

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.13>

МАРТИНЮК С.В., СИДОРА М.І.

ОПТИМІЗАЦІЯ МАРШРУТІВ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ У ЛОГІСТИЦІ: РОЗШИРЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

У статті розглянуто задачу оптимізації маршрутів безпілотних літальних апаратів (БПЛА, дронів) у логістичних операціях та запропоновано вдосконалену математичну модель маршрутів. Дане дослідження є логічним продовженням попередньої роботи авторів [1], де було виконано огляд методів планування маршрутів дронів і сформульовано базову модель оптимізації маршруту для одного БПЛА. У цій статті проведено критичний аналіз попередньої моделі, виявлено її обмеження (ігнорування низки логістичних факторів, зокрема багатьох дронів, вантажопідйомності, часових обмежень тощо) та запропоновано покращення. Новий підхід враховує характерні логістичні обмеження: одночасне використання кількох дронів, обмежений радіус дії (заряд батареї) кожного дрона, обмеження вантажопідйомності та інші практичні вимоги. Розроблено узагальнену математичну модель маршрутизації групи дронів, яку можна використати для оптимізації доставки "останньої милі". Наведено порівняння нової моделі з попередньою, показано переваги врахування додаткових факторів. На прикладі проілюстровано застосування моделі та проаналізовано результати оптимізації маршрутів при різній кількості дронів. Результати підтверджують, що залучення кількох БПЛА і врахування логістичних обмежень дозволяють істотно підвищити ефективність та швидкість доставки. Зроблено висновки щодо ефективності запропонованого підходу та окреслено напрямки подальших досліджень у сфері вдосконалення логістичних моделей доставки із використанням дронів.

Ключові слова і фрази: дрон, безпілотний літальний апарат, оптимізація маршруту, логістика, маршрутизація, математична модель, евристичні алгоритми, метаевристики, доставка останньої милі.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: s.martyniuk@chnu.edu.ua (Мартинюк С.В.), sydora.mykhailo@chnu.edu.ua (Сидора М.І.)

Вступ

Активний розвиток технологій безпілотних літальних апаратів відкриває нові можливості для логістики, особливо на етапі доставки "останньої милі". Використання

УДК 517.96

2010 *Mathematics Subject Classification:* 39B12, 45J05.

Information on some grant ...

дронів для перевезення невеликих вантажів дозволяє значно підвищити швидкість виконання замовлень та знизити витрати на транспортування порівняно з традиційними методами доставки. Дрони здатні доправляти посилки без затримок, минаючи дорожні затори, що є особливо важливим у густонаселених міських районах та віддалених важкодоступних місцевостях. Водночас застосування БПЛА в логістиці пов'язане з низкою технічних та організаційних обмежень – обмежений радіус дії та час автономного польоту через ємність батарей, невелика вантажопідйомність, залежність від погодних умов, необхідність дотримання авіаційних правил тощо. Ці фактори вимагають ретельного планування маршрутів і використання спеціалізованих алгоритмів оптимізації. Таким чином, задача побудови оптимальних логістичних маршрутів для дронів є актуальною проблемою, від вирішення якої залежить ефективність та безпека новітніх систем доставки.

Останніми роками спостерігається зростання наукового інтересу до проблеми маршрутизації дронів. Це обумовлено як появою нових прикладних завдань (комерційна доставка товарів, медична доставка у віддалені райони, моніторинг тощо), так і суттєвим прогресом у методах оптимізації. Задачі оптимального планування маршрутів для БПЛА поєднують в собі класичні задачі маршрутизації транспортних засобів (vehicle routing problems) з унікальними особливостями дронів - обмеженою дальністю, необхідністю повернення до бази, малою місткістю, можливістю комбінування з наземним транспортом тощо. Традиційні методи оптимізації маршрутів потребують адаптації під ці нові умови.

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНЬОЇ РОБОТИ

Проблематика оптимізації маршрутів дронів вже висвітлювалася в літературі, проте дослідження мають різні акценти. У роботі розглянуто сучасні підходи сучасних підходів до планування маршрутів БПЛА та запропоновано базову математичну модель для одного дрона. Зокрема, було класифіковано методи оптимізації на точні (вичерпний пошук, методи комбінаційної оптимізації), евристичні (жадібні алгоритми, наближені схеми) та метаевристичні (генетичні алгоритми, мурашині алгоритми, рій частинок, імітація відпалу тощо). Точні методи гарантують знаходження оптимального маршруту, але є обчислювально затратними і придатні лише для невеликих задач (десятки точок) [2]. Евристичні та метаевристичні підходи не гарантують глобального оптимуму, зате дають прийнятні рішення за поліноміальний час навіть для великих сценаріїв [3, 4, 5]. У роботі наведено порівняльну характеристику основних категорій методів: наприклад, точні методи забезпечують еталонну якість рішення на малих наборах (до ~ 10 адрес), тоді як метаевристики дозволяють масштабуватися до сотень точок ціною відхилення від оптимуму. Зважаючи на NP-складність задачі маршрутизації дронів, більшість новітніх досліджень зосереджені саме на вдосконалених евристичних та гібридних алгоритмах. У систематичному огляді 2018-2022 рр. відзначено, що понад 60% публікацій цієї тематики стосувалися застосування метаевристичних алгоритмів для планування траєкторій дронів [4].

