannon entropy on \mathcal{P}_2 , where the perturbation is driven by a noise ξ whose distribution reflects the energy dissipation of the system.

Following [2] we will work with the definition of martingale solutions.

Definition 1. A continuous measure-valued process μ_t is a solution to the equation (1), if for each $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ the process

$$M_\varphi(t) := \langle \varphi, \mu_t \rangle - \int_0^t \left(\frac{\alpha}{2} \langle \Delta \varphi, \mu_s \rangle - \left\langle \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\delta F(\mu_s)}{\delta \mu_s}, \mu_s \right\rangle \right) ds, \quad t \geq 0,$$

is a martingale with respect to the filtration $\sigma(\mu_s, s \leq t)$, $t \geq 0$, with quadratic variation

$$[M_\varphi]_t = \int_0^t \langle |\nabla \varphi|^2, \mu_s \rangle ds, \quad t \geq 0.$$

Here $\langle \varphi, \rho \rangle$ denotes the integration of φ with respect to the measure ρ .

In the case where $\alpha > 0$ and F is sufficiently smooth and bounded, Konarovskiy, Lehmann and von Renesse showed in [2, 3] that the Dean–Kawasaki equation (1) admits solutions if and only if the parameter α is a positive integer and the initial measure μ_0 is the purely atomic measure with all atoms having mass $\frac{1}{\alpha}$.

The main contribution of this talk is to complete the picture by addressing the previously unexplored case $\alpha = 0$.

Theorem 1. Let $\alpha = 0$ and assume that the functional derivative $\frac{\delta F}{\delta \mu}$ is bounded and Borel measurable. Then the Dean–Kawasaki equation (1) admits no solutions for any initial condition μ_0 satisfying $\mu_0(\mathbb{R}^d) > 0$ with positive probability.

The result is based on joint work with Lorenzo Dello Schiavo [1].

References

- [1] Lorenzo Dello Schiavo and Vitalii Konarovskiy. Ill-posedness of the pure-noise Dean–Kawasaki equation. *Electron. Commun. Probab.*, 30:Paper No. 52, 9, 2025.
- [2] Vitalii Konarovskiy, Tobias Lehmann, and Max-K. von Renesse. Dean–Kawasaki dynamics: ill-posedness vs. triviality. *Electron. Commun. Probab.*, 24:Paper No. 8, 9, 2019.
- [3] Vitalii Konarovskiy, Tobias Lehmann, and Max von Renesse. On Dean–Kawasaki dynamics with smooth drift potential. *J. Stat. Phys.*, 178(3):666–681, 2020.

e-mail: vitalii.konarovskiy@uni-hamburg.de

ON GRAPHS WITH SMALL TRIAMETERS
Sergiy Kozerenko, Danylo Konchakivskiy
Kyiv School of Economics, Kyiv, Ukraine

All graphs in this work are assumed to be finite and connected. On the vertex set of a graph G , we define the graph metric $d_G(u, v)$ as the length of the shortest path between u and v . The radius of G is the number $rad(G) = \min_{u \in V(G)} \max_{v \in V(G)} d_G(u, v)$. The diameter of G is the number $diam(G) = \max_{u, v \in V(G)} d_G(u, v)$. One can observe that $rad(G) \leq diam(G) \leq 2diam(G)$. It turns out that there are no other connections between these two numbers, i.e. for any $r, d \in \mathbb{N}$ with $r \leq d \leq 2r$, there exists a graph G having $rad(G) = r$ and $diam(G) = d$.

The triameter of a graph G was defined in [1] as the following number:
 $tr(G) = \max_{u, v, w \in V(G)} \{d_G(u, v) + d_G(u, w) + d_G(v, w)\}$.

It is not hard to show that $2diam(G) \leq tr(G) \leq 3diam(G)$ for any graph G .

Proposition 1. *For all numbers $d, t \in \mathbb{N}$ with $2d \leq t \leq 3d$, there exists a graph G with $\text{diam}(G) = d$ and $\text{tr}(G) = t$.*

In [1], the following lower bound for the triameter was obtained: $\text{tr}(G) \geq g(G)$, where $g(G)$ is the length of the smallest cycle in G . In fact, Das [1] posed a problem of establishing lower bounds for general graphs in terms of other parameters, such as $\Delta(G)$, $\delta(G)$ (the largest and the smallest degrees of vertices in G , respectively). We show that it is not possible (the other interesting problems from [1] were tackled in the work [3]).

Proposition 2. *For all numbers $\Delta, \delta \in \mathbb{N}$, there exists a graph G with $3 \leq \text{tr}(G) \leq 5$.*

It is well known that almost every graph G is connected with $\text{diam}(G) = 2$. This means that almost every graph G has $\text{tr}(G) \leq 6$. It is clear that $\text{tr}(G) = 2$ if and only if $G = K_2$, and $\text{tr}(G) = 3$ if and only if G is a complete graph with $n \geq 3$ vertices. In [2], Das also completely characterized graphs with triameters 4 and 5.

Problem 1. *Characterize graphs G with $\text{tr}(G) = 6$.*

Our main result is the description of block graphs with triameters up to 8. We note that it is rather easy to show that P_3 is the only block graph of triameter 4.

Theorem 1. *Let G be a block graph. Then*

1. *$\text{tr}(G) = 5$ if and only if $G = K_1 + (K_a \cup K_b)$ for $\max\{a, b\} \geq 2$.*
2. *$\text{tr}(G) = 6$ if and only if $G = P_4$, or G has a unique cut vertex of block-degree ≥ 3 .*
3. *$\text{tr}(G) = 7$ if and only if $G \neq P_4$ and G has exactly two cut vertices, each of block-degree exactly 2.*
4. *$\text{tr}(G) = 8$ if and only if $G = P_5$, or G has exactly two cut vertices and at least one of them has block-degree at least 3.*

References

- [1] A. Das, Triameter of graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* **41** (2021), 601–616.
- [2] A. Das, On triameter of a graph, preprint (2022).
- [3] A. Hak, S. Kozerenko, and B. Oliynyk, A note on the triameter of graphs, *Discrete Appl. Math.* **309** (2022), 278–284.

e-mails: s.kozerenko@kse.org.ua, dkonchakivskiy@kse.org.ua

APPROXIMATION OF LINEAR SYSTEMS WITH DELAYS AND THEIR
QUASI-POLYNOMIALS

Oleksandr Krasnokutskyi, Igor Cherevko

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Consider the initial value problem for a linear system of differential equations with delay

$$\frac{dx}{dt} = A_0x(t) + \sum_{i=1}^k A_i x(t - \tau_i), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

where $A_i, i = \overline{0, k}$ are fixed $n \times n$ matrices, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = \tau$, and $\varphi(t)$ is defined on $\varphi(t) \in C([-\tau, 0])$.

Let us associate with the original problem (1)–(2) the following Cauchy problem for a system of ordinary differential equations

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = A_0z_0(t) + \sum_{i=1}^k A_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau} \right], \quad (3)$$

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$z_j(0) = \varphi\left(-\frac{\tau j}{m}\right), \quad j = \overline{0, m}. \quad (4)$$

The connection between the solution of the Cauchy problem (3)–(4) and the original problem (1)–(2) is established by the following result.

Theorem 1 [1, 2]. The solutions of the Cauchy problem (3)–(4) approximate the solution of the initial-value problem (1)–(2), and the following convergence holds.

$$\left\| x\left(t - \frac{\tau j}{m}\right) - z_j(t) \right\| \rightarrow 0, \quad j = \overline{0, m}, \quad t \in [0, T], \quad m \rightarrow \infty. \quad (5)$$

The characteristic polynomial of the approximating system (3) takes the form

$$\Psi_m(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda E - A_0 & 0 & \dots & -A_1 & \dots & -A_k \\ -\mu E & (\mu + \lambda)E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\mu + \lambda)E & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (\mu + \lambda)E \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

All elements in the determinant (6) are $n \times n$ matrices. The nonzero blocks in the first row correspond to positions $l_i, i = \overline{1, k}$.

To simplify the determinant in (6), we decompose the matrix into four blocks

$$A = (\lambda E - A_0), \quad B = (0 \quad \dots \quad 0 \quad -A_1 \quad \dots \quad -A_k),$$

$$C = \begin{pmatrix} -\mu E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_m = \begin{pmatrix} (\mu + \lambda)E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -\mu E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & (\mu + \lambda)E & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & (\mu + \lambda)E \end{pmatrix}.$$

Here, both A and D_m are square matrices. The determinant $\det(D_m) \neq 0$ for fixed λ , except possibly for a single value of m .

Using properties of block matrices, we obtain the identity

$$\Psi_m(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_m \end{pmatrix} = \det(A - BD_m^{-1}C) \det(D_m). \quad (7)$$

Considering the structure of D_m and identity (7), we obtain an explicit representation of the determinant (6).

Lemma 1. *For the characteristic equation of the approximating system (9), the following explicit representation holds.*

$$\Psi_m(\lambda) = \det \left(\lambda E - A - \sum_{i=1}^k A_i \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^{l_i} \right)^m (\mu + \lambda)^{mn}. \quad (8)$$

To study the connection between the characteristic equation (8) and the quasi-polynomial system with delay (1), let us introduce a sequence of functions

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{mn}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Lemma 2. *For a fixed $\lambda \in \mathbb{N}$, the sequence of functions (9) converges to the quasi-polynomial system (1) as $m \rightarrow \infty$.*

This lemma implies that, to approximate the roots of the quasi-polynomial system (1), it is sufficient to consider the roots of the characteristic polynomial $\Psi_m(\lambda)$, since the zeros of the functions $H_m(\lambda)$ and $\Psi_m(\lambda)$ coincide due to identity (9).

References

- [1] Matviy O.V., Cherevko I.M. *About approximation of system with delay and them stability.* Nonlinear oscillations, 2004. Vol.7, №2. P. 208-216
- [2] Ilika S.A., Piddubna L.A., Tuzyk I. I., Cherevko I.M. *Approximation of linear differential-difference equations and their application.* Bukovinian Mathematical Journal, 2018. Vol. 6, №3-4. P. 80-83.

e-mail: krasnokutskyi.oleksandr@chnu.edu.ua, i.cherevko@chnu.edu.ua

PROBLEM WITH INTEGRAL EQUATIONS FOR EVOLUTION EQUATIONS OF THIRD ORDER

Grzegorz Kuduk

Faculty of Mathematics and Natural Sciences University of Rzeszow

Let B be a Banach space, $A : B \rightarrow B$ linear operator, for this operator arbitrary powers A^n , $n = 2, 3, \dots$ be also defined in B , denote be $x(\lambda)$ the eigenvector of the operator A , which corresponds to its eigenvalue $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{C}$. We consider for $t \in ([T_1, T_2]) \cup ([T_3, T_4]) \subset \mathbb{R}$ the equation

$$L\left(\frac{d}{dt}, A\right)U(t) \equiv \left[\frac{d^3}{dt^3} + a(A)\frac{d^2}{dt^2} + b(A)\frac{d}{dt} + c(A)\right]U(t) = f(t), \quad (1)$$

satisfies conditions:

$$\int_{T_1}^{T_2} t^k U(t) dt + \int_{T_3}^{T_4} t^k U(t) dt = \varphi_i, \quad k = \{0, 1, 2\}, \quad i = \{1, 2, 3\}, \quad (2)$$

where $a(A), b(A), c(A)$ are abstract operators, with entire symbols $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda) \neq \text{const}$, for $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_i \in B$, for $i = \{1, 2, 3\}$, $T_1, T_2, T_3, T_4 > 0$, $([T_1, T_2] \cup [T_3, T_4]) \subset \mathbb{R}$.

Denote be P is set $P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Delta(\lambda) = 0\}$, where $\Delta(\lambda)$ is main determined of the system

Definition 1. We shall say that vectors $\varphi_k \in B$, for $k = \{0, 1, 2\}$, from B belong $L \subset B$. If dependent exists on linear operators $R_{\varphi_k}(\lambda) : B \rightarrow B$, $\lambda \in \Lambda$ and measures μ_{φ_k} such that

$$\varphi_k = \int_{\Lambda} R_{\varphi_k}(\lambda)x(\lambda)d\mu_{\varphi_k}(\lambda), \quad (3)$$

Definition 2. We shall say, that for arbitrary fixed $([T_1, T_2] \cup [T_3, T_4]) \subset \mathbb{R}$, vector $f(t)$ from H belongs $L \subset B$, if on $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ there exist a measure $\mu(\lambda)$ and linear operator $F_f(t, \lambda) : H \rightarrow H$ such that $f(t)$ can be represented in the form of Stiltjes integral

$$f(t) = \int_{\Lambda} F_f(t, \lambda)x(\lambda)d\mu_f(\lambda), \quad (4)$$

Lemma 1. Function $M_m(t, \lambda)$, for $\lambda \in \Lambda$ satisfies differential equations, and integral conditions

$$\left[\frac{d^3}{dt^3} + \sum_{j=1}^3 a_j(\lambda) \frac{d^{3-j}}{dt^{3-j}}\right]M_m(t, \lambda) = 0, \quad (5)$$

$$\int_{T_1}^{T_2} t^{n-1} M_m(t, \lambda) dt + \int_{T_3}^{T_4} t^{n-1} M_m(t, \lambda) dt = \delta_{m,n}, \quad (6)$$

where $\delta_{m,n}$ is delta Kroneckera, for $m, n = \{0, 1, 2\}$.

