

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2026.02.01>Лисенко І.М. , Правіцка Н.С. , Працьовитий М.В. , Ратушняк С.П. 

ГРУПИ НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ОДИНИЧНОГО ВІДРІЗКА І ВСІЄЇ ПРЯМОЇ

Робота присвячена g -зображенням дійсних чисел одиничного відрізка, топологічно еквівалентним класичному s -ковому зображенню, і неперервним перетворенням цього відрізка, пов'язаним з такими зображеннями чисел. Розглянуті перетворення отримуються шляхом склеювання операторів лівостороннього та правостороннього зсуву цифр g -зображення чисел. Для s -кового зображення такі перетворення є кусково-лінійними, для довільного g -зображення це, взагалі кажучи, не так.

Конструктивно доведено, що множина всіх неперервних перетворень одиничного відрізка, які зберігають частоти цифр g -зображення чисел, разом з операцією "композиція перетворень" утворює континуальну некомутативну групу. Континуальною підгрупою цієї групи є множина перетворень, які зберігають хвости g -зображення чисел.

Ключові слова і фрази: g -зображення чисел, оператор лівостороннього зсуву цифр, оператор правостороннього зсуву цифр, перетворення множини, група неперервних перетворень відрізка, перетворення, які зберігають хвости зображення чисел.

Dragomanov Ukrainian State University, 9 Pyrohova Street, Kyiv 01601, Ukraine,
Chernivtsi National University, 2 Kotsiubynskoho Street, Chernivtsi 58002, Ukraine,
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 3 Tereshchenkivska st., 01024 Kyiv, Ukraine
e-mail: i.m.lysenko@npu.edu.ua, n.pravitska@chnu.edu.ua, prats4444@gmail.com,
ratush404@gmail.com

ВСТУП

Нагадаємо, що *перетворенням множини E* називається взаємнооднозначне (тобто бієктивне, одночасно ін'єктивне і сюр'єктивне) відображення цієї множини на себе.

Далі зосередимо увагу на неперервних перетвореннях множин метричних просторів, тобто таких, для яких близькими є образи, коли близькими були їх прообрази. Перетворенням евклідової площини та тривимірного простору певна увага приділяється і в шкільному курсі математики, і значна в системі підготовки вчителя математики, тоді як про перетворення прямої говорять рідко. Неперервні перетворення прямої збігаються з множиною всіх неперервних строго монотонних функцій, областю визначення і множиною значень яких є множина всіх дійсних чисел. Всі функції виду $y = ax^{2k+1} + b$, де $0 \neq a \in R$, $b \in R$, $k \in N$, є неперервними перетвореннями числової прямої.

Очевидно, що неперервні перетворення числової прямої, які зберігають відстані (а такі називаються рухами, переміщеннями або ізометричними перетвореннями), вичерпуються

УДК 511.72, 517.52020 *Mathematics Subject Classification:* 37E05.

перетвореннями, заданими формулами: $x' = x + a$, $x' = -x + a$, тобто є лінійними функціями, з кутовим коефіцієнтом $k = \pm 1$. Таким чином, кожен рух прямої є паралельним перенесенням або центральною симетрією з центром $C(\frac{a}{2})$ відповідно.

Аналогом афінних перетворень числової прямої є перетворення, головним інваріантом яких є просте відношення трьох точок. Перетворення, які зберігають просте відношення трьох точок прямої, вичерпуються класом лінійних функцій: $y = kx + b$, де $k \neq 0$. В одновимірному просторі ці перетворення є перетвореннями подібності і одночасно афінними перетвореннями.

