DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.17

Єлагін В.О.

НЕСКІНЧЕННІ ЗГОРТКИ БЕРНУЛЛІ, КЕРОВАНІ НЕГА-ДВІЙКОВИМ РЯДОМ

У роботі вивчаються нескінченні згортки Бернуллі, керовані нега-двійковим рядом: $\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-2)^n}$, а саме розподіли випадкових величин виду $\xi=\dfrac{2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{(-2)^n}=\Delta^{-2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$, де (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значення 0 та 1 з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} відповідно. Використовуючи формули зв'язку нега-двійкового та класичного двійкового зображень, вказано необхідні та достатні умови дискретності, сингулярності, неперервності, рівномірності, експоненційності розподілу ξ. Встановлено лебегівську структуру розподілу випадкової величини $\tau=\Delta^{-2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, за умови, що цифри τ_n її нега-двійкового зображення утворюють однорідний ланцюг Маркова.

Ключові слова і фрази: Нега-двійкове зображення чисел, циліндр нега-двійкового зображення, згортки Бернуллі, сингулярний розподіл, експоненційний розподіл, дискретний розподіл, ланцюг Маркова.

Institution of mathematics of NAS Ukraine
e-mail: *fracta.art@gmail.com*

Вступ

Двосимвольні системи кодування дійсних чисел ефективно використовуються в науці [1, 5] і техниці [4] в різних цілях. Найпростішими з тополого-метричної точки зору є класична двійкова та нега-двійкова системи. Остання має від'ємну основу -2. Їй відповідна система кодування чисел грунтується на розкладах чисел в нега-двійковий ряд (знакопочережний двійковий ряд). Метрична теорія нега-двійкового зображення чисел схожа з відповідною теорію класичного двійкового зображення (існують формули взаємозв'язку). Разом з цим нега-двійкове зображення не є топологічно-еквівалентним класичному двійковому. Його наявність розширює можливості для конструювання математичних об'єктів з локально складною структурою та фрактальними властивостями. Дана робота присвячена використанню нега-двійкового зображення чисел у дослідженні розподілів випадкових величин, зокрема нескінченних згорток Бернуллі.

УДК 519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60G30.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine00014586, Yelahin V.O.)

1 Нега-двійкове зображення чисел

Нега-двійковим рядом називається ряд:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \dots \tag{1}$$

Нехай $A = \{0, 1\}$ – алфавіт, $L \equiv A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту. Відомо, що для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така, що

$$x = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-2)^n} = \frac{2}{3} - \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} - \cdots\right) \equiv \Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}. \tag{2}$$

Подання числа x рядом (2) називається його нега-двійковим представленням, а символічний запис $\Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$ – нега-двійковим зображенням [8]. Нега-двійкове зображення чисел має нульову надлишковість, тобто кожне число має не більше двох нега-двійкових зображень, причому тих, що мають їх два, лише зліченна множина. Нега-двійкове зображення є топологічно еквівалентним ланцюговому A_2-зображенню чисел [1].

Циліндром рангу n з основою $c_1c_2\dots c_n$, що відповідає нега-двійковому зображенню чисел відрізку [0;1], називають [1] множину

$$\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_n} = \{x : \ x = \Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_n\beta_1\beta_2\dots}, (\beta_n) \in L\}.$$

При цьому $\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_n} = [u - v; u + w]$, де $u = \frac{2}{3} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(-2)^i}$,

$$v = \begin{cases} \frac{1}{3\cdot 2^n} \text{ для непарних } n, \\ \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}} \text{ для парних } n; \end{cases} \quad w = \begin{cases} \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}} \text{ для непарних } n, \\ \frac{1}{3\cdot 2^n} \text{ для парних } n. \end{cases}$$

Деякі властивості циліндрів:

1) $\max \Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_{2k}1} = \min \Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_{2k}0}, \quad \max \Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_{2k-1}0} = \min \Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_{2k-1}1}$;

2) $|\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m}| = \frac{1}{2^m}, \quad |\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m}| = |\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m0}| + |\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m1}|$;

3) основне метричне відношення має вигляд:

$$\frac{|\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m0}|}{|\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m}|} = \frac{|\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m1}|}{|\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m}|} = \frac{1}{2} = \frac{|\Delta^{2}_{c_1c_2\dots c_m0}|}{|\Delta^{2}_{c_1c_2\dots c_m}|} = \frac{|\Delta^{2}_{c_1c_2\dots c_m1}|}{|\Delta^{2}_{c_1c_2\dots c_m}|};$$

4) $x = \Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m\dots} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{-2}_{c_1\dots c_m}$.