Lemma 2. Function $G(t, \nu, \lambda)$ on the set $([T_1, T_2] \cup [T_3, T_4]) \times \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus P)$ satisfies differential equations

$$\left[\frac{d^3}{dt^3} + \sum_{j=1}^3 a_j(\lambda) \frac{d^{3-j}}{dt^{3-j}}\right] \left\{G(t, \nu, \lambda)x(\lambda)\right\} \equiv e^{\nu t}, \quad (7)$$

and satisfies homogeneous integral conditions

$$\int_{T_1}^{T_2} t^k G(t, \nu, \lambda) dt + \int_{T_3}^{T_4} t^k G(t, \nu, \lambda) dt = 0, \quad k = \{0, 1, 2\}, \quad (8)$$

where $x(\lambda)$ is the eigenvector operator A , which corresponds to its eigenvalue $\lambda \in \mathbb{C} \setminus P$. for given $\nu \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus P$.

Theorem 1. *Let in the problem (1)-(2), the vectors φ_k and f belongs L . There φ_k , for $i = \{1, 2, 3\}$, can be represented in the form (3), and f can be represented in the form (4). Then the formula*

$$U(t) = \sum_{k=0}^2 \int_{\Lambda} R_{\varphi_k}(\lambda) \{M_k(t, \lambda)x(\lambda)\} d\mu_{\varphi_1}(\lambda) + \int_{\Lambda} F_f(\nu, \lambda) \{G(t, \nu, \lambda)x(\lambda)\} d\mu_f(\lambda),$$

defines solution of the problem (1)-(2), $M_m(t, \lambda)$ is a solution of the problem (5)-(6), $G(t, \nu, \lambda)$ is a solution (7)-(8).

Solution of the problem (1)-(2) according to the differential-symbol method [1-3]. This problem is a continuous work [2, 4, 5, 6].

References

- [1] P.I. Kalenyuk, Z.M., Nytrebych. Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method. Publishing House of Lviv Polytechnic Natyonalny University, 2002. (in Ukrainian).
- [2] P.I. Kalenyuk, G. Kuduk, I.V. Kohut, Z.M. Nytrebych. Problem with integraf conditions for differential operator equation, J. Math. Sci., (208), (2015), No. 3, 267-276.
- [3] P.I. Kalenyuk, Z.M. Nytrebych, Kohut I.V., G. Kuduk. Nonlocal problem for partial differentia equations of higher order, Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference , 19-20 May, 2016, Kyiv, Conference Materials I. Differential and integral equations and its applications. 17.
- [4] P.I. Kalenyuk, Z.M. Nytrebych, I.V. Kohut, G. Kuduk, P. T. Pukach. Problem with homogeneous integral condition for nonhomogeneous evolution equation. Jurnal of National Univeristy" Lvivska Politechnika". Physical and Mathematical sciences. 2014. No 804. 16-20.
- [5] G. Kuduk. Problem with integraf conditions for evolution equations of higher order. International Conference of Young Mathematicians, 3-6 June, 2015, Kyiv, Ukraine. 124.
- [6] G. Kuduk. Nonlocal problem with integral condition for nonhomogeneous system of evolution equations of second order. International Scientific Conference "Current problems of Mechanics and Mathematics-2023" dedicated to 95th birth anniversary of Yaroslav Pidstryhach, and 45th anniversary of the Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, May 23-25, 2023, Lviv, Ukraine. 329-330

e-mail: gkuduk@onet.eu

MAC-ELLIS AND NIEDERREITER CRYPTOCODE STRUCTURE MODELS
Oleksandr Laptiev, Ivan Parkhomenko, Serhii Laptiev, Tetiana Laptieva
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
National Technical University "Kharkiv polytechnic institute Kharkiv, Ukraine

Under conditions of rapid development of quantum computing, cloud technologies, and widespread use of IoT devices, ensuring cryptographic security of information systems becomes a critically important task. Traditional public-key cryptosystems such as RSA or ECC turn out to be vulnerable to attacks on quantum computers due to Shor's and Grover's algorithms. This makes it essential to develop post-quantum cryptographic systems based on mathematical problems that remain hard even for quantum computers. Among such approaches, code-based cryptosystems hold a special place, particularly the McEliece and Niederreiter cryptographic constructions, which rely on the difficulty of decoding linear codes in the general case. Consider the formal description of the mathematical model of the asymmetric Niederreiter cryptosystem, which is formally defined by the following set of elements [1, 2, 3]:

- set of plaintexts: $M = \{M_1, M_2, \dots, M_{q^k}\}$;
- set of ciphertexts (syndromes): $S = \{S_1, S_2, \dots, S_{q^r}\}, \forall S_i \in GF(q), i \in \overline{1 \dots q^r}$;
- set of direct cryptographic transformations: $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$, where $\varphi_i : M \rightarrow S_r, i = 1, 2, \dots, r$;
- set of inverse cryptographic transformations: $\varphi^{-1} = \{\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}, \dots, \varphi_r^{-1}\}$, where $\varphi_i^{-1} : S_r \rightarrow M, i = 1, 2, \dots, r$;
- set of public keys: $KU_{a_i} = \{KU_{1a_i}, KU_{2a_i}, \dots, KU_{ra_i}\} == \{H_{X_{a_i}}^{EC1}, H_{X_{a_i}}^{EC2}, \dots, H_{X_{a_i}}^{ECr}\}$, where $H_{X_{a_i}}^{ECi}$ - is an $r \times n$ parity-check matrix with elements from $GF(q)$;
- a_i - coefficients of the curve polynomial $a_1 \dots a_6, a_i \in GF(q)$, uniquely defining a specific set of curve points in the space P^2 ;
- set of private (secret) keys: $KR = \{\{X, P, D\}_1, \{X, P, D\}_2, \dots, \{X, P, D\}_r\} = \{X^i, P^i, D^i\}$.

Based on balanced encoding, the information sequence is transformed into an error vector, which is used in the mathematical model for cipher text generation.

The formal description of the mathematical model for cipher text generation is defined by the rule:

$$S_{X_j} = \phi_u(M_i, H_X^{ECu}) = M_i \times (H_X^{ECu})^T,$$

where the Hamming weight (number of non-zero elements) of vector e does not exceed the error-correcting capability of the employed algebraic block code

$$\forall i : 0 \leq w(M_i) \leq t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

The cardinalities of sets M and C are determined by the allowed weight spectrum $w(M_i)$, thus, in the general case (for all permissible values $w(M_i)$) we have:

$$m = \sum_{i=0}^t (q-1)^i \times C_n^i,$$

where C_n^i - is the binomial coefficient, $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

The public key is generated by multiplying the parity-check matrix of the algebraic-geometric code by masking matrices:

$$H_X^{ECu} = X^u \times H \times P^u \times D^u, u \in 1, 2, \dots, s,$$

where H^{EC} – is the $n \times (n - k)$ parity-check matrix of the algebraic-geometric block code (n, k, d) with elements from $GF(q)$.

On the receiving side, the authorized user employs the private (secret) key:

$$S_r^* = C_{X_i}^* \times H_{X_j}^T,$$

that is, finds such a vector $C_{X_i}^*$, that:

$$C_{X_i}^* \times H_{X_j}^T = 0$$

Next, the decoding procedure proceeds as in the McEliece code-based construction. To recover the original balanced information sequence M_i it is sufficient to multiply the vector M_i^U again by the masking matrices D^U and P^U , but in reverse order:

$$M_i = M_i^u \times P^u \times D^u = M_i \times (D^u)^{-1} \times (P^u)^{-1} \times P^u \times D^u = M_i.$$

During decryption of the cipher text (after obtaining the error vector), the inverse balanced encoding algorithm is applied. In the course of the study, asymmetric code-based cryptographic constructions based on elliptic codes were developed, along with algorithms for encoding and decoding of codewords. Based on the derived relationships defining the interplay between parameters of elliptic codes and asymmetric code-based cryptographic schemes, an analysis of computational complexity of encoding and decoding processes was performed.

References

- [1] Baldi, M., Chiaraluce, F., Santini, P. *Enhancing the McEliece Cryptosystem Based on Polar Codes and Its Application to IoT*. 2021. IEEE Access, 9, pp. 145678–145692. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3123456>
- [2] Gaborit, P., Hauteville, A., Tillich, J.-P. *Quantum Security Analysis of the Niederreiter Cryptosystem*. Designs, Codes and Cryptography, 2022. 90(3), pp.557–581. <https://doi.org/10.1007/s10623-022-01002-4>
- [3] Couvreur, A., Lequesne, M. *On the Security of Algebraic Geometry Codes Against Sidorenko Attacks*. IEEE Transactions on Information Theory, 2023. 69(5), pp.2890–2905. <https://doi.org/10.1109/TIT.2023.3234567>

e-mail: olaptiev@knu.ua, ivan.parkhomenko@knu.ua, salaptiev@gmail.com, tetiana1986@ukr.net

STABILIZATION OF STOCHASTIC DYNAMIC SYSTEMS WITH MARKOV PARAMETERS
AND CONCENTRATION POINTS

Taras Lukashiv¹, **Igor V. Malyk**², **Venkata P. Satagopam**¹ and **Petr V. Nazarov**³

¹ *University of Luxembourg, Belvaux, Luxembourg*

² *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine*

³ *Luxembourg Institute of Health, Strassen, Luxembourg*

On the probabilistic basis $(\Omega, \mathfrak{F}, F, \mathbf{P})$ consider a controlled stochastic dynamical system of random structure given by a stochastic differential equation

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), u(t))dt + b(t, \xi(t), x(t), u(t))dw(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \setminus K, \quad (1)$$

with Markov switches

$$\Delta x(t) = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)), \quad t_k \in K = \{t_n \uparrow\}, \quad (2)$$

and initial conditions

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \xi(0) = y \in \mathbf{Y}, \quad \eta_0 = h \in \mathbf{H}. \quad (3)$$

Here $\xi(t), t \geq 0$, is a Markov chain with a finite number of states $\mathbf{Y} = \{1, 2, \dots, \bar{N}\}$ and generator $Q = \{q_{ij}\}, i, j = 1, \dots, \bar{N}$; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ is a Markov chain with values in the space \mathbf{H} and transition probability matrix \mathbb{P}_H ; $x : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ is the control; $w(t), t \geq 0$, is an m -dimensional standard Wiener process; the processes w, ξ , and η are independent. Measurable functions $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, and $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfy the boundedness and global Lipschitz conditions [1]. Consider the scenario with a concentration point of jumps, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t^* < \infty.$$

Assume the following conditions are satisfied:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty, \quad \gamma_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}} |g(t_k, y, h, x)| \quad (4)$$

and

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\ln \varepsilon + N_\varepsilon \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} L_k \right) = -\infty, \quad N_\varepsilon := \inf \left\{ k \geq 1 : \sum_{m=k}^{\infty} \gamma_m < \varepsilon \right\}. \quad (5)$$

For the system (1) - (3) with the conditions (4) and (5) the problem of optimal stabilization for stochastic dynamical systems characterized by Markov switches and concentration points of jumps has been solved. Utilizing Lyapunov function methods, we derive sufficient conditions for exponential stability in the mean square and asymptotic stability in probability. We provide in [1] explicit constructions of Lyapunov functions adapted to scenarios with jump concentration points and develop conditions under which these functions ensure system stability. For linear stochastic differential equations, the stabilization problem is further simplified to solving a system of Riccati-type matrix equations.

References

- [1] Lukashiv, T., Malyk, I. V., Satagopam, V. P., & Nazarov, P. V. (2025). Stabilization of Stochastic Dynamic Systems with Markov Parameters and Concentration Point. *Mathematics*, 13(14), 2307.

e-mail: i.malyk@chnu.edu.ua

In [1] it was proved that for any pair of Hahn (g, h) on $[a, b]$ (see below) there exists a separately continuous function $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ such that for any $x \in [a, b]$ its maximum and minimum with respect to the second variable equals to $g(x)$ and $h(x)$ respectively. We generalized this result for functions defined on the product of two topological spaces in [2, 3]. Here we present some further results in this direction.

Definition 1. Let X and Y be topological spaces, $g, h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ and $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. We define the functions $\wedge_f, \vee_f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ by

$$\wedge_f(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y) \quad \text{and} \quad \vee_f(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y), \quad x \in X.$$

A pair (g, h) is called

- a **pair of Hahn** if $g(x) \leq h(x)$ for any $x \in X$, g is upper semicontinuous and h is lower semicontinuous;
- **separately continuously generated** (or **CC-generated** in short) with respect to Y if there exists a separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ such that $g = \wedge_f$ and $h = \vee_f$.

A function $f : X \rightarrow Y$ is called **σ -continuous** if there exists a sequence of closed sets F_n in X such that $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ and the restriction $f|_{F_n}$ is continuous for any $n \in \mathbb{N}$

Recall that a topological space X is called **scattered** if for any nonempty subset A of X there is an isolated point in A .

Theorem 1. Let X be a metrizable compact, Y be an infinite compact and $g, h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ be functions.

- (i) If Y is non-scattered then a pair (g, h) is CC-generated with respect to Y if and only if it is a pair of Hahn.
- (ii) If Y is scattered then a pair (g, h) is CC-generated with respect to Y if and only if it is a pair of Hahn of σ -continuous functions.

Example 1. Let X be a metrizable compact without isolated points. Then there exists a pair of Hahn (g, h) on X such that both function g and h are not σ -continuous.

References

- [1] Maslyuchenko V. K., Mel'nyk V. S., Voloshyn H. A., *Hahn's pairs and zero inverse problem*, Mat. Stud., **48**, N1 (2017), 74-81 (in Ukrainian).
- [2] Kushnir A. S., Maslyuchenko O. V., *Pairs of Hahn and separately continuous functions with the given extremal sections*, Bukovinian Math. Journal. **6**, N1 (2021), 210-229 (in Ukrainian).
- [3] Kushnir A. S., Maslyuchenko O. V., *On stable pairs of Hahn and extremal sections of separately continuous functions on the products with a scattered multiplier*, arXiv:2501.01261 [math.GN]

CLASSIFICATION OF SMOOTH STRUCTURES ON NON-HAUSDORFF ONE-DIMENSIONAL
MANIFOLDS: FROM LOCAL TO GLOBAL

Mykola Lysynskiy, Sergiy Maksymenko

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

In [1, 2] there were given a classification of differentiable structures on two non-Hausdorff one-dimensional manifolds: a line with two zeros L and a non-Hausdorff letter Y . It turned out that the developed techniques extends to the following more general situation.

