Bukovinian Math. Journal. 2025, **13**, 2, 96–113 Буковинський матем. журнал 2025, Т.13, №2, 96–113

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.11

Грушка Я.І.

ПРО ВНУТРІШНІЙ ЧАС НА СИНХРОНІЗОВАНІЙ ОРІЄНТОВАНІЙ МНОЖИНІ*

Орієнтовані множини — це найпростіші математичні структури, які моделюють сукупності еволюціонуючих об'єктів. Дана робота присвячена проблемі існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині. З інтуїтивного погляду внутрішній — це такий час, хід якого можна "спостерігати і фіксувати" "живучи всередині" орієнтованої множини. В роботі доведено, що отримана в попередніх роботах достатня ознака існування і єдиності внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині не є необхідною, а також встановлено одну необхідну ознаку існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині і показано, що ця ознака не є достатньою.

Ключові слова і фрази: Орієнтована множина, лінійно впорядкована множина, внутрішній час, теорія мінливих множин.

Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: *grushka@imath.kiev.ua*

* Ця робота присвячена пам'яті професора Володимира Кириловича Маслюченка.

1 Вступ

Поняття орієнтованої множини є базовим найелементарнішим поняттям теорії мінливих множин. З інтуїтивної точки зору мінливі множини це — сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій, тобто — змінювати свої властивості, з'являтись чи зникати, розпадатись на декілька частин чи, навпаки, декілька об'єктів можуть зливатись в один. Крім того картина еволюції мінливої множини може залежати від способу спостереження, тобто від системи відліку. Основною мотивацією для створення теорії мінливих множин послужила шоста проблема Гільберта, тобто проблема математично строгого формулювання основ теоретичної фізики. Ця проблема, була поставлена Д. Гільбертом ще в 1900 р. (див. [1]), але, і на сьогодні вона залишається дуже актуальною [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Проблема побудови математичної теорії мінливих

УДК 510.22, 512.562
2010 *Mathematics Subject Classification:* 03E75, 06A06.
Робота частково підтримана грантом від Фундації Саймонса (SFI-PD-Ukraine- 00014586, Grushka Ya.I.).

множин, тобто “множин” із переліченими вище властивостями, в різних формах ставилась, зокрема, в роботах [11, 12, 13, 14]. На математично строгому рівні теорія мінливих множин була побудована в роботах [15, 16, 17, 18] та ін. Найбільш повний і систематичний виклад цієї теорії можна знайти в препринті [19] та дисертації [20].

Орієнтовані множини можна трактувати як найпримітивніші абстрактні моделі сукупностей мінливих об’єктів, що еволюціонують в рамках однієї (фіксованої) системи відліку. Також орієнтовані множини є найпростішими математичними структурами, в рамках яких можна ввести поняття часу. Виявляється, що існує нескінченно багато способів побудувати (визначити) час на довільній орієнтованій множині, але особливо цікавим видом часу га орієнтованих множинах є внутрішній час. З інтуїтивної точки зору внутрішній час на орієнтованій множині — це такий час, хід якого можна “спостерігати і фіксувати” “живучи всередині” цієї орієнтованої множини (математично строге означення даного поняття буде дано в наступному розділі статті). В даній роботі обговорюються математичні проблеми, пов’язані з внутрішнім часом на орієнтованих множинах. Зокрема в роботі встновлено певну необхідну ознаку існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині.

2 Основні означення і факти

Означення 1. *Орієнтованою множиною називається довільна реляційна система з одним рефлексивним бінарним відношенням, тобто упорядкована пара виду* $\mathcal{M} = \left(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}\right)$, *де* $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ *— рефлексивне бінарне відношення на* $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$.

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ *йде мова, в позначенні* $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ *символ* $\mathcal{M}$ *будемо опускати, вживаючи позначення “*$\leftarrow$*”. Множину* $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *будемо називати базовою, або множиною всіх елементарних станів орієнтованої множини* $\mathcal{M}$, *а відношення* $\leftarrow$ *будемо називати напрямним відношенням змін (трансформацій)* $\mathcal{M}$.

Означення 2. *Нехай,* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина і* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ *— лінійно упорядкована множина. Відображення* $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *називається* ***часом*** *на* $\mathcal{M}$, *якщо виконуються такі умови:*

1) Для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *існує елемент* $t \in \mathbf{T}$ *такий, що* $x \in \psi(t)$.

2) Якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ *і* $x_1 \neq x_2$, *то існують елементи* $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ *такі, що* $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ *і* $t_1 < t_2$ *(тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).*

При цьому елементи $t \in \mathbf{T}$ *будемо називати* ***моментами часу***, *а пару* $\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ *будемо називати* ***хронологізацією*** $\mathcal{M}$.

