

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.01>

Філіпчук М.П., Філіпчук О.І.

БАГАТОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку багатоточкової крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів.

Запропоновано та обгрунтовано традиційну схему методу з визначальним рівнянням.

Отримано умови існування розв'язку розглядуваної крайової задачі та оцінку похибки побудованих послідовних наближень.

Ключові слова і фрази: чисельно-аналітичний метод, система диференціальних рівнянь, перетворений аргумент, крайова задача, багатоточкові крайові умови.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: m.filipchuk@chnu.edu.ua, o.filipchuk@chnu.edu.ua

Вступ

Одне з чільних місць в теорії диференціальних рівнянь займають питання дослідження існування та наближеної побудови розв'язків різноманітних крайових задач. Вдалим конструктивним методом, який дозволяє ефективно розв'язувати ці питання для досить широких класів задач, є чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка [1, 2, 3]. Актуальним є поширення цього методу на нові класи крайових задач, зокрема, для рівнянь з відхиленим аргументом [4].

У даній праці за допомогою чисельно-аналітичного методу досліджуватимемо питання існування та наближеної побудови розв'язку багатоточкової крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))), \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^N A_i x(t_i) = d, \quad (2)$$

УДК 517.929.7

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K10.

де $t \in [0, T]$, $T = \text{const} > 0$; $x, f \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_i : [0, T] \rightarrow [0, T]$ ($i = \overline{1, k}$) – довільні неперервні відображення; A_i ($i = \overline{0, N}$) – сталі $n \times n$ матриці; $N \geq 2$; $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$; d – відомий сталий n -вимірний вектор.

Зауважимо, що випадки лінійних двоточкових та інтегральних крайових умов для системи (1) раніше були розглянуті в працях [5, 6] і [7] відповідно.

Функцію $f(t, x, y_1, \dots, y_k)$ вважатимемо визначеною та неперервною в області

$$(t, x, y_1, \dots, y_k) \in [0, T] \times D^{k+1},$$

де D – замкнена обмежена область в \mathbb{R}^n , обмеженою вектором $M \in \mathbb{R}^n$, $M_i > 0$ ($i = \overline{1, n}$), і задовольняючою умову Ліпшица по x, y_1, \dots, y_k з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0; i, j = \overline{1, n}\}$:

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| \leq M, \quad (3)$$

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) - f(t, \bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)| \leq K \left(|\bar{x} - \bar{x}| + \sum_{i=1}^k |\bar{y}_i - \bar{y}_i| \right). \quad (4)$$

Тут

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| = (|f_1(t, x, y_1, \dots, y_k)|, \dots, |f_n(t, x, y_1, \dots, y_k)|)$$

і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

СХЕМА ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ ТА ЇЇ ОБҐРУНТУВАННЯ

Припустимо, що виконується умова

$$\det \left(\sum_{i=1}^N t_i A_i \right) \neq 0. \quad (5)$$

Позначимо через D_β множину точок $x_0 \in \mathbb{R}^n$, які містяться в області D разом зі своїм β -околом, де

$$\beta = T(E + L)M + T|Hd(x_0)|, \\ H = \left(\sum_{i=1}^N t_i A_i \right)^{-1}, \quad L = \sum_{i=1}^N t_i |H A_i|, \quad d(x_0) = d - \left(\sum_{i=0}^N A_i \right) x_0.$$

Нехай

$$D_\beta \neq \emptyset \quad (6)$$

і найбільше власне значення матриці $Q = (k+1)T(E+L)K$ не перевищує одиниці:

$$\lambda_{\max}(Q) < 1. \quad (7)$$

Розглянемо послідовність функцій, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$x_0(t, x_0) = x_0, \quad x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t g_{m-1}(s, x_0) ds - \\ - tH \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g_{m-1}(s, x_0) ds + tHd(x_0), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

де

$$g_{m-1}(t, x_0) \equiv f(t, x_{m-1}(t, x_0), x_{m-1}(\lambda_1(t), x_0), \dots, x_{m-1}(\lambda_k(t), x_0)),$$

а параметр $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що для довільних x_0 всі функції цієї послідовності задовольняють крайові умови (2).