Let X be a topological manifold, U, V two open subsets such that $X = U \cup V$, and $W = U \cap V$. Suppose for some $k = 1, \dots, \infty$ the sets U and V are endowed with C^k -structures (i.e. C^k -atlases α and β respectively) which agree on the intersection $U \cap V$ (i.e. the identity map $\text{id}_W: W \rightarrow W$ is a diffeomorphism with respect to the induced atlases $\alpha|_W$ and $\beta|_W$).

Then one of the results of [2] classifies C^k -structures on X which induce α and β on U and V respectively up to a C^k self-diffeomorphism $X \rightarrow X$ leaving U and V invariant.

The aim of this talk is to illustrate that the above statement allows to classify differentiable structures on non-Hausdorff one-dimensional manifolds X with more complicated “non-Hausdorff points” than the ones of L and Y . Moreover, in the case when such non-Hausdorff points can be separated by pair-wise disjoint open neighborhoods $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$, it makes also possible to reduce a classification of C^k -structures on X to a classification C^k -structures on each of U_i .

References

- [1] M. Lysynskiy, S. Maksymenko, *Classification of differentiable structures on the non-Hausdorff line with two origins*, [arXiv.2406.09576](#)
- [2] M. Lysynskiy, S. Maksymenko, *Differentiable structures on a union of two open sets*, [arXiv:2507.05156](#)

e-mail: m.lysynskiy@imath.kiev.ua, maks@imath.kiev.ua

PSEUDOBOUNDARY OF THE HILBERT CUBE AS A SPACE OF IDEMPOTENT MEASURES

Marko Iurii

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine

Given a compact Hausdorff space X , we define a regular probability measure on X as a real-valued nonnegative normed linear functional on the space $C(X)$ of continuous functions on X . By analogy, an idempotent measure on X is a functional μ on $C(X)$ satisfying:

1. $\mu(c_X) = c$, for all $c \in \mathbb{R}$, where c_X denotes the constant function on X with the value c ;

2. $\mu(\max\{\varphi, \psi\}) = \max\{\mu(\varphi), \mu(\psi)\}$;
3. $\mu(c + \varphi) = c + \mu(\varphi)$

(see [1] for the basic information on spaces of idempotent measures).

It is convenient to use a representation of idempotent measures on X as special closed subsets of $X \times [0, 1]$. For a metric space X , by $\bar{I}(X)$ denote the set of all closed subsets $A \subseteq X \times [0, 1]$ satisfying:

1. $X \times \{0\} \subseteq A$;
2. A is saturated, i.e. for every $(x, t) \in A$ and every $t' \in [0, t]$, $(x, t') \in A$;
3. there is $x \in X$ such that $(x, 1) \in A$.

Given $A \in \bar{I}(X)$, we define the support of A as follows:

$$\text{supp}(A) = \text{cl}(\{x \in X \mid \exists t > 0 \text{ such that } (x, t) \in A\}).$$

By $\bar{I}_\beta(X)$ we denote the set of all $A \in \bar{I}(X)$ such that $\text{supp}(A)$ is compact.

Let

$$\Sigma = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in l^2 \mid \sum_{i=1}^\infty (ix_i)^2 < \infty\}.$$

Theorem 1. *Let X be a locally compact σ -compact non-discrete metric space. Then $\bar{I}_\beta(X)$ is homeomorphic to Σ .*

The proof is based on results from infinite-dimensional topology [3]. We use the fact that the space of measures under consideration is an absolute retract [2].

References

- [1] M. Zarichnyi, Spaces and maps of idempotent measures. *Izvestiya: Mathematics*. 74:3 (2010), 481–499.
- [2] Iu. Marko, Spaces of idempotent measures and absolute retracts, *Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math.* 2021. Issue 92, 86–92. <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.92.086-092>.
- [3] D.W. Curtis, T. Dobrowolski and J. Mogilski, Some applications of the topological characterizations of the sigma-compact spaces l_f^2 and Σ , *Trans. Amer. Math. Soc.* 284 (1984), 837–846.

e-mail: marko13ua@gmail.com

ON EXTENSIONALLY NORMAL SPACES THAT ARE NOT NORMAL

Oleksandr Maslyuchenko, Denys Onypa

Silesia University in Katowice, Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

The problem of extending functions with preserving certain properties is a classical topic in topology and analysis. Among such properties, preserving oscillations of functions under extension appears to be a particularly natural problem. This is closely related to the study of the oscillations, which was investigated in the numerical papers of the authors. In particular, the construction of functions with given limit oscillations was studied in [1, 2].

For a set D in a topological space X and a function $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, the function

$$\omega_g(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \sup_{u, v \in U} |g(u) - g(v)|, \quad x \in \overline{D},$$

is called the *oscillation* of g , where \mathcal{U}_x denotes the family of all neighborhoods of x in X .

The oscillation within the domain provides a way to estimate the size of discontinuities of g . On the other hand, the oscillation of g on the boundary of its domain allows to analyze which properties of g can be preserved when extending it to the whole space. The restriction $\tilde{\omega}_g = \omega_g|_{\overline{D} \setminus D}$ is called the *limit oscillation*.

It is well known that the Titz-Urysohn extension theorem characterizes the normality of topological space. In [3] it was introduced the following class of generalized normal spaces concerning with the Titz-Urysohn theorem.

Definition 1. *A topological T_1 -space X is called **extensionally normal** if for every closed subset $Y \subseteq X$ and every function $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ there exists an extension $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ such that the restriction $f|_{X \setminus Y}$ is continuous and the oscillation $\omega_f(x)$ equals to $\omega_g(x)$ for all $x \in Y$.*

So, if we assume the continuity of g in the previous definition, we obtain the Titz-Urysohn extension property, which is equivalent to the normality. Actually, the authors of [3] used the term “property (T)” for this class of spaces. This property was also studied by us in [4], where it was called *ω -normality*. However, since the symbol ω has many other uses and associations (e.g. the countable ordinal), we now prefer the term *extensional normality*, which more clearly emphasizes the extensional aspect of this notion.

The following problem was formulated in [3, Problem 7].

Problem 1. *Is every normal space is extensionally normal?*

Some partial result concerning with this problem was announced in [4].

Theorem 1. *Every metrizable space is extensionally normal.*

The proof of the theorem in [4] was based on the notion of cluster set and our previous result from [5]. Now we propose the direct method of proof relying on the Dugunji construction of continuous extension.

Let X be a metric space, Y be a closed set in X and $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ be an arbitrary function. Consider a locally finite partition of unity $(\varphi_s)_{s \in S}$ on $X \setminus Y$ subordinated to the covering $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{4}d(x, Y)) : x \in X \setminus Y\}$ of $X \setminus Y$. Set $U_s = \text{supp } \varphi_s$. For any $s \in S$ there is $x_s \in X \setminus Y$, such that $U_s \subseteq B(x_s, \frac{1}{4}d(x_s, Y))$, and there exists $y_s \in Y$ with $d(x_s, y_s) < \frac{5}{4}d(x_s, Y)$. The *Dugunji extension* of g is defined by

$$f(x) = \Delta_{Y, X} g(x) = \begin{cases} \sum_{s \in S} \varphi_s(x) f(y_s), & x \in X \setminus Y \\ f(x) & , x \in Y. \end{cases}$$

Theorem 2. *Let X be a metric space, Y be a closed subset of X , $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ be a function and $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ be the Dugunji extension of g . Then the restriction $f|_{X \setminus Y}$ is continuous and $\omega_f(x) = \omega_g(x)$ for all $x \in Y$. In particular, every metrizable space is extensionally normal.*

Our approach to obtain the extensional normality needs more strong property than the usual normality. The following result, which follows the ideas of [6, 2.1.10], gives many examples of non-extensionally normal spaces.

Theorem 3. *Let X be an infinite T_1 -space such that there exist a discrete subset S and a dense subset T of X with $2^{|S|} > 2^{|T|}$. Then X is not extensionally normal.*

As an immediate consequence, we obtain the following result.

Example 1. *The Stone-Čech compactification $\beta\mathbb{N}$ of the countable discrete space is not extensionally normal.*

Since the Stone-Čech compactification is compact (hence normal) space, the previous example yields the negative answer to Problem 1. The question of whether more restrictive properties ensure extensional normality remains open.

Problem 2. *Does there exist a hereditarily normal space (or even perfectly normal space) that is not extensionally normal?*

References

- [1] Maslyuchenko O., Onypa D. *Limit oscillations of locally constant functions*, Buk. Mat. Journal, 1 (3–4), 2013, pp. 97–99. <https://bmj.chnu.edu.ua/en/issuances/volume-1-3-4-2013/limit-oscillations-of-locally-stable-functions/>
- [2] Maslyuchenko O., Onypa D. *Limit oscillations of continuous functions*, Carpathian Mat. Publ., 7 (2), 2015, pp. 191–196. <http://journals.pnu.edu.ua/index.php/cmp/article/view/1397/1726>
- [3] Sworowski P., Sieg W. *Uniform limits of \mathcal{B}_1^{**} -functions*, Topology and its Applications, 292, 2021, 107630. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107630>.
- [4] Onypa D., Maslyuchenko O. *On ω -normality of metrizable spaces*, Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Conference "Youth Science for Peace and Development December 12–14, 2024, Chernivtsi, Ukraine, pp. 23–24. <https://www.chnu.edu.ua/media/0qvdz5h0/zbirnyk-materialiv-konferentsii-mnzmtr-2025.pdf>
- [5] Maslyuchenko O., Onypa D. *Cluster sets of continuous functions*, Mathematical Studies, 46 (1), 2016, pp. 44–50. http://matstud.org.ua/texts/2016/46_1/44-50.html
- [6] Engelking R. *General topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Heldermann Verlag, 1989.

e-mail: d.onypa@chnu.edu.ua, ovmasl@gmail.com

DIAGONALS OF SEPARATELY POINTWISE LIPSCHITZ FUNCTIONS

Volodymyr Mykhaylyuk

Jan Kochanowski University in Kielce, Poland and Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

Let $n \geq 2$ and $f : X^n \rightarrow Y$ be a mapping. We call a mapping $g : X \rightarrow Y$ defined by $g(x) = f(x, \dots, x)$ for every $x \in X$, the *diagonal* of f .

The investigation of diagonals of separately continuous functions of two real variables began in Baire's Ph.D. thesis. It was proved in [1] that diagonals of separately continuous functions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ are exactly functions of the first Baire class. This result was generalized by H. Lebesgue for real-valued functions of n real variables. Namely, it was proved in [5] that for $n \geq 3$ diagonals of separately continuous functions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ are exactly functions of the $(n - 1)$ -th Baire class.

To date, the following results have been obtained on the description of diagonals of mappings from certain classes.

Theorem 1. 1. *For any metrizable space X and any metrizable equiconnected space Y the diagonals of separately continuous mappings $f : X^n \rightarrow Y$ are exactly mappings of the $(n - 1)$ -th Baire class ([4, Theorem 16]).*

2. *For any metric space X and any normed space Y the diagonals of mappings $f : X^2 \rightarrow Y$ which are continuous with respect to the first variable and pointwise Lipschitz with respect to the second variable are exactly stable limits of sequences of continuous mappings ([2, Theorem 5.5]).*

3. *For any metric space X and any normed space Y the diagonals of separately pointwise Lipschitz mappings $f : X^2 \rightarrow Y$ are exactly stable limits of sequences of pointwise Lipschitz mappings ([6, Theorem 5.2]).*

4. *For any normed space Y the diagonals of separately absolutely continuous mappings $f : [0, 1]^2 \rightarrow Y$ are exactly absolute Baire one mappings ([3, Theorem 4.6]).*

For a set $A \subseteq Y^X$ we denote by \overline{A}^{st} the set of all stable limits of sequences of mappings from A .

For metric spaces X and Y we denote by

$$\text{PL}_0(X, Y) = \text{PL}(X, Y)$$

the collection of all pointwise Lipschitz mappings $f : X \rightarrow Y$. For every $n \in \mathbb{N}$ we put

$$\text{PL}_n(X, Y) = \overline{\text{PL}_{n-1}(X, Y)}^{\text{st}}.$$

Let $\mathcal{M}_0(X)$ and $\mathcal{A}_0(X)$ be the collections of all closed and open subsets of a metric space X respectively. For every $n \in \mathbb{N}$ we put

$$\mathcal{M}_n(X) = \left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k : A_k \in \mathcal{A}_{n-1}(X), k = 1, 2, \dots \right\}$$

and

$$\mathcal{A}_n(X) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k : A_k \in \mathcal{M}_{n-1}(X), k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Theorem 2. *Let $\alpha \in \mathbb{N}$, X be a metric space, Y be a normed space and $f : X \rightarrow Y$. Consider the following conditions.*

1. $f \in \text{PL}_\alpha(X, Y)$.

2. There exist an increasing sequence $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ of sets $X_k \in \mathcal{M}_{\alpha-1}(X)$ and a sequence $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ of mappings $f_k \in \text{PL}_{\alpha-1}(X, Y)$ such that $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ and $f|_{X_k} = f_k|_{X_k}$ for every $k \in \mathbb{N}$;
3. There exist a sequence $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ of sets $X_k \in \mathcal{M}_{\alpha}(X) \cap \mathcal{A}_{\alpha}(X)$ and a sequence $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ of pointwise Lipschitz mappings $f_k : X \rightarrow Y$ such that $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ and $f|_{X_k} = f_k|_{X_k}$ for every $k \in \mathbb{N}$;
4. There exists a sequence $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ of sets $X_k \in \mathcal{M}_{\alpha}(X) \cap \mathcal{A}_{\alpha}(X)$ such that $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ and all functions $f|_{X_k}$ are Lipschitz.

