

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.14>

Кривошия Р.В., Макаrchук О.П.

**ПРО ДЕЯКІ МЕТРИЧНІ ТА ФРАКТАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ
 Q_s -ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКА $[0; 1]$**

Поняття нормального за основою s (слабо нормального) та нормального (абсолютно нормального, тобто нормального за довільною натуральною основою) числа, ввів Е. Борель (1919 р). Ці поняття ґрунтуються на понятті частоти цифри у s -ковому зображенні числа. Довівши, що майже всі (у розумінні міри Лебега) числа відрізка $[0; 1]$ є нормальними, Борель не побудував приклад жодного нормального числа. Пізніше це зробили А. Лебег, В. Серпінський та ін. Ці дослідження започаткували новий напрям у метричній теорії дійсних чисел, який сьогодні називається теорією нормальних властивостей чисел у різних системах їх кодування (зображення). Загалом, проблематика нормальних чисел у s -ковій системі числення розглядалася в роботах Е. Бореля, Г. Вейля, А. Лебега, В. Серпінського, Д. Чемперноуна, С. Піллаї, Д. Волла, П. Ердеша, А. Копеланда, Г. Давенпорта та інших.

Q_s -представлення чисел та Q_s -зображення чисел відрізка $[0; 1]$ як узагальнення класичного s -кового представлення введене Працьовитим М.В. (1986 рік). Ним же були вивчені тополого-метричні і фрактальні властивості Q_s -зображення чисел, отримані узагальнення теорем Бореля, Безиковича-Еглстона, Біллінгслі тощо. Q_s -зображення знайшли свої різнопланові застосування у метричній та ймовірнісній теоріях чисел, фрактальному аналізі, теорії сингулярних розподілів випадкових величин та теорії функцій зі складною локальною структурою та фрактальними властивостями. Воно використовувалось у роботах багатьох авторів, зокрема, для узагальнень конструкцій сингулярних, ніде не монотонних та недиференційовних неперервних функцій.

Дана робота є продовженням попередніх досліджень метричних властивостей Q_s -зображення чисел, нормальних властивостей чисел за їх Q_s -зображенням. Вона присвячена застосуванню Q_s -зображення чисел для узагальнення теореми К. Нагасаки про суперфрактальність множини слабонормальних чисел, які не є нормальними за Борелем.

Ключові слова і фрази: Q_s -зображення, метричні властивості, суперфрактал, випадкова величина, центральна гранична теорема, закон повторного логарифма, динамічна система, ентропія Колмогорова-Синая, показник Ляпунова.

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 3 Tereshchenkivska st., 01024 Kyiv, Ukraine
e-mail: rostyslavkryvoshyia@gmail.com, makarchuk@imath.kiev.ua

ВСТУП

Нехай $2 \leq s \in \mathbb{N}$, $(q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$ — деякий стохастичний вектор з строго додатними координатами. Добре відомо [1], що для довільного дійсного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ така, що виконується рівність:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} (\beta_{\alpha_n} q_{\alpha_{n-1}} q_{\alpha_{n-2}} \dots q_{\alpha_1}), \quad (1)$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0, \dots, \beta_{i+1} = q_0 + q_1 + \dots + q_i, i \in \{1, \dots, s-1\}$.

Представлення числа x у формі (1) називається Q_s -представленням. Число x у даному випадку має Q_s -зображення:

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}.$$

Існує зліченна множина чисел, які мають два зображення наступного вигляду:

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (s-1)}^{Q_s} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_n+1)(0)}^{Q_s}.$$

Відповідні числа називаються Q_s -бінарними. Всі числа, що не є Q_s -бінарними, мають єдине Q_s -зображення та називаються Q_s -унарними. Якщо $q_j = \frac{1}{s}, \forall j \in A_s$, то Q_s -представлення є s -ковим представленням чисел відрізка $[0; 1]$.

Розглянемо оператор лівостороннього зсуву цифр Q_s -зображення чисел:

$$T(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}$$

з домовленістю використовувати для Q_s -бінарних чисел їх зображення з періодом (0).

Число $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}$ називається Q_s -слабонормальним, якщо для кожної цифри $\gamma \in A_s$:

$$\nu(x; \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x; \gamma)}{n} = q_\gamma,$$

де $N_n(x; \gamma)$ — кількість цифр γ серед $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Таким чином, число $x \in Q_s$ -слабонормальним, якщо асимптотична частота $\nu(x; \gamma)$ кожної цифри $\gamma \in A_s$ дорівнює q_γ .

