

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.03>

МАЦЕНКО В.Г.

Аналіз моделі Скеллама з дробовим показником у функції розмноження

Запропоновано узагальнення дискретної моделі Скеллама на випадок, коли функція розмноження містить дробові показники для чисельності популяції N_t . Досліджується поведінка розв'язків моделі при зростанні показника від значення три до значення чотири. Показано, що має місце біфуркація циклів. Проведено комп'ютерні розрахунки розв'язків моделі.

Ключові слова і фрази: модель Скеллама, стаціонарні точки, періодичні режими, стійкість розв'язків, комп'ютерні експерименти.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: v.matsenko@chnu.edu.ua

Вступ

Моделі Скеллама широко використовуються для вивчення динаміки чисельності популяцій із неперекривними поколіннями [1, 2]. До таких популяцій слід віднести дрібних гризунів, багатьох комах з однорічною генерацією. У них ріст чисельності відбувається в окремі фіксовані моменти часу.

Математичні моделі таких популяцій – це дискретні рівняння, які в простішому випадку мають вигляд

$$N_{t+1} = f(N_t) N_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

де N_t – чисельність популяції в момент часу t , а функція $f(N_t)$ описує процес природного відтворення в популяції (коефіцієнт розмноження), тобто це середня кількість потомків, що припадає на одну особину, яка існувала в момент часу t .

У припущенні, що з ростом чисельності N_t вплив саморегулюючих факторів тільки посилюється, коефіцієнт розмноження $f(N_t)$ описується монотонно спадними функціями.

У класичній моделі Скеллама $f(N_t)$ – це спадна гіперболічна функція [1]

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t}.$$

Тут параметр a визначає найбільше значення розмноження, а параметр b описує вплив саморегулюючих факторів на динаміку дискретної популяції.

УДК 519.87:574.3

2010 *Mathematics Subject Classification*: 34D20, 34K06, 34K20.

Сама модель Скеллама є дискретним рівнянням вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

У праці [3] вивчаються деякі узагальнення (1), а саме

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^2} \quad \text{і} \quad N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^2}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Показано, що для цих моделей має місце лише монотонна стабілізація чисельності до деякого стаціонарного рівня. Але в природі часто спостерігаються і періодичні поведінки чисельності N_t . Як показано в [4], періодичні режими існують для моделі з монотонною функцією розмноження $f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}$. З натурних спостережень відомо, що функція природного відтворення $f(N_t)$ не завжди монотонна. Тому в [5] вивчається узагальнення моделі Скеллама з немонотонною функцією $f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^4}$. При цьому модель Скеллама $N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^4}$ має як стаціонарні, так і періодичні розв'язки будь-якого періоду.

Якщо в знаменнику понизити степінь величини N_t до трьох, то, як показано в [5], в цьому випадку модель $N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^3}$ володіє лише стаціонарними режимами і чисельність N_t з часом стабілізується до цих стаціонарних рівнів. Періодичні режими тепер повністю відсутні, хоча раніше існували цикли будь-яких періодів.

Цілком логічно постає питання про дослідження періодичних режимів та їх властивостей при зміні показника від 3 до 4, тобто потрібно вивчити поведінку розв'язків для моделі

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^{3+\alpha}}, \quad a, b > 0, \quad \alpha \in [0, 1], \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

При $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ дослідження моделі (2) повністю проведено в [5].

Перейдемо до вивчення поведінки розв'язків моделі (2) при $\alpha \in (0, 1)$.

1 ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ І ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ МОДЕЛІ (2)

Модель (2) – це нелінійне дискретне рівняння, загальні розв'язки якого в аналітичній формі не можна знайти, тому знайдемо простіші розв'язки і дослідимо їх на стійкість.

Стаціонарні розв'язки рівняння (2) знаходимо зі співвідношення

$$N_t^{3+\alpha} = aN_t - b. \quad (3)$$

Проведемо графічний аналіз існування додатних коренів цього рівняння.

Спочатку знайдемо точки N^* , в яких права та ліва частина рівняння (3) мають однаковий кутовий коефіцієнт. Це точка $N^* = \left(\frac{a}{3 + \alpha}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}} > 0$. Тепер, якщо в цій точці значення правої

та лівої частин рівняння (3) збігаються, тобто $b = \frac{a(2 + \alpha)}{3 + \alpha} \left(\frac{a}{3 + \alpha}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}} \equiv q$, то рівняння (3) має єдиний розв'язок N^* . А якщо $b < q$, то (3) має два дійсні різні додатні корені N_1^* і N_2^* . Якщо $b > q$, то (3) не має дійсних додатних коренів.