Then (1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4). If Y is a normed space, then (3) \Rightarrow (1) for every $\alpha \in \mathbb{N}$ and (4) \Rightarrow (1) for $\alpha = 1$. Moreover, if Y is a Banach space, then (4) \Rightarrow (1) for every $\alpha \in \mathbb{N}$.

Theorem 3. Let $m \geq 2$, X be a metric space, Y be a normed space and $g \in \text{PL}_{m-1}(X, Y)$. Then there exists a separately pointwise Lipschitz mapping $f : X^m \rightarrow Y$ with the diagonal g .

Problem 1. Let $m \geq 2$, X be a metric space, Y be a locally convex F -space and $g \in \text{PL}_{m-1}(X, Y)$. Does there exist a separately pointwise Lipschitz mapping $f : X^m \rightarrow Y$ with the diagonal g ?

Problem 2. Let $m \geq 3$, X_1, \dots, X_m be metric spaces, Y be a normed space (in particular, $Y = X_1 = \dots = X_m = [0, 1]$) and $f : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ be a separately pointwise Lipschitz mapping. It is true that $f \in \text{PL}_{m-1}(X_1 \times \dots \times X_m, Y)$?

References

- [1] Baire R. *Sur les fonctions de variables réelles*, Ann. Mat. Pura Appl., ser. 3. **3** (1899), 1-123.
- [2] Karlova O., Mykhaylyuk V., Sobchuk O. *Diagonals of separately continuous functions and their analogs*, Topology Appl. **160** (2013), 1-8.
- [3] Karlova O., Mykhaylyuk V., Sobchuk O.V. *Diagonals of separately absolutely continuous mappings coincide with the sums of absolutely converges series of continuous functions*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 59 (2) (2016), 435-444.
- [4] Karlova O., Mykhaylyuk V., Sobchuk O.V. *Diagonals of separately of n variables with values in strongly σ -metrizable spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **57** (1) (2016) 103-122.
- [5] Lebesgue H. *Sur les fonctions respresentables analytiquement*, Journ. de Math. **2** (1) (1905), 139-216.
- [6] Mykhaylyuk V., Sobchuk O. *Diagonals of separately pointwise Lipschitz mappings*, Journal of Mathematical Sciences. **196** (2014), 652-664

e-mail: vmykhaylyuk@ukr.net

We generalize a method for sparsification of ultrametric matrices proposed by Gorman and Lladser [1]. We consider a non-empty compact subspace \bar{X} of D^ω , where $D = \{0, 1\}$. For all $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, let pr_n be the projection $D^\omega \rightarrow D^n$ to the first n coordinates.

Denote $X_n = \text{pr}_n(\bar{X}) \subset D^n$ for all $n \in \mathbb{N}$, and $X_\omega = X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots$. Observe that $X_0 = D^0 = \{\varepsilon\}$, where ε is the empty sequence.

We consider the infinite rooted tree T with the vertices X_ω , the root ε , and the edges between all pairs of $(x_1, \dots, x_n) \in X_n$ and $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in X_{n+1}$. The infinite simple paths starting at the root correspond to the points (x_1, x_2, x_3, \dots) of the compactum \bar{X} .

For any $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^n$ denote $x|0 = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \in D^{n+1}$, $x|1 = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \in D^{n+1}$, and $\widehat{x} = \{\bar{x} \in \bar{X} \mid \text{pr}_n(\bar{x}) = x\}$. Clearly $\widehat{x} \neq \emptyset$ for $x \in D^n$ if and only if $x \in X_n$. The set $X' = \{x \in X_\omega \mid x|0 \neq \emptyset, x|1 \neq \emptyset\}$ consists of all bifurcation vertices of the tree T .

The induced topology on \bar{X} is metrizable by an ultrametric determined with a sequence $r_0 \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$ of positive numbers converging to 0. Namely, let

$$g((x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)) = r_k,$$

where $k = \max\{i \in \{1, 2, 3, \dots\} \mid (x_1, x_2, \dots, x_i) = (y_1, y_2, \dots, y_i)\}$,

here we assume $\max \emptyset = 0$.

Remark 1. Any compact ultrametric on a set \bar{X} can be represented this way by choosing appropriately an embedding $\bar{X} \hookrightarrow D^\omega$ with the sequence (r_0, r_1, r_2, \dots) .

Theorem 1. There is a unique regular measure μ on \bar{X} that satisfies the conditions:

- $\mu(\bar{X}) = 1$ (i.e., μ is a probability measure);
- if $x = (x_1, \dots, x_n) \in X'$, then $\mu(x|0) = \mu(x|1)$ (each bifurcation vertex divides a measure into halves).

For all $x \in X_\omega$ the inequality $\mu(\widetilde{x}) > 0$ is valid.

We define a scalar product on the set $C(\bar{X}, \mathbb{R})$ by the formula

$$f \cdot g = \int_{\bar{X}} f(\bar{x})g(\bar{x}) d\mu(\bar{x}).$$

Theorem 2. The functions $w_x : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ defined for all $x \in X'$ as follows:

$$w_x(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu(\widetilde{x})}}, & \bar{x} \in \widetilde{x|0}, \\ \frac{-1}{\sqrt{\mu(\widetilde{x})}}, & \bar{x} \in \widetilde{x|1}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

together with the function $\bar{w} \equiv 1$ form an orthonormal system with respect to the above scalar product.

These functions are analogues of Haar-like wavelets considered in [1]. We will discuss their application to efficient encoding of the ultrametric d .

References

- [1] Gorman, E, Lladser, M.E. Sparsification of large ultrametric matrices: insights into the microbial Tree of Life. Proc. R. Soc. A, 479: 20220847 (2023). <https://doi.org/10.1098/rspa.2022.0847>

e-mail: oleh.nykyforchyn@pnu.edu.ua, volodymyrpenhryn@gmail.com

ON A DISSIPATIVE ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH HÖLDER COEFFICIENTS
INDEPENDENT OF THE DEGENERATION VARIABLES

Halyna Pasichnyk

Yuriy Fedkovych National University, Chernivtsi, Ukraine

In a layer $\{(t, x) | t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^n\}$ of finite thickness $T > 0$ we consider the ultraparabolic equation

$$\left(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} - a_0(t, x_1) \right) u(t, x) = 0. \quad (1)$$

in which

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}};$$

n_1, n_2, n_3 are given natural numbers such that $n_3 \leq n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2 + n_3$; the variable $x \in \mathbb{R}^n$ consists of three groups of variables $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, so that $x := (x_1, x_2, x_3)$. The coefficients of the equation (1) are increasing functions of $|x_1| \rightarrow +\infty$. Their growth depends on the increasing function D with $|x_1| \rightarrow +\infty$.

The equation is assumed to be dissipative ultraparabolic with the dissipative characteristic D [1].

In this case, the coefficients of the equation (1) are Hölder, their differentiation is not required. In this case, an additional condition is imposed on the dissipation characteristic. Under these conditions, the fundamental solution $G(t, x; \tau, \xi)$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$, of the Cauchy problem for the equation (1) is constructed using the Levy method. For the parametrics we take $\hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1)$, where $\hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1)$ is the fundamental solution of the Cauchy problem for the equation (1) with coefficients that depend on t and y_1 .

Estimates of derivatives SG , $\partial_{x_{lj}}G$, $l \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, \dots, n_l\}$, $\partial_{x_{lj}} \partial_{x_{1s}}G$, $\{j, s\} \in \{1, \dots, n_1\}$ are also obtained.

References

- [1] Medinskyi I.P, Pasichnyk H.S. *Fundamental solution to Cauchy problem for Kolmogorov-type equation with unbounded coefficients that do not depend on degeneration variables*, Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., (2025). No 3, 3–16. (in Ukrainian)

e-mail: pasichnyk.gs@gmail.com

This report investigates boundary value problems (BVPs) for both linear and nonlinear discrete systems with a focus on input-to-state stability (ISS). We begin by analyzing homogeneous and nonhomogeneous linear systems, deriving explicit solution formulas using mathematical induction. Solvability conditions for these systems are established, providing necessary and sufficient criteria for the existence of solutions. The study is then extended to nonlinear discrete systems, where perturbation terms are introduced, and equivalent transformed BVPs are derived. By applying solvability conditions, we analyze the transition from nonlinear to linear cases as perturbations approach zero. The results contribute to the understanding of ISS properties in discrete-time dynamical systems and serve as a foundation for stability analysis and numerical methods in solving BVPs in discrete settings.

In the presented report we try to investigate the following boundary-value problem for the following systems of differential and difference equations, which model the simple version of the neural networks

$$\begin{aligned} x_i'(t, \varepsilon) &= d_i I_i x_i(t, \varepsilon) - \varepsilon c_i d_i x_i^2(t, \varepsilon) + \\ x_i(n+1, \varepsilon) &= d_i I_i x_i(n, \varepsilon) - \varepsilon c_i d_i x_i^2(n, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon d_i x_i(t, \varepsilon) \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

with additional boundary conditions

$$x_i(0, \varepsilon) - x_i(T, \varepsilon) = \alpha_i, \quad (2.3)$$

where a_{ij} can be considered as a control parameters. In this model $x_i(t, \varepsilon)$ denotes the state of the i -th neuron at time t , $d_i x_i$ and $c_i x_i$ represent the amplification and behavior functions at time t , respectively, ε is a small parameter. Moreover, in further considerations, we suppose that $d_i I_i T \neq 0$. Condition (2.2) represents the two-point boundary condition, α_i are the set of parameters. We can consider such boundary-value problem as in the finite-dimensional case ($i = \overline{1, n}$), as in the countable case ($i = \overline{1, \infty}$) and in the case when we consider the given problem in the case of Hilbert or Banach spaces (in this case, quadratic nonlinearity can be interpreted in another way).

In the paper which we can see below the main results were proved. We are going also use the proposed technique for the investigating another type of neural networks such as considered below.

The work was supported by SOMPATY No. 873071.

1. Pokutnyi O., Zahorulko Yu. Boundary Value Problems for Linear and Nonlinear Discrete Systems: Solvability Conditions and Input-to-State Stability. WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS and CONTROL, v. 20. p. 268-276. DOI: 10.37394/23203.2025.20.30
2. Sadyrbaev F., Ogorelova D. Comparative analysis of models of genetic and neuronal networks. Mathematical modeling and analysis, v. 29 (2). p. 277-287. doi.org/10.3846/mma.2024.19714

e-mail: alex_poker@imath.kiev.ua

APPROXIMATION OF NEUTRAL-TYPE DELAY STOCHASTIC EQUATION WITH AN
EQUATION WITHOUT DELAY

Oleksandr Pravdyvyi, Oleksandr Stanzhytskyi, Olha Martynyuk

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

The main goal of our work is to study approximation of neutral-type delay stochastic equation of form

$$d(u(t) - g(u(t-h))) = (Au(t) + f(u(t-h), u(t)))dt + \sigma(u(t-h), u(t))dW(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(t) = \phi(t), t \in [-h, 0], \quad (2)$$

with an equation without delay.

Here A is an infinitesimal generator of a strong continuous semigroup $\{S(t), t \geq 0\}$ of bounded linear operators on separable Hilbert space H . The random noise $W(t)$ is a Q -Wiener process on separable Hilbert space K . For some $h > 0$ we denote by $C_h := C([-h, 0], H)$ the space of continuous H -valued functions $\phi : [-h, 0] \rightarrow H$ with a norm

$$\|\phi\|_{C_h} := \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\phi(\theta)\|,$$

where $\|\cdot\|$ stands for the norm in H . The solution $u(t)$ of (1) we consider in a sense of a mild solution. The solution of (1) is sometimes referred as *state process*. We also denote $u_t := u(t + \theta)$, where $\theta \in [-h, 0]$. The functions f, g map $H \times H$ to H , and $\sigma : H \rightarrow L_2^0$, where $L_2^0 = L(Q^{\frac{1}{2}}K, H)$ is the space of Hilbert-Schmidt operators from $Q^{\frac{1}{2}}K$ to H . Finally, $\phi : [-h, 0] \times \Omega \rightarrow H$ is the initial function, where (Ω, \mathcal{F}, P) is a complete probability space.

In future H and K are separable Hilbert spaces with norms $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|_K$. Let (Ω, \mathcal{F}, P) be a complete probability space, and Q be linear bounded covariance operator, such that $tr(Q) < \infty$. Introduce

$$W(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k, \quad t \geq 0,$$

which is Q -Wiener process on $t \geq 0$. Here $\beta_k(t)$ are standard, one dimensional, independent Wiener processes, $\{e_k, k \geq 1\}$ is an orthonormal system in K , and a sequence of real nonnegative numbers λ_k satisfying

$$Qe_k = \lambda_k e_k, k = 1, 2, \dots,$$

and

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Also let $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ be a normal filtration satisfying

1. $W(t)$ is \mathcal{F}_t -measurable;
2. $W(t+h) - W(t)$ is independent of \mathcal{F}_t for all $h \geq 0$ and $t \geq 0$.

Let $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(K)$ and $L_2^0 = L_2(U_0, H)$ be the space of all Hilbert-Schmidt operators from U_0 to H with the inner product $(\Phi, \Psi)_{L_2^0} = \text{tr}[\Phi Q \Psi^*]$ and the norm $\|\Phi\|_{L_2^0}$, respectively.

We assume, that A is the infinitesimal generator of an analytic semigroup $S(t) = e^{At}$ of bounded in H operators. From [1] it is equivalent to the fact, that $(-A)$ is a sectorial operator.

We assume, that $S(t)$ is semigroup of compact operators, hence from Theorem 3.2 [2] it is continuous in the uniform operator topology.