Очевидно, що неперервні перетворення відрізка $[0, 1]$ вичерпуються неперервними строго зростаючими функціями (такими, що $f(0) = 0$, $f(1) = 1$) та строго спадними функціями (такими, що $f(0) = 1$, $f(1) = 0$). При цьому за своїми диференціальними властивостями вони можуть принципово відрізнятися. Серед них абсолютно неперервні функції (вони є невластивими інтегралами своїх похідних) та сингулярні функції (неперервні функції, відмінні від констант, які мають похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), а також суміші цих двох типів функцій (лінійні комбінації абсолютно неперервних та сингулярних функцій) [9]. Серед них кусково-лінійні функції, що зберігають хвости двосимвольних зображень чисел; функції, які зберігають фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича борелівських підмножин одиничного відрізка; функції, що зберігають середнє значення цифр [7] тощо.

Дана робота присвячена підгрупам групи неперервних перетворень одиничного відрізка. Розглядаються перетворення, які зберігають частоти цифр та хвости s -символьного зображення чисел відрізка $[0; 1]$, що топологічно еквівалентні класичному s -ковому зображенню чисел: $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k}$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. Саме для класичного s -кового зображення чисел легко побудувати аналітичну складову теорії і ефективно використати конструктивні прийоми дослідження. Окремі результати легко поширити на випадок, коли зображення метрично близьке з s -ковим.

1 Класичне s -кове зображення чисел одиничного відрізка (дровової частини дійсного числа і його топологічні еквіваленти)

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ – s -символьний алфавіт (набір цифр), $L_s \equiv A_s \times A_s \times A_s \times \dots = \{(\alpha_n) : \alpha_n \in A_s\}$ – множина (простір) послідовностей елементів алфавіту.

Кодуванням (g -зображенням) чисел одиничного відрізка $[0; 1]$ засобами алфавіту A_s називається сюр'єктивне відображення g простору L_s у відрізок $[0; 1]$. Якщо $x = g(\alpha_n)$, то це записується $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g$ і називається g -зображенням числа x . При цьому α_n називається n -ою цифрою цього зображення. Період у зображенні числа символізують круглі дужки. Найпростішим і найпоширенішим кодуванням (зображенням) чисел засобами s -кового алфавіту є класичне s -кове зображення. Нагадаємо його зміст.

Відомо, що для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує така послідовність $(\alpha_n) \in L_s$, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s. \quad (1)$$

Подання числа $x \in [0; 1]$ рядом (1) називається s -ковим представленням (поданням), а його скорочений запис $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$ – s -ковим зображенням числа x . При цьому α_n називається n -ою цифрою цього зображення. Очевидно, що $0 = \Delta_{(0)}^s$, $1 = \Delta_{(s-1)}^s$. Ці числа мають єдине s -кове зображення. Існують числа, які мають два різні s -кові зображення: $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (0)}^s = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n - 1 [\alpha_n - 1] (s-1)}^s$. Вони називаються s -ково раціональними або s -ково бінарними. Кожне s -ково раціональне число є раціональним, але не кожне раціональне число є s -ково раціональним.

Наприклад, число $x = \Delta_{(10)}^s = \frac{s}{s^2-1}$ є раціональним, але не є s -ково-раціональним. Крім вказаних, решта чисел мають єдине s -кове зображення і називаються s -ково унарними. Кожна цифра s -ково унарного числа $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^s$ є функцією числа x .

Під геометрією зображення чисел традиційно розуміють теорію, яка розкриває геометричний зміст цифр зображення чисел, обґрунтовує метричні співвідношення, породженні зображенням, вивчає різні геометричні аспекти позиційних відношень між множинами чисел, визначених властивостями (умовами, обмеженнями) зображення чисел тощо. Частково геометрію s -вого зображення чисел розкривають властивості циліндричних та хвостових множин.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}$ всіх чисел $x \in [0; 1]$, які мають таке s -кове зображення $x = \Delta_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^s$, де $(\alpha_n) \in L_s$.