Окремий напрям присвячено подоланню фізичних обмежень дронів. Зокрема, дослідники пропонують нетривіальні рішення для розширення радіусу дії: Чаудхурі С., Соловей К., Кочендерфер М. Дж., Павоне М. запропонували використовувати громадський транспорт як проміжний носій для дронів (модель "drone-public transport") – дрони частину шляху їдуть на автобусах або трамваях, економлячи заряд батареї і значно збільшуючи дальність доставки [8]. Алгоритмічно це реалізовано через ієрархічну дворівневу оптимізацію: на верхньому рівні призначають дронам послідовності доставок, мінімізуючи максимальний час виконання замовлень, а на нижньому – вирішують задачу періодичної маршрутизації флоту дронів з урахуванням розкладу громадського транспорту. Такий підхід продемонстрував високу масштабованість: модельне випробування показало можливість обслуговувати до 5000 посилок 200 дронами через мережу з 8000 зупинок, причому час розрахунку рішення – лічені секунди. Це свідчить про значний потенціал комбінування дронів із наземним транспортом.

Іншим популярним напрямом є інтеграція дронів з вантажними автомобілями, так звані системи типу "truck-and-drone". У таких моделях безпілотник запускається з вантажівки, виконує доставку до клієнта і повертається на вантажівку у певній точці маршруту. Оптимізаційна задача полягає у спільному плануванні маршруту вантажівки та дрона з мінімізацією загального часу доставки. Тун Б., Ван Цз., Ван С., Чжоу Ф., Мао С., Чжен В. розробили математичну модель для цієї задачі та запропонували алгоритм на основі табу-пошуку з змінними околами для її розв'язання [7]. Показано, що такий метаевристичний підхід знаходить близькі до оптимуму рішення, розподіляючи замовлення між вантажівкою і дроном таким чином, щоб мінімізувати сумарний час доставки. Враховуються обмеження ємності батареї дрона та необхідність зупинки вантажівки для очікування дрона в точках зустрічі. Задачі цього типу фактично є узагальненнями класичної задачі комівояжера з дронами (TSP-D) і також належать до NP-складних; для їх розв'язання застосовують як точні методи (методи декомпозиції, "гілок і меж" для малих випадків), так і евристики для більших сценаріїв [7, 14].

Важливим фактором є енергетичні витрати дронів. Роботи показують, що витрата заряду батареї залежить не лише від відстані, але й від режиму польоту (наявність вантажу, маневри, вітер тощо). Наприклад, дослідження 2021 року продемонстрували, що дрон витрачає значно більше енергії під час активного виконання задачі (перевезення вантажу чи відеозйомки), ніж у холостому транзитному переліті без навантаження. Тому при плануванні маршруту варто враховувати, що навіть порожній переліт між точками споживає ресурс батареї, а переліт з корисним навантаженням – тим більше. У ряді моделей вводять окремі змінні для обліку енергії на різних етапах маршруту (наприклад, "енерговитрати на переліт без доставки" і "енерговитрати під час доставки") [5]. Оптимальні маршрути слід будувати з урахуванням мінімізації сумарних енерговитрат, а не тільки відстані чи часу.

Також досліджується вплив погодних умов на маршрути дронів. Зокрема, Іто С., Акайва К., Фунабаші Й. запропонували методику планування маршрутів з урахуванням вітру та ваги вантажу. Розроблено кілька стратегій динамічного коригування траєкторії польоту відповідно до напрямку вітру: окремо оптимізація за вагою (DPFS-L), окремо за вітром (DPFS-W) та комбінована (DPFS-LW). Модель дозволяє дрону максималь-

но використати попутний вітер і мінімізувати зустрічний опір, завдяки чому вдалося скоротити час польоту й знизити енерговитрати майже на 10% порівняно зі стандартними методами на базі генетичного алгоритму та імітації відпалу [6]. Ці результати підкреслюють важливість динамічного врахування зовнішніх факторів (вітер, погода) при побудові маршрутів: маршрут, оптимальний за ідеальних умов, може виявитися далеким від оптимального або навіть небезпечним у реальних умовах (наприклад, при сильному зустрічному вітрі або опадах).

Підсумовуючи огляд праць, слід відзначити значний прогрес у вирішенні задач оптимізації маршрутів дронів. Проте більшість існуючих робіт зосереджені або на окремих аспектах (наприклад, тільки один дрон, або тільки моделювання енергоспоживання), або пропонують алгоритми для фіксованої постановки задачі. Попередня робота дала цілісний огляд підходів і представила базову модель маршруту одного дрона, проте не врахувала низку важливих логістичних обмежень. Зокрема, модель розглядала лише один БПЛА і не охоплювала випадки координації декількох дронів, не включала обмеження вантажопідйомності чи часові вікна доставок. Крім того, у попередній роботі не було представлено алгоритму розв'язання моделі на практиці (було лише концептуально сформульовано постановку як задачу комівояжера з обмеженням дальності). Таким чином, існує потреба у розробці більш узагальненої моделі, яка врахує зазначені логістичні фактори і стане основою для побудови ефективних алгоритмів маршрутної оптимізації в системах доставки з дронами.

2 МЕТА І ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даного дослідження є узагальнення та розвиток підходів до оптимізації маршрутів безпілотників у логістиці шляхом створення покращеної математичної моделі, що враховує ключові логістичні обмеження, не розглянуті в попередній роботі. Задля досягнення цієї мети необхідно вирішити такі завдання: (1) проаналізувати недоліки попередньої моделі маршрутизації дрона та визначити, які додаткові фактори слід включити; (2) розробити розширену математичну модель оптимального маршруту для групи дронів (множини БПЛА) з урахуванням обмежень на дальність польоту, вантажопідйомність та можливість паралельного виконання доставки кількома дронами; (3) запропонувати методичні підходи до розв'язання отриманої оптимізаційної моделі (оцінка обчислювальної складності, придатні алгоритмічні схеми - точні чи наближені); (4) перевірити працездатність моделі на прикладному сценарії, порівняти результати оптимізації для різних конфігурацій (різна кількість дронів, різні обмеження) та проаналізувати ефект врахування нових обмежень; (5) сформулювати висновки щодо переваг нової моделі та напрямів її подальшого вдосконалення (наприклад, врахування динамічних факторів, багатодопо, інтеграція з наземним транспортом тощо).