Зокрема, при $a = 3$ $\alpha = 0.1$ знаходимо $q = 2.0008$. Тому, якщо $b = 2.0008$, то (3) має єдиний додатний корінь $N^* = 0.9845$ (рис. 1а). При $b = 0.1 < q$ існують два додатних корені: $N_1^* = 0.03334$, $N_2^* = 1.6712$ (рис. 1б) і при $b = 2.5 > q$ таких коренів немає (рис. 1в).

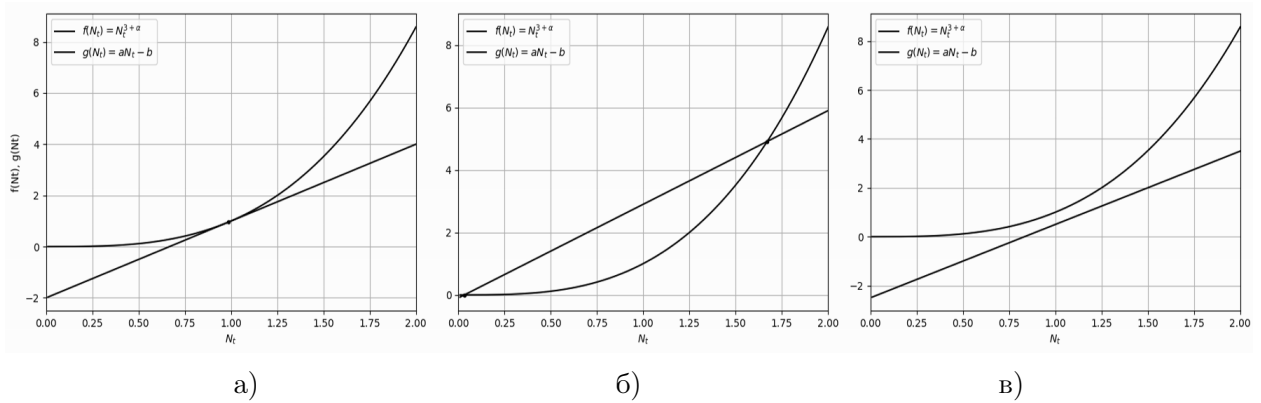


Рис.1. Графічний аналіз коренів рівняння (3): а) $a = 3$, $b = 2.0008$, $\alpha = 0.1$, $N_1^* = 0.9845$; б) $a = 3$, $b = 0.1$, $\alpha = 0.1$. $N_1^* = 0.03334$, $N_2^* = 1.6712$; в) $a = 3$, $b = 2.5$, $\alpha = 0.1$. Коренів немає

Для дослідження стійкості стаціонарних режимів знаходимо похідну правої частини рівняння (2) в стаціонарних точках

$$\lambda = F'(N)|_{N^*} = \frac{aN^*(2b - (1 + \alpha)N^{*3+\alpha})}{(b + N^{*3+\alpha})^2}.$$

Її модуль порівнюємо з одиницею. Якщо $|\lambda| < 1$, то N^* стійкий, якщо $|\lambda| > 1$, то N^* нестійкий.

Періодичні розв'язки з періодом $T = 2$ знаходимо з умови $N_{t+2} = N_t$, $N_{t+1} \neq N_t$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Для їх знаходження маємо рівняння

$$N_t = F(F(N_t)), \quad (4)$$

$$\text{де } F(N_t) = \frac{aN_t^2}{b + N_t^{3+\alpha}}.$$

Відповідно для знаходження періодичних розв'язків із періодом $T = 4$ та $T = 8$ маємо рівняння

$$N_t = F(F(F(F(N_t))))), \quad (5)$$

$$N_t = F(F(F(F(F(F(F(F(N_t))))))))). \quad (6)$$

Такі рівняння розв'язуються, в основному, лише числовими методами. Для дослідження стійкості періодичних розв'язків знаходимо їх мультиплікатори і порівнюємо з одиничним значенням.