2 Згортки Бернуллі, керовані нега-двійковим рядом

Означення 1. *Якщо (ξ_n) – послідовність випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} відповідно, то розподіл випадкової величини*

$$\xi = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(-2)^n} = \Delta^{-2}_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n\dots}$$

називається [9] нескінченною згорткою Бернуллі, керованою рядом (1).

Лема 1. *Якщо випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0;1]$, то цифри її нега-двійкового зображення є незалежними, однаково розподіленими, причому $P\{\xi_n = 0\} = P\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{2}$.*

Доведення. Оскільки розподіл ξ є рівномірним на $[0,1]$, то він є неперервним, отже, $P\{\xi = x\} = 0$ для всіх $x \in [0,1]$, і $P\{\xi \in \Delta^{-2}_{c_1\ldots c_m}\} = |\Delta^{-2}_{c_1\ldots c_m}| = 2^{-m}$. Тому

$$P\{\xi_1 = 0\} = P\{\xi \in \Delta^{-2}_0\} = P\{\xi > \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi \in \Delta^{-2}_1\} = P\{\xi < \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$P\{\xi_n = 0\} = P\{\xi \in \bigcup_{(c_1,\ldots,c_{n-1})\in A^{n-1}} \Delta^{-2}_{c_1\ldots c_{n-1}0}\} = \sum_{(c_1,\ldots,c_{n-1})\in A^{n-1}} P(\Delta^{-2}_{c_1\ldots c_{n-1}0}) = \frac{1}{2},$$

$$P\{\xi_n = 1\} = P\{\xi \in \bigcup_{(c_1,\ldots,c_{n-1})\in A^{n-1}} \Delta^{-2}_{c_1\ldots c_{n-1}1}\} = \sum_{(c_1,\ldots,c_{n-1})\in A^{n-1}} P(\Delta^{-2}_{c_1\ldots c_{n-1}1}) = \frac{1}{2},$$

оскільки події в цьому об'єднанні є несумісними і ймовірності не залежать від набору цифр $(c_1,\ldots,c_{n-1})$, то розподіл ξ_n не залежить від розподілів $\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}$. □

Теорема 1. *Якщо (ξ_n)– послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значення 0 та 1 з ймовірностями p_{0n} і p_{1n}, то розподіл випадкової величини $\xi = \Delta^{-2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ має чистий лебегівський тип, причому:*

1) *чисто дискретний, якщо* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} max\{p_{0n}, p_{1n}\} > 0$;

2) *чисто абсолютно неперервний, якщо* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-2p_{0k})^2 < \infty$;

3) *чисто сингулярний, якщо* $\begin{cases} \prod\limits_{n=1}^{\infty} max\{p_{0n}, p_{1n}\} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-2p_{0k})^2 = \infty. \end{cases}$

Доведення. Твердження теореми випливає з

1) аналогічного твердження для класичного двійкового зображення [6];

2) формули взаємозв'язку між нега-двійковим зображенням та класичним двійковим зображенням [2]:

$$\Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}\ldots} = \Delta^{2}_{[1-\alpha_1]\alpha_2[1-\alpha_3]\alpha_4\ldots[1-\alpha_{2k-1}]\alpha_{2k}\ldots}. \tag{3}$$

3) основного метричного співвідношення для циліндрів. □

Теорема 2. *Нехай (η_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} відповідно, $0 \neq c$ – деяка константа. Якщо*

$$p_{0,2k-1} = \frac{e^{\frac{c}{2^{2k-1}}}}{1+e^{\frac{c}{2^{2k-1}}}}, \quad p_{1,2k-1} = \frac{1}{1+e^{\frac{c}{2^{2k-1}}}},$$

$$p_{0,2k} = \frac{1}{1+e^{\frac{c}{2^{2k}}}}, \quad p_{1,2k} = \frac{e^{\frac{c}{2^{2k}}}}{1+e^{\frac{c}{2^{2k}}}}$$

то випадкова величина $\eta = \Delta^{-2}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$ має експоненційний розподіл на відрізку $[0;1]$.