3 МЕТОДОЛОГІЯ ТА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Для вирішення поставлених завдань використано методи математичного моделювання та комбінаторної оптимізації. Запропонована модель формулюється як задача

цілочисельного лінійного програмування, що узагальнює класичну задачу комівояже-ра з додатковими обмеженнями, характерними для дронів. Модель належить до NP-складних оптимізаційних задач і для великих розмірів може розв'язуватися лише евристичними або метаевристичними методами. Однак її явне формулювання є необхідним кроком для розуміння структури задачі та розробки ефективних алгоритмів [4].

Розглянемо систему доставки, де m дронів (БПЛА) використовуються для виконання доставки до низки клієнтів. Нехай дано множину точок доставки $V = \{1, 2, \dots, n\}$ (клієнтів), які повинен відвідати хоча б один дрон, та базу (склад) 0 , з якої дрони стартують і куди повертаються після виконання завдань. Таким чином, повна множина вершин для маршрутизації – $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, де 0 – депо (база). Кожній парі вершин i, j (включно з базою) відповідає величина d_{ij} – відстань (або час польоту) від точки i до точки j . Значення d_{ij} можуть бути отримані з географічних координат або за допомогою моделей врахування рельєфу та перешкод (у цій роботі припускаємо, що значення відомі та фіксовані для заданої мережі точок).

Введемо бінарні змінні:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{якщо дрон } k \text{ летить безпосередньо з точки } i \text{ до точки } j, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Таким чином, набір змінних описує маршрути кожного з дронів як цикли, що починаються і завершуються в депо 0 , і проходять через деякі підмножини точок доставки.

Цільова функція. Як критерій оптимальності візьмемо мінімізацію загальної сумарної довжини маршрутів усіх дронів (що еквівалентно мінімізації сумарного часу в польоті за умови однакової швидкості дронів). Цільова функція має вигляд сумарної вартості всіх використаних ребер маршрутів:

$$F = \min \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n d_{ij} x_{ij}^k. \quad (1)$$

Мінімізуючи (1), ми зменшуємо загальний проліт дронів, що важливо для економії енергії та ресурсів. У реальних задачах можливі й інші критерії – наприклад, мінімізація максимального часу доставки (щоб всі замовлення були виконані якомога швидше) або багатокритеріальні функції, що враховують і час, і енерговитрати. Проте модель легко адаптується під такі критерії, і для визначеності далі розглядаємо саме (1).

Обмеження моделі. Модель включає такі групи обмежень:

1. **Унікальність відвідування кожної точки.** Кожен клієнт (точка $i \in \{1, \dots, n\}$) має бути обслужений рівно один раз одним з дронів. Це накладає умову, що із кожної такої точки виходить рівно одне ребро маршруту в якомусь дроні, і відповідно входить рівно одне ребро. Запишемо дане обмеження у вигляді балансу потоків для кожної точки у сукупності маршрутів:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^n x_{ij}^k = 1, \quad \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^n x_{ij}^k = 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Тут перша рівність гарантує, що з точки i виходить один маршрутний відрізок (точка залишена одним дроном), а друга – що в точку i хтось прибув (точка відвідана). В сукупності (2) забезпечує відвідування i рівно одним дроном. Ці дві умови можна об'єднати і сформулювати як: кожен клієнт включений рівно в один маршрут одного дрона.

2. Структура маршрутів кожного дрона. Кожен дрон виконує маршрут, який починається у базі 0 та завершується в базі 0. При цьому для внутрішніх точок маршруту необхідно забезпечити "вхід = вихід" – тобто неперервність шляху. Для кожного дрона k мають виконуватися такі балансові співвідношення:

$$\sum_{j=1}^n x_{0j}^k \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n x_{0i}^k \leq 1, \quad (3)$$

$$\sum_{j=0}^n x_{ij}^k = \sum_{j=0}^n x_{ji}^k \leq 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}. \quad (4)$$

Рівності (4) означають, що для кожного дрона кількість входів у будь-яку проміжну точку дорівнює кількості виходів з неї (0 або 1), тобто маршрут дрона k не розгалужується та є неперервним циклом. Нерівності (3) задають, що дрон k може розпочати (і відповідно завершити) не більше одного маршруту – фактично кожен дрон або використовується (тоді з бази виходить і до бази заходить по одному ребру для нього), або ні. У випадку, коли кількість дронів m більша, ніж потрібно для покриття всіх точок, деякі дрони просто не будуть використовуватися в оптимальному рішенні (для них і вихід, і вхід з бази будуть нульовими).

3. Обмеження вантажопідйомності. Кожен дрон може перевозити обмежену масу вантажу за один виліт. Нехай q_i – вага (або об'єм) вантажу, що призначений для клієнта i ; Q – максимальна вантажопідйомність (або місткість) одного дрона. Щоб маршрут дрона не перевищив його вантажні можливості, накладається обмеження на сумарний вантаж, доставлений одним дроном за один рейс. Математично для кожного дрона k :

$$\sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=0}^n x_{ij}^k \leq Q, \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Вираз $\sum_{j=0}^n x_{ij}^k$ дорівнює 1, якщо точка i входить до маршруту дрона k (з неї виходить ребро в маршруті k), і 0 – якщо не входить. Таким чином, ліва частина (5) дорівнює сумарному вантажу, закріпленому за дроном k . Нерівність (5) забезпечує, що жоден дрон не візьме більше вантажу, ніж може нести. Зауважимо, що у випадку дуже малої вантажопідйомності (коли Q менше за будь-який окремий q_i) задача може не мати розв'язків – це означатиме, що деякі замовлення занадто важкі для наявних дронів і їх необхідно виконувати іншим транспортом.

