

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.05>

МАЦЕНКО В.Г.

**Узагальнення моделі типу Скеллама з немонотонною функцією розмноження**

Розглянуто узагальнення дискретної моделі Скеллама, яке володіє періодичними режимами, для немонотонної функції розмноження. Вивчено питання існування стаціонарних і періодичних розв'язків моделі та їх стійкість. Наведено комп'ютерні розрахунки динаміки чисельності популяцій.

*Ключові слова і фрази:* дискретні моделі, модель Скеллама, стаціонарні та періодичні розв'язки, стійкість.

---

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: [v.matsenko@chnu.edu.ua](mailto:v.matsenko@chnu.edu.ua)

## ВСТУП

Дискретні моделі, зокрема моделі Скеллама, мають широке застосування при вивченні динаміки біологічних популяцій із неперекривними поколіннями [1, 2]. Ріст їхньої чисельності відбувається в окремі фіксовані моменти часу. До таких популяцій можна віднести дрібних гризунів, багатьох комах з однорічною генерацією, однорічні рослини. Їх дорослі особини, що розмножуються впродовж року, живуть недовго і до появи на світ нового покоління припиняють своє існування.

Математичні моделі динаміки таких популяцій пов'язують їх чисельності  $N_{t+1}$  в момент часу  $t + 1$  з чисельностями в попередні моменти часу і в простішому випадку – це дискретні рівняння вигляду

$$N_{t+1} = f(N_t)N_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

де  $N_t$  – чисельність популяції в момент часу  $t$ ;  $f(\cdot)$  – гладка функція дійсного аргументу, яка відображає простір  $R^+ = [0, \infty)$  в  $R^+$ .

Функція

$$f(N_t) = \frac{N_{t+1}}{N_t}$$

– це коефіцієнт природного відтворення, або коефіцієнт розмноження. Вона визначає середню кількість потомків, що припадає на одну особину, яка існувала в момент часу  $t$ . Це єдиний показник, що виражає характер процесів виживання і народжування в дискретних моделях.

---

УДК 519.87:574.3

2010 *Mathematics Subject Classification*: 34D20, 34K06, 34K20.

У припущенні, що вплив саморегулюючих внутрішньопопуляційних факторів з ростом чисельності тільки посилюється, коефіцієнт розмноження описується монотонно спадними функціями.

У моделі Рікера коефіцієнт розмноження – це експоненціально спадна функція, а у моделі Скеллама – це спадна гіперболічна функція вигляду [1]

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t},$$

де параметр  $a$  задає найбільше значення розмноження, а параметр  $b$  описує вплив саморегулюючих факторів на динаміку дискретної популяції.

У праці [3] вивчаються узагальнення моделі Скеллама для функцій розмноження вигляду

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^2}, \quad f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^2}.$$

Показано, що для цих двох функцій при певних співвідношеннях між параметрами спостерігається лише монотонна стабілізація чисельності популяції до деякого стаціонарного рівня.

Проте на практиці часто виникають періодичні режими. Існування періодичних режимів різних періодів та їх дослідження проведено в праці [4] для монотонної функції розмноження вигляду

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}.$$

Але функція  $f(N_t)$  не завжди монотонна. Як показують численні екологічні спостереження динаміки чисельності популяцій, при малих  $N_t$  вона може бути зростаючою, а при великих  $N_t$  – спадною. Це має місце коли, наприклад,

$$f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^4}.$$

Тоді модель (1), у цьому випадку, набуває вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^4} \equiv F(N_t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad a, b > 0. \quad (2)$$

Параметри  $a$  та  $b$  мають той самий екологічний зміст, що описаний вище.

У даній праці встановлено, що модель (2) має як стаціонарні, так і періодичні розв'язки різних періодів, а також режими з хаотичною поведінкою. Тут розглянуто також деякі зміни в моделі (2).

## 1 ІСНУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ ТА ЇХ СТІЙКІСТЬ

Модель (2) – це нелінійне дискретне рівняння, розв'язок якого в аналітичній формі знайти не можливо. Тому будемо відшукувати простіші розв'язки, а саме стаціонарні та періодичні, і вивчатимемо їх стійкість.

Стаціонарні розв'язки рівняння (2) знаходимо зі співвідношення

$$N = \frac{aN^2}{b + N^4}. \quad (3)$$

Очевидно, що розв'язком цього рівняння є тривіальне значення  $N_0^* = 0$ .

Ненульові розв'язки рівняння (3) знаходяться зі співвідношення

$$N^4 = aN - b. \quad (4)$$

Для знаходження цих розв'язків застосуємо графічний аналіз. Спочатку знайдемо точку, в якій функції правої та лівої частин рівняння (4) мають однаковий кутовий коефіцієнт. Це значення  $N^*$ , для якого

$$4N^{*3} = a, \quad \text{або} \quad N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}.$$

Якщо в точці  $N^*$  значення правої та лівої частин рівняння (4) збігаються, то це і є корінь цього рівняння, або стаціонарний розв'язок для рівняння (2). Це має місце, якщо  $b = \frac{3a}{4} \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$ .

При цьому рівняння (4) має єдиний (кратний) додатний корінь  $N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$  (рис. 1а).

Якщо  $b > \frac{3a}{4} \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$ , то (4) не має дійсних коренів (рис. 1б), а якщо  $b < \frac{3a}{4} \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$ , то має два дійсних різних додатних корені (рис. 1в). Позначимо їх через  $N_1^*$  та  $N_2^*$ .