2 КОМП'ЮТЕРНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ

Наведемо приклади розв'язків моделі (2) при різних значеннях показника α , оскільки при зростанні α від 0 до 1 спостерігаються різні типи поведінки чисельності N_t .

Комп'ютерний аналіз розв'язків рівняння (2) в залежності від α проведемо, зокрема, при $a = 3$, $b = 0.1$. Результати обчислень показують, що у випадку, коли $a = 3$, $b = 0.1$ рівняння (2) має два стаціонарних режими для $\alpha \in [0, 1]$, але лише при $\alpha \in [0, 0.06]$ існує стійкий стаціонарний розв'язок. Зокрема, при $\alpha = 0.06$ маємо $N_1^* = 0.0333$, $N_2^* = 1.6881$, причому N_1^* – нестійкий, N_2^* – стійкий (рис. 2), оскільки їх мультиплікатори $\lambda_1 = 1.9976 > 1$, а $\lambda_2 = 0.996 < 1$ відповідно.

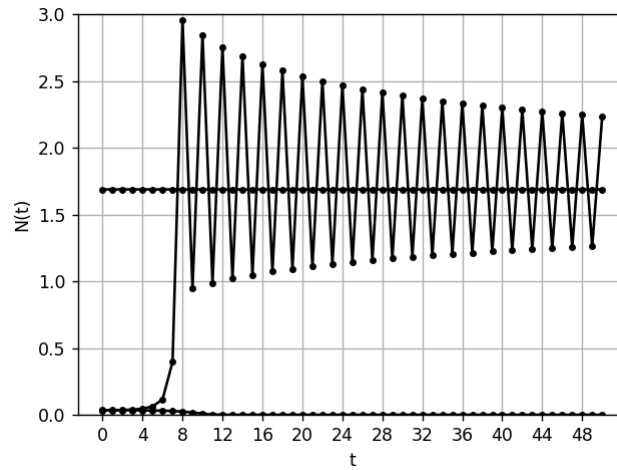


Рис. 2. Стаціонарні режими та їх стійкість при $a = 3$, $b = 0.1$, $\alpha = 0.06$. $N_1^* = 0.0333$,
 $N_2^* = 1.6881$

При $\alpha \geq 0.07$ стаціонарний розв'язок N_2^* перестає бути стійким, натомість з'являються стійкі цикли з періодом $T = 2$. При $a = 3$, $b = 0.1$, $\alpha = 0.1$ рівняння (2) має два нестійких стаціонарних розв'язки $N_1^* = 0.03334$, $N_2^* = 1.6712$ та періодичний розв'язок з періодом $T = 2$, який задається значеннями $N_3^* = 0.9353$, $N_4^* = 2.8757$. Цей періодичний розв'язок стійкий, оскільки його мультиплікатор $\lambda = 0.82 < 1$ (рис. 3). У комп'ютерних експериментах при $a = 3$, $b = 0.1$ стійкість періодичних розв'язків встановлена при $\alpha \in [0.07, 0.45]$.

Починаючи з $\alpha = 0.46$, періодичні розв'язки з періодом $T = 2$ хоча існують, але перестають бути стійкими, зате з'являються періодичні розв'язки з періодом $T = 4$.

Зокрема, при $a = 3$, $b = 0.1$, $\alpha = 0.5$ цикл із періодом $T = 2$ ($N_3^* = 0.4302$, $N_4^* = 3.6474$) – уже нестійкий. Його мультиплікатор дорівнює $1.196 > 1$ (рис. 4).

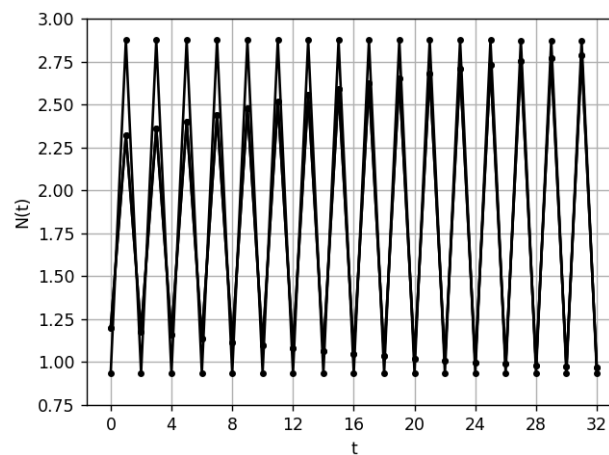


Рис. 3. Стійкий цикл із періодом $T = 2$ при $a = 3$, $b = 0.1$, $\alpha = 0.1$. $N_3^* = 0.9353$, $N_4^* = 2.8757$