4. Обмеження дальності (заряду батареї). Критичною особливістю дронів є обмежений запас ходу: дрон не може здійснювати маршрут довше, ніж дозволяє його батарея (якщо не передбачено заміни батарей чи підзарядки в польоті). Введемо параметр D_{\max} – максимальна сумарна дистанція, яку може пролетіти дрон за один виліт

(до повернення на базу) без підзарядки. Тоді для кожного дрона накладаємо обмеження на сумарну довжину його маршруту:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n d_{ij} x_{ij}^k \leq D_{\max}, \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Це обмеження гарантує, що загальна відстань (або час) польоту дрона k в межах одного маршруту не перевищує допустимої. Якщо оптимізаційна модель спробує "нагрузити" одного дрона занадто великою кількістю точок далеко від бази, нерівність (6) зробить таке рішення недопустимим і вимагатиме задіяти додатковий дрон (або залишити частину точок необслугованими, що суперечило би (2)). Таким чином, (6) враховує обмежений заряд батарей і радіус дії БПЛА. За потреби, модель можна розширити для врахування проміжних підзарядних станцій: у цьому випадку у множину вершин V додаються спеціальні вершини-станції, які дрон може відвідувати для заміни батареї, а в обмеження (6) замість жорсткого ліміту D_{\max} – вводиться інша схема обліку енергоспоживання (наприклад, максимум на відрізок між підзарядками). У даній роботі для простоти не вводимо проміжних станцій, вважаючи, що кожен дрон повинен виконати свій маршрут від бази до бази на одному заряді.

5. Уникнення підциклів. Класичне обмеження цілісності маршруту: потрібно унеможливити виникнення підциклів (субтурів), тобто замкнених маршрутів, що не містять бази 0. У відомій формі Міллера–Такера–Земліна для задач комівояжера вводять додаткові змінні порядку відвідування. Адаптуємо цей підхід для багатьох дронів: введемо допоміжні змінні u_i^k для всіх вершин $i \in \{1, \dots, n\}$ і кожного дрона k , що відповідають умовному номеру (позиції) відвідин точки і дроном k у його маршруті. Тоді для будь-яких двох різних точок i і j , та для кожного дрона k , додамо нерівність:

$$u_i^k - u_j^k + (n + 1)x_{ij}^k \leq n, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall k. \quad (7)$$

Це стандартне підциклове обмеження: воно забезпечує, що не може існувати цикл без нуля, оскільки в такому циклі неможливо задовольнити всі нерівності (7). Інтуїтивно, (7) означає: якщо дрон k летить з i в j , тоді порядковий номер u_j^k має бути $u_i^k + 1$ (або більший на певну кількість, не більше n). Для випадків, коли між двома точками немає прямого переходу в маршруті k , нерівність автоматично виконується і не впливає на рішення. Таким чином, система обмежень (7) розриває всі внутрішні цикли, примушуючи маршрут кожного дрона формувати єдиний цикл, що обов'язково включає базу (через умови (3)).

Повна математична модель оптимального планування маршрутів групи дронів складається з цільової функції (1) та обмежень (2)-(7) при $x_{ij}^k \in \{0, 1\}$ і додаткових змінних $u_j^k \geq 0$. Цю модель можна розглядати як варіацію задачі розподіленого комівояжера (multi-depot VRP) з однією загальною базою і з обмеженнями на ресурс (довжину маршруту) та місткість. Важливо підкреслити, що навіть ця розширена модель є спрощеною: вона не враховує, наприклад, часові вікна доставки, пріоритети замовлень, динамічне надходження нових заявок тощо. Проте запропонована постановка вже набагато ближча до реальних умов експлуатації дронів, ніж попередня базова модель, і може слугувати основою для подальшого ускладнення.

4 ВРАХУВАННЯ НЕДОПУСТИМИХ МАРШРУТІВ У МАТЕМАТИЧНІЙ МОДЕЛІ

У реальних умовах експлуатації систем доставки вантажів за допомогою безпілотних літальних апаратів часто виникають ситуації, коли прямий переліт між двома точками (клієнтами або депо) є неможливим або забороненим. Це може бути зумовлено такими причинами:

- **Регуляторні обмеження:** наявність зон із заборонаю польотів (режимні об'єкти, військові та урядові споруди, міжнародні кордони, спеціальні авіаційні зони тощо).

- **Фізичні бар'єри:** перешкоди рельєфу (гори, водойми, висока щільність забудови), які унеможливають прямий переліт.

- **Операційні або логістичні вимоги:** відсутність необхідних умов для здійснення посадки або розвантаження, потреба в транзитному проходженні через проміжні пункти.

Хоча такі обмеження можуть бути формально представлені у моделі шляхом штучного збільшення величин d_{ij} , цей підхід має суттєві недоліки. По-перше, він створює можливість непередбачуваних аналітичних проблем (числова нестабільність розрахунків, погіршення умовності задачі). По-друге, він не гарантує повного виключення небажаних ребер через особливості роботи оптимізаційних алгоритмів (особливо евристичних і метаевристичних), які можуть розглядати такі ребра навіть з високими "штрафами", якщо це знижує загальну цільову функцію.

Таким чином, для коректного і точного врахування згаданих ситуацій доцільно явно вводити додаткові логічні обмеження, які унеможливають вибір окремих ребер (переходів між точками доставки).

5 ФОРМАЛІЗАЦІЯ ОБМЕЖЕНЬ НА НЕДОПУСТИМІ РЕБРА

Позначимо через множину:

$$\mathcal{F} \subseteq \{(i, j) \mid i, j \in \{0, \dots, n\}, i \neq j\}$$

множину **недопустимих (заборонених) ребер**. Вона визначає всі пари точок, прямий переліт між якими є неможливим чи забороненим за умовами логістики, законодавства або фізичних бар'єрів. Для того, щоб математична модель чітко враховувала ці обмеження, слід доповнити її такими рівностями:

$$x_{ij}^k = 0, \forall (i, j) \in \mathcal{F}, \forall k = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Ця група обмежень у явній формі забороняє використання конкретних переходів між точками доставки для будь-якого дрона з множини наявних транспортних засобів. Завдяки цьому модель отримує низку значних переваг перед альтернативним методом "штрафування" великими значеннями d_{ij} :

- **Аналітична прозорість і зрозумілість:** явні обмеження дозволяють чітко бачити, які маршрути виключені, що полегшує подальший аналіз та аудит рішення.