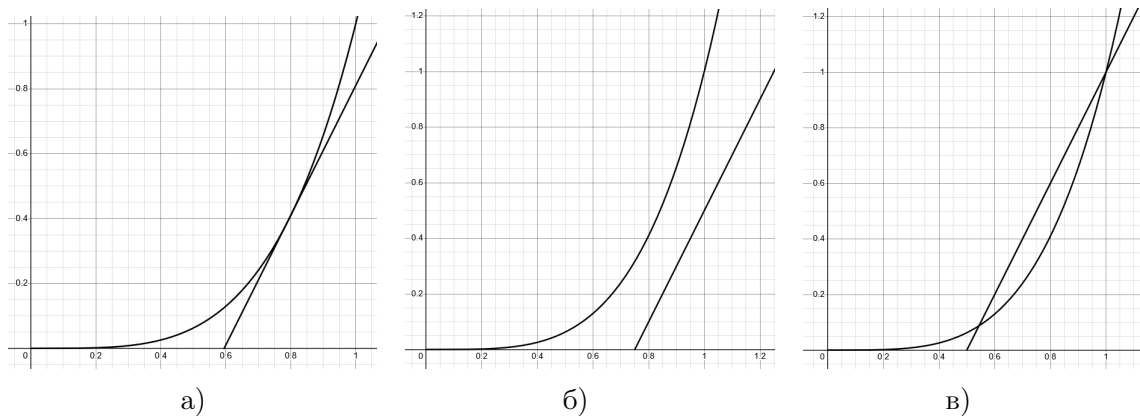


Рис. 1. Існування коренів рівняння (4): а)  $a = 2$ ,  $b = \frac{3}{2} \sqrt[3]{0.5}$ ; б)  $a = 2$ ,  $b = 1.5$ ; в)  $a = 2$ ,  $b = 1$

Отже, рівняння (3) завжди має нульовий корінь, а ненульових додатних, в залежності від значень  $a$  та  $b$ , може мати один  $N^*$ , два  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ , або не мати жодного.

Зокрема, при  $a = 2$ ,  $b = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ,  $N^* = 0.7937$ , при  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $N_1^* = 0.5436$ ,  $N_2^* = 1$ , при  $a = 2$ ,  $b = 1.5$  ненульових коренів не існує.

Проведемо дослідження стійкості стаціонарних режимів. Для цього знаходимо мультиплікатори стаціонарних точок:

$$\lambda = \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N^*} = \frac{2aN^*(b - N^{*4})}{(b + N^{*4})^2}.$$

Оскільки для нульового розв'язку  $\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_0^*} = 0$ , то обчислюємо другу похідну

$$\left. \frac{d^2F}{dN^2} \right|_{N_0^*} = \frac{a}{b}.$$

Тоді стійкість нульового розв'язку в другому наближенні маємо для початкових значень  $N_t|_{t=0} = N_0$ , для яких  $\frac{a}{b}N_0 < 0$ . Для виконання цієї умови при  $N_0 > 0$  завжди можна підібрати відповідні  $a$  та  $b$ . Це означає, що нульовий розв'язок завжди локально стійкий (рис. 2)

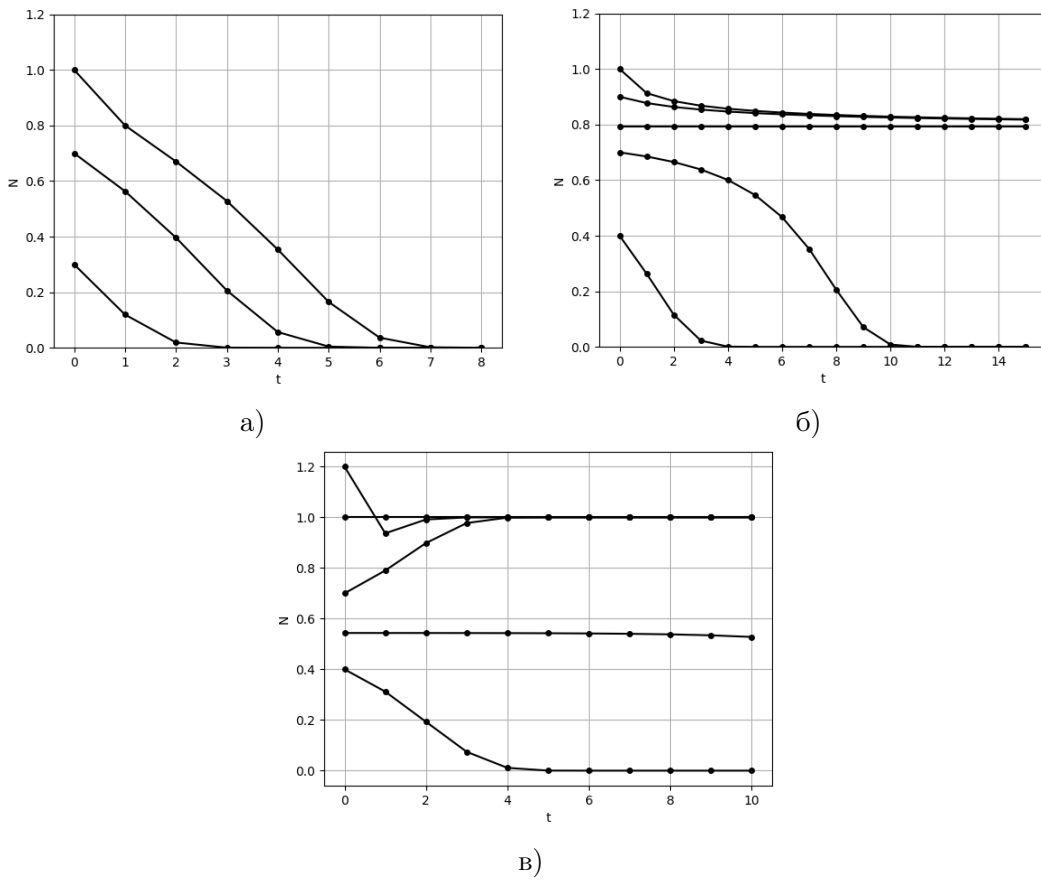


Рис. 2. Стаціонарні стани та їх стійкість. а)  $a = 2.0, b = 1.5, N_0 = \{1, 0.7, 0.3\}$ ,  
 б)  $a = 2.0, b = 1.1905507, N_0 = \{1, 0.9, 0.7937, 0.7, 0.4\}$ , в)  $a = 2.0, b = 1,$   
 $N_0 = \{1, 0.5436, 1.2, 0.7, 0.4\}$