Доведення. Дане твердження є наслідком формули взаємозв'язку між нега-двійковим та класичним двійковим зображеннями (3) і відомого факту [3]: випадкова величина $\tau = \Delta^2_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, цифри (τ_n) класичного двійкового зображення якої є незалежними і розподіленими за законами:

$$P\{\tau_n = 0\} = \frac{1}{1+e^{\frac{c}{2^n}}}, \quad P\{\tau_n = 1\} = \frac{e^{\frac{c}{2^n}}}{1+e^{\frac{c}{2^n}}},$$

має експоненційний розподіл на відрізку $[0;1]$ зі щільністю $f(x) = \frac{ce^{cx}}{e^c-1}$. □

Теорема 3. *Якщо (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями*

$$p_{0n} = \frac{1}{1+e^{\frac{c}{2^n}}}, \quad p_{1n} = \frac{e^{\frac{c}{2^n}}}{1+e^{\frac{c}{2^n}}}, \tag{4}$$

то випадкова величина $\xi = \Delta^{-2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ має абсолютно неперервний розподіл.

Доведення. Випадкова величина ξ буде мати абсолютно неперервний розподіл тоді і лише тоді, коли буде мати абсолютно неперервний розподіл випадкова величина τ з незалежними двійковими цифрами, що мають такі ж розподіли як цифри ξ_n випадкової величини ξ. Отже, використовуючи критерій абсолютної неперервності, який відомий з робіт [6, 7], констатуємо, що ξ матиме абсолютно неперервний розподіл тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(1-2p_{0k})^2 + (1-2p_{1k}^2] < \infty.$$

Оскільки, ця умова виконується для ймовірностей, заданих формулами (4), то розподіл ξ є абсолютно неперервним, але не експоненційним. □

3 Характеристична функція нескінченної згортки Бернуллі

Нагадаємо, що характеристичною функцією розподілу випадкової величини ζ з функцією розподілу $F_\zeta(x)$ називається [2] комплекснозначна функція $f_\zeta(t)$, що є математичним сподіванням випадкової величини $e^{it\zeta}$, тобто

$$f_\zeta(t) = Me^{it\zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\zeta(x).$$

Лема 2. *Нехай $\xi = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{(-2)^n} = \Delta^{-2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ – нескінченна згортка Бернуллі, де ξ_n набувають значеннь 0 та 1 з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} . Характеристична функція випадкової величини ξ буде мати вигляд:*

$$f_\xi(t) = Me^{it(\frac{2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{(-2)^n})} = e^{\frac{2it}{3}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty}(p_{0k} + p_{1k}\cdot e^{\frac{it}{(-2)^k}}),$$

а її модуль – $|f_\xi(t)| = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{1-4p_{0k}p_{1k}sin^2(\frac{t}{2^{k+1}})}$.

Доведення. Згідно з означенням характеристичної функції:

$$f_\xi(t) = Me^{it(\frac{2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{(-2)^n})} = Me^{\frac{2it}{3}} \cdot Me^{it\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{(-2)^n}} =$$

$$= e^{\frac{2it}{3}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} Me^{it\frac{\xi_n}{(-2)^n}} = e^{\frac{2it}{3}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty}(p_{0k} + p_{1k} \cdot e^{\frac{it}{(-2)^k}}).$$

$$|f_\xi(t)| = |e^{\frac{2it}{3}}| \cdot \prod_{k=1}^{\infty}|f_{\xi_k}| = 1 \cdot \prod_{k=1}^{\infty}|p_{0k} + p_{1k}cos(\frac{t}{(-2)^k}) + ip_{1k}sin(\frac{t}{(-2)^k})| =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{p_{0k}^2 + 2p_{0k}p_{1k}cos(\frac{t}{(-2)^k}) + p_{1k}^2cos^2(\frac{t}{(-2)^k}) + p_{1k}^2sin^2(\frac{t}{(-2)^k})} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1 + 2p_{0k}p_{1k}(cos(\frac{t}{2^k}) - 1)} = \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}sin^2(\frac{t}{2^{k+1}})} \qquad \square.$$