- **Підвищення ефективності обчислень:** оптимізаційні алгоритми не витрачають час і ресурси на перевірку недопустимих варіантів маршрутів, які завідомо не можуть бути частиною розв'язку.

- **Числова стабільність:** уникнення великих числових значень дозволяє уникнути проблем округлення і знижує ризик некоректної роботи чисельних алгоритмів розв'язування.

6 ОБГОВОРЕННЯ В КОНТЕКСТІ СУЧАСНИХ РЕАЛІЙ

На тлі швидкого впровадження дронів у міські та регіональні системи доставки вантажів у багатьох країнах світу, включно з Україною, особливо гостро постає проблема врахування регуляторних та фізичних обмежень для польотів. Так, наприклад, через військові дії, особливий правовий режим у прифронтових зонах або дію норм міжнародної авіації багато маршрутів можуть бути непридатними для використання навіть тимчасово. Також важливими є фізичні перешкоди (велика забудова у містах, великі водні масиви або гори у сільській місцевості тощо). У цих умовах явне представлення множини заборонених ребер \mathcal{F} є надзвичайно актуальним і практично важливим.

Крім того, запропонований спосіб явного введення обмежень відповідає сучасним підходам до математичного моделювання транспортних систем з високим рівнем деталізації та практичної придатності рішень. Це дозволяє швидко адаптувати модель до змін у навколишньому середовищі або регуляторних нормах без значних додаткових обчислювальних витрат або ризику втрати аналітичної чіткості.

Таким чином, додатковий блок обмежень (8) не лише робить модель реалістичнішою, а й значно підвищує її практичну цінність і наукову строгість.

7 ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ

Розглянемо спрощений приклад для демонстрації роботи моделі. Припустимо, що база знаходиться в центрі області доставки, а клієнти розташовані навколо неї. Нехай маємо $n = 6$ точок доставки з координатами (в умовних одиницях): $P_1(2, 4)$, $P_2(3, -1)$, $P_3(-2, 5)$, $P_4(5, 3)$, $P_5(-3, -2)$, $P_6(4, -4)$, а база $O(0, 0)$. Відстані d_{ij} розраховуються як евклідові між відповідними координатами. Нехай кожен дрон може пролетіти не більше $D_{\max} = 20$ (умовних відстаней) за рейс і нести не більше $Q = 2$ одиниць вантажу. Припустимо, що всі посилки мають вагу $q_i = 1$ (одиниця), тож вантажопідйомність не обмежує кількість точок (кожен дрон може взяти до 2 посилок за рейс).

Спочатку розглянемо випадок використання тільки одного дрона ($m = 1$). З точки зору моделі це зводиться до класичної задачі комівояжера: дрон має об'їхати всі 6 точок і повернутися на базу, мінімізуючи сумарний шлях. Для заданих координат оптимальний маршрут (знайдений перебором всіх перестановок для наочності) може мати вигляд $O \rightarrow P_3(-2, 5) \rightarrow P_1(2, 4) \rightarrow P_4(5, 3) \rightarrow P_2(3, -1) \rightarrow P_5(-3, -2) \rightarrow O$. Довжина цього маршруту становить приблизно 31.2 (ум. од.). При цьому обмеження дальності: маршрут довжиною 31.2 перевищує $D_{\max} = 20$, тобто один дрон фізично не зміг би такий шлях подолати без підзарядки. Таким чином, для одного дрона задача не має

допустимого рішення при $D_{\max} = 20$ – модель (1)-(7) це відобразить тим, що нерівність (6) порушується. Реально це означає, що один дрон не зможе обслужити всіх 6 точок за один виліт. Необхідно або передбачати проміжну зарядку, або, що більш доцільно, залучити додаткових дронів.

Розглянемо випадок $m = 2$ дронів. При наявності двох дронів оптимальна стратегія – розподілити точки між ними таким чином, щоб кожен дрон обслуговував групу географічно близьких точок і жоден маршрут не перевищував 20. Для нашого набору точок один з можливих оптимальних розподілів: наприклад, дрон A бере точки $\{P_1, P_3, P_4\}$, а дрон B – точки $\{P_2, P_5, P_6\}$. Маршрут дрона A може бути: $O \rightarrow P_3(-2, 5) \rightarrow P_1(2, 4) \rightarrow P_4(5, 3)$, його довжина ~ 18.5 ум. од. Маршрут дрона B : $O \rightarrow P_5(-3, -2) \rightarrow P_2(3, -1) \rightarrow P_6(4, -4)$, довжина ~ 17.2 . Обидва маршрути менші за поріг $D_{\max} = 20$, отже обмеження дальності виконуються. Сумарна довжина двох маршрутів ~ 35.7 , що дещо більше за 31.2 (шлях одного дрона без обмежень). Це очікувано, адже двоє дронів виконують частину шляху паралельно (кожен мусить окремо злітати з бази і повернутися, що додає "зайві" пробіги). Зате максимальний час доставки суттєво зменшується: якщо одним дроном всі доставки займали б 31.2 (умовно, хвилин), то двома дронами – близько 18.5 (тобто на 40% швидше). Кожен дрон летить по своєму маршруту одночасно, і загальний процес завершиться, коли останній з двох дронів повернеться (≈ 18.5). Отримане рішення задовольняє всі обмеження моделі (2)-(7): всі точки розподілені однозначно між двома маршрутами, жоден маршрут не перевищує ані вантажопідйомності (2 точки – $2 \text{ кг} < Q = 2$), ані дальності ($\leq 18.5 < D_{\max}$).