Обчислимо тепер  $\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N^*}$ . Оскільки  $N^{*4} = aN^* - b$ , то

$$\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N^*} = \frac{2(2b - aN^*)}{aN^*}.$$

Для  $N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}, b = \frac{3a}{4} \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$  знаходимо  $\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N^*} = 1$ , тому необхідно зробити додаткові дослідження. Для цього обчислюємо

$$\left. \frac{d^2F}{dN^2} \right|_{N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}} = -\frac{b}{a} \left( \sqrt[3]{\frac{a}{4}} \right)^2.$$

При цьому для поправки  $x_t$ , де  $x_t = N_t - N^*$  з точністю до величин третього порядку малості маємо рівняння

$$x_{t+1} = x_t - \frac{3}{4}x_t^2, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно, що при достатньо малих  $x_0 > 0$ ,  $x_1 < x_0$ , а отже,  $0 < x_{t+1} < x_t$ , а для від'ємних  $x_0$  маємо  $|x_{t+1}| > |x_t|$ . Тому коли  $b = \frac{a}{4} \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$  стаціонарний режим  $N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$  напівстійкий (рис. 2б).

Дослідимо тепер стаціонарні стани  $N_1^*$ ,  $N_2^*$  на стійкість. Знайдемо їх мультиплікатор

$$\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_{1,2}^*} \right| = \left| \frac{2b}{aN_{1,2}^*} - 1 \right|.$$

Ця величина менша за одиницю, якщо

$$\frac{1}{2} < \frac{2b}{aN_{1,2}^*} < \frac{3}{2}$$

і більша за одиницю, якщо

$$\frac{2b}{aN_{1,2}^*} < \frac{1}{2}, \quad \text{або} \quad \frac{2b}{aN_{1,2}^*} > \frac{3}{2}.$$

Зокрема, при  $a = 2$ ,  $b = 1$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dN} \Big|_{N_1^*=0.5436} &= 1.6792 > 1, \\ \frac{dF}{dN} \Big|_{N_2^*=1} &= 1, \end{aligned}$$

тому  $N_1^*$  – нестійкий (рис. 2в).

Для дослідження  $N_2^*$  на стійкість знаходимо  $\frac{d^2F}{dN^2} \Big|_{N_2^*=1} = 4$ . При цьому послідовність

$$x_{t+1} = \frac{1}{2} \frac{d^2F}{dN^2} \Big|_{N_2^*} x_t^2 = 2x_t^2, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $x_t = N_t - N_2^*$ , збігається до нуля, якщо  $2|x_0| < 1$ , тобто для  $|x_0| < \frac{1}{2}$ . Отже, розв'язок  $N_2^* = 1$  – локально стійкий (рис. 2в).

У випадку, коли  $N_{1,2}^*$  нестійкі, можуть з'являтися періодичні і хаотичні розв'язки.

## 2 ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЖИМІВ

Спочатку відшукаємо періодичні розв'язки з періодом  $T = 2$ . Для них  $N_{t+2} = N_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Такі розв'язки знаходяться із системи

$$N_2 = F(N_1),$$

$$N_1 = F(N_2),$$

або те саме, що з рівняння

$$N = F(F(N)). \quad (5)$$

Це рівняння, у випадку моделі (2), має вигляд

$$a^3 N^3 (b + N^4)^2 = b (b + N^4)^4 + a^4 N^8,$$

яке аналітично не можна розв'язати. Тому застосуємо числові методи.

Візьмемо  $a = 2$ ,  $b = 0.5$ , тоді графічний аналіз рівняння (5) показує, що воно має чотири корені  $N_1^* = 0.2520$ ,  $N_2^* = 1.1622$ ,  $N_3^* = 0.9028$  і  $N_4^* = 1.4000$  (рис. 3).

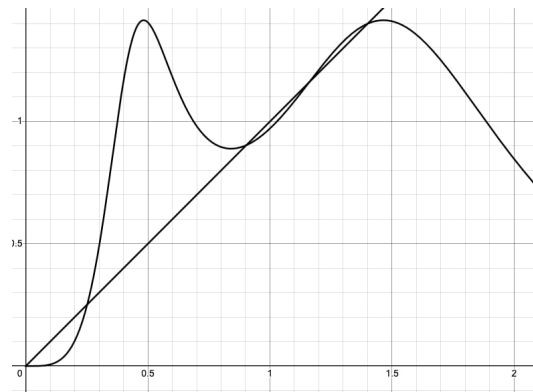


Рис. 3. Графічне визначення коренів рівняння (5) при  $a = 2.0$ ,  $b = 0.5$ .  $N_1^* = 0.2520$ ,  $N_2^* = 1.1622$ ,  $N_3^* = 0.9028$ ,  $N_4^* = 1.4000$

Два перших з них  $N_1^*$ ,  $N_2^*$  – це стаціонарні розв’язки рівняння (2), два інших  $N_3^* \neq N_4^*$  – складають періодичний розв’язок з періодом  $T = 2$ .