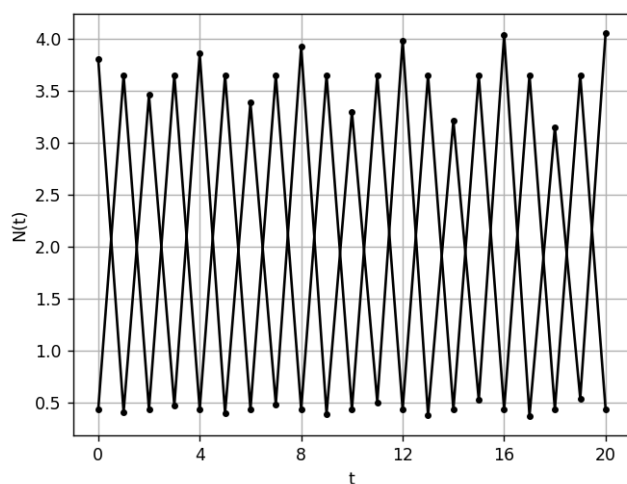


Рис. 4. Нестійкий цикл із періодом $T = 2$ при $a = 3$, $b = 0.1$, $\alpha = 0.5$. $N_3^* = 0.4302$, $N_4^* = 3.6474$

Водночас, як випливає з рівняння (5), існує періодичний розв'язок із періодом $T = 4$, що визначається числами $N_5^* = 0.3663$, $N_6^* = 0.5481$, $N_7^* = 3.1019$, $N_8^* = 4.0614$. Він стійкий (рис. 5), оскільки його мультиплікатор $\lambda = 0.267 < 1$.

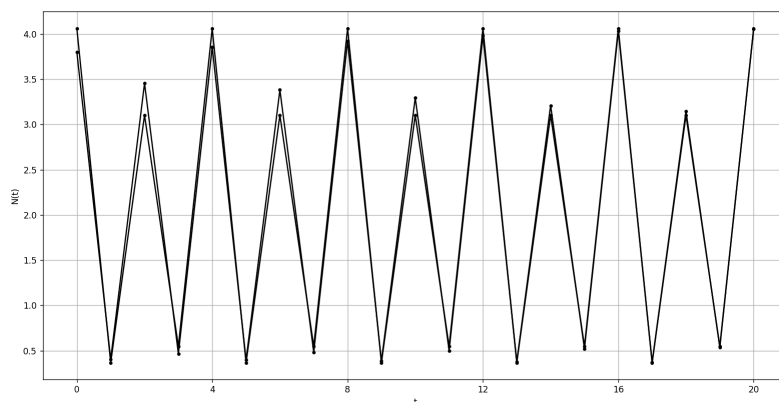


Рис. 5. Стійкий цикл із періодом $T = 4$ при $a = 3$, $b = 0.1$, $\alpha = 0.5$. $N_5^* = 4.0614$, $N_6^* = 0.3663$, $N_7^* = 3.1019$, $N_8^* = 0.5481$

В обчислювальних експериментах у випадку, коли $a = 3$, $b = 0.1$, стійкість розв'язку з періодом $T = 4$ спостерігалася при $\alpha \in [0.46, 0.56]$. Починаючи з $\alpha = 0.57$ цикли з періодом $T = 4$ перестають бути стійкими, натомість з'являються цикли з періодом $T = 8$. Вони стійкі при $\alpha \in [0.57, 0.59]$. Зокрема, при $\alpha = 0.57$ періодичний розв'язок з періодом $T = 8$, який складають числа $N_9^* = 0.3209$, $N_{10}^* = 0.3379$, $N_{11}^* = 0.5824$, $N_{12}^* = 0.6536$, $N_{13}^* = 2.6343$, $N_{14}^* = 2.8363$, $N_{15}^* = 4.0161$, $N_{16}^* = 4.1506$ (рис. 6), стійкий (рис. 7) (його мультиплікатор $\lambda = 0.62 < 1$).