Має місце наступне твердження про збіжність послідовних наближень $x_m(t, x_0)$ вигляду (8).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (3)-(7). Тоді послідовність функцій $x_m(t, x_0)$ вигляду (8) рівномірно збігається при $t \rightarrow \infty$ в області $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ до граничної функції $x^*(t, x_0)$, яка задовольняє крайові умови (2) і є розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t g(s) ds - tH \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g(s) ds + tHd(x_0), \quad (9)$$

де

$$g(t) \equiv f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))),$$

який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, x_0) = x_0$. Крім цього, $x^*(t, x_0)$ є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))) + \Delta(x_0), \quad \sum_{i=0}^N A_i x(t_i) = d, \quad (10)$$

де

$$\Delta(x_0) = Hd(x_0) - H \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g(t) dt.$$

Для відхилення $x^*(t, x_0)$ від $x_m(t, x_0)$ при всіх $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ і $m = 1, 2, \dots$ вірна оцінка

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq W_m(x_0), \quad W_m(x_0) \equiv Q^m(E - Q)^{-1}\beta. \quad (11)$$

Доведення. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (8) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що при $x_0 \in D_\beta$ всі функції $x_m(t, x_0)$ містяться в області D . На підставі (8) із врахуванням (3) знаходимо:

$$\begin{aligned} |x_1(t, x_0) - x_0| &\leq TM + T \sum_{i=1}^N |HA_i| Mt_i + T |Hd(x_0)| = \\ &= T \left(E + \sum_{i=1}^N t_i |HA_i| \right) M + T |Hd(x_0)| = T(E + L)M + T |Hd(x_0)| = \beta. \end{aligned} \quad (12)$$

Тому $x_1(t, x_0) \in D$, як тільки $x_0 \in D_\beta$. Індукцією легко показати, що для всіх $m = 1, 2, \dots$, $t \in [0, T]$ і будь-якого $x_0 \in D_\beta$ функції $x_m(t, x_0)$ вигляду (8) не виходять за межі області D .

Покладаючи $r_{m+1}(t, x_0) = |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|$, на підставі (8) із врахуванням (4) отримуємо:

$$r_{m+1}(t, x_0) \leq K \int_0^t \omega_m(s, x_0) ds + t \sum_{i=1}^N |HA_i| K \int_0^{t_i} \omega_m(s, x_0) ds, \quad (13)$$

де

$$\omega_m(s, x_0) = r_m(s, x_0) + \sum_{i=1}^k r_m(\lambda_i(s), x_0).$$

Згідно з (12), $r_1(t, x_0) = |x_1(t, x_0) - x_0| \leq \beta$, тому із (13) при $m = 1$ знаходимо:

$$\begin{aligned} r_2(t, x_0) &\leq K(k+1)\beta t + t \sum_{i=1}^N |HA_i| K(k+1)\beta t_i \leq \\ &\leq (k+1)TK\beta + (k+1)T \sum_{i=1}^N t_i |HA_i| K\beta = (k+1)T(E+L)K\beta = Q\beta. \end{aligned}$$

Індукцією можна довести, що для всіх $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$

$$r_{m+1}(t, x_0) \leq Q^m \beta, \quad m = 0, 1, \dots$$

Тому для $j \geq 1$ маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq \sum_{i=1}^j r_{m+i}(t, x_0) \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \right) \beta = Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right) \beta. \quad (14)$$

Умова (7) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}. \quad (15)$$

Тоді із (14) та (15) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t, x_0)$ вигляду (8) рівномірно збігається при $m \rightarrow \infty$ в області $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ і

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0). \quad (16)$$

Оскільки всі послідовні наближення $x_m(t, x_0)$ задовольняють крайові умови (2), то й гранична функція $x^*(t, x_0)$ також їх задовольняє. При $j \rightarrow \infty$ із (14), враховуючи (16) та (15), для всіх $m = 1, 2, \dots$, $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ отримуємо оцінку (11). Крім цього, переходячи із врахуванням (16) у (8) до границі при $m \rightarrow \infty$, бачимо, що функція $x^*(t, x_0)$ є розв'язком інтегрального рівняння (9), який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, x_0) = x_0$. Отже, гранична функція $x^*(t, x_0)$ справді є розв'язком крайової задачі (10). Теорему доведено. \square

На підставі теореми 1, використовуючи стандартну техніку обґрунтування чисельно-аналітичного методу [2, 3], нескладно отримати наведені далі твердження.