Оскільки мультиплікатори

$$\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_1^*} = 1.968 > 1, \quad \left| \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_2^*} \right| = 1.143 > 1,$$

$$\left| \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_3^*} \cdot \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_4^*} \right| = 0.435 < 1,$$

то стаціонарні розв’язки нестійкі, а періодичний з періодом  $T = 2$  – стійкий (рис. 4).

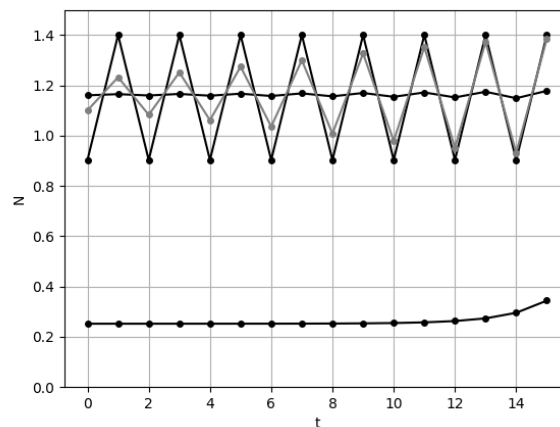


Рис. 4. Нестійкі стаціонарні стани. Періодичний розв’язок рівняння (2) з періодом  $T = 2$  та його стійкість.  $a = 2.0$ ,  $b = 0.5$ ,  $N_0 = \{0.25202, 0.9028, 1.1, 1.16\}$

Візьмемо тепер інші значення параметрів моделі, а саме  $a = 2$ ,  $b = 0.3$ . У цьому випадку графік функції  $F(F(N))$  поданий на рис. 5 і корені рівняння (5) набувають значень  $N_1^* = 0.1502$ ,  $N_2^* = 1.2053$ ,  $N_3^* = 0.6361$ ,  $N_4^* = 1.7451$ .

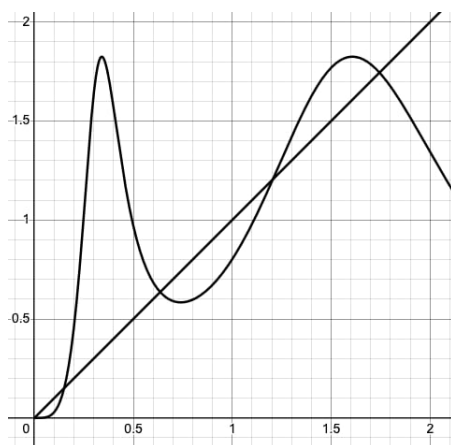


Рис. 5. Існування коренів рівняння (5) при  $a = 2.0$ ,  $b = 0.3$ .  $N_1^* = 0.1502$ ,  $N_2^* = 1.2053$ ,  
 $N_3^* = 0.6361$ ,  $N_4^* = 1.7451$

Значення  $N_1^*$ ,  $N_2^*$  – це стаціонарні розв’язки, а  $N_3^*$ ,  $N_4^*$  – періодичний розв’язок з періодом  $T = 2$ .

Мультиплікатори стаціонарних станів

$$\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_1^*} = 1.99 > 1, \quad \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_2^*} = 1.502 > 1,$$

тому вони нестійкі (рис. 6). Мультиплікатор періодичного розв’язку

$$\left| \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_3^*} \cdot \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_4^*} \right| = 1.1 > 1,$$

тому періодичний розв’язок з періодом  $T = 2$  теж нестійкий (рис. 6). Це означає, що можуть з’явитися періодичні розв’язки інших періодів, зокрема, з періодом  $T = 4$ .

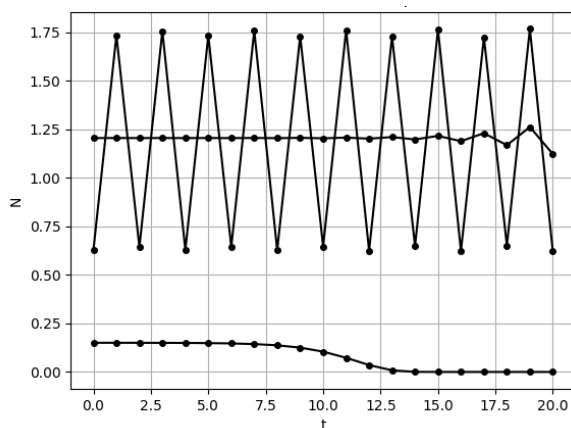


Рис. 6. Нестійкість стаціонарних розв’язків та періодичного розв’язку з періодом  $T = 2$  при  
 $a = 2.0$ ,  $b = 0.3$

Для знаходження періодичного розв’язку з періодом  $T = 4$  маємо рівняння

$$N = F(F(F(F(N)))) \quad (6)$$

Графічний аналіз коренів цього рівняння наведений на рис. 7.