Число x називається Q_s -нормальним, якщо для довільного набору символів $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ з алфавіту A_s :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x; (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k))}{n} = \prod_{j=1}^k q_{\gamma_j},$$

де $N_n(x; (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k))$ — кількість наборів серед $(\gamma_{1+r}, \gamma_{2+r}, \dots, \gamma_{k+r})$ (при $r \in A_{n-k+1}$), рівних $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$.

Послідовність (x_n) називається рівномірно розподіленою, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x_k; [a; b])}{n} = b - a, \quad \forall a, b \in [0; 1], a < b,$$

де $\{t\}$ — дробова частина числа t , а

$$N_n(x_k; [a; b]) = \#\{1 \leq k \leq n : \{x_k\} \in [a; b]\}.$$

Поняття Q_s -слабонормального та Q_s -нормального числа є природнім узагальненням відповідних понять для класичної s -кової системи представлення [3, 2]. У роботі [3] було показано,

що майже всі (в розумінні міри Лебега) числа $x \in [0; 1]$ є Q_s -нормальними, що є поглибленням результату Е. Бореля [6] для s -кового представлення. В [12] доведено, що число x є Q_s -нормальним тоді і тільки тоді, коли послідовність $(T^n(x))$ є рівномірно розподіленою. Відповідний результат є узагальненням результату Д. Волла [14] для s -кової системи представлення.

Задача побудови s -ково нормального числа є непростю, їй присвячено багато робіт [7, 8, 9, 10, 11].

В роботі [4] досліджувалась множина чисел, які не мають частоти жодної цифри свого Q_s -зображення. Відповідні числа називаються аномальними. Відомо, що множина аномальних чисел є суперфракталом, тобто множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої рівна 1.

К. Нагасака [13] показав, що множина s -ково слабонормальних чисел, які не є s -ково нормальними є суперфракталом, тобто є множиною нульової міри Лебега, але повної розмірності Гаусдорфа-Безиковича.

Дана робота присвячена застосуванню Q_s -зображення чисел для узагальнення теореми К. Нагасаки про суперфрактальність множини слабонормальних чисел, які не є нормальними за Борелем.

1 МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ДЛЯ Q_s -ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКА $[0; 1]$

Q_s -циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s}$ всіх чисел з відрізка $[0; 1]$, які мають перші m цифр у своєму Q_s -представленні рівними відповідно $c_1, c_2, \dots, c_m$. Добре відомо [1], що кожен Q_s -циліндр рангу m є відрізком, причому

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \left[\Delta_{c_1 c_2 c_3 \dots c_m(0)}^{Q_s}; \Delta_{c_1 c_2 c_3 \dots c_m(s-1)}^{Q_s} \right].$$

В подальшому $\lambda(\cdot)$ — це міра Лебега, $\alpha_0(V)$ — розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини V .

На ймовірнісному просторі $([0; 1], \mathcal{B}[0; 1], \lambda(\cdot))$ розглянемо послідовність випадкових величин (ξ_n) , визначених умовою

$$\xi_n(\omega) = j \in A_s,$$

якщо для деякої послідовності $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots$ символів з A_s виконується рівність

$$\omega = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} j \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots}^{Q_s},$$

більше того, не існує натурального K такого, що $\alpha_r = s - 1$ для кожного $r > K$ або $\alpha_r = 0$ для кожного $r > K$. Якщо для послідовності $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots$ символів з A_s існує натуральне K таке, що $\alpha_r = s - 1$ або $\alpha_r = 0$ для кожного $r > K$, то за означенням покладемо для кожного натурального k :

$$P\{\xi_k = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots}^{Q_s}\} = 0.$$

Таким чином, випадкова величина ξ_n набуває значення $j \in A_s$ (тобто $\xi_n(\omega) = j$) лише для тих ω , які не є Q_s -бінарними та у своєму Q_s -зображенні на місці n мають цифру j . Для довільного Q_s -бінарного ω та натурального n маємо $\xi_n(\omega) = 0$.