Циліндри мають властивості:

- 1) Циліндр $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}^s$ є відрізком $[a; b]$, де $a = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{s^i}$, $b = a + \frac{1}{s^m}$;
- 2) $\Delta_{c_1\ldots c_m}^s = \Delta_{c_1\ldots c_m 0}^s \cup \Delta_{c_1\ldots c_m 1}^s \cup \ldots \cup \Delta_{c_1\ldots c_m [s-1]}^s$;
- 3) $\max \Delta_{c_1\ldots c_m i}^s = \min \Delta_{c_1\ldots c_m [i+1]}^s$;
- 4) $\forall (c_m): \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_m}^s = \Delta_{c_1\ldots c_m\ldots}^s \in [0; 1]$.

Легко довести, що майже всі (у розумінні міри Лебега) числа одиничного відрізка у своєму s -ковому зображенні використовують всі цифри алфавіту нескінченну кількість разів. Це одна з нормальних властивостей чисел у термінах їх зображень, що власне є наслідком відомої теореми Бореля, яка стверджує, що множина всіх нормальних чисел одиничного відрізка є множиною повної міри Лебега.

2 ОПЕРАТОРИ ЛІВОСТОРОННЬОГО ТА ПРАВОСТОРОННЬОГО ЗСУВІВ

Оператором лівостороннього зсуву (цифр s -кового зображення дробової частини дійсного числа) називається відображення, означене рівністю:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^s) = \Delta_{\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^s. \quad (2)$$

Формула (2) дає різні значення для різних зображень s -ково бінарної точки 1-го рангу $\Delta_{i(0)}^s = \Delta_{[i-1](s-1)}^s$, $i = \overline{1, s-2}$, оскільки

$$\omega(\Delta_{i(0)}^s) = \Delta_{(0)}^s = 0 \neq 1 = \Delta_{(s-1)}^s = \omega(\Delta_{[i-1](s-1)}^s).$$

Тому за для коректності означення функції ω використовуватимемо лише те з зображень, що має період (0). Оскільки

$$x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^s = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{1}{s} \left(\frac{\alpha_2}{s} + \frac{\alpha_3}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s^{n-1}} + \ldots \right),$$

то $x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{1}{s}\omega(x)$.

Звідки $\omega(x) = sx - \alpha_1(x)$, а отже, оператор лівостороннього зсуву є кусково-лінійною функцією, яка є лінійною і зростаючою на кожному циліндрі Δ_i^s першого рангу.

N -кратним оператором лівостороннього зсуву називається відображення $\omega^n(x)$, означене рівністю

$$\omega^n(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}^s) = \omega^{n-1}(\omega(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}^s)) = \Delta_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots}^s. \quad (3)$$

Оператор правостороннього зсуву цифр з параметром i виражається

$$\delta_i(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^s) = \Delta_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^s = \frac{i}{s} + \frac{1}{s} \left(\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s^{n-1}} + \ldots \right) = \frac{i}{s} + \frac{1}{s}x,$$

а отже, є лінійною зростаючою функцією.

N -кратним оператором правостороннього зсуву з впорядкованим набором параметрів $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ називається відображення $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}(x)$, де $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in A_s^n$, означене рівністю

$$\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots}^s) = \delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}(\delta_{i_n}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots}^s)) = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n \alpha_1 \alpha_2 \dots}^s \quad (4)$$

Очевидними є рівності: $\omega(\delta_i(x)) = x$, $\delta_{\alpha_1(x)}(\omega(x)) = x$, де $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$.

Лема 1. Рівняння $\omega(x) = \delta_i(x)$ має s розв'язків: $x = \Delta_{(ji)}^s$, $j = \overline{0, s-1}$.

Proof. Очевидно, що серед s -ково бінарних точок розв'язків цього рівняння немає. Тому для числа $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$, що є розв'язком рівняння виконуються рівності $\alpha_2 = i$, $\alpha_3 = \alpha_1$, $\alpha_{2k} = i$, $\alpha_{2k+1} = \alpha_1$ для довільного натурального k , де α_1 – довільна цифра. Отже, у формулюванні леми вказано всі розв'язки рівняння. $\square$

Теорема 1. Рівняння $\omega^k(x) = \delta_{i_1 \dots i_m}(x)$ має s^k розв'язків: $x = \Delta_{(\alpha_1 \dots \alpha_k i_1 \dots i_m)}^s$, де $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – вільні змінні, тобто $\alpha_j \in A_s$, $j = \overline{1, k}$.