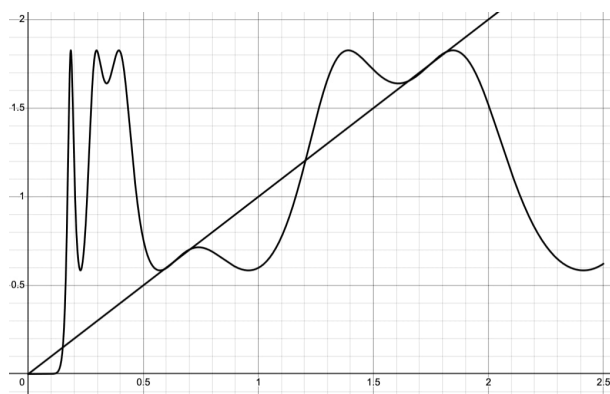


Рис. 7. Розв'язування рівняння (6) при  $a = 2.0$ ,  $b = 0.3$ . Корені рівняння  $N_1^* = 0.1503$ ,  $N_2^* = 1.2053$ ,  $N_3^* = 0.6361$ ,  $N_4^* = 1.7452$ ,  $N_5^* = 0.5897$ ,  $N_6^* = 1.6522$ ,  $N_7^* = 0.7043$ ,  $N_8^* = 1.8168$

При  $a = 2$ ,  $b = 0.3$  рівняння (6) має 8 коренів. Два з них –  $N_1^*$ ,  $N_2^*$  – визначають нестійкі стаціонарні режими,  $N_3^*$ ,  $N_4^*$  складають нестійкий періодичний розв'язок із періодом  $T = 2$ . Чотири значення  $N_5^* = 0.5897$ ,  $N_6^* = 1.6522$ ,  $N_7^* = 0.7043$ ,  $N_8^* = 1.8168$  задають періодичний розв'язок з періодом  $T = 4$  (рис. 8а). Він стійкий (рис. 8б), оскільки його мультиплікатор

$$\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_5^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_6^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_7^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_8^*} \right| = 0.588 < 1,$$

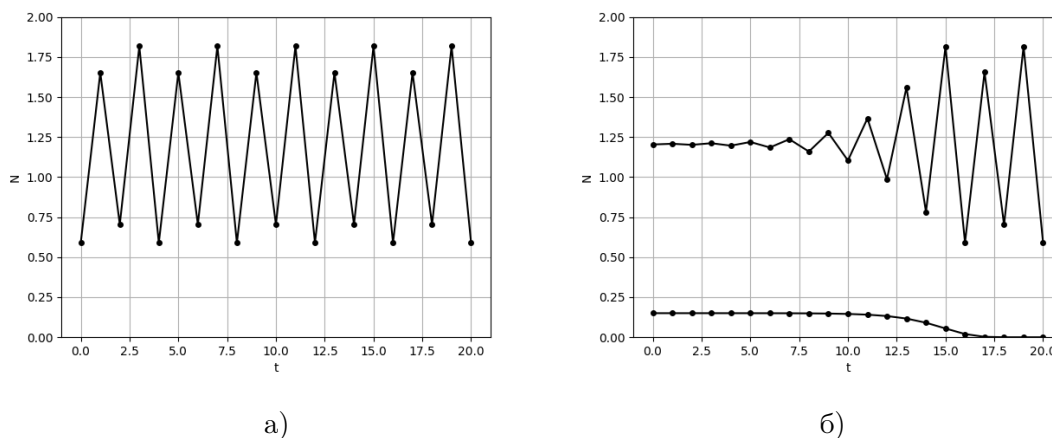


Рис. 8. а) періодичний розв'язок з періодом  $T = 4$ , б) його стійкість.  $a = 2.0$ ,  $b = 0.3$

При зміні параметрів  $a$  та  $b$  періодичні розв'язки з періодом  $T = 4$  перестають бути стійкими. Зокрема, при  $a = 3$ ,  $b = 0.1$  маємо 8 коренів (рис. 9): двох нестійких стаціонарних станів  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ , нестійкого періодичного розв'язку  $N_3^*$ ,  $N_4^*$  з періодом  $T = 2$  та нестійкого періодичного розв'язку  $N_5^* = 0.2542$ ,  $N_6^* = 0.8591$ ,  $N_7^* = 1.8609$ ,  $N_8^* = 3.4341$  з періодом  $T = 4$ , оскільки його мультиплікатор дорівнює  $9.9706 > 1$  (рис. 10).

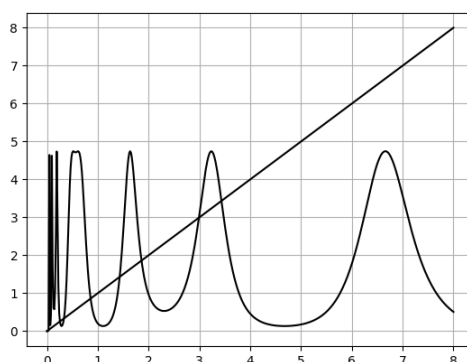


Рис. 9. Графічна ілюстрація розв'язків рівняння (6) при  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ . Корені рівняння  $N_1^* = 0.0333$ ,  $N_2^* = 1.4309$ ,  $N_3^* = 0.33503$ ,  $N_4^* = 2.9905$ ,  $N_5^* = 0.2542$ ,  $N_6^* = 0.8591$ ,  $N_7^* = 1.8609$ ,  $N_8^* = 3.4341$

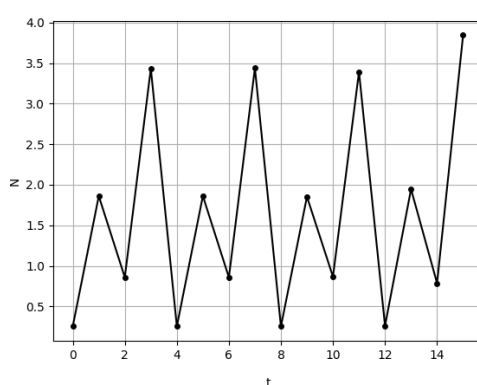


Рис. 10. Нестійкість періодичного розв'язку з періодом  $T = 4$  при  $a = 3$ ,  $b = 0.1$

Перейдемо до знаходження періодичних розв'язків із періодом  $T = 3$  ( $N_{t+3} = N_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ ). Такі розв'язки знаходяться з рівняння

$$N = F(F(F(N))). \quad (7)$$

При  $a = 3$ ,  $b = 0.05$  рівняння (7) має 8 коренів (рис. 11). Два з них задають стаціонарні точки, які є нестійкими, а шість інших визначають два періодичні розв'язки з періодом  $T = 3$ .