Лема 1. *Послідовність (ξ_n) є послідовністю незалежних, дискретних, однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \dots, s - 1$ з ймовірностями $q_0, q_1, \dots, q_{s-1}$ відповідно.*

Доведення. Добре відомо [1], що для кожного Q_s -циліндра:

$$\lambda(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_s}) = q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\dots q_{\alpha_n}.$$

З незалежності (ξ_n) для заданих n та $j \in A_s$ маємо:

$$\begin{aligned} P(\xi_n = j) &= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})} \lambda(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}j}^{Q_s}) = \\ &= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})} q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\dots q_{\alpha_{n-1}}q_j = q_j. \end{aligned}$$

Розглянемо натуральні числа $k_1 < k_2 < \dots < k_l$ та $j_1, j_2, \dots, j_l \in A_s$. Зрозуміло, що

$$\prod_{e=1}^l P(\xi_{k_e} = j_e) = q_{j_e}.$$

Очевидно, значення ймовірності

$$P(\xi_{k_1} = j_1 \text{ і } \xi_{k_2} = j_2 \text{ і } \dots \text{ і } \xi_{k_l} = j_l)$$

дорівнює мірі Лебега всіх чисел, у яких на місцях з номерами $k_1, k_2, \dots, k_l$ стоять цифри $j_1, j_2, \dots, j_l$ у їх Q_s -зображеннях.

Порахуємо відповідне значення:

$$\lambda(\{x \mid x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k_1-1}j_1\alpha_{k_1+1}\dots\alpha_{k_l-1}j_l\dots}^{Q_s}\}) = G((k_1, k_2, \dots, k_l); (j_1, j_2, \dots, j_l)).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots}^{Q_s} &= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2} + \dots, \\ \Delta_{\gamma\alpha_1\alpha_2\dots}^{Q_s} &= \beta_{\gamma} + \beta_{\alpha_1}q_{\gamma} + \beta_{\alpha_2}q_{\gamma}q_{\alpha_1} + \dots, \end{aligned}$$

тому маємо:

$$\Delta_{\gamma\alpha_1\alpha_2\dots}^{Q_s} = q_{\gamma}\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots}^{Q_s} + \beta_{\gamma}.$$

Звідки

$$\begin{aligned} &G((k_1, k_2, \dots, k_l); (j_1, j_2, \dots, j_l)) = \\ &= \sum_{j=0}^{s-1} q_j G((k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_l - 1); (j_1, j_2, \dots, j_l)) = \\ &= G((k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_l - 1); (j_1, j_2, \dots, j_l)). \end{aligned}$$

Тому послідовно повторюючи міркування, маємо:

$$\begin{aligned} &G((k_1, k_2, \dots, k_l); (j_1, j_2, \dots, j_l)) = \\ &= G((1, k_2 - k_1 + 1, \dots, k_l - k_1 + 1); (j_1, j_2, \dots, j_l)) = \\ &= q_{j_1} G((1, k_2 - k_1 + 1, \dots, k_l - k_1 + 1); (j_2, j_3, \dots, j_l)). \end{aligned}$$

Застосувавши попередню рівність до виразу

$$G((k_1, k_2, \dots, k_l); (j_1, j_2, \dots, j_l)),$$

отримаємо:

$$G((k_1, k_2, \dots, k_l); (j_1, j_2, \dots, j_l)) = q_{j_1}q_{j_2}\dots q_{j_l},$$

звідки легко отримується висновок твердження. $\square$

Теорема 1. Для майже всіх $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^{Q_s} \in [0; 1]$ виконуються умови:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \left(\left\{ \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots}^{Q_s} \left| \frac{\sum_{k=1}^n \beta_k - nA}{B\sqrt{n}} < t \right. \right\} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \forall t \in \mathbb{R}; \\ \left| \lambda \left(\left\{ \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots}^{Q_s} \left| \frac{\sum_{k=1}^n \beta_k - nA}{B\sqrt{n}} < t \right. \right\} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| &\leq \\ &\leq \frac{0,4748C}{B^3\sqrt{n}} \quad \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}; \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k - nA}{\sqrt{n \ln \ln n}} &= B\sqrt{2}; \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k - nA}{\sqrt{n \ln \ln n}} &= -B\sqrt{2}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=0}^{s-1} jq_j, \quad B = \sqrt{\sum_{j=0}^{s-1} j^2 q_j - \left(\sum_{j=0}^{s-1} jq_j \right)^2}, \\ C &= \sum_{j=0}^{s-1} q_j \left| j - \sum_{k=0}^{s-1} kq_k \right|^3. \end{aligned}$$