Для трьох дронів ($m = 3$) можна розподілити 6 точок приблизно порівну – по 2 точки на дрон. Один з оптимальних варіантів: дрон A обслуговує $\{P_1, P_4\}$, дрон B – $\{P_2, P_6\}$, дрон C – $\{P_3, P_5\}$. Довжини маршрутів у цьому випадку становлять ~ 13.5 , ~ 12.0 і ~ 16.1 відповідно. Найдовший маршрут – ~ 16.1 , тобто усі доставки будуть виконані приблизно за 16 умовних хвилин (ще швидше). Сумарний наліт трьох дронів ~ 41.6 , тобто дещо більший, ніж у випадку двох (як і слід було очікувати, більше маршрутів – більший загальний пробіг). Цей приклад ілюструє важливий компроміс: залучення більшої кількості дронів дозволяє зменшити загальний час виконання всіх доставок (за рахунок паралельності), проте сумарні витрати палива/енергії зростають (оскільки щоразу кожен дрон долає шлях від/до бази і може мати недовантаження). У реальних умовах вибір кількості дронів залежатиме від пріоритетів: якщо головна мета – мінімізувати час очікування клієнтів, доцільно залучати більше дронів; якщо важливіше мінімізувати витрати, можливо раціональніше використовувати менше дронів або комбінувати їх з наземними кур'єрами.

Наведений сценарій підтверджує адекватність запропонованої моделі. Модель автоматично "вирішує", скільки дронів задіяти і як саме розподілити між ними завдання, виходячи з критеріїв оптимізації і заданих обмежень. При $D_{\max} = 20$ модель обере мінімально необхідну кількість дронів (в нашому прикладі – 2) для покриття всіх точок без порушення обмеження дальності. Якщо збільшити D_{\max} до 35, то оптимальним стало б використання одного дрона (оскільки він міг би охопити всі точки сам і (1) б дала меншу сумарну відстань). Таким чином, модель здатна відображати різні режими роботи системи: за суворіших обмежень – активується більше дронів, за м'якших – частина

дронів може лишатися невикористаною.

8 РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Запропонована розширена модель маршрутизації дронів дозволяє якісно врахувати основні логістичні вимоги, які ігнорувалися в попередніх постановках. Включення обмежень (5)-(6) до моделі гарантує, що отримані оптимальні маршрути є реалістичними з точки зору фізичних можливостей дронів (вони не перевантажені вантажем і не вичерпують батарею до завершення маршруту). Включення декількох дронів ($m > 1$) у модель дозволяє знаходити рішення із розподілом завдань, що суттєво скорочує час виконання всіх доставок завдяки паралельній роботі. На прикладі ми побачили, що час завершення всіх доставок (максимальна тривалість маршруту) зменшується при переході від одного дрона до двох на $\sim 40\%$, а до трьох – ще на $\sim 15\%$ (закон спадної віддачі: кожен додатковий дрон дає менше виграшу, проте виграш є значущим). З іншого боку, сумарна дистанція, яку пролітають дрони, зростає при збільшенні їх кількості, що відображає більші сукупні витрати енергії. Цей компроміс "швидкість vs витрати" є типовим для задач з кількома транспортними засобами, і наша модель дозволяє гнучко дослідити його шляхом варіювання вагових коефіцієнтів у цільовій функції або додаванням обмежень на ресурси.

Порівняння нової моделі з базовою моделлю [1] наведено у Таблиці 1. Як видно, розширена модель охоплює ширший клас практичних ситуацій. Зокрема, можливість використання кількох дронів робить модель придатною для сценаріїв масової доставки (флот дронів) – на відміну від моделі [1], де розглядався одиничний дрон. Обмеження на вантажопідйомність дозволяє планувати маршрути з множинними посилками, що актуально для оптимізації завантаження дронів. Обмеження на дальність присутнє в обох моделях, але у новій моделі воно критично впливає на вибір кількості маршрутів. Також у нашій постановці легше врахувати додаткові фактори: наприклад, введення часових вікон доставки потребуватиме лише додавання часового параметру до кожної точки та відповідних обмежень, не змінюючи базової структури моделі.

Таблиця 1 – Порівняння базової моделі та вдосконаленої моделі маршрутизації дронів

Характеристика	Базова модель	Нова модель
Кількість дронів	1 (один маршрут)	m дронів (декілька маршрутів)
База (депо)	Одна, повернення обов'язкове	Одна, повернення обов'язкове
Обмеження дальності (батарея)	Так, максимальна довжина маршруту (враховано)	Так, для кожного дрона (враховано)
Вантажопідйомність дрона	Не враховано	Враховано (обмеження (5))
Часові обмеження (вікна доставки)	Не враховано	Не враховано (можливе розширення)
Можливість підзарядки на маршруті	Ні	Ні (можливе розширення)
Координація з наземним транспортом	Ні	Ні (можливе розширення)
Метод розв'язання	Не визначено (теоретична модель)	Комбінаторна оптимізація (точні методи для малих n , метаевристики для великих)
Очікуваний масштаб задачі	Невеликі (до ~ 10 точок через обмеження обчислень)	Більші задачі (сотні точок за рахунок використання наближених алгоритмів)

Як видно з Таблиці 1, удосконалена модель є більш універсальною. Вона містить базову як окремий випадок (при $m = 1$, відсутніх обмеженнях (5) тощо). Найбільш суттєва відмінність - підтримка декількох дронів - дозволяє моделювати ситуації, коли завдання розподіляється між флотом дронів, що актуально для реальних служб доставки. На практиці програмне забезпечення для керування флотом дронів уже реалізує подібні функції: алгоритми автоматично визначають, який дрон яке замовлення доставляє, з урахуванням місцеположення дронів, рівня заряду, пріоритетності замовлень тощо [9, 10, 11]. Наша модель може слугувати теоретичною основою для таких систем, хоча для врахування всіх нюансів її потрібно розширювати (наприклад, включити часові вікна, динамічні оновлення замовлень, імовірнісне моделювання погоди тощо).