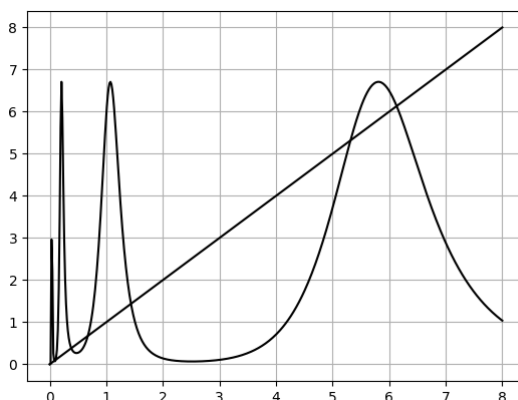


Рис. 11. Графічна ілюстрація існування коренів рівняння (7) при  $a = 3$ ,  $b = 0.05$ . Корені рівняння  $N_1^* = 0.01666$ ,  $N_2^* = 1.4366$ ,  $N_3^* = 0.07976$ ,  $N_4^* = 0.3814$ ,  $N_5^* = 6.1327$ ,  $N_6^* = 0.1061$ ,  $N_7^* = 0.6738$ ,  $N_8^* = 5.3169$

Вони – нестійкі (рис. 12), оскільки їхні мультиплікатори більші за одиницю.

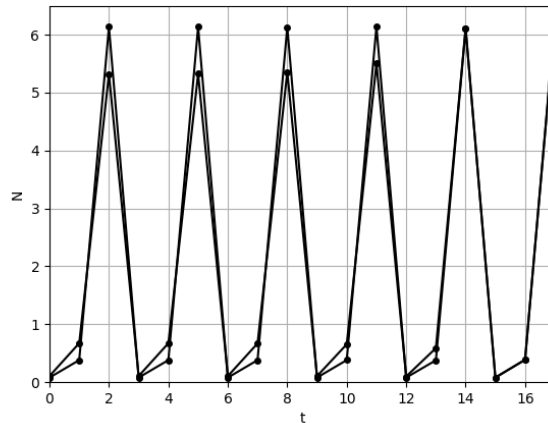


Рис. 12. Періодичні розв’язки рівняння (2) з періодом  $T = 3$  при  $a = 3$ ,  $b = 0.05$  та їх нестійкість

При  $a = 3$ ,  $b = 0.1$  теж маємо існування двох періодичних розв’язків із періодом  $T = 3$  (рівняння (7) має вісім коренів). Але один із них, що визначається значеннями  $N_3^* = 0.1343$ ,  $N_4^* = 0.5393$ ,  $N_5^* = 4.7269$ , – стійкий (рис. 13а), оскільки його мультиплікатор дорівнює  $0.6629 < 1$ . А другий періодичний розв’язок ( $N_3^* = 0.1495$ ,  $N_4^* = 0.6672$ ,  $N_5^* = 4.4791$ ) – нестійкий (рис. 13б). Його мультиплікатор  $\lambda = 2.603 > 1$ .

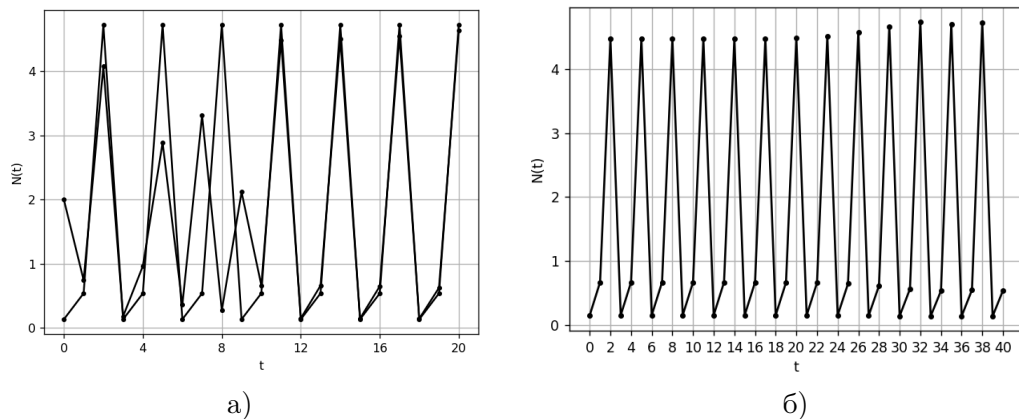


Рис. 13. Періодичні розв’язки з періодом  $T = 3$  при  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ . а)  $N_3^* = 0.1343$ ,  $N_4^* = 0.5393$ ,  $N_5^* = 4.7269$  – стійкий, б)  $N_3^* = 0.1495$ ,  $N_4^* = 0.6672$ ,  $N_5^* = 4.4791$  – нестійкий

Оскільки, за теоремою Шарковського [5], з існування періодичних розв’язків з періодом  $T = 3$  випливає існування періодичних розв’язків з періодом  $T = 5$ , то знайдемо їх. Для цього потрібно знаходити корені рівняння

$$N = F(F(F(F(F(N))))). \tag{8}$$

При  $a = 3$ ,  $b = 0.05$  рівняння (8) має 12 коренів (рис. 14). Два з них  $N_1^*$ ,  $N_2^*$  – нестійкі стаціонарні розв’язки, а десять інших визначають два періодичних розв’язки з періодом  $T = 5$ , це  $N_3^*$ ,  $N_4^*$ ,  $N_5^*$ ,  $N_6^*$ ,  $N_7^*$  та  $N_8^*$ ,  $N_9^*$ ,  $N_{10}^*$ ,  $N_{11}^*$ ,  $N_{12}^*$ . Обидва вони нестійкі (рис. 15), оскільки їх мультиплікатори більші за одиницю.