Proof. Очевидно, що серед s -ково бінарних точок розв'язків даного рівняння немає. Тому для числа $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$, що є розв'язком рівняння, виконуються рівності

$$\alpha_{k+j} = i_j, j = \overline{1, m}; \quad \alpha_{k+m+i} = \alpha_i, i = \overline{1, k}; \quad \alpha_{p(k+m)+l} = \alpha_l, l = \overline{1, k+m}, p \in N.$$

Отже, у формулюванні теореми вказано всі розв'язки рівняння. $\square$

3 ПЕРЕТВОРЕННЯ ЯК РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай $(q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$ – довільний фіксований набір додатних дійсних чисел, сума яких дорівнює 1; $\beta_0 = 0$, $\beta_{i+1} = \beta_i + q_i = q_0 + q_1 + \dots + q_i$, $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$.

Лема 2. Система функціональних рівнянь

$$\varphi\left(\frac{i+x}{s}\right) = \beta_i + q_i \varphi(x), \quad i = \overline{0, s-1},$$

у класі неперервних на відрізку $[0; 1]$ функцій має єдиний розв'язок – функцію, яка задається формулою

$$\varphi(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}$$

i є зростаючим перетворенням відрізка $[0; 1]$.

Proof. Кожне число $u \in [0; 1]$ має своє s -кове зображення: $u = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^s$. Для нього

$$\frac{i+u}{s} = \frac{i}{s} + \frac{1}{s} \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^s = \Delta_{ia_1 a_2 \dots a_n \dots}^s, \quad a_n \in A_s.$$

Тому, враховуючи виконання рівностей системи функціональних рівнянь, для довільної послідовності (α_n) , тобто довільного $x \in [0; 1]$, має місце рівність

$$\varphi(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \varphi(\Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^s).$$

Оскільки φ визначена у всіх точках $x \in [0; 1]$, то вона визначена і в усіх точках послідовності $x_n = \Delta_{\alpha_n \alpha_{n+1} \dots}^s$, $n \in N$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \varphi(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) &= \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \varphi(\Delta_{\alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} (\beta_{\alpha_2} + q_{\alpha_2} \varphi(\Delta_{\alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^s)) = \\ &= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \varphi(\Delta_{\alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^s) = \dots = \\ &= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \dots + \beta_{\alpha_k} q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_{k-1}} + q_{\alpha_k} \varphi(\Delta_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^s). \end{aligned}$$

Оскільки $\varphi(\Delta_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^s) = \Delta_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^{Q_s} \leq 1$, то

$$\left(\prod_{j=1}^k q_{\alpha_j} \right) \varphi(\Delta_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^s) \leq (q^*)^k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

де $q^* = \max\{q_0, q_1, \dots, q_{s-1}\}$, а тому розклад значення функції в ряд є збіжним. Отже,

$$\varphi(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}.$$

□

4 ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ, ТОПОЛОГІЧНО ЕКВІВАЛЕНТНЕ S-КОВОМУ

Неперервне s -символьне g -зображення чисел називаються *топологічно еквівалентним* класичному s -ковому зображенню, якщо проєктор $p(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^s) = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^g$ є неперервною строго зростаючою функцією.

Прикладом зображення, топологічно еквівалентного класичному s -ковому зображенню, є поліосновне Q_s -зображення [9]. Топологічно еквівалентними є нега-двійкове зображення [1] і ланцюгове A_2 -зображення чисел [5, 6, 10]. Нам невідомі аналітично задані зображення, еквівалентні двосимвольному G_2 -зображенню чисел [2].