Доведення. Легко бачити, що для кожного натурального n виконуються рівності:

$$M(\xi_n) = A, \quad D(\xi_n) = B^2, \quad C = M|\xi_n - M(\xi_n)|^3.$$

Використовуючи центральну граничну теорему з оцінкою типу Беррі-Ессеєна, маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - nA}{B\sqrt{n}} < t \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \forall t \in \mathbb{R}; \\ \left| P \left(\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - nA}{B\sqrt{n}} < t \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| &\leq \frac{0,4748C}{B^3\sqrt{n}} \quad \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Враховуючи закон повторного логарифма для послідовності стандартизованих випадкових величин $\left(\frac{\xi_n - A}{B} \right)$, отримаємо, що майже напевно

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - nA}{\sqrt{n \ln \ln n}} = B\sqrt{2};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - nA}{\sqrt{n \ln \ln n}} = -B\sqrt{2}.$$

Оскільки для Q_s -бінарного числа

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^{Q_s}$$

виконується рівність

$$\sum_{k=1}^n \xi_k(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k,$$

маємо потрібне. □

Теорема 2. Для майже всіх чисел $x \in [0; 1]$ і для кожної цифри $j \in A_s$ виконуються умови:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \left(\left\{ y \in [0; 1] \mid \frac{\nu_n(j; y) - q_j}{\sqrt{q_j - q_j^2} \cdot n^{-0,5}} < t \right\} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \forall t \in \mathbb{R}; \\ \left| \lambda \left(\left\{ y \in [0; 1] \mid \frac{\nu_n(j; y) - q_j}{\sqrt{q_j - q_j^2} \cdot n^{-0,5}} < t \right\} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| &\leq \\ &\leq \frac{0,4748C_j}{\sqrt{n}} \quad \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}; \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n(j; x) - q_j}{\sqrt{\ln \ln n} \cdot n^{0,5}} &= \sqrt{2q_j - 2q_j^2}; \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n(j; x) - q_j}{\sqrt{\ln \ln n} \cdot n^{-0,5}} &= -\sqrt{2q_j - 2q_j^2}, \end{aligned}$$

де $\nu_n(j; x)$ — відносна частота появи символу j серед перших n символів Q_s -зображення числа x :

$$\nu_n(j; x) = \frac{N_n(x; j)}{n},$$

стала C_j визначається рівністю:

$$C_1 = q_j(1 - p_j)(2q_j^2 - 2q_j + 1).$$

Доведення. Зафіксуємо $j \in A_s$ і розглянемо послідовність випадкових величин $I(\xi_n; j)$, які є індикаторами події $\{\xi_n = j\}$:

$$I(\xi_n; j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \xi_n = j; \\ 0, & \text{якщо } \xi_n \neq j. \end{cases}$$

Оскільки (ξ_n) є послідовністю незалежних випадкових величин, то, відповідно, $(I(\xi_n; j))$ також є послідовністю незалежних випадкових величин. Зрозуміло, що

$$P(I(\xi_n; j) = 1) = P(\{\omega \mid \xi_n(\omega) = j\}) = q_j;$$

$$P(I(\xi_n; j) = 0) = 1 - q_j,$$

тобто $I(\xi_n; j)$ набувають значень 0 та 1 з ймовірностями $1 - q_j$ та q_j відповідно.

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} M(I(\xi_n; j)) &= q_j, \quad D(I(\xi_n; j)) = q_j - q_j^2; \\ M|I(\xi_n; j) - q_j|^3 &= q_j(1 - q_j)(2q_j^2 - 2q_j + 1). \end{aligned}$$

Для Q_s -бінарного числа x виконується рівність:

$$N_n(x; j) = \sum_{k=1}^n I(\xi_k(x); j).$$

Враховуючи міркування доведення теореми 1, отримаємо потрібне. $\square$

З теореми 2 можна отримати такий наслідок

Наслідок 1. Для майже всіх чисел $x \in [0; 1]$ виконується умова:

$$\nu_n(j; x) = q_j + O\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}\right) \quad \forall j \in A_s.$$

2 СУПЕРФРАКТАЛЬНІСТЬ ОДНІЄЇ МНОЖИНИ, ЗАДАНОЇ В ТЕРМІНАХ Q_s -ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКА $[0; 1]$

Теорема 3. Множина чисел, які є Q_s -слабонормальними, але не є Q_s -нормальними, є суперфрактальною, тобто має міру Лебега 0 і розмірність Гаусдорфа-Безиковича 1.