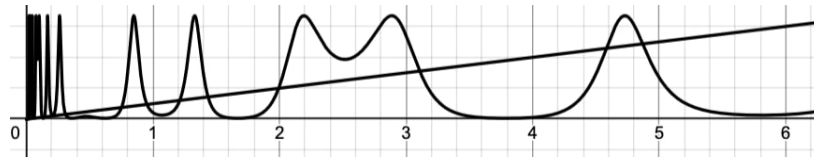


Рис. 14. Корені рівняння (8) при  $a = 3$ ,  $b = 0.05$ :  $N_1^* = 0.01666$ ,  $N_2^* = 1.4366$ ,  $N_3^* = 0.1264$ ,  $N_4^* = 0.9537$ ,  $N_5^* = 3.1090$ ,  $N_6^* = 0.3102$ ,  $N_7^* = 4.8713$ ,  $N_8^* = 0.1427$ ,  $N_9^* = 1.2127$ ,  $N_{10}^* = 1.9936$ ,  $N_{11}^* = 0.7524$ ,  $N_{12}^* = 4.5838$

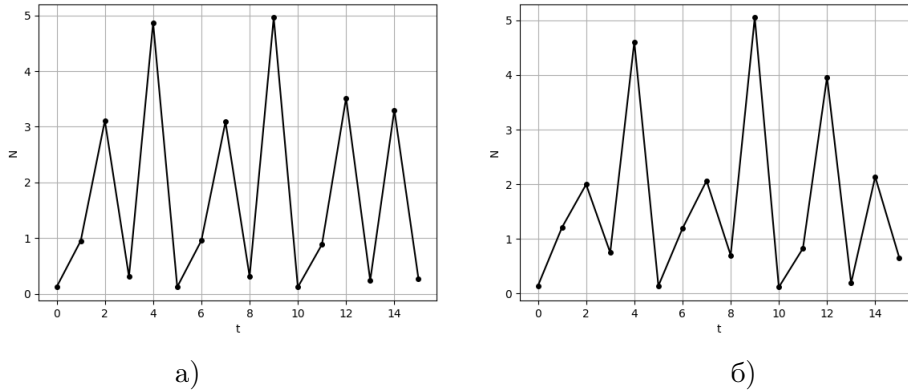


Рис. 15. Нестійкість розв'язків рівняння (2) з періодом  $T = 5$  при  $a = 3$ ,  $b = 0.05$ .  
а)  $N_0 = 0.1264$ , б)  $N_0 = 0.1427$

Якщо дискретне рівняння (2) має періодичні розв'язки з періодом  $T = 3$ , то, за теоремою про хаос [6], існують початкові значення  $N_0$ , для яких розв'язки мають хаотичну поведінку (рис. 16).

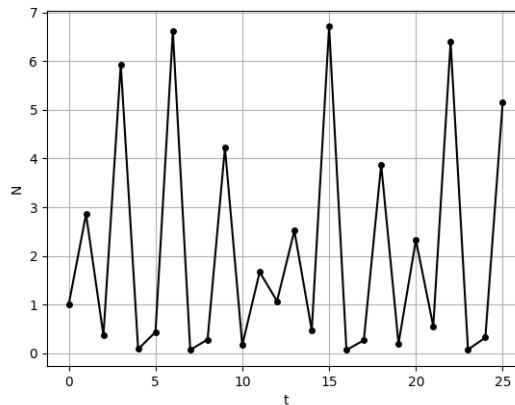


Рис. 16. Хаотична поведінка розв'язків при  $a = 3$ ,  $b = 0.05$ ,  $N_0 = 1$

### 3 АНАЛІЗ МОДЕЛІ З МОНОТОННОЮ СТАБІЛІЗАЦІЄЮ

Розглянемо модель (2) з кубічною функцією в знаменнику, тобто

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^3} \equiv \mathcal{F}(N_t), \quad a, b > 0, \quad t = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Покажемо, що в цій моделі вже відсутні періодичні режими, а має місце тільки монотонна стабілізація до деякого стаціонарного рівня.

Рівняння (9), крім нульового розв'язку  $N_0^* = 0$ , має і ненульові стаціонарні точки, які знаходяться з рівняння

$$N^3 = aN - b. \quad (10)$$

Очевидно, що це рівняння має завжди один дійсний від'ємний корінь.

Дискримінант цього рівняння  $\Delta = \frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}$ . При цьому, якщо  $\Delta = 0$ , тобто  $b = \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}$ , то (10) має три дійсні корені, два з яких додатні і рівні між собою. При  $\Delta > 0$ , тобто при  $b > \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}$  рівняння (10) не має дійсних додатних коренів, якщо  $\Delta < 0$ , або те саме, що  $b < \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}$ , то (10) має два дійсних різних додатних корені  $N_1^* < N_2^*$ .

Дослідження стійкості стаціонарних точок аналогічне дослідженню їх стійкості для рівняння (2).

Для тривіального стану  $\mathcal{F}'(0) = 0$ , тому для величини  $x_t = N_t - N_0^*$  з точністю до величин третього порядку малості маємо

$$x_{t+1} = 2\frac{a}{b}x_t^2,$$

що означає локальну стійкість тривіального розвитку для будь-яких  $a, b > 0$ .