Позначимо через W множину всіх g -зображень чисел одиничного відрізка, топологічно еквівалентних s -ковому.

Очевидно, що відношення "бути топологічно еквівалентним" є бінарним відношенням еквівалентності.

Зрозуміло, що кожне g -зображення чисел, топологічно еквівалентне s -ковому, має нульову надлишковість. Більше того, якщо x є s -ково раціональним числом, тобто

$$x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s(0) = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m [c_m - 1] (s-1)}^s,$$

і g -зображення, топологічно еквівалентне s -ковому, то число

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^g(0) = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1} [c_m - 1] (s-1)}^g$$

є g -бінарним.

Далі для g -зображення числа $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g$, топологічно еквівалентне s -ковому, будемо використовувати позначення $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\bar{s}}$.

Зауважимо, що всі $\bar{s}$ -зображення мають спільні топологічні властивості, включаючи властивості циліндрів, але різні метричні. У них спільні правила ідентифікації та ознаки порівняння чисел:

- 1) $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{\bar{s}} \leq \Delta_{\beta_1 \dots \beta_n \dots}^{\bar{s}}$, якщо існує таке m , що $\alpha_i = \beta_i$ при $i < m$ і $\alpha_m < \beta_m$;
- 2) $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{\bar{s}} = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_n \dots}^{\bar{s}}$, якщо $\alpha_i = \beta_i$ для будь-якого $i \in N$ або існує таке m , що $\alpha_i = \beta_i$ при $i < m$ та $\beta_m - \alpha_m = 1$ і $\alpha_n - \beta_n = s - 1$ для всіх $n > m$.

Разом з цим для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L_s$:

- 1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\bar{s}} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{\bar{s}} \in [0; 1];$
- 2) $|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\bar{s}}| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$

Оператори лівостороннього та правостороннього зсувів для $\bar{s}$ -зображення чисел означаються як і для s -кового зображення, але на відміну від операторів s -зображення вони не завжди є кусково-лінійними та лінійними відповідно. Це матиме місце лише для Q_s -зображення.

Зауважимо, що теорема 1 є істинною і для $\bar{s}$ -зображення. Спільними є і наступні два твердження.

Лема 3. Для довільного $\bar{s}$ -зображення рівняння $\omega^k(x) = x$ має s^k коренів: $x = \Delta_{(\alpha_1 \dots \alpha_k)}^{\bar{s}}$, де α_i – вільні змінні з алфавіту A_s .

Proof. Справді, якщо число $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{\bar{s}}$ є коренем рівняння $\omega^k(x) = x$, то $\alpha_j = \alpha_{k+j}$ $j = \overline{1, k}$, $\alpha_{2k+j} = \alpha_{k+j} = \alpha_j$ $j = \overline{1, k}$ $j = \overline{1, k}$ і т.д., тобто $\alpha_{nk+j} = \alpha_j \forall n \in N, j = \overline{1, k}$.

Те, що число $x = \Delta_{(\alpha_1 \dots \alpha_k)}^{\bar{s}}$ є коренем даного рівняння очевидно. $\square$

Лема 4. Для довільного $\bar{s}$ -зображення рівняння $\delta_{i_1 \dots i_k}(x) = x$ має єдиний корінь, це число $x = \Delta_{(i_1 \dots i_k)}^{\bar{s}}$.

Proof. Справді, якщо $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\bar{s}}$ – корінь даного рівняння, то $\alpha_1 = i_1, \dots, \alpha_k = i_k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_1 = i_1, \dots, \alpha_{k+k} = \alpha_k = i_k$ і т.д., тобто зображення числа x є періодичним, а саме: $x = \Delta_{(i_1 \dots i_k)}^{\bar{s}}$. Обернене твердження очевидне. $\square$

Наслідок 1. Система рівнянь $\delta_{i_1 \dots i_k}(x) = x = \omega^k(x)$ має єдиний корінь $x = \Delta_{(i_1 \dots i_k)}^{\bar{s}}$.