From [2] we can deduce that for all $\alpha \in (0, 1)$ the fractional power of operator $(-A)$ is a closed linear operator with domain $D(-A^\alpha)$.

Denote by H^α the Hilbert space $D(-A)^\alpha$ endowed with the norm

$$\|u\|_\alpha := \|(-A)^\alpha u\|.$$

To ensure the existence and uniqueness of solution we have to impose additional conditions on the operator A and mappings f, σ, g .

1. If $\sigma(-A)$ is a spectrum of $(-A)$, we have that

$$\text{Re}\sigma(-A) > \delta > 0,$$

and A generates a semigroup of compact operators $S(t)$ in H .

2. For all $u, v, u_1, v_1 \in H$ we have

$$\|f(u, v) - f(u_1, v_1)\| \leq L(\|u - u_1\| + \|v - v_1\|),$$

and

$$\|\sigma(u, v) - \sigma(u_1, v_1)\|_{L_2^0} \leq L(\|u - u_1\| + \|v - v_1\|).$$

for some $L > 0$.

3. There exists $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ that for all $u, u_1 \in H$ the function g satisfies

$$\|g(u) - g(u_1)\|_\alpha \leq M_g \|u - u_1\|$$

for some $M_g \in (0, \frac{1}{2})$.

It is easy to see, that condition 2 implies linear growth of f, σ in H and condition 3 implies linear growth of g in H_α .

In the sequel we will use the following proposition from [1].

Proposition 1. [1, Th 1.4.3] *There exists $C_\alpha > 0$ such that*

$$\|(-A)^\alpha S(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \quad t > 0.$$

In particular,

$$\|S(t)\| \leq C_0 e^{-\delta t}, \quad t > 0.$$

We will introduce a mild solution of equation (1)-(2) in the following way.

Definition 1. *A continuous \mathcal{F}_t adapted stochastic process $u : [-h, T] \times \Omega \rightarrow H$ is called a mild solution for (1)-(2) for $t \in [0, T]$ if it satisfies the integral equation*

$$\begin{aligned} u(t) &= S(t)(\phi(0) - g(\phi(-h))) + g(u(t-h)) - \int_0^t AS(t-s)g(u(s-h))ds \\ &+ \int_0^t S(t-s)f(u(s-h), u(s))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(u(s-h), u(s))dW(s), \end{aligned}$$

and $u(t) = \phi(t)$ a.s. for $t \in [-h, 0]$

The following Theorems are the direct corollaries of the corresponding results from [3] and [4, Th 4.6] and Lemma 4.4 [4].

Theorem 1. [3, Th 2.6] (*Existence and uniqueness of mild solution*)

Suppose the conditions 1-3 holds. Then for all $T > 0$ equation (1) has a unique mild solution u on $[0, T]$, such that

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} \|u(t)\|^2 < R(T)(1 + \mathbf{E} \|\phi\|_C^2), \quad (3)$$

for some constant $R(T) > 0$.

Next we introduce important lemma, which will be used in proof of main result.

Lemma 1. (*Continuity modulo lemma*) Assuming the conditions of Theorem 1 holds, then for the solution of equation (1)-(2) $u(t)$ the following holds

$$\sup_{t_1 \in [-h, T]} \mathbf{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+l]} \|u(t_2) - u(t_1)\|^2 \leq C(T, \|\phi\|_{C_h}, l) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0, \quad (4)$$

For equality (1)-(2) we will build the following system, which we will call approximation equation.

Fix natural number m and split segment $[-h, 0]$ with points $-\frac{h}{m}j, j = 0..m$. Define processes $z_j(t) \in H$ as solutions of following Cauchy problems

$$\begin{cases} d(z_0(t) - g(z_m(t))) = (Az_0 + f(z_0(t), z_m(t)))dt + \sigma(z_0(t), z_m(t))dW(t), \\ dz_j(t) = \frac{m}{h}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad t \in [0, T], \\ z_j(0) = \phi(-\frac{hj}{m}), \quad j = 0..m. \end{cases} \quad (5)$$

Here $z_0(t)$ is considered in weak sence, next m solutions in regular sence, where $\frac{dz_j(t)}{dt}$ strong in H norm derivative. From [5], it follows that problem (5) have unique solution on $[0, T]$.

Definition 2. System (5) is called approximating system for (1)-(2) in mean square if

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} \|u(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)\|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad j = 0..m.$$

Next, we can introduce our main result

Theorem 2. If conditions of Theorem 1 hold system (5) is approximating system in mean square for (1)-(2) in sence of Definition 2 uniformly for $j = 0..m$

$$\sup_{j=0..m} \sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} \|u(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)\|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

This research was supported by NRFU project No. 2023.03/0074 "Infinite-dimensional evolutionary equations with multivalued and stochastic dynamics".

References

- [1] Henry D. *Geometric theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 376pp, (1981).
- [2] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 280pp, (1983).
- [3] Stanzhytsky A.O., Misiats O.O., Stanzhytskyi O.M. Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non-Lipshitz coefficients// *Evolution equations and control theory*,2022,Vol 11(6). P.1029-1953
- [4] Samoilenko A.M. Mahmudov N.I. and Stanzhytsky A.M., Existence , uniqueness and controllability results for neutral ESDS in Hilbert Spaces// *Dynam. Syst. Appl.*, 17(2008),53-70
- [5] G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

e-mail: awxrvtb@gmail.com

LOCAL NEARRINGS WITH ADDITIVE GROUPS OF ORDER 128 AND EXPONENT 8. II

Iryna Raievska, Maryna Raievska, Yaroslav Sysak

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

There exist 2328 non-isomorphic groups of order $128 = 2^7$ from which 162 are 2-generated groups (5 groups are of exponent 64, 18 groups are of exponent 32, 65 groups are of exponent 16, 72 groups are of exponent 8, and 2 groups are of exponent 4) [1].

Proposition 1. *The following 2-generated groups of exponent 8 are the additive groups of zero-symmetric local nearrings of order 128:*

<i>IdGroup</i>	<i>Structure Description</i>	<i>Number of LNR</i>
[128, 2]	$((C_8 \times C_2) \times C_4) \rtimes C_2$	> 41184
[128, 4]	$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_8$	> 46912
[128, 5]	$C_8 \times C_2 \rtimes C_8$	> 1536
[128, 6]	$(C_8 \times C_4) \rtimes C_4$	> 73728
[128, 7]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_8$	> 4160
[128, 8]	$(C_4 \times C_8) \rtimes C_4$	> 10240
[128, 12]	$((C_8 \times C_2) \times C_2) \rtimes C_4$	> 1336
[128, 13]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_8$	> 19136
[128, 27]	$(C_8 \times C_4) \rtimes C_4$	> 20736
[128, 38]	$((C_8 \times C_2) \times C_2) \rtimes C_4$	> 80384
[128, 48]	$((((C_8 \times C_2) \times C_2) \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	> 102240
[128, 49]	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_8$	> 99680
[128, 50]	$((C_4 \times C_2) \times C_8) \rtimes C_2$	> 16992
[128, 51]	$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_8$	> 16992
[128, 56]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_8$	> 196608
[128, 57]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_8$	> 127488
[128, 126]	$(C_2 \cdot ((C_4 \times C_2) \times C_2) = (C_2 \times C_2) \cdot (C_4 \times C_2)) \rtimes C_4$	> 72032

Conjecture. The following 2-generated groups of exponent 8 and only they are the additive groups of zero-symmetric local nearrings of order 128:

- the groups from Proposition 1;
- $(C_8 \times C_2) \rtimes C_8$ [128, 9];
- $(C_4 \rtimes C_8) \rtimes C_4$ [128, 28].

References

- [1] I. Raievska. *Local nearrings on additive group of order 128. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2024, 45(2), 110–114 (in Ukrainian);
[https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).110-114](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).110-114)



This work is part of a project that has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No 873071, SOMPATY.

e-mail: raeirina@imath.kiev.ua, raemarina@imath.kiev.ua, sysak@imath.kiev.ua

A REMARK ON THE FUČÍK TYPE PROBLEM

Felix Sadyrbaev, Oleksandr Pokutnyi

Daugavpils University, Daugavpils, Latvia

Institute of mathematics of NAS of Ukraine

Czech mathematician S. Fučík started to consider differential equations of the form

$$x'' = -\mu x^+ + \lambda x^-, \quad x^+ = \max\{x, 0\}, \quad x^- = \max\{-x, 0\} \quad (1)$$

[1]. It consists of two equations: one is $x'' = -\mu x$ for positive x , and for negative x the equation $x'' = -\lambda x$. The equation (1) is called Fučík equation. It is almost linear in the sense that it still possess the property of positive homogeneity, that is, for every solution $x(t)$ the function $cx(t)$ is also solution, but the sum of two solutions $x_1(t) + x_2(t)$ may not to solve the Fučík equation.

The spectral problem appears if the Fučík equation is considered together with the boundary conditions

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \quad (2)$$

The respective spectrum (a set of all pairs (μ, λ) such that the problem (1), (2) has a nontrivial solution) is called Fučík spectrum (see also [2] - [3]).

In the given report we consider generalized Fučík type problems of the following form

$$x'' = f(x) = \begin{cases} -\mu x + (\mu - \lambda), & x > 1, \\ -\lambda x, & |x| \leq 1, \\ -\mu x - (\mu - \lambda), & x < -1. \end{cases} \quad (3)$$

or

$$x'' = \alpha \max\{x + 1, 0\} - \beta \max\{-(x + 1), 0\} + \gamma \max\{x - 1, 0\} - \delta \max\{-(x - 1), 0\}, \\ x(0) = x(1) = 0$$

and show the connections between them. It is to be mentioned, that the above problems are more complicated, than the classical Fučík problem and require thorough analysis.

References

- [1] S. Fučík. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*, Reidel, Dordrecht, 1980.
- [2] G. Holubova, P. Nečasal. Resonance with respect to the Fučík spectrum for non-selfadjoint operators, *Nonlinear Anal.*, **93**, pp. 147–154, 2013.
- [3] N. Sergejeva. On the unusual Fučík spectrum, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, pp. 920–927, 2007.

e-mail: felix@latnet.lv, alex_poker@imath.kiev.ua

FEJÉR-TYPE SUMMABILITY METHOD FOR PERIODIC RATIONAL FOURIER SERIES

Viktor Savchuk

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Let $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ be a system of complex numbers in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and let $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$. The Takenaka-Malmquist system on \mathbb{T} is defined by

$$\phi_0(x) = \frac{\sqrt{1 - |a_0|^2}}{1 - e^{ix} \overline{a_0}}, \quad \phi_k(x) = e^{ikx} \frac{\sqrt{1 - |a_k|^2}}{1 - e^{ix} \overline{a_k}} B_k(e^{ix}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

and $\phi_{-k}(x) = e^{-ix} \overline{\phi_{k-1}(x)}$, $k = 1, 2, \dots$, where

$$B_k(e^{ix}) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 - e^{-ix} a_j}{1 - e^{ix} \overline{a_j}}.$$

Let f be a 2π -periodic continuous function on \mathbb{R} . Then the Fejér-type means (summability method) for f is defined by

$$\sigma_{n,\varphi}(f)(x) = \frac{1}{|B'_n(e^{ix})|} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left| \frac{B_n(e^{it}) - B_n(e^{ix})}{\sin \frac{t-x}{2}} \right|^2 \frac{dt}{2\pi}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

In the present talk, we'll consider the convergence problem for $\sigma_{n,\varphi}$ on the space of 2π -periodic continuous functions on \mathbb{R} .

Theorem 1. *Let ϕ be a Takenaka-Malmquist system generated by a sequence of points a_0, a_1, \dots in the unit disk \mathbb{D} . Then for every continuous 2π -periodic function f on \mathbb{R} , we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - \sigma_{n,\phi}(f)(x)| = 0$$

uniformly in $x \in \mathbb{R}$ if and only if

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - |a_k|^2}{|e^{i\theta} - a_k|^2} = +\infty \quad \text{for all } \theta \in [-\pi, \pi].$$



This work is part of a project that has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement Number 873071, SOMPATY.

BEST APPROXIMATIONS FOR THE COMBINATION OF CAUCHY–SZEGÖ KERNELS

Maryna Savchuk, Viktor Savchuk

*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute Kyiv, Ukraine,
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

The Cauchy–Szegö kernel is the function

$$C(t, z) := \frac{1}{1 - t\bar{z}}$$

defined on $\mathbb{T} \times \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^2$, where $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ and $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

For some function $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, $\|\varphi\|_1 > 0$, complex numbers $\lambda \in \mathbb{C}$ and $z \in \mathbb{D}$, by weighted combination of the Cauchy–Szegö kernel and its derivative we mean the function

$$C_{\varphi, z, \lambda}(t) := \varphi(t) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} C(t, z) + \lambda C(t, z),$$

defined on \mathbb{T} . Denote $H_0^1 = \{h \in H^1 : h(0) = 0\}$, where H^1 is the Hardy space in the disk \mathbb{D} .

In the present talk, we give an explicit form for the value of best approximation of $\overline{C_{\varphi, z, \lambda}}$ by functions from H_0^1 defined by

$$e_{\varphi, z}(\lambda) := \inf \left\{ \|\overline{C_{\varphi, z, \lambda}} + h\|_1 : h \in H_0^1 \right\}.$$

An inner function is a bounded holomorphic function φ in \mathbb{D} whose radial limits $\varphi^*(t) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \varphi(rt)$ satisfy the equality $|\varphi^*(t)| = 1$ for almost all $t \in \mathbb{T}$.