Необхідні і достатні умови для того, щоб гранична функція $x^*(t, x_0)$ послідовності (8) була розв'язком крайової задачі (1), (2), дає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок $x^*(t)$ початкової задачі*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))), \quad x(0) = x_0,$$

був одночасно розв'язком крайової задачі (1), (2), необхідно і досить, щоб x_0 було розв'язком визначального рівняння

$$\Delta(x_0) = 0, \quad (17)$$

де

$$\Delta(x_0) = Hd(x_0) - H \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g^*(t, x_0) dt, \quad (18)$$

$$g^*(t, x_0) \equiv f(t, x^*(t, x_0), x^*(\lambda_1(t), x_0), \dots, x^*(\lambda_k(t), x_0)).$$

При цьому $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ і для всіх $m = 1, 2, \dots, t \in [0, T]$ щодо відхилення точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ крайової задачі (1), (2) від її наближеного розв'язку $x_m(t, x_0)$ вигляду (8) вірна оцінка (11).

На підставі теореми 2 отримуємо наступний чисельно-аналітичний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (1), (2):

а) при $x_0 \in D_\beta$ згідно з (8) будуюмо послідовність функцій $x_m(t, x_0)$, залежну від x_0 як від параметра;

б) знаходимо граничну функцію $x^*(t, x_0)$ цієї послідовності;

в) складаємо визначальну функцію $\Delta(x_0)$ вигляду (18) і яким-небудь чисельним методом знаходимо розв'язок $x_0 = x_0^*$ визначального рівняння (17);

г) шукаємо розв'язок початкової задачі $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t)))$, $x(0) = x_0^*$, або, що те саме, граничну функцію $x^*(t, x_0^*)$ послідовності $x_m(t, x_0^*)$.

Отримана функція і буде точним розв'язком крайової задачі (1), (2), а за її наближений розв'язок, який дає похибку, що не перевищує $W_m(x_0^*)$, можна взяти функцію $x_m(t, x_0^*)$ вигляду (8).

Головною проблемою при реалізації наведеного алгоритму є побудова в аналітичному вигляді функції $x^*(t, x_0)$. Крім цього, з точки зору практичного застосування, важливо вміти зробити висновок про існування розв'язку крайової задачі (1), (2) не за граничною функцією $x^*(t, x_0)$, а за її m -тим наближенням $x_m(t, x_0)$.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:

1) існує опукла замкнена область $D_1 \subset D_\beta$, в якій наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_0) = 0, \quad (19)$$

де

$$\Delta_m(x_0) = Hd(x_0) - H \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g_m(t, x_0) dt, \quad (20)$$

$$g_m(t, x_0) \equiv f(t, x_m(t, x_0), x_m(\lambda_1(t), x_0), \dots, x_m(\lambda_k(t), x_0)),$$

має для деякого фіксованого $m \geq 1$ єдиний розв'язок $x_0 = x_{0m}$ ненульового індексу;

2) на межі S_1 області D_1 виконується нерівність

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > (k+1)LKW_m(x_0).$$

Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язок $x^*(t)$, початкове значення

$$x^*(0) = x_0^* \quad (21)$$

якого визначається таким x_0^* , яке належить області D_1 .