Означення 1. Якщо існує дві константи b_1 і b_2 такі, що $0 < b_1 < b_2 < 1$ і

$$b_1 \leq \frac{|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}}^{\bar{s}}|}{|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\bar{s}}|} \leq b_2$$

для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L_s$, то казатимемо, що $\bar{s}$ -зображення має B -властивість з параметрами b_1 і b_2 .

Лема 5. Якщо $\bar{s}$ -зображення має B -властивість з параметрами b_1 і b_2 , то довжина $\bar{s}$ -циліндра рангу n не перевищує b_2^n .

Proof. Справді, $|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\bar{s}}| \leq b_2 |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{\bar{s}}| \leq b_2^2 |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-2}}^{\bar{s}}| \leq \dots \leq b_2^n |[0; 1]| = b_2^n$. $\square$

Теорема 2. Міра Лебега множини

$$C[\bar{s}, V_n] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{\bar{s}}, \alpha_n \in V_n \subseteq A_s \forall n \in N\}$$

обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})},$$

де $F_0 \equiv [0; 1]$, F_k – це об'єднання $\bar{s}$ -циліндрів рангу k , серед внутрішніх точок яких є точки множини C .

Proof. Очевидно, що $C \subseteq F_k \subseteq F_{k-1}$ для довільного $k \in N$ і $C = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. Тому міра Лебега

$$\lambda(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(F_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})},$$

що й вимагалось довести. $\square$

Наслідок 2. Якщо $\bar{s}$ -зображення має B -властивість і нескінченну кількість разів виконується нерівність $V_n \neq A_s$, то міра Лебега множини $C[\bar{s}, V_n]$ рівна нулю.

Наслідок 3. Якщо $\bar{s}$ -зображення має B -властивість, то майже всі у розумінні міри Лебега числа відрізка $[0; 1]$ у своїх $\bar{s}$ -зображеннях використовують всі цифри алфавіту нескінченну кількість разів.

Наслідок 4. Якщо $\bar{s}$ -зображення має B -властивість, то міра множини

$$C[\bar{s}, V] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{\bar{s}}, \alpha_n \in V \subset A_s \neq V\}$$

рівна нулю.

5 КONTИНУАЛЬНА ГРУПА НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВІДРІЗКА, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ ЧАСТОТИ ЦИФР s -СИМВОЛЬНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Нехай $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g$, $N_i(x, n)$ – кількість цифр у даному g -зображенні числа x . Нагадаємо, що частотою цифри i у g -зображенні числа x називається границя $\nu_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, n)}{n}$, якщо вона існує.

Кажуть, що g -зображення чисел $x_1 = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^g$ і $x_2 = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n \dots}^g$ мають однакові хвости, якщо існують такі натуральні k і m , що $a_{k+j} = b_{m+j}$ для всіх $j \in N$. Символічно це записується $x_1 \sim x_2$.

Множина всіх чисел, що мають однакові хвости, називається *хвостовою*. Кожна хвостова множина є зліченною. Якщо G – множина всіх g -зображень чисел, то фактор-множина $G/\sim$, за відношенням $\sim$ є континуальною [1].

Кажуть, що функція $\gamma : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ зберігає хвости g -зображення чисел, якщо $\gamma(x) \sim x$ для довільного $x \in [0; 1]$. Якщо γ є бієктивним відображенням відрізка $[0; 1]$ на себе, то кажуть, що γ є перетворенням цього відрізка, яке зберігає хвости g -зображення чисел. Очевидно, що оператори лівостороннього та правостороннього зсувів зберігають хвости зображення чисел, але вони не є перетвореннями відрізка.

Теорема 3. Множина Z всіх неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр заданого s -символьного зображення ($\bar{s}$ -зображення), топологічно еквівалентного класичному s -ковому зображенню, разом з операцією композиція перетворень утворює континуальну некомутативну групу.