Theorem 1. *Let $z \in \mathbb{D}$ and φ is an inner function. Then for all $\lambda \in \mathbb{C}$ we have*

$$e_{\varphi, z}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{1 - |z|^2} + \frac{|\lambda|^2(1 - |z|^2)}{4}, & \text{if } 0 \leq |\lambda| \leq \frac{2}{1 - |z|^2}, \\ |\lambda|, & \text{if } |\lambda| \geq \frac{2}{1 - |z|^2}, \end{cases}$$

The extremal for $e_{\varphi, z}(\lambda)$ is only the function

$$h(t) = \beta^2 \varphi(t) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} C(t, z) + \lambda t \bar{z} C(t, z),$$

where

$$\beta = \begin{cases} \frac{\lambda(1 - |z|^2)}{2}, & \text{if } |\lambda| \leq \frac{2}{1 - |z|^2}, \\ e^{i \arg \lambda}, & \text{if } |\lambda| \geq \frac{2}{1 - |z|^2}. \end{cases}$$

We apply this result to establish a sharp inequality for holomorphic functions in the unit disk, leading to a new version of the Schwarz–Pick inequality.

ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF SOLUTIONS DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE
THIRD ORDER

Nataliya Sharai, Volodymyr Shinkarenko
Odesa National I.I. Mechnikov University, Odesa, Ukraine

We consider the differential equation

$$y''' = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^\sigma, \quad (1)$$

where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ is a continuous function, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$

This equation belongs to the class of equations of the form

$$y''' = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \quad (2)$$

where the function $\varphi(y)$ is regularly varying of order γ as $y \rightarrow 0$, or $y \rightarrow \pm\infty$, and is also continuous in a one-sided neighborhood of one of the indicated singular points. The interest of researchers in the study of the asymptotic properties of solutions to such equations is primarily due to the fact that, because of the properties of regularly varying functions (see, for example, the monograph by E. Seneta [1]), they are, in a certain sense, asymptotically close for $\gamma \neq 1$ to the generalized Emden-Fowler type equation

$$y''' = \alpha_0 p(t) |y|^\gamma \text{sign} y,$$

and for $\gamma = 1$ to the linear differential equation

$$y''' = \alpha_0 p(t) y, \quad (3)$$

Numerous studies of which are presented in the well-known monograph by I. T. Kihuradze and T. A. Chanturia [2].

Among the works devoted to the study of the asymptotic behavior of solutions of differential equations of type (2), particular attention should be given to the case $n \geq 2$, in the work of V. M. Evtukhov and A. M. Samoilenko [3]. However, the results given in that and other papers do not cover equations of the type (1), which are asymptotically close as $y \rightarrow 0$ and $y \rightarrow \pm\infty$ to the linear differential equation (3).

A solution y of equation (1), defined and non-zero in the interval $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, is called a $P_\omega(\lambda_0)$ -solution if it satisfies the following conditions:

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{or } 0, \\ \text{or } \pm \infty \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y''(t))^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0 \quad (4)$$

In works [4], [5] for equation (1) conditions for the existence of $P_\omega(\lambda_0)$ -solutions, were established in the case $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, as well as asymptotic expansions for such solutions and their derivatives up to the second order inclusive. At the same time, the number of solutions with the corresponding asymptotic representations was determined.

The purpose of our report is to establish and refine the necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of differential equation (1), $P_\omega(\lambda_0)$ -solutions in the special case $\lambda_0 = \pm\infty$, as well as to obtain asymptotics for $t \uparrow \omega$ with representations for such solutions and their derivatives up to the second order inclusive.

We introduce the function I as follows:

$$I(t) = \int_a^t p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau.$$

Theorem 1. For the existence of a $P_\omega(\pm\infty)$ -solution of differential equation (1), it is necessary and sufficient that the conditions

$$\lim_{t \uparrow \omega} p(t)\pi_\omega^3(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = \pm\infty \quad (5)$$

Moreover, each such solution admits, as $t \uparrow \omega$, the following asymptotic representation:

$$\frac{y^{(k-1)}(t)}{y''(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^{3-k}}{(3-k)!} [1 + o(1)] \quad (k = 1, 2), \quad (6)$$

$$\ln |y''(t)| = \alpha_0 2^{\sigma-1} I(t) [1 + o(1)]. \quad (7)$$

Corollary 1. For the existence of a $P_\omega(\pm\infty)$ -solution of the linear differential equation (3), it is necessary and sufficient that the conditions

$$\lim_{t \uparrow \omega} p(t)\pi_\omega^3(t) = 0, \quad \int_a^\omega p(t)\pi_\omega^2(t)dt = \pm\infty. \quad (8)$$

For each such solution, the following asymptotic representation holds as $t \uparrow \omega$

$$\frac{y(t)}{y''(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^2}{2} [1 + o(1)] \quad \frac{y'(t)}{y''(t)} = \pi_\omega(t) [1 + o(1)] \quad (9)$$

$$\ln |y''(t)| = \frac{\alpha_0}{2} \int_a^t p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)d\tau [1 + o(1)]. \quad (10)$$

This theorem, in the case $\omega = \pm\infty$, complements the results for linear differential equations with asymptotically small coefficients, presented in the monograph by I. T. Kiguradze and T. A. Chanturia [2] (see Chapter 1, item 6.5, pp. 184–186).

References

- [1] Seneta E. (1976) *Regularly Varying Functions*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg. 116 p.
- [2] Kiguradze I., Chanturia T. (1993). *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 331 p.
- [3] Evtukhov V., Samoilenko A. (2011) Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities. *Diff Equat.* No 47, P. 627-649
- [4] Sharai N., Shinkarenko V. (2016). Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations. . *Math. Sci. (N.Y.)*, Vol. 215, No. 3, P. 408-420.
- [5] Sharai N., Shinkarenko V. (2018). Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations. *QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia*, December 1-3, P. 165-169.

e-mail: shinkarenko.v.n@gmail.com

NONLINEAR APPROXIMATION OF WEIGHTED WIENER CLASSES OF FUNCTIONS OF
SEVERAL VARIABLES IN DIFFERENT METRICS

Andrii Shydlich

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine; National
University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

Let $L_p = L_p(\mathbb{T}^d)$ ($p \in [1, \infty]$, $\mathbb{T}^d := [0, 2\pi)^d$) be the space of all Lebesgue-measurable on \mathbb{R}^d 2π -periodic in each variable functions f with the usual norm $\|f\|_{L_p}$. Let also $\psi = \psi(t)$, $t \geq 1$, be a positive decreasing function, $\psi(0) := \psi(1)$.

Consider the weighted Wiener classes

$$\mathcal{F}_{q,r}^\psi := \{f \in L_1 : \|\{\widehat{f}(k)/\psi(\|k\|_{l_r})\}_{k \in \mathbb{Z}^d}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \leq 1\},$$

where $q, r \in (0, \infty]$, $\widehat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^d$, are the Fourier coefficients of f and $\|\cdot\|_{l_p}$ is the usual (quasi)-norm of the sequence spaces l_p .

Further, let

$$\sigma_m(f)_{L_p} := \inf_{\gamma_m, c_k} \left\| f(\cdot) - \sum_{k \in \gamma_m} c_k e^{i(k, \cdot)} \right\|_{L_p}$$

denote the best n -term trigonometric approximation of a function f , where γ_m is a collection of m different vectors from the set \mathbb{Z}^d and c_k are arbitrary real numbers.

Theorem 1. *Assume that $p, r \in [1, \infty]$, $q \in (0, \infty)$, $\psi = \psi(t)$, $t \geq 1$, is a convex decreasing to zero function such that $\psi(t)/\psi(2t) \leq K_1$. Then for any $1 \leq p \leq 2$ and $0 < q \leq \frac{p}{p-1}$,*

$$\sigma_m(\mathcal{F}_{q,r}^\psi)_{L_p} := \sup_{f \in \mathcal{F}_{q,r}^\psi} \sigma_m(f)_{L_p} \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}. \quad (1)$$

If $1 < p \leq 2$ and $q > \frac{p}{p-1}$, then relation (1) holds in the case

$$t|\psi'(t)|/\psi(t) \geq K_2 > \beta, \quad \psi'(t) := \psi'(t+), \quad (2)$$

where $\beta = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. If $2 < p \leq \infty$, then relation (1) holds for functions ψ satisfying condition (2) with $\beta = d(1 - \frac{1}{q})_+$.

For $\psi(t) = t^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, and $r = \infty$ relation (1) was obtained in [1].

References

- [1] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov. *Nonlinear approximation by trigonometric sums*, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **2** (1), 29–48 (1995).



This work is part of a project that has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement Number 873071, SOMPATY.

e-mail: shidlich@gmail.com

SOLVING THE SYSTEM OF N SECOND ORDER DIFFERENTIAL LINEAR EQUATIONS
WITH THE "CYCLIC" CONDITION FOR THE COEFFICIENTS AT THE ZERO ORDER IN
DERIVATIVE

Andrii Sizhuk

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine

Let \mathbf{k} and \mathbf{r}_α , where the lower index α runs from 1 to N , denote arbitrary three-dimensional vectors (in a Descartes coordinate system). Then, their scalar product $\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha$ represents the corresponding space phases. Assume, the values of the vectors are given as the parameters of a system. In such notations the following holds.

Theorem 1. For the given "cyclic" condition $\sum_{\alpha=1}^N \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha) = 0$ and the coefficients $g > 0$, $D > 0$ (g, D are real numbers), the system of equations

$$\frac{d^2}{dt^2} \beta_\alpha(t) = -2g^2 \sum_{\delta=1}^N \beta_\delta(t) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\delta)) - 2D \frac{d}{dt} \beta_\alpha(t), \quad (1)$$

with the limit behavior for the function β of the variable t

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_\alpha(t) = 0 \quad (2)$$

and the initial conditions $\beta_\alpha(0) = 0$, for $\alpha = 1..N$,

$$\frac{d}{dt} \beta_\alpha(0) = ig \{ \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha) + i \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha) \}, \quad (3)$$

has the solution in the following form:

$$\begin{aligned} \beta_\alpha(t) &= \\ &= -2g^2 \left\{ \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha) C [H(\Omega_{2+}, D, t) - H(\Omega_{2-}, D, t)] \right. \\ &\quad \left. + \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha) C' [H(\Omega'_{2+}, D, t) - H(\Omega'_{2-}, D, t)] \right\} \\ &\quad + \left(\frac{d}{dt} \beta_\alpha(0) + 2D \beta_\alpha(0) \right) \frac{1}{2D} (1 - e^{-(2Dt)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Here

$$H(\Omega, D, t) = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{1}{\Omega + 2D} (e^{(\Omega t)} - e^{-(2Dt)}) - \frac{1}{2D} (1 - e^{-(2Dt)}) \right]; \quad (5)$$

$$\Omega_{2\pm} = -D \pm \sqrt{D^2 - \Omega_2^2}; \quad (6)$$

$$\Omega_2 = g \sqrt{2 \sum_{\alpha} \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha)};$$

$$\Omega'_{2\pm} = -D \pm \sqrt{D^2 - \Omega_2'^2}. \quad (7)$$

$$\Omega_2' = g \sqrt{2 \sum_{\alpha} \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha)};$$

The Theorem 1 can be proved by introducing the notation

Definition 1.

$$B_c(t) = \sum_{\alpha=1}^N \beta_{\alpha}(t) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) \quad (8)$$

and taking into account the "cyclic" condition $\sum_{\alpha}^N \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) = 0$. This yields the following relatively simple linear differential equation:

$$\frac{d^2}{dt^2} B_c(t) = -2g^2 \sum_{\alpha} \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) B_c(t) - 2D \frac{d}{dt} B_c(t). \quad (9)$$

Therefore, taking into account the initial conditions $\beta_{\delta}(0) = 0$ for $\alpha = 1..N$, the solution of the above equation is as follows

$$B_c = \sum_{\alpha} \beta_{\alpha}(t) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) = C (\exp(\Omega_{2+}t) - \exp(\Omega_{2-}t)). \quad (10)$$

By analogy,

$$B_s = \sum_{\alpha} \beta_{\alpha}(t) \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) = C' (\exp(\Omega'_{2+}t) - \exp(\Omega'_{2-}t)). \quad (11)$$

Here, C and C' are constant, that yet to be defined. It is easy to see, that $\Omega'_{2+} + \Omega_{2-} = 2g^2N$.