Для  $N_{1,2}^*$  маємо  $\mathcal{F}'(N_{1,2}^*) = \frac{4b}{aN_{1,2}^*} - 2$ . Оскільки для  $N_2^* > N_1^*$  виконуються умови  $b < \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}$  і  $3N_2^{*2} > a$ , то  $\mathcal{F}'(N_2^*) = \frac{4b}{aN_2^*} - 2 < \frac{4\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}}{a\sqrt{\frac{a}{3}}} - 2 = \frac{2}{3} < 1$ , що дає нам стійкість стаціонарного стану  $N_2^*$ .

Розглянемо тепер приклади числових розрахунків розв'язків рівняння (9). При  $a = 3$ ,  $b = 2.5$  існує тільки стійкий тривіальний стан  $N_0^*$ . При  $a = 3$ ,  $b = 1.5$  рівняння (9) має два ненульових стаціонарних розв'язки  $N_1^* = 0.5579$  і  $N_2^* = 1.3844$ , причому  $N_2^*$  – стійкий, оскільки його мультиплікатор дорівнює  $0.084 < 1$ , а  $N_1^*$  – нестійкий (його мультиплікатор становить  $1.689 > 1$ ). При  $a = 3$ ,  $b = 2$  стаціонарний стан  $N^* = 1$  напівстійкий. Картина стійкості цих стаціонарних станів така ж сама як на рис. 2.

Перейдемо до знаходження періодичних розв'язків. Спочатку обчислимо цикли з періодом  $T = 2$ . З умови  $N_{t+2} = N_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , одержуємо рівняння

$$b(b + N_t^3)^3 + a^3 N_t^6 = a^3 N_t^3 (b + N_t^3),$$

або те саме, що  $N_t^3 = aN_t - b$ . А це рівняння (10), з якого знаходили стаціонарні розв'язки. Тобто рівняння (9) не має циклів з періодом  $T = 2$ , а отже, за теоремою Шарковського [5], не існує і періодичних розв'язків будь-яких інших періодів.

Отже, як висновок, зазначимо, що запропоноване узагальнення (2) моделі Скеллама з не-монотонною функцією народжуваності володіє стаціонарними і періодичними режимами будь-яких періодів. При зміні параметрів  $a$  та  $b$  у цій моделі спостерігаються різні типи поведінки чисельності  $N_t$ . Одні періодичні режими втрачають стійкість, натомість з'являються інші стійкі періодичні режими. Оскільки модель має періодичні розв'язки з періодом  $T = 3$ , то існують і хаотичні розв'язки. Тобто, відносно проста дискретна модель має досить складну поведінку розв'язків. Результати досліджень підтверджуються комп'ютерними експериментами.

А для моделі (9), коли змінили степінь величини  $N_t$  в знаменнику на значення 3, періодичні режими взагалі відсутні, а має місце тільки монотонна стабілізація розв'язків до деяких стаціонарних точок.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Skellam J.G. *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika, 1951. **38**. 196-218.
- [2] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model*. Population Ecology. Online Version, 2023. <https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169>.
- [3] Маценко В.Г. *Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю*. Буковинський матем. журнал. **12**(1). 2024. 74-83.
- [4] Маценко В.Г. *Аналіз моделей типу Скеллама з періодичними режимами*. Буковинський матем. журнал. **12**(2). 2024. 128-142.
- [5] Шарковський А. Н. *Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя*. Украинский математический журнал, 1964. **XVI** (1). С. 61-71.
- [6] Li T., Yorke I. *Period three implies chaos*. The American Mathematical Monthly, 1975. **82** (10). Pp. 985-992.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Skellam J.G. *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika, 1951. **38**. 196-218.
- [2] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model*. Population Ecology. Online Version, 2023. <https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169>.
- [3] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy*. Bukovinian Math. Journal. **12**(1). 2024. 74-83. (in Ukrainian)
- [4] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam-type models width with periodic regimes*. Bukovinian Math. Journal. **12**(2). 2024. 128-142. (in Ukrainian)
- [5] Sharkovskii A. N. *Coexistence of cycles of continuous transformation straight into itself*. Ukrainian Mathematical Journal, 1964. **XVI** (1). P. 61-71. (in Russian)
- [6] Li T., Yorke I. *Period three implies chaos*. The American Mathematical Monthly, 1975. **82** (10). Pp. 985-992.

*Надійшло 20.05.2025*

---

Matsenko V.G. *Generalization of Skellam-type model with non-monotonic reproduction function*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 52-65.

Difference equations are used in order to model the dynamics of population with non-overlapping generations. In the simplest case such equations have the form  $N_{t+1} = f(N_t)N_t$ ,

where  $N_t > 0$  is the population size at a moment of time  $t$ ,  $f(N_t) = \frac{N_{t+1}}{N_t}$  is a coefficient of natural reproduction.

In Skellam's model this coefficient has the form of a decreasing hyperbolic function:  $f(N_t) = \frac{a}{b + N_t}$ ,  $a, b > 0$ . Parameter  $a$  here plays the role of the largest value of the reproduction coefficient, and  $b$  describes the influence of self-regulating mechanisms on population dynamics.

The papers [3, 4] consider a generalization of the Skellam model. It is shown that in the case when  $f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^2}$  and  $f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^2}$  the models only monotonic stabilization of the number to some stationary level is observed. If  $f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}$ , then the model has periodic solutions of different periods.

This paper studies the behavior of solutions of the generalized Skellam model for a non-monotonic multiplication function of the form  $f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^4}$ . It is shown that the equation  $N_{t+1} = f(N_t)N_t$  has stationary and periodic solutions of any period. The stability of these solutions is investigated. In the exponent of the quantity  $N_t$  in the denominator or is reduced to three, than the Skellam model with the function  $f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^3}$  no longer has periodic solution, but has only monotonic stabilization to stationary regimes.

The paper presents the results of a number of computer experiments with such generalizations of the Skellam model.