Proof. Добре відомо, що множина C всіх неперервних перетворень відрізка разом з операцією композиція перетворень є нескінченною і некомутативною групою, нейтральним елементом якої є тотожне перетворення e . Якщо f – неперервне перетворення одиничного відрізка, що зберігає хвости $\bar{s}$ -зображення чисел, то очевидно, що воно зберігає частоти цифр. Тому для доведення теореми досить довести, що множина Z_0 перетворень, що зберігають хвости зображення чисел, є континуальною некомутативною групою. Для цього скористаємось логічною схемою, яка використовувалась в роботі [4] для доведення аналогічного твердження.

Очевидно, що $e \in Z_0$ і з $f \in Z_0$ випливає $f^{-1} \in Z_0$. Доведемо континуальність Z_0 .

Неперервним перетворенням, що зберігає хвости $\bar{s}$ -зображення чисел, є функція

$$f_n(x) = \begin{cases} \omega^n(x), & \text{якщо } 0 \leq x \leq x_n \equiv \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{n}[s-1]}^{\bar{s}}, \\ \delta_{s-1}(x), & \text{якщо } x_n \leq x \leq 1; n \in N. \end{cases}$$

Оскільки n – довільне натуральне число, то Z_0 – нескінченна множина.

Розглянемо число $x_* \equiv \Delta_{00(s-1)}^{\bar{s}}$. Очевидно, що $x_* \in [x_2; x_1]$. Маємо

$$f_2(f_1(x_*)) = f_2(\omega(\Delta_{00(s-1)}^{\bar{s}})) = f_2(\Delta_{0(s-1)}^{\bar{s}}) = \delta_1(\Delta_{0(s-1)}^{\bar{s}}) = \Delta_{[s-1]0(s-1)}^{\bar{s}},$$

$$f_1(f_2(x_*)) = f_1(\delta_{s-1}(\Delta_{00(s-1)}^{\bar{s}})) = f_1(\Delta_{[s-1]00(s-1)}^{\bar{s}}) = \delta_{s-1}(\Delta_{[s-1]00(s-1)}^{\bar{s}}) = \Delta_{[s-1][s-1]00(s-1)}^{\bar{s}}.$$

Отже, $f_2(f_1(x_*)) \neq f_1(f_2(x_*))$, а тому $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$.

Побудуємо континуальний клас перетворень f , залежний від нескінченної кількості параметрів, які зберігають хвости $\bar{s}$ -зображення чисел.

Нехай $x_1 \equiv \Delta_{([s-1]0)}^{\bar{s}}$, $x_{2n-1} \equiv \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{2n}[s-1]0}^{\bar{s}}$, $x_{2n} \equiv \Delta_{\underbrace{0\dots 00}_{2n}[s-1]}^{\bar{s}}$. Очевидно, що для довільного $n \in N$

$$\omega^{2n}(x_{2n-1}) = x_{2n-1}, \quad \omega^{2n}(x_{2n}) = x_{2n} < x_{2n-1}.$$

Тоді розглянемо функції, означені на $[x_{2n}; x_{2n-1}]$, рівностями

$$\begin{aligned} r_{1n}(x) &= x, \\ r_{0n}(x) &= \begin{cases} \omega^{2n}(x), & \text{якщо } x_{2n} \leq x \leq \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{2n}[s-1]\underbrace{0\dots 0}_{2n}[s-1]0}^{\bar{s}} \equiv c_{2n}, \\ \delta_{\underbrace{0\dots 00}_{2n+2}[s-1][s-1]0}(x), & \text{якщо } c_{2n} \leq x \leq x_{2n-1}, \end{cases} \\ r_{2n}(x) &= \begin{cases} \delta_{\underbrace{0\dots 0}_{2n+2}[s-1]00[s-1]}(x), & \text{якщо } x_{2n} \leq x \leq \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{2n}[s-1]00\dots 0[s-1]}^{\bar{s}} \equiv c_{2n-1}, \\ \omega^{2n}(x), & \text{якщо } c_{2n-1} \leq x \leq x_{2n-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Означимо функцію $y = f_{j_n n}(x)$ наступним чином:

$$y = f_{j_n n}(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [x_{2n-1}; x_{2n-2}], \\ r_{j_n n}(x), & \text{якщо } x \in [x_{2n}; x_{2n-1}], \end{cases} \quad x_0 \equiv 1, \quad f_{j_n n}(0) \equiv 0, \quad (5)$$