Inasmuch as $\cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\delta})) = \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\delta}) + \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\delta})$, then, after substitution of the found superpositions (10) and (11) into the initial equation (1), we derive the following integrable differential equation:

$$\frac{d^2}{dt^2} \beta_{\alpha}(t) + 2D \frac{d}{dt} \beta_{\alpha}(t) = -2g^2 \{ \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) B_c(t) + \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) B_s(t) \}. \quad (12)$$

Integrating the left and right sides of the equation above (12) over time yields

$$\frac{d}{dt} \beta_{\alpha}(t) + 2D \beta_{\alpha}(t) = T_{\alpha}(t), \quad (13)$$

where

$$T_{\alpha}(t) = -2g^2 \{ \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) F_c(t) + \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}_{\alpha}) F_s(t) \} + \frac{d}{dt} \beta_{\alpha}(0) + 2D \beta_{\alpha}(0), \quad (14)$$

and

$$F_{c,s}(t) = \int_0^t [B_{c,s}(t)] dt. \quad (15)$$

After integrating the above functions $B_{c,s}(t)$, found in (10) or (11), we derive the following:

$$F_c(t) = C \left\{ \frac{1}{\Omega_{2+}} [\exp(\Omega_{2+}t) - 1] - \frac{1}{\Omega_{2-}} [\exp(\Omega_{2-}t) - 1] \right\}; \quad (16)$$

$$F_s(t) = C' \left\{ \frac{1}{\Omega'_{2+}} [\exp(\Omega'_{2+}t) - 1] - \frac{1}{\Omega'_{2-}} [\exp(\Omega'_{2-}t) - 1] \right\}. \quad (17)$$

Within the given initial restrictions, the solution of such linear first order differential equation, as (13), has the form:

$$\beta_{\alpha}(t) = \frac{1}{\exp(2Dt)} \int [T_{\alpha}(t) \exp(2Dt)] dt. \quad (18)$$

The integration in the last expression can be performed, yielding

$$\begin{aligned}
& \int [T_\alpha(t) e^{(2Dt)}] dt \\
&= -2g^2 \left\{ \cos(\mathbf{kr}_\alpha) C \left\{ \frac{1}{\Omega_{2+}} \left[\frac{1}{\Omega_{2+} + 2D} (e^{((2D+\Omega_{2+})t)} - 1) - \frac{1}{2D} (e^{(2Dt)} - 1) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\Omega_{2-}} \left[\frac{1}{\Omega_{2-} + 2D} (e^{((2D+\Omega_{2-})t)} - 1) - \frac{1}{2D} (e^{(2Dt)} - 1) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sin(\mathbf{kr}_\alpha) C' \left\{ \frac{1}{\Omega'_{2+}} \left[\frac{1}{\Omega'_{2+} + 2D} (e^{((2D+\Omega'_{2+})t)} - 1) - \frac{1}{2D} (e^{(2Dt)} - 1) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\Omega'_{2-}} \left[\frac{1}{\Omega'_{2-} + 2D} (e^{((2D+\Omega'_{2-})t)} - 1) - \frac{1}{2D} (e^{(2Dt)} - 1) \right] \right\} \right\} \\
&\quad + \left(\frac{d}{dt} \beta_\alpha(0) + 2D\beta_\alpha(0) \right) \frac{1}{2D} (e^{(2Dt)} - 1) + C_0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
\beta_\alpha(t) &= \\
&= -2g^2 \left\{ \cos(\mathbf{kr}_\alpha) C [H(\Omega_{2+}, D, t) - H(\Omega_{2-}, D, t)] \right. \\
&\quad \left. + \sin(\mathbf{kr}_\alpha) C' [H(\Omega'_{2+}, D, t) - H(\Omega'_{2-}, D, t)] \right\} \\
&\quad + \left(\frac{d}{dt} \beta_\alpha(0) + 2D\beta_\alpha(0) \right) \frac{1}{2D} (1 - e^{-(2Dt)}) + C_0 e^{-(2Dt)},
\end{aligned} \tag{20}$$

where

$$H(\Omega, D, t) = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{1}{\Omega + 2D} (e^{(\Omega t)} - e^{-(2Dt)}) - \frac{1}{2D} (1 - e^{-(2Dt)}) \right]. \tag{21}$$

And the initial condition $\beta_\alpha(0) = 0$, for $\alpha = 1..N$, determines the coefficient C_0 to be equal to 0.

Thus, the statement is proven.

Remark 1. *The interesting practical question lays in the estimation of the relation between the found solution, satisfying the cyclic configuration for the space phases \mathbf{kr}_α , and the non-cyclic configuration. What is the accuracy of the approximation by the cyclic solution for a "non-cyclic" solution in the case of quite large number N . In addition, when \mathbf{r}_α are unit vectors for $\alpha = 1..N$, the corresponding spatial configuration represents the problem on a unit circle. Also, \mathbf{r}_α , satisfying the cyclic condition, can be aligned along one direction. The investigated system of equations corresponds to the model two-level N -atomic system interacting with the quantize electromagnetic field, initially excited into one-photon Fock state, as it was shown in [1].*

References

- [1] Andrii Sizhuk and Stanislav Yezhov. *One photon scattering by an atomic chain in a two-mode resonator: cyclic conditions*, volume 9 of *Nanoscale Research Letters*: 203, 2014.

e-mail: andrii.sizhuk@gmail.com

In the talk we shall discuss some properties of Fano and Boolean affine and projective planes.

A *liner* is a set of points X endowed with a family of subsets \mathcal{L} called lines, such that any distinct points $x, y \in X$ belong to a unique line $\overline{xy} \in \mathcal{L}$, and there exist three points that do not belong to a single line.

A liner X is *k-long* if every line in X contains at least k points.

A liner (X, \mathcal{L}) is

- a *projective plane* if it contains no disjoint lines;
- an *affine plane* if for any line L and point $x \in X \setminus L$ there exists a unique line that contain the point x and is disjoint with the line L .

It is known that every 4-long affine plane Π is a subliner of a unique projective plane, called the *projective completion* of Π .

A liner X is called

- *Boolean* if every parallelogram in X has parallel diagonals;
- *Fano* if for every quadrangle $abcd$ in X , the set $(\overline{ab} \cap \overline{cd}) \cup (\overline{ac} \cap \overline{bd}) \cup (\overline{ad} \cap \overline{bc})$ is contained in a line and is not a singleton.

It is easy to see that Boolean liners are Fano.

Theorem 1. *The projective completion of any 4-long affine Fano plane is a projective Fano plane.*

The question of algebraization of Fano and Boolean liners gives rise to two hypotheses:

- A projective plane is Fano iff it is coordinatized by a skew-field of characteristic 2.
- An affine plane is Boolean iff it is coordinatized by a quasifield of characteristic 2.

References

- [1] Oksana Skyhar. *On Fano and Boolean Liners*, 2024.
 [2] Taras Banakh. *Linear Geometry and Algebra*, 2024.

e-mail: oksana.skyhar@lnu.edu.ua

We introduce a genetic programming approach based on evolutionary search for the automated synthesis of polynomial Lyapunov functions that certify exponential stability in nonlinear dynamical systems. Classical methods for Lyapunov function synthesis often require analytical insight or optimization over restricted function classes. In contrast, our method formulates the problem as a symbolic search over a space of polynomial expressions, represented as binary trees composed of variables, constants, and algebraic operations. Stability conditions – such as positive definiteness and orbital derivative dissipation – are encoded via a Lyapunov fitness functional that penalizes violations of these properties. This formulation transforms the task into a minimax optimization problem evaluated over a sample – based domain, enabling efficient numerical approximation. The genetic programming algorithm evolves candidate functions through mutation, crossover, and elitist selection, guided by this fitness metric. We validate the method on several benchmark systems – including linear models, the damped pendulum, polynomial vector fields, and the Van der Pol oscillator in reverse time – demonstrating that our approach can discover valid Lyapunov functions within a small number of generations. Unlike black-box techniques such as neural networks, our method yields interpretable, symbolic solutions that can be analyzed or verified analytically. Future extensions may address control Lyapunov function synthesis, adaptive parameter tuning, and scalability to high-dimensional systems through compositional representations. Our study [1] highlights the potential of evolutionary computation in control theory, offering a flexible, data-driven framework for analyzing nonlinear stability.

1. Pykhnivskiy R., Ryzhov A., Sobchuk A., Kravchenko Y. Evolutionary Search for Polynomial Lyapunov Functions: A Genetic Programming Method for Exponential Stability Certification, *Axioms*, 14(5), 343 (2025).

<https://doi.org/10.3390/axioms14050343>

e-mail: sobchuk@knu.ua, roman.pykhnivskiy@gmail.com

EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF α -ENTROPY SOLUTIONS TO A
NONLOCAL THIN FILM EQUATION IN MULTI-DIMENSIONAL DOMAINS

Roman Taranets

*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Sloviansk,
Ukraine*

We consider an initial-boundary value problem for a class of nonlocal thin film equations governed by the spectral fractional Laplacian with homogeneous Neumann boundary conditions. We were the first to establish an α -entropy estimate for nonlocal thin film equations, which yields essential a priori bounds for the regularity and long-time behavior of weak solutions. By developing a localized version of this estimate, we prove finite speed of propagation, showing that the support of nonnegative solutions remains compact for positive times. Furthermore, we find a sufficient condition for a waiting time phenomenon, whereby the solution remains identically zero in a region for a nontrivial time interval. These results highlight new features in the interaction between nonlocal effects and classical thin film dynamics. This is joint work with Antonio Segatti (Università di Pavia, Pavia, Italy).

This research was supported by NRFU project No. 2023.03/0074 “Infinite-dimensional evolutionary equations with multivalued and stochastic dynamics”.

MATHEMATICAL MODEL OF ASYMMETRIC CRYPTO-CODE SYSTEM BASED ON
ELLIPTIC ELONGATED CODES

Serhii Yevseiev, Stanislav Milevskiy, Vladyslav Sokol, Tymur Kurtseitov
National Technical University "Kharkiv polytechnic institute", Kharkiv, Ukraine
National Defense University of Ukraine Kyiv, Ukraine

The evolution of telecommunication infrastructures and the fast-paced progress in computer technologies have generated new demands for the fundamental parameters of service quality. Key benchmarks in the assessment of relevant standards include the guarantee of data authenticity during transmission as well as the protection of the entire cycle of processing and storage. To achieve the necessary level of cryptographic reliability while simultaneously supporting the growth of transmitted data volumes, the authors propose a modified asymmetric crypto-code scheme (MACCS) based on extended elliptical codes, derived from the McEliece construction [1, 2, 3].

The mathematical representation of the modified asymmetric crypto-code system for information protection, which applies algebraic block codes within the McEliece code-theoretic framework and relies on elongation (i.e., an increase in the number of information symbols), can be formally described as a composition of the following components:

- a set of plaintexts
 $M = \{M_1, M_2, \dots, M_{q^k}\}$, where $M_i = \{I_0, I_{h_{r_1}}, \dots, I_{h_{r_j}}, I_{k-1}\}$, $\forall I_j \in GF(q)$, h_j
- information symbols equal to zero, $|h| = \frac{1}{2}k$, i.e. $I_i = 0, \forall I_i \in h$, h_r – information symbols of lengthening k , $|h| = \frac{1}{2}k$;
- a set of closed texts (codegrams)
 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_{q^k}\}$, where $C_i = (c_{X_0}^*, c_{h_{r_1}}^*, \dots, c_{h_{r_j}}^*, c_{X_{n-1}}^*)$, $c_{X_j}^* \in GF(q)$;
- a set of straight mappings (based on the use of generating matrix public key)
 $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s\}$, where $\phi_i : M \rightarrow C_{h_r}, i = 1, 2, \dots, s$;
- a set of reverse mappings (based on the use of masking matrix private key)
 $\phi^{-1} = \{\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1}, \dots, \phi_s^{-1}\}$, where $\phi_i^{-1} : C_{h_r} \rightarrow M, i = 1, 2, \dots, s$;
- a set of keys, parametrizing straight mapping (the public key of an authorized user)
 $K_{a_i} = \{K_{1a_i}, K_{2a_i}, \dots, K_{sa_i}\} = \{G_X^{EC_1 a_i}, G_X^{EC_2 a_i}, \dots, G_X^{EC_s a_i}\}$, where $G_X^{EC_i a_i}$ – generating $n \times k$ matrix masked as a random algebra-geometric block (n, k, d) code with elements from $GF(q)$, i.e. $\phi_i : M \xrightarrow{K_{ia_i}} C_{h_r}, i = 1, 2, \dots, s$;
- a_i – a set of coefficients of the polynomial curve $a_1, \dots, a_6, \forall a_i \in GF(q)$, uniquely defining a specific set of curve points from the space P^2 ;
- a set of keys, parameterizing reverse mappings (personal (private) key of authorized user)

$$K^* = \{K_1^*, K_2^*, \dots, K_s^*\} = \{\{X, P, D\}_1, \{X, P, D\}_2, \dots, \{X, P, D\}_s\},$$

$$\{X, P, D\}_i = \{X^i, P^i, D^i\},$$

where X^i – masking nondegenerate randomly equiprobably formed by source of keys matrix $k \times k$ with elements from $GF(q)$; P^i – permutational randomly equiprobably formed by source of keys matrix $n \times n$ with elements from $GF(q)$; D^i – diagonal formed by source of keys matrix $n \times n$ with elements from $GF(q)$, i.e.

$$\phi_i^{-1} : C \xrightarrow{K_i} M, i = 1, 2, \dots, s.$$

Complexity of performing reverse mapping ϕ_i^{-1} without knowledge a key $K_i^* \in K^*$ associated with solution of theoretic complexity problems in random code decoding (generic position code).

In asymmetric crypto-code system based on McEliece TCS modified (elongated) algebro-geometric (n, k, d) code C_{h_r} with rapid decoding algorithm is masking random (n, k, d) code $C_{h_r}^*$ by multiplying generating matrix G^{EC} of C_{k-h_j} code on the secret masking matrices X^u, P^u and D^u , what provide formation of open key for authorized user:

$$C^{EC_u} = X^u \cdot G^{EC} \cdot P^u \cdot D^u, \quad u \in \{1, 2, \dots, s\},$$

where G^{EC} – generating $n \times k$ matrix of algebrogeometric (n, k, d) code with elements from $GF(q)$, built on the basis of the polynomial curve coefficients $a_1, \dots, a_6, \forall a_i \in GF(q)$, chose by user, uniquely defining a specific set of curve points from the space P^2 .

Forming secret text $C_j \in C_{h_r}$ by the entered plaintext $M_i \in M$ and given public key $G_X^{EC_u}, u \in \{1, 2, \dots, s\}$ is performed by forming of shortened code word and then elongation of masked code with adding to its randomly formed vector $e = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$:

$$C_j = \phi_u(M_i, G_X^u) = M_i \cdot (G_X^u)^T + e.$$

For each formed secret text $C_j \in C_{h_r}$ the appropriate vector $e = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ acts as a single session key, i.e. for specific E_j , vector e is formed randomly, equiprobably and independently of the other secret texts.

The channel receives $C_j^* = C_j - C_{k-n_j} + C_{h_r}$.