Оцінку близькості граничних функцій $x^*(t, x'_0)$ і $x^*(t, x''_0)$ для точок $x'_0, x''_0 \in D_\beta$ дає наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для будь-яких точок $x'_0, x''_0 \in D_\beta$ щодо відхилення граничних функцій $x^*(t, x'_0)$ і $x^*(t, x''_0)$ послідовностей $x_m(t, x'_0)$ і $x_m(t, x''_0)$ вигляду (8) відповідно вірна оцінка*

$$|x^*(t, x'_0) - x^*(t, x''_0)| \leq (E - Q)^{-1}(E + R_2) |x'_0 - x''_0|,$$

де

$$R_2 = T \left| H \sum_{i=0}^N A_i \right|.$$

Неперервну залежність визначальної функції $\Delta(x_0)$ вигляду (18) від x_0 дає наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді функція $\Delta(x_0)$ вигляду (18) визначена, неперервна в області D_β і для всіх $x'_0, x''_0 \in D_\beta$ задовольняє оцінку*

$$|\Delta(x'_0) - \Delta(x''_0)| \leq \left[\frac{1}{T} R_2 + (k + 1) LK (E - Q)^{-1} (E + R_2) \right] |x'_0 - x''_0|.$$

Необхідні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб деяка область $D_2 \subset D_\beta$ містила точку x_0^* , яка визначає при $t = 0$ початкове значення (21) розв'язку $x^*(t)$ крайової задачі (1), (2), необхідно, щоб для всіх m і довільного $\bar{x}_0 \in D_2$ виконувалась нерівність*

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \leq \sup_{x_0 \in D_2} \left[\frac{1}{T} R_2 + (k + 1) LK (E - Q)^{-1} (E + R_2) \right] |x_0 - \bar{x}_0| + (k + 1) LK W_m(\bar{x}_0).$$

Оцінку відхилення наближеного розв'язку $x_m(t, x_{0m})$, де x_{0m} – розв'язок наближеного визначального рівняння (19), від точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$ крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді для відхилення наближеного розв'язку $x_m(t, x_{0m})$, де x_{0m} – розв'язок наближеного визначального рівняння (19), від точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$ крайової задачі (1), (2) вірна оцінка*

$$|x^*(t, x_0^*) - x_m(t, x_{0m})| \leq (E - Q)^{-1}(E + R_2) |x_0^* - x_{0m}| + W_m(x_{0m}).$$

Аналогічно [2, 3], при деяких додаткових умовах гладкості правої частини системи (1) можна показати, що $|x_0^* - x_{0m}| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ та довести рівномірну збіжність наближеного розв'язку $x_m(t, x_{0m})$ до точного $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$.

Відмітимо також, що у частковому випадку $k = 1$ (наявність лише одного перетвореного аргументу в системі) всі наведені в цій секції результати повторюватимуть результати, раніше отримані в [8].

ПРИКЛАД

Проілюструємо використання розробленої схеми чисельно-аналітичного методу на конкретному прикладі. Для простоти та компактності викладок обмежимося розглядом скалярного випадку.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{20} \left(x\left(\frac{t}{2}\right) - x\left(\frac{t}{3}\right) \right),$$

$$-x(0) + x(1) + x(2) = 5,$$

де $t \in [0, 2]$, $D = [0, 10]$.

Нескладно перевірити, що в цьому випадку

$$k = 2, \quad N = 2, \quad T = 2, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad A_0 = -1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad d = 5,$$

$$M = \frac{1}{2}, \quad K = \frac{1}{20}, \quad \sum_{i=1}^N t_i A_i = 3 \neq 0, \quad H = \frac{1}{3}, \quad L = 1, \quad Q = \frac{3}{5},$$

$$d(x_0) = 5 - x_0, \quad \beta = 2 + \frac{2}{3} |5 - x_0|, \quad D_\beta \neq \emptyset,$$

а тому виконуються всі умови теореми 1.

Послідовні наближення $x_1(t, x_0)$ і $x_2(t, x_0)$, знайдені згідно з (8), мають вигляд:

$$x_1(t, x_0) = x_0 + \frac{1}{3}(5 - x_0)t,$$

$$x_2(t, x_0) = x_0 + \frac{1}{3}(5 - x_0) \left(\frac{143}{144}t + \frac{1}{240}t^2 \right).$$

Відповідні їм наближені визначальні функції $\Delta_1(x_0)$ і $\Delta_2(x_0)$, знайдені згідно з (20), мають вигляд:

$$\Delta_1(x_0) = \frac{143}{144} \cdot \frac{1}{3}(5 - x_0),$$

$$\Delta_2(x_0) = \frac{51481}{51840} \cdot \frac{1}{3}(5 - x_0).$$

Коренями наближених визначальних рівнянь $\Delta_1(x_0) = 0$ і $\Delta_2(x_0) = 0$ є відповідно $x_{01} = 5$ і $x_{02} = 5$.