де $(j_n) \in L_3$. Оскільки простір L_3 послідовностей нулів, одиниць та двійок континуальний, то множина функцій $f_{j_n n}(x)$ також є континуальною. $\square$

Зауважимо, що групи неперервних перетворень відрізка, які зберігають хвости зображень чисел у інших системах кодування чисел, вивчалися у роботах [3, 8, 11], масивність груп у них не була встановлена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Pratsiovytyi M. V. Two-character encoding systems for real numbers and their applications. — Kyiv: Scientific opinion, 2022. — 316 p.
- [2] Lysenko I.M., Maslova Yu.P., Pratsiovytyi M.V. *Two-symbol system of encoding with two bases having different signs and special functions related with it*, Proceeding of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2019, 16(2), 50-62. (in Ukrainian)

- [3] Pratsiovytyi M. V., Lysenko I. M., and Maslova Yu. P. Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2 -representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 29(2020). Number 1. pp. 99-108.
- [4] Pratsiovytyi M., Ratushniak S., Lysenko I. Uncountable group of continuous transformations of unit segment preserving tails of Q_2 -representation of numbers, Proceedings of the International Geometry Center Vol. 17, no. 2 (2024) pp.133–142
- [5] Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Prats'ovytyi M. V. A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [6] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. Continued A_2 -fractions and singular functions // Mat. Stud., 58, 2022. — C.3–12.
- [7] Pratsiovytyi M.V., Klymchuk S.O., Makarchuk O.P. Conversions and functions that store the average of the digits of a number's ternary representation // Scientific journal of the National Polytechnic University named after M.P. Dragomanov. Series 1. Physical and mathematical sciences. — 2013. — № 15. — P. 87-99.
- [8] Pratsiovytyi M. Isaieva T., Transformations of $(0, 1]$ preserving tails Δ^μ -representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 22 (2016). Number 1, pp. 102–115.
- [9] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach in the study of singular distributions. — Kyiv: NPU named after M.P. Dragomanov, 1998. — 296 p.
- [10] Ratushniak S.P. A continuous, nowhere-monotonic function defined in terms of a chained A_2 -representation of numbers // Bukovinian Mathematical Journal, V.11. №1, 2023. — P.126–133.
- [11] Osaulenko R.Yu. A group of continuous transformations of the interval $[0; 1]$ that preserve the frequencies of the digits of the Q_s -image of a number// Collection of works of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2016. V. 16, № 3, P.191-204.

Надійшло 11.07.2026

Прийнято 30.07.2026

Опубліковано 01.08.2026

Lysenko I.M., Pravitska N.S., Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. *Groups of continuous transformations of the unit interval and the real line*, Bukovinian Math. Journal **14** (2) (2026), 7–15.

This paper is devoted to the study of g -representations of real numbers in the unit interval that are topologically equivalent to the classical s -adic representation, and continuous transformations of the unit interval associated with such number representations. The transformations under consideration are obtained by gluing together the left and right shift operators of the g -representation. While these transformations are piecewise linear in the case of the s -adic representation, this property does not hold in general for arbitrary g -representations.

It is constructively proved that the set of all continuous transformations of the unit interval preserving the digit frequencies of the g -representation, equipped with the operation of composition, forms a noncommutative group of cardinality continuum. A continuum subgroup of this group is formed by the transformations preserving the tails of the g -representations of numbers.