Теорема 4. *Для того, щоб характеристична функція f_ξ випадкової величини ξ задовольняла умову $L_\xi = \lim\limits_{|t|\to\infty}\sup|f_\xi(t)| = 0$, необхідно і достатньо, щоб $p_{0k} \to \frac{1}{2}(k \to \infty)$.*

Доведення. Модуль характеристичної функції випадкової величини ξ дорівнює модулю характеристичної функції випадкової величини $\tau = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_k}{2^k}$, де цифри τ_k незалежні і набувають значення 0 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно. Тоді $L_\xi = L_\tau$. Поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини τ на нескінченності відома з роботи [1]. Отже, для L_ξ твердження вірне. $\square$

Наслідок 1. *За умови $\lim\limits_{k\to\infty} p_{0k} \neq \dfrac{1}{2}$ розподіл випадкової величини ξ є сингулярним.*

4 Випадкові величини, цифри яких мають марковську залежність

Теорема 5. *Нехай (τ_n) – послідовність випадкових величин τ_n, які набувають значень 0 та 1, утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями p_0 та p_1 і матрицею перехідних ймовірностей $||p_{ik}||$, $i,k \in \{0,1\}$. Тоді випадкова величина $\tau = \Delta^{-2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ матиме:*

1) *дискретний розподіл з двома атомами, коли матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ij}\|$ містить два нулі,*

2) *дискретний розподіл із зліченною множиною атомів, якщо $\|p_{ij}\|$ містить один нуль та $p_{00}p_{11} \neq 0$,*

3) *сингулярний розподіл канторівського типу, коли матриця $\|p_{ij}\|$ містить один нуль та $p_{00}p_{11} = 0$,*

4) *неперервний розподіл, коли матриця перехідних ймовірностей не містить нулів.*

Доведення. 1. Стохастична матриця 2×2 не може мати більше ніж два нулі. Якщо матриця $\|p_{ik}\|$ має два нулі, то очевидно, що атомами розподілу τ є точки:

$$x_1 = \Delta^{-2}_{(1)}, \quad x_2 = \Delta^{-2}_{0(1)}, \quad \text{якщо } p_{00} = p_{10} = 0;$$

$$x_3 = \Delta^{-2}_{(0)}, \quad x_4 = \Delta^{-2}_{1(0)}, \quad \text{якщо } p_{01} = p_{11} = 0;$$

$$x_5 = \Delta^{-2}_{(01)}, \quad x_6 = \Delta^{-2}_{(10)}, \quad \text{якщо } p_{00} = p_{11} = 0;$$

$$x_7 = \Delta^{-2}_{(0)}, \quad x_8 = \Delta^{-2}_{(1)}, \quad \text{якщо } p_{01} = p_{10} = 0.$$

2. Нехай матриця $\|p_{ik}\|$ містить лише один нуль.

Якщо $p_{10} = 0$, атомами розподілу будуть числа виду $\Delta^{-2}_{(1)}, \Delta^{-2}_{0(1)}, \Delta^{-2}_{00(1)}, \dots \Delta^{-2}_{0\dots0(1)}$. Якщо $p_{01} = 0$, атомами розподілу будуть числа виду $\Delta^{-2}_{(0)}, \Delta^{-2}_{1(0)}, \Delta^{-2}_{11(0)}, \dots \Delta^{-2}_{1\dots1(0)}$. Якщо $p_{ii} = 0$, то спектр у цьому випадку складається з точок $x \in [0, 1]$, які в нега-двійковому розкладі не містять пар послідовних цифр (ii). Розглянемо множину точок

$$D = \{x : \ x = \Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}, (\alpha_{2m-1}(x), \alpha_{2m}(x)) \in \{(1-i,\, 1-i),\, (i,\, 1-i)\},\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Між D і $[0, 1]$ можна встановити бієктивне відображення:

$$x = \Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2m}\dots} \longleftrightarrow y = \Delta^{-2}_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m\dots},$$