Доведення. Для достатньо великого натурального K розглянемо стохастичну матрицю $Q(K) = \|q_{mn}(K)\|$ ($m, n \in A_s$) таку, що

$$q_{i0} = q_0 - \frac{1}{K}, \quad q_{i1} = q_1 + \frac{1}{K}, \quad q_{ij} = q_j \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, s-1\}, j \in \{2, \dots, s-1\}.$$

На сукупності усіх Q_s -циліндрів задамо міру $\psi(\cdot)$:

$$\psi(\Delta_j^{Q_s}) = q_j \quad \forall j \in A_s;$$

$$\psi(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_l}^{Q_s}) = q_{c_1} q_{c_1 c_2} q_{c_2 c_3} \dots q_{c_{l-1} c_l}$$

і продовжимо її за неперервністю на $\mathcal{B}[0; 1]$.

Розглянемо динамічну систему $V_K = ([0; 1], \mathcal{B}[0; 1], \psi(\cdot), T)$. Добре відомо [5], що відповідна динамічна система ергодична.

Нехай $I_j(x)$ — індикатор множини $\Delta_j^{Q_s}$. За теоремою Біркгофа-Хінчина маємо, що для ψ -майже всіх $x \in [0; 1]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} I_j(T^k(x)) = \int_0^1 I_j(x) d\psi = q_j.$$

Для $i, j \in A_s$ розглянемо індикатор $I(i, j; x)$ множини $\Delta_{ij}^{Q_s}$. За теоремою Біркгофа-Хінчина для ψ -майже всіх $x \in [0; 1]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} I(i, j; T^k(x)) = \int_0^1 I(i, j; x) d\psi = q_{ij}.$$

Таким чином, для множини B_K чисел x таких, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x; j)}{n} = q_j, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x; (i; j))}{n} = q_{ij} \quad \forall i, j \in A_s,$$

виконується умова $\psi(B_K) = 1$.

Добре відомо [5], що ентропія Колмогорова-Синая динамічної системи V_K дорівнює:

$$K(V_K) = - \sum_{i,j} q_i \cdot q_{ij} \ln q_{ij}.$$

Зрозуміло, що показник Ляпунова для V_K дорівнює:

$$L(V_K) = \int_0^1 \ln |T'(x)| d\psi = - \sum_{j=0}^{s-1} q_j \ln q_j.$$

За формулою Янга [5], розмірність міри $\psi(\cdot)$ дорівнює:

$$\dim_H(\psi) = \frac{K(V_K)}{L(V_K)} = \frac{- \sum_{i,j} q_i q_{ij} \ln q_{ij}}{- \sum_{j=0}^{s-1} q_j \ln q_j}.$$

Оскільки $\psi(B_K) = 1$, то маємо:

$$\alpha_0(B_K) \geq \frac{- \sum_{i,j} q_i q_{ij} \ln q_{ij}}{- \sum_{j=0}^{s-1} q_j \ln q_j}.$$

Нехай $K_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $q_0 - \frac{1}{K_0} > 0$. Розглянемо множину

$$B = \bigcup_{j=K_0}^{+\infty} B_j.$$

Маємо:

$$\alpha_0(B) = \sup_{K_0 \leq n} \alpha_0(B_n) = 1,$$

оскільки

$$\frac{- \sum_{i,j} q_i q_{ij} \ln q_{ij}}{- \sum_{j=0}^{s-1} q_j \ln q_j} \rightarrow \frac{- \sum_{j=0}^{s-1} q_j \ln q_j}{- \sum_{j=0}^{s-1} q_j \ln q_j} = 1 \quad (K \rightarrow +\infty).$$