At the receiver's end, an authorized party possessing knowledge of the masking procedure as well as the position and quantity of zero information symbols is able to apply a fast decoding algorithm for algebraic-geometric codes (of polynomial complexity) in order to reconstruct the original message:

$$M_i = \phi_u^{-1}(C_j^*, \{X, P, D\}_u).$$

In order to reconstruct the original message, the authorized party substitutes the elongation symbols with the corresponding non-zero information symbols.

$$C_j^* = C_{h_r} \rightarrow C_{k-h_j},$$

from recovered secret text C_j reduces the effect of the secret of permutational and diagonal matrices P^u and D^u :

$$\begin{aligned} C &= C_j^* \cdot (D^u)^{-1} \cdot (P^u)^{-1} = \left(M_i \cdot (G_X^u)^T + e \right) \cdot (D^u)^{-1} \cdot (P^u)^{-1} = \\ &= \left(M_i \cdot (X^u \cdot G \cdot P^u \cdot D^u)^T + e \right) \cdot (D^u)^{-1} \cdot (P^u)^{-1} = \\ &= M_i \cdot (X^u)^T \cdot (G)^T \cdot (P^u)^T \cdot (D^u)^T \cdot (D^u)^{-1} \cdot (P^u)^{-1} + e \cdot (D^u)^{-1} \cdot (P^u)^{-1} = \\ &= M_i \cdot (X^u)^T \cdot (G)^T + e \cdot (D^u)^{-1} \cdot (P^u)^{-1}, \end{aligned}$$

decodes received vector with Berlekamp-Massey algorithm:

$$C = M_i \cdot (X^u)^T \cdot (G^{EC})^T + e \cdot (D^u)^{-1} \cdot (P^u)^{-1},$$

i.e. get rid of the second term and from the multiplier $(G)^{ECT}$ in the first term at right side of equation, and then reduces the effect of masking matrix X^u .

Received result of decoding M_i^* is need to be multiplied by $(X^u)^{-1}$:

$$M_i^* \cdot (X^u)^{-1} = M_i.$$

Received solution is plaintext M_i , to which are added lengthening symbols: $M_j = M_i + h_r$ – the essence of sent message.

The proposed mathematical framework for codegram encoding and decoding within the developed McEliece-based MACCS system provides the possibility of high-speed data handling in real-time operation. The computational burden of generating and interpreting codegrams is determined by the encoding and decoding procedures of the modified (elongated) elliptic codes and exhibits a polynomial dependence on both the code length and its error-correcting capacity.

The theses were prepared within the framework of project 2025.06/0047 "Information Technologies for Cryptographic Protection and Data Authentication in Mobile and Satellite Communication Systems." This project was funded by the National Research Foundation of Ukraine.

References

- [1] Blahut R.E. *Theory and Practice of Error Control Codes*, Addison-Wesley Publishing Company. 1983. – 500p.
- [2] Murr P., Yevseiev S., Milevskiy S., Melnyk M., Katsalap V., Pribyliev Y., Rzayev K., Bryla A., Shpak O., Fedorka P. *Development of an error correction method using perfect binary arrays*, volume 4(124) of *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2023. P. 45–53. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.285540>
- [3] Melenti Y., Korol O., Shulha V., Milevskiy S., Sievierinov O., Voitko O., Rzayev K., Husarova I., Kravchenko S., Pashayeva S. *Development of post-quantum cryptosystems based on the Rao-Nam scheme*, volume 1(133) of *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2025. P. 35–48. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.323195>

e-mail: Serhii.Yevseiev@gmail.com, milevskiyv@gmail.com, vladyslav.sokol@gmail.com, kurttimur@ukr.net

ON *-MEASURES AND *-CONVEXITY

Mykhailo Zarichnyi

Ivan Franko Lviv National University, Lviv, Ukraine

A triangular norm is a binary, continuous, associative, commutative, monotone operation on $[0, 1]$ for which 1 is a unit. It is proved in [1] that every triangular norm $*$ determines the class of $*$ -measures, i.e., functionals μ on the space $C(X, [0, 1])$ of continuous functions from a compact Hausdorff space X to $[0, 1]$ that preserve constants, maxima, and such that $\mu(c * \phi) = c * \mu(\phi)$.

Also, every triangular norm $*$ determines the class of the so called $*$ -convex subsets in the powers $[0, 1]^\tau$. The notion of $*$ -convex set is related to that of max-plus convex set [2] and \mathbb{B} -convex set [3]. Actually, the $*$ -convex sets can be regarded as the algebras of the monad generated by the functor of $*$ -measures. Since there are constructions that allow combining different triangular norms, it becomes possible to combine different types of convexity.

The aim of the talk is to describe the topology of the hyperspaces of $*$ -convex subsets in $[0, 1]^\tau$.

References

- [1] Kh.O. Sukhorukova, M.M. Zarichnyi, On $*$ -measure monads on the category of ultrametric spaces, Carpathian Math. Publ. 2022, 14 (2), 429–436. doi:10.15330/cmp.14.2.429–436.
- [2] G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat, and I. Singer. Max-plus convex sets and functions. In: Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, Contemporary Mathematics, 105–129. American Mathematical Society, 2005.
- [3] W. Briec, Ch. Horvath, \mathbb{B} -convexity, Optimization, Vol. 53, No. 2, April 2004, 103–127.

e-mail: zarichnyi@yahoo.com

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЕПІДЕМІЇ ВІРУСНОЇ ІНФЕКЦІЇ В УМОВАХ ВОЄННОГО СТАНУ

Станіслав Погорелов

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Олег Тоніца

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Наталя Процай

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Ярослав Балаба

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

У сучасному світі значний вплив на виникнення і поширення епідемій різноманітних хвороб надають глобалізація поїздок і торгівлі, безпланова урбанізація та такі екологічні проблеми, як зміна клімату. Для передбачення динаміки епідемій, оцінки погроз та вибору заходів щодо контролю захворюваності виникає необхідність у математичному моделюванні процесів, що відбуваються під час епідемії.

Щоб передбачити охоплення та тривалість епідемії, вчені вдаються до моделювання передачі вірусу у суспільстві. Моделі можуть бути в різній ступеня детальними. Деякі з них описують тільки зараження та одужання: якщо хтось переносить інфекцію, то певна частка людей без імунітету заразиться, частка тих, хто заразився, – одужає. Інші моделі враховують додаткові фактори, такі як імунітет, набутий через вакцинацію.

Для аналізу та моделювання розвитку епідемічної ситуації широко використовується в практичному використанні модель SIR, заснована на поділі населення на три групи: S – сприйнятливі (Susceptible), I – інфіковані (Infectious) і R – мають імунітет (Removed): $N = S + I + R$, де N – загальна чисельність населення.

Актуальною є задача побудови методики вибору початкових даних та параметрів системи для моделювання поширення епідемії вірусної інфекції на прикладі епідемії грипу в Україні.

Необхідно проаналізувати існуючі SIR-моделі, розробити алгоритм вибору параметрів моделі та початкових даних для системи для моделювання поширення вірусної інфекції, проаналізувати поширення та провести моделювання вірусної інфекції грипу на території України, вирішити завдання вибору початкових даних для SIR-моделі поширення вірусної інфекції грипу.

Модель SIR – це свого роду компартментальна модель, що описує динаміку інфекційних захворювань. У цій моделі населення ділиться на групи. Очікується, що кожна група буде мати однакові характеристики і, виходить, що SIR-модель представляє три гілки, сегментовані за моделлю:

– Susceptible – здорові особини, які знаходяться в групі ризику та можуть підхопити інфекцію;

– Infectious – інфіковані особини, що є переносниками інфекції;

– Recovered – «особи, що вибули», до яких відносяться одужалі особини, які набули імунітет до даної хвороби, а також померлі.

Модель SIR дає можливість описати кількість людей у кожній групі за допомогою звичайного диференціального рівняння. Параметр, який контролює швидкість передачі хвороби при контакті, – це β . Цей параметр залежить від ймовірності контакту та ймовірності передачі хвороби. Параметр, який висловлює рівень лікування від хвороби за певний період, – це γ . Як тільки люди одужують, вони набувають імунітет. Вони не можуть повторно увійти до категорії сприйнятливих до хвороби [1, 2].

Система диференціальних рівнянь, що описують модель, виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta IS, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}$$

Щодо початкових умов, можна відзначити, що часто спочатку у популяції відсутні особини з імунітетом до захворювання, тобто $R(0)=0$. Таку систему рівнянь також називають системою Кермака МакКендріка [1].

Ця модель не бере до уваги ефект від впливу природної смертності або народжуваності, тобто модель передбачає, що період, що видається на захворювання, набагато коротше, ніж тривалість життя людини. Якщо γ – параметр, що відображає швидкість одужання, який можна описати як час, що минув від початку перших симптомів хвороби до повного одужання, то

$$D = \frac{1}{\gamma}.$$

Окрім того, можна оцінити характер захворювання за силою поширення інфекції $U_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, який називають індексом репродукції. U_0 – це середня кількість людей, яких заразила одна людина. Збільшення даного параметра також безпосередньо впливає на рівень пандемії. Чим більше U_0 , тим більший дисбаланс внесений у розповсюдження епідемії.

Чисельність населення береться постійною. Якщо взяти припущення про те, що частка людей, які вже були хворі, рівна p , то стійкий стан можна сформулювати у такому вигляді:

$$U_0(1-p) = 1 \rightarrow 1-p = \frac{1}{U_0} \rightarrow p_c = 1 - \frac{1}{U_0}.$$

Отже, p_c – це загальний імунний поріг (НІТ), необхідний для зупинки поширення інфекційних захворювань. Підвищення імунного порога та зупинка спалахи епідемії можливі шляхом вакцинації населення для підвищення спільного імунного порога.

Розвитком моделі SIR стали, зокрема, наступні моделі:

1) SIR-S – «сприйнятливі – інфіковані – одужалі – сприйнятливі»: модель опису динаміки захворювань з тимчасовим імунітетом (індивіди зі часом знову стають сприйнятливими);

2) SEI-R – «сприйнятливі – контактні (*Exposed*) – інфіковані – одужалі»: модель для опису поширення захворювань з інкубаційним періодом;

3) SIS – «сприйнятливі – інфіковані – сприйнятливі»: модель для розповсюдження захворювання, до якого не виробляється імунітет;

4) MSEI-R – «наділені імунітетом від народження (*Maternally derived immunity*) – сприйнятливі – контактні – інфіковані – одужалі»: модель, що враховує імунітет дітей, придбаний внутрішньоутробно [1, 3].

Захворювання в моделі SEI-R розвивається за схемою «сприйнятливі» – «контактні» – «інфіковані» – «одужалі» і описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N - \mu S - \beta \frac{1}{N} S, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta \frac{1}{N} S - (\mu + \alpha) E, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (\gamma + \mu) I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.\end{aligned}$$

де μ – рівень смертності;

α – величина, зворотна середньому інкубаційному періоду захворювання;

$E(t)$ – чисельність індивідів – носіїв захворювання в момент часу t .

Модель SEI-R включає в себе концепцію так званого епідемічного переходу. Тобто модель веде себе радикально по-різному залежно від параметра U_0 . Кожна інфікована людина може заразити деяку кількість здорових людей. U_0 показує середню кількість людей, яких один інфікований може заразити в період хвороби, тобто до повного одужання. Якщо U_0 менше одиниці, то спостерігається поступове згасання епідемії, але якщо U_0 більше одиниці, то захворювання поширюється в геометричній прогресії [1, 3]. Модель SIS («сприйнятливі – інфіковані – сприйнятливі») застосовується для аналізу поширення захворювань, до яких не виробляється імунітет, наприклад, можна навести тут грип та ГРВІ.

Модель SIS описується наступною системою рівнянь [1, 2]:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} + \gamma I, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I.\end{aligned}$$

Модель MSEI-R побудована для захворювань, які включають інкубаційний період, а також є моделлю, що враховує імунітет дітей, придбаний внутрішньоутробно. Дана модель є однією з самих складних для аналізу через наявність великої кількості незалежних параметрів [1-3].

Побудовано методики вибору початкових даних та параметрів системи для моделювання поширення епідемії вірусної інфекції на прикладі епідемії грипу в Україні. Проаналізовано існуючі розширення SIR-моделі, а також інші методи моделювання та аналізу поширення захворювань, засновані на статистичних перетвореннях, машинному навчанні та методі прецедентів, на базі фільтрації.

Розроблено алгоритм вибору параметрів моделі та початкових даних для системи для моделювання поширення вірусної інфекції. Цей алгоритм заснований на градієнтному методі, що використовує аналітичне подання градієнта функціоналу.

Проведено аналіз поширення вірусної інфекції грипу на території України за 2020-2021 рр., 2021-2022 рр., 2022-2023 рр., а також проведено моделювання SIR-моделі поширення епідемії, початкові дані та параметри якої надалі були покращені за допомогою розробленого алгоритму.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

- 1 Thompson, W.W. Estimates of US influenza-associated deaths made using four different methods / W.W. Thompson, E. Weintraub, P. Dhankhar, O.Y. Cheng, L. Brammer, M.I. Meltzer et al. – Influenza Other Respi Viruses. – 2019, №3. – р. 37-49.
- 2 Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимошук О.Л. Аналіз часових рядів / Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимошук О.Л. – Київ: НТУУ «КПІ», Політехніка, 2023, 600 с.
- 3 Бідюк П. І. Методи прогнозування. Том 1 і 2 / Бідюк П. І. – Київ: Альма Матер, 2018, 725с.
- 4 Бідюк П. І. Часові ряди: моделювання і прогнозування: монографія / Бідюк П. І. – Київ: ЕКМО, 2013, 144 с.

**Міжнародна конференція,
присвячена 75-річчю з дня народження Володимира Маслюченка**

25 – 27 вересня 2025 року

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Олена Карлова
Володимир Ковдриш
Василь Косован
Василь Кушнірчук
Ольга Мартинюк
Олександр Маслюченко
Володимир Михайлюк
Василь Нестеренко
Денис Онипа
Михайло Попов
Олена Фотій
Тоня Фратавчан
Анастасія Юрійчук
Богдан Яшан

Павло Гриндей
Владислав Губенко
Анна Наумук
Єгор Семенча