де

$$\gamma_m(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (\alpha_{2m-1}(x), \alpha_{2m}(x)) = (1-i,\, 1-i), \\ 1, & \text{якщо} \quad (\alpha_{2m-1}(x), \alpha_{2m}(x)) = (i,\, 1-i). \end{cases}$$

Оскільки кожне число з множини $[0; 1]$ має нега-двійкове зображення, то спектр є континуальними, а його розмірність буде розв'язком рівнняння $\frac{1}{2}^x + (1 + \frac{1}{2})^x = 1$, і дорівнює $1 - \log_2(\sqrt{5} - 1)$.

Якщо матриця перехідних ймовірностей не містить нулів, то очевидно, що τ_n може набувати будь-яких значень з відрізку (0;1), а отже, розподіл буде неперервним. □

Список літератури

[1] Pratsiovytyi M.V. Two-symbol systems of encoding of real numbers and their applications. Naukova Dumka, Kyiv (2022). (in Ukrainian)

[2] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach to the study of singular distributions. Nats. Pedagog. Dragomanov Univ., Kyiv (1998). (in Ukrainian)

[3] Salem, R. On Some Singular Monotonic Functions Which Are Strictly Increasing. Transactions of the American Mathematical Society 53, no. 3 (1943), pp. 427–439. https://doi.org/10.2307/1990210.

[4] Cherri, A., Kamal, H. (2004). Parallel negabinary signed-digit arithmetic operations: One-step negabinary, one-step trinary, and one-step quaternary addition algorithms. Proceedings of SPIE, 5484, 35–45. https://doi.org/10.1117/12.568845.

[5] Pratsiovytyi M., Goncharenko Y., Lysenko I. Nega-binary representation of real numbers and its application. Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser. 1. Fiz.-Mat. Nauky, 2015. № 17. pp. 83–106. (in Ukrainian)

[6] Marsaglia, George. Random Variables with Independent Binary Digits. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 42, no. 6, 1971, pp. 1922–29.

[7] Chatterji, S. D. Certain induced measures on the unit interval. Journal of the London Mathematical Society 1.1 (1963): 325-331.

[8] Pratsiovytyi M.V. Nega-Cantor Representations of Real Numbers as Trivial Recodings of Cantor Representations (negative s-adic recodings of s-adic Representations). Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2017, 14(4), pp. 167–177. (in Ukrainian)

[9] Goncharenko Y. Convolutions of Distributions of Sums of Random Series of a Special Type, Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser. 1. Fiz.-Mat. Nauky (2003), no. 4, pp. 216-232. (in Ukrainian)

Надійшло 01.12.2025

Yelahin V.O. *Infinite Bernoulli Convolutions Governed by a Negabinary Expansion*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 170–176.

This paper investigates infinite Bernoulli convolutions governed by a negabinary expansion: $\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{-n}}$, namely the distributions of random variables of the form $\xi = \dfrac{2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\xi_n}{(-2)^n} = \Delta^{-2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$, where (ξ_n) – is a sequence of independent random variables taking values 0 and 1 with probabilities p_{0n} and p_{1n} respectively.

Using the transformation formulas linking the negabinary expansion with the classical binary representation, we establish necessary and sufficient conditions for the distribution of ξ to be discrete, singular, continuous, uniform, or exponential.

The Lebesgue structure of the distribution of the random variable $\tau = \Delta^{-2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ under the assumption that the digits τ_n of its negabinary expansion form a homogeneous Markov chain has been determined. Negabinary representation, negabinary cylinders, Bernoulli convolutions, singular distribution, exponential distribution, Markov chain.