Тоді наближеним розв'язком розглядуваної крайової задачі буде функція

$$x_1(t, x_{01}) = x_2(t, x_{02}) = 5.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що точним розв'язком розглядуваної крайової задачі якраз і є функція $x^*(t) = 5$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Наукова думка, Киев, 1985.
- [2] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Наукова думка, Киев, 1992.
- [3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1142/3962>
- [4] Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И. *Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III.* Укр. мат. журн. 1998, **50** (7), 960–979. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4876>
- [5] Філіпчук М.П. *Двоточкова крайова задача для системи з багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2017, **5** (1-2), 139–143. URL: <https://tinyurl.com/bmj2017-1and2-17>
- [6] Філіпчук М.П. *Про одну двоточкову крайову задачу для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2021, **9** (1), 284–290. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.24>
- [7] Філіпчук М.П., Філіпчук О.І. *Про крайову задачу з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2024, **12** (1), 107–119. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2024.01.10>
- [8] Філіпчук М.П., Бігун Я.Й. *Чисельно-аналітичний метод дослідження багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом.* Укр. мат. журн. 1998, **50** (11), 1581–1585. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4815>

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods for the Investigation of Solutions of Boundary-Value Problems. Naukova Dumka, Kiev, 1985. (in Russian)
- [2] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 1992. (in Russian)
- [3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1142/3962>
- [4] Ronto M.I., Samoilenko A.M., Trofimchuk S.I. *The theory of the numerical-analytic method: Achievements and new trends of development. III.* Ukr. Math. J. 1998, **50** (7), 960–979. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4876> (in Russian)
- [5] Filipchuk M.P. *Two-point boundary value problem for a system with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2017, **5** (1-2), 139–143. URL: <https://tinyurl.com/bmj2017-1and2-17> (in Ukrainian)
- [6] Filipchuk M.P. *On a two-point boundary value problem for a system of differential equations with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2021, **9** (1), 284–290. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.24> (in Ukrainian)
- [7] Filipchuk M.P., Filipchuk O.I. *On a boundary value problem with integral conditions for a system of differential equations with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2024, **12** (1), 107–119. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2024.01.10> (in Ukrainian)

- [8] Filipchuk M.P., Bigun Ya.I. *Numerical-analytic method for the investigation of multipoint boundary-value problems for systems of differential equations with transformed argument*. Ukr. Math. J. 1998, **50** (11), 1805–1810. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02524491> (translation of Ukr. Math. J. 1998, **50** (11), 1581–1585. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4815> (in Ukrainian))

Надійшло 01.08.2025

Filipchuk M.P., Filipchuk O.I. *Multipoint boundary value problem for a system of differential equations with many transformed arguments*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 7–15.

A boundary value problem for a system of differential equations with finite quantity of transformed arguments in the case of multipoint boundary conditions is considered in this paper.

To investigate the existence and approximate construction of the solution of such boundary value problem it is proposed a traditional scheme of the A.M. Samoilenko's numerical-analytic method with a determining equation.

A recurrent sequence of functions that depend on parameter, each of which satisfies given boundary conditions, is constructed. It is shown that under typical for numerical-analytic method assumptions, this sequence uniformly converges to the limit function. It is established the value of the parameter at which the limit function will be an exact solution of the original boundary value problem. Approximate determining function and approximate determining equation put into consideration, and on the basis of them sufficient conditions for the solvability of this boundary value problem are obtained. The necessary conditions for the solvability of the considered boundary value problem and an estimation of the deviation of the approximate solution from the exact solution were also obtained.

The proposed scheme of the numerical-analytic method is illustrated by concrete example.