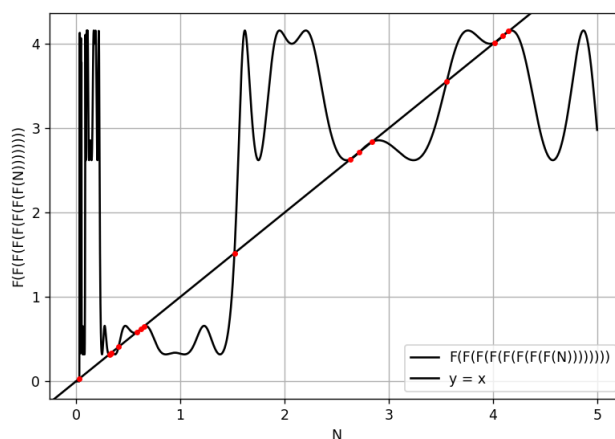


Рис. 6. Графічне дослідження коренів рівняння (6) при $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.57$. Існує 16 коренів

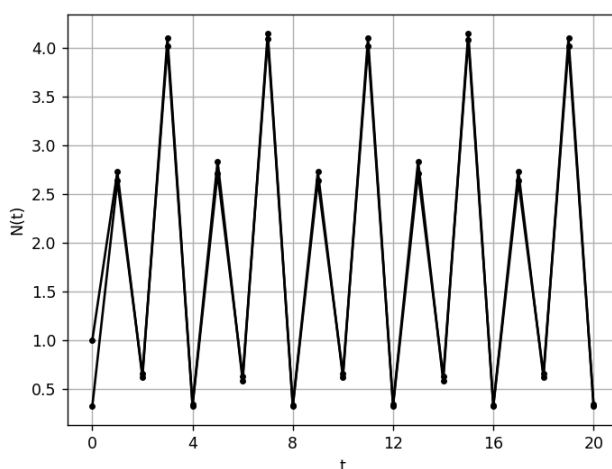


Рис. 7. Стійкість періодичного розв'язку з періодом $T = 8$ при $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.57$.
 $N_9^* = 0.3209, N_{10}^* = 2.6343, N_{11}^* = 0.6536, N_{12}^* = 4.0161, N_{13}^* = 0.3379, N_{14}^* = 2.8363,$
 $N_{15}^* = 0.58324, N_{16}^* = 4.1506$

Далі при зростанні α ($\alpha \geq 0.6$) цикли з періодом $T = 8$ перестають бути стійкими, і виникають цикли нових періодів.

При $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.57$ рівняння (2) має, крім стаціонарних розв'язків, ще й два розв'язки з періодом $T = 3$ (рис. 8). Вони нестійкі (їх мультиплікатори більші за одиницю).

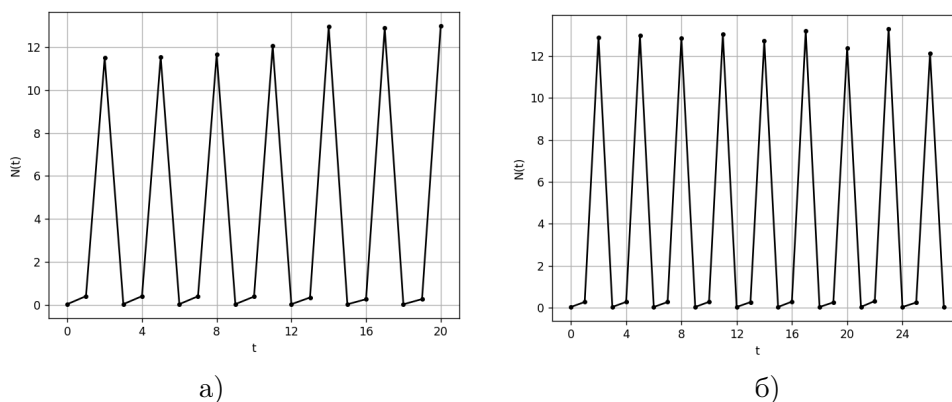


Рис. 8. Періодичні розв'язки з періодом $T = 3$ при $a = 3, b = 0.01, \alpha = 0.8$. а) $N_3^* = 0.0369, N_4^* = 0.4112, N_5^* = 11.4904$; б) $N_3^* = 0.0299, N_4^* = 0.2682, N_5^* = 12.9232$

А це означає, що рівняння (2) допускає періодичні розв'язки будь-яких періодів [6], а також розв'язки з хаотичною поведінкою.