□

Предметом подальших досліджень може бути уточнення відповідних метричних та фрактальних результатів для Q_s^* -представлення чисел відрізка $[0; 1]$, яке є узагальненням Q_s -представлення [4, 3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Turbin A.F., Pratsyovitiy M.V. *Fractal sets, functions, distributions*, Nauk. Dumka, Kyiv (1992).
- [2] Pratsyovitiy M.V., Feshchenko O.Yu. *Mathematical models of bilateral dynamic conflicts and Q -representation of real numbers*. Naukovi zapiski NPU named M.P. Dragomanova. Phys.-math. science, 2003, № 4, P.260-269.
- [3] Pratsyovitiy M.V. *A fractal approach to the investigation of singular divisions*. Kiev: NPU named M.P. Drahomanov, 1998. – 296 p.
- [4] Albeverio S., Pratsyovityi M., Torbin G. *Topological and fractal properties of real numbers which are not normal*, Bulletin des Sciences Mathématiques. **129**, no. 8, 615–630 (2005). DOI: 10.1016/j.bulsci.2004.12.004
- [5] Billingsley P. *Ergodic Theory and Information*, New York: John Wiley and Sons, (1965).
- [6] Borel É. *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **27**, 247–271 (1909). DOI: 10.1007/BF03019651.
- [7] Bourgain J. *Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets*, Publications Mathématiques de l’IHÉS, **69**, 5–41 (1989). DOI: 10.1007/BF02698838.
- [8] Bugeaud Y. *Distribution modulo one and Diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics, **193**, Cambridge University Press, Cambridge (2012). DOI: 10.1017/CBO9781139017732.
- [9] Champernowne D. G. *The construction of decimals normal in the scale of ten*, Journal of the London Mathematical Society, **8**, no. 4, 254–260 (1933). DOI: 10.1112/jlms/s1-8.4.254.
- [10] Davenport H., Erdős P. *Note on normal decimals*, Canadian Journal of Mathematics, **4**, 58–63 (1952). DOI: 10.4153/CJM-1952-005-3.
- [11] Erdős P., Turán P. *On a problem in the theory of uniform distribution. I*, Indagationes Mathematicae, **10**, 370–378 (1948). DOI: 10.1016/S1385-7258(48)50041-4.
- [12] Kryvoshyia R. V. *On a generalization of the concept of normal numbers*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, № 2, 63–68 (2021). DOI: 10.17721/1812-5409.2021/2.8.
- [13] Nagasaka K. *On Hausdorff dimension of non-normal sets*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, **23**, no. 3, 515–531 (1971).
- [14] Wall D. D. *Normal Numbers: Ph.D. thesis*, University of California, Berkeley (1949).

Надійшло 22.05.2026

Kryvoshyia R.V., Makarchuk O.P. *On some metric and fractal results for the Q_s -representation of numbers from the interval $[0; 1]$* , Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 156–165.

The concepts of a number normal to base s (simply normal) and a normal number (absolutely normal, i.e., normal to any natural base) were introduced by 'E. Borel (1909). These concepts are based on the notion of the frequency of a digit in the s -adic representation of a number. Although Borel proved that almost all numbers in the interval $[0, 1]$ (in the sense of Lebesgue measure) are normal, he did not construct a single example of a normal number. Later, this was done by A. Lebesgue, W. Sierpiński, and others. These studies initiated a new direction in the metric theory of real numbers, which is known today as the theory of normal properties of numbers in various encoding (representation) systems.

In general, the theory of normal numbers in the s -adic numeral system has been developed in the works of E. Borel, H. Weyl, A. Lebesgue, W. Sierpiński, D. Champernowne, S. Pillai, D. Wall, P. Erdős, A. Copeland, H. Davenport, and many others.

The Q_s -representation and Q_s -expansion of numbers from the interval $[0; 1]$, introduced by M. V. Pratsiovytyi in 1986 as a generalization of the classical s -adic representation, have been extensively studied from topological, metric, and fractal viewpoints. Generalizations of the theorems of Borel, Besicovitch–Eggleston, Billingsley, and others were obtained within this framework. The Q_s -representation has found numerous applications in metric and probabilistic number theory, fractal analysis, the theory of singular distributions of random variables, and the study of functions with complicated local structure and fractal properties. In particular, it has been used by many authors to generalize constructions of singular continuous functions, nowhere monotone functions, and nowhere differentiable continuous functions.

The present paper continues the investigation of metric properties of the Q_s -representation of real numbers and the normality properties determined by their Q_s -representations. The main purpose of the paper is to apply the Q_s -representation to obtain a generalization of K. Nagasaki's theorem on the superfractal nature of the set of weakly normal numbers that are not normal in the sense of Borel.