З точки зору рішень, модель (1)-(7) є складною для точного розв'язання при великих n . Проте існують сучасні інструменти (CP-SAT солвери, методи відсікання гілок і меж, розв'язувачі типу Gurobi, CPLEX), що можуть знайти оптимум для помірних масштабів (десятки точок, кілька дронів). Для більших задач доцільно застосувати метаевристичні алгоритми, про які йшлося в огляді: генетичні алгоритми, мурашині колонії, алгоритми рою частинок та ін. – адаптовані під нашу модель. Наприклад, можна закодувати рішення у вигляді послідовності точок для кожного з m дронів і застосувати генетичні оператори кросоверу та мутації для пошуку кращих розподілів. Інший підхід - побудувати початкове рішення (наприклад, жадібно призначити точки найближчим

дронам) і покращувати його методом табу-пошуку або симульованого відпалу. Базова модель розглядала лише мурашиний алгоритм для одного дрона; для нової моделі знадобиться складніша реалізація, але принципи ройової оптимізації залишаються придатними. Зокрема, можна запровадити "рой" дронів-мурах, кожен з яких формує свій маршрут, обмінюючись інформацією про вигідні підмаршрути через спільну феромонну карту (це перспективний напрям для майбутньої роботи).

Звичайно ми усвідомлюємо важливість аналізу складності та експериментальної перевірки моделі із сучасними солверами, проте це не входить в межі цієї статті. Наступний етап нашої роботи – програмна реалізація, оцінка ефективності та порівняльний аналіз із поточними системами, що дозволить перейти від теорії до практичного застосування запропонованого підходу. Такий аналіз дасть змогу визначити межі застосовності моделі залежно від розміру задачі та доступних обчислювальних ресурсів. Також це відкриває перспективи для подальших теоретичних і практичних досліджень у цій предметній області.

Необхідно відзначити, що реальні впровадження дронів у логістиці вже демонструють ефективність оптимізованих маршрутів. Компанія Amazon у проєкті Prime Air здійснює автономну доставку дронами дрібних посилок на відстань до ~ 15 км за 15-30 хв [9]. Система Zipline використовує крилаті дрони для доставки медичних вантажів у віддалені райони (Руанда, Гана) з радіусом до 80-100 км, скидаючи вантаж на парашуті без посадки дрона [10]. Проєкт Wing (Alphabet/Google) за кілька років виконав десятки тисяч міських доставок дронами, використовуючи бази-"вулики" та спуск вантажу на тросі, щоб не сідати на землю [11]. DHL Parcelcopter успішно тестував безпілотники для доставки у гірській місцевості, скорочуючи час перевезення до віддалених селищ [12]. В Україні компанія "Нова Пошта" провела експериментальний міжміський політ дрона на 500 км (Київ–Львів) із доставкою посилки за ~ 7 годин [13]. У всіх цих випадках оптимізація маршрутів закладена в програмне забезпечення: система автоматично прокладає шлях з урахуванням дальності, погоди, рельєфу, авіамаршрутів та інших обмежень. Представлена в цій статті модель узагальнює ключові аспекти, спільні для подібних систем, і може бути основою для розробки алгоритмів планування польотів дронів у логістиці.

ВИСНОВКИ

Оптимізація маршрутів безпілотних літальних апаратів у логістиці – багатогранна науково-прикладна проблема, що поєднує класичні задачі маршрутизації транспортних засобів з унікальними особливостями дронів. У даній роботі представлено вдосконалену математичну модель задачі маршрутизації дронів, яка є розвитком моделі із попереднього дослідження. Нова модель враховує одразу кілька важливих логістичних обмежень: можливість використання кількох дронів одночасно, обмеження радіусу дії (заряду батареї) для кожного маршруту, а також обмеження вантажопідйомності дронів. Запропонована постановка формалізована як задача цілочислової оптимізації (1)-(7) і належить до класу NP-складних; для її розв'язання на практиці доцільно використовувати наближені методи. Проте явне формулювання дозволило проаналізувати

структуру проблеми та вплив різних параметрів.

Проведений аналіз та числовий приклад показали, що врахування додаткових обмежень змінює оптимальну стратегію маршрутизації. Зокрема, залучення декількох дронів суттєво знижує час доставки замовлень (при достатній кількості дронів час виконання партії замовлень скорочується на 40-50% і більше порівняно з одним дроном), хоча загальні витрати енергії дещо зростають. Обмеження на батарею автоматично приводить до розподілу завдань між кількома рейсами: модель не дозволяє перевантажити один дрон надто довгим маршрутом, тож дальні точки буде охоплено кількома маршрутами або кількома дронами. Обмеження вантажоємності гарантує реалістичність рішень щодо кількості посилок на один рейс: модель за потреби розбиватиме доставку важких посилок на кілька дронів чи рейсів. У сукупності нова модель дає більш надійні та здійсненні плани польотів, ніж спрощена модель, що дуже важливо для практичного впровадження дронів.

Результати роботи мають прикладне значення для проектування систем логістики з використанням БПЛА. На основі запропонованої моделі можуть бути розроблені алгоритми, вбудовані в програмне забезпечення центрів керування дронами. Зокрема, модель може бути розширена для врахування динамічних факторів: надходження нових замовлень у реальному часі, зміни погодних умов, непередбачувані затримки. Перспективним напрямом є інтеграція даної моделі з моделями наземного транспорту (побудова спільних оптимізаційних схем для системи "вантажівка-дрон" [7]) та з мультимодальними мережами доставки (коли дрони взаємодіють із складами, кур'єрами, автономними роботами тощо). Ще одним напрямом подальших досліджень є розробка спеціалізованих методів розв'язання: адаптація метаевристик під багатодронову маршрутизацію, використання методів машинного навчання для швидкого оцінювання маршруту або розподілу навантаження між дронами. Також важливо врахувати регуляторні обмеження (заборони польотів над певними зонами, обмеження висоти, часові рамки для польотів у містах) – ці вимоги можна додати до моделі у вигляді додаткових обмежень на допустимі ребра маршрутів чи часових змінних.