Отже, узагальнення (2) моделі Скеллама з немонотонною функцією народжуваності і дробовим показником для величини N_t володіє стаціонарними і періодичними режимами. При зростанні показника α спостерігається біфуркація подвоєння циклу. Для всіх значень $\alpha \in (0, 1]$ існують стаціонарні режими, але вони можуть бути стійкими лише при початкових значеннях показника α . Далі при зростанні α з'являються стійкі періодичні розв'язки з періодом $T = 2$, які згодом втрачають стійкість, натомість виникають стійкі цикли з періодом $T = 4$ і т.д. Такі рівняння допускають і періодичні розв'язки з періодом $T = 3$, і як наслідок будь-яких періодів.

Проте існують такі значення параметрів a , b , при яких рівняння (2) не буде мати періодичних розв'язків для всіх $\alpha \in [0, 1]$, наприклад при $a = 2$, $b = 1$. Це має місце тоді, коли рівняння (2) при $\alpha = 1$ не має періодичних розв'язків.

У даній роботі проілюстровано, що відносно прості дискретні моделі можуть мати досить складну поведінку чисельності N_t .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Skellam J.G. *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika, 1951. **38**. 196-218.
- [2] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model*. Population Ecology. Online Version, 2023. <https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169>.
- [3] Маценко В.Г. *Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю*. Буковинський матем. журнал. **12**(1). 2024. 74-83.
- [4] Маценко В.Г. *Аналіз моделей типу Скеллама з періодичними режимами*. Буковинський матем. журнал. **12**(2). 2024. 128-142.
- [5] Маценко В.Г. *Аналіз моделей типу Скеллама з немонотонною функцією розмноження*. Буковинський матем. журнал. **13**(1). 2025. 52-65.
- [6] Шарковський А. Н. *Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя*. Украинский математический журнал, 1964. **XVI** (1). С. 61-71.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Skellam J.G. *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika, 1951. **38**. 196-218.
- [2] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model*. Population Ecology. Online Version, 2023. <https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169>.
- [3] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy*. Bukovinian Math. Journal. **12**(1). 2024. 74-83. (in Ukrainian)
- [4] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam-type models width with periodic regimes*. Bukovinian Math. Journal. **12**(2). 2024. 128-142. (in Ukrainian)
- [5] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam-type models with non-monotonic reproduction function*. Bukovinian Math. Journal. **13**(1). 2025. 52-65. (in Ukrainian)
- [6] Sharkovskii A. N. *Coexistence of cycles of continuous transformation straight into itself*. Ukrainian Mathematical Journal, 1964. **XVI** (1). P. 61-71. (in Russian)

Matsenko V.G. *Analysis of the generalization of the Skellam model with a fractional exponent for the multiplication function*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 24–31.

Difference equations are widely used as models of population dynamics with non-overlapping generations. In the simplest case, they have the form $N_{t+1} = f(N_t)N_t$, where N_t is the population size at a given time t , $f(N_t)$ is the natural reproduction rate. This function, in particular in the Skellam model, is monotonically decreasing. But as ecological observations show, $f(N_t)$ is not always monotonic; for small values of N_t , the function $f(N_t)$ is increasing, and for large values, it is decreasing.

Therefore, in paper [5], for $f(N_t)$, a generalization of the Skellam model for a nonmonotonic multiplication function of the form $f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^4}$ is considered. It is shown that such a model has stationary and periodic modes of any period.

If we lower the exponent of the value of n in the denominator to 3, then the model with $f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^3}$ allows only stationary solutions, and periodic modes no longer exist.

This paper considers a generalization of these models with an exponent for N_t ranging from 3 to 4, i.e. a model of the form $N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^{3+\alpha}}$, $a, b > 0$, $\alpha \in (0, 1]$. It is shown how, as the parameter a increases from 0 to 1, the behavior of the solutions of this model changes, namely, a bifurcation of the doubling of the cycle lengths occurs. In computational experiments, such solutions were found and their stability was studied. The existence of periodic solutions with period 3 has also been established, which means that this model has periodic solutions of any period and solutions with chaotic behavior.