Таким чином, результати цього дослідження свідчать щодо переваг та ефективності розширеного підходу до оптимізації маршрутів БПЛА. Його використання дозволить покращити швидкість при доставці логістичних вантажів за рахунок дронів та забезпечити доступність доставки в межах технічних стандартів, враховуючи революцію залучення БПЛА в торгівлю. Проте практичне використання у ряді країн [1]-[13] демонструє, що саме оптимізація маршрутів є ключовим фактором, що визначає успішну реалізацію. Ці ідеї та узагальнені модельні рішення можуть стати основою подальшого наукового та прикладного розвитку в створенні стійких, швидких та безпечних систем доставки з використанням БПЛА.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Martyniuk S.V., Sydora M.I. Optimization of drone routes in logistics // The world of scientific research: Collection of scientific works. 2025. Issue 39. 168-177.

- [2] Kucherenko O. I., Vakalyuk T. A. *A review of research on drone routing systems*. Scientific notes of the V.I. Vernadsky TNU. Series: Technical Sciences, 2024. Vol. 35(74), № 1. 178-184. DOI: 10.32782/2663-5941/2024.1.1/27.
- [3] Leshchenko Y., Moroz I., Yukhymchuk M. *Using UAVs to optimize last mile delivery*. Measuring and computing technology in technological processes. 2024. № 4(80). 53-60. DOI: 10.31891/2219-9365-2024-80-53.
- [4] Hooshyar M., Huang Y. *Meta-heuristic Algorithms in UAV Path Planning Optimization: A Systematic Review (2018-2022)*. Drones. 2023. Vol. 7(12). 687. DOI: 10.3390/drones7120687.
- [5] Tang G., Xiao T., Du P., Zhang P., Liu K., Tan L. *Improved PSO-Based Two-Phase Logistics UAV Path Planning under Dynamic Demand and Wind Conditions*. Drones. 2024. Vol. 8(8). 356. DOI: 10.3390/drones8080356.
- [6] Ito S., Akaiwa K., Funabashi Y., et al. *Load and Wind Aware Routing of Delivery Drones*. Drones. 2022. Vol. 6(2). 50. DOI: 10.3390/drones6020050.
- [7] Tong B., Wang J., Wang X., Zhou F., Mao X., Zheng W. *Optimal Route Planning for Truck-Drone Delivery Using Variable Neighborhood Tabu Search Algorithm*. Applied Sciences. 2022. Vol. 12(1). 529. DOI: 10.3390/app12010529.
- [8] Choudhury S., Solovey K., Kochenderfer M. J., Pavone M. *Efficient Large-Scale Multi-Drone Delivery Using Transit Networks*. Journal of Artificial Intelligence Research. 2021. Vol. 70. 757-788. DOI: 10.1613/jair.1.12450.
- [9] Amazon Prime Air – Drone Delivery Service. – Amazon.com (official information about the project), 2022-2023. – URL: <https://www.aboutamazon.com/prime-air>.
- [10] Zipline Drone Delivery - Company Website. - Zipline International Inc., 2023. - URL: <https://www.flyzipline.com> (projects in Rwanda and Ghana).
- [11] Wing Drone Delivery - About Wing. - Wing (Alphabet Inc.), 2023. - URL: <https://wing.com>.
- [12] DHL successfully concludes trial of third DHL Parcelcopter generation. – DHL Press Release, 2017. – URL: <https://inmotion.dhl/en/dr1/article/successful-trial-integration-of-dhl-parcelcopter-into-logistics-chain>.
- [13] "New mail" delivered a package by drone from Kyiv to Lviv. – The Village Ukraine, 02.06.2021. – URL: <https://www.village.com.ua/village/business/news/318883-nova-poshta-dostavila-posilku-dronom-z-kyiva-do-lvova>.
- [14] Vasquez S. A., Angulo G., Clapp M. A. *An Exact Solution Method for the TSP with Drone Based on Decomposition*. Optimization Online, preprint, 2020. 19 с. – URL: <https://optimization-online.org/wp-content/uploads/2020/04/7721.pdf>.

Martyniuk S.V., Sydora M.I. *Optimization of unmanned aerial vehicle routes in logistics: an extended mathematical model*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 141–156.

The article considers the problem of optimizing routes for unmanned aerial vehicles (UAVs, drones) in logistics operations and proposes an improved mathematical model of routes. This study is a logical continuation of the authors' previous work [1], where a review of drone route planning methods was performed and a basic model of route optimization for a single UAV was formulated. This article critically analyzes the previous model, identifies its limitations (ignoring a number of logistical factors, including many drones, payload, time constraints, etc.) and proposes improvements. The new approach takes into account typical logistical constraints: simultaneous use of several drones, limited range (battery charge) of each drone, payload limitations, and other practical requirements. A generalized mathematical model of drone group routing is developed, which can be used to optimize the "last mile" delivery. A comparison of the new model with the previous one is presented, and the advantages of taking additional factors into account are shown. The application of the model is illustrated by an example and the results of route optimization with different numbers of drones are analyzed. The results confirm that the involvement of several UAVs and taking into account logistical constraints can significantly increase the efficiency and speed of delivery. Conclusions are drawn regarding the effectiveness of the proposed approach and directions for further research in the field of improving logistics delivery models using drones are outlined.