Означення 3. *Нехай,* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина і* $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$, $\psi_2 : \mathbf{T}_2 \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *деякі часи для* $\mathcal{M}$, *визначені на лінійно упорядкованих множинах* $(\mathbf{T}_1, \leq_1)$ *і* $(\mathbf{T}_2, \leq_2)$ *відповідно. Хронологізації* $\mathcal{H}_1 = ((\mathbf{T}_1, \leq_1), \psi_1)$ *та* $\mathcal{H}_2 = ((\mathbf{T}_2, \leq_2), \psi_2)$ *будемо називати* ***еквівалентними*** *(позначення* $\mathcal{H}_1 \Uparrow \mathcal{H}_2$*), якщо існує взаємно однозначна відповідність* $\xi : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ *така, що:*

1) ξ *є порядковим ізоморфізмом між* $\mathbf{T}_1$ *і* $\mathbf{T}_2$, *тобто* $\xi : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ *— бієкція між* $\mathbf{T}_1$ *та* $\mathbf{T}_2$ *і для довільних* $t, \tau \in \mathbf{T}_1$ *нерівність* $t \leq_1 \tau$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $\xi(t) \leq_2 \xi(\tau)$.

2) Для довільного $t \in \mathbf{T}_1$ *має місце рівність* $\psi_1(t) = \psi_2(\xi(t))$.

Використовуючи означення 3, нескладно перевірити істинність наступного твердження:

Твердження 1. *Нехай,* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина і* $\mathcal{W}$ *— довільна множина, що складається з хронологізацій* $\mathcal{M}$. *Тоді бінарне відношення* $\Uparrow$ *є відношенням еквівалентності на* $\mathcal{W}$.

Означення 4. *Нехай* $(\mathbb{T},\psi) = ((\mathbf{T},\leq),\psi)$ *— хронологізація орієнтованої множини* $\mathcal{M}$. *Множину*

$$Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$$

будемо називати ***множиною одночасних станів****, породженою часом* ψ.

Безпосередньо з означення 2 випливає наступне твердження.

Твердження 2. *Нехай* $(\mathbb{T},\psi) = ((\mathbf{T},\leq),\psi)$ *— хронологізація орієнтованої множини* $\mathcal{M}$, *а* Y_ψ *— множина одночасних станів, породжена часом* ψ. *Тоді* $\bigcup_{A\in Y_\psi} A = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$.

Означення 5. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина. Довільну сім'ю множин* $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *таку, що* $\bigcup_{A\in\mathbf{Y}} A = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *будемо називати* ***одночасністю*** *на* $\mathcal{M}$.

При цьому пару $(\mathcal{M},\mathbf{Y})$ *будемо називати* ***синхронізованою орієнтованою множиною****.*

Теорема 1 ([16], див. також [19], Theorem 1.4.1 або [20], теорема 1.28)**.** *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина і* $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *— одночасність на* $\mathcal{M}$. *Тоді на орієнтованій множині* $\mathcal{M}$ *існує час* ψ *такий, що* $\mathbf{Y} = Y_\psi$, *де* Y_ψ *— множина одночасних станів, породжена часом* ψ.

Наступна мета — дати означення внутрішнього часу на орієнтованій множині, тобто часу, який можна фіксувати "засобами", що знаходяться "всередині" орієнтованої множини.

Позначення 1. *На довільній орієнтованій множині* $\mathcal{M}$ *введемо додатково наступне бінарне відношення. Для довільних* $x,y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ ***будемо позначати*** $y \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ *тоді і тільки тоді, коли* $y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x$ *і* $x \underset{\mathcal{M}}{\not\leftarrow} y$. *У випадках, коли не виникає непорозумінь замість позначення* $y \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ *будемо використовувати позначення* $y \overset{+}{\leftarrow} x$.

Означення 6. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина.* ***1)*** *Будемо говорити, що множина* $B \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ ***монотонно послідовна*** *множині* $A \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *в орієнтованій множині* $\mathcal{M}$, *якщо існують такі елементи* $x \in A$ *і* $y \in B$, *що* $y \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$. *В цьому випадку будемо використовувати позначення позначення* $B \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow(+)} A$. ***2)*** *Нехай* $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *— деяка система підмножин множини* $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. *Будемо говорити, що множина* $B \in \mathcal{Q}$ ***транзитивно монотонно послідовна*** *множині* $A \in \mathcal{Q}$ *відносно* $\mathcal{Q}$ *(використовуючи позначення* $B \overset{\mathcal{Q}}{\underset{\mathcal{M}}{\twoheadleftarrow(+)}} A$*), якщо існує така послідовність множин* $C_0, C_1, \cdots, C_n \in \mathcal{Q}$ *(*$n \in \mathbb{N}$*), що* $C_0 = A$, $C_n = B$ *і для довільного* $k \in \overline{1,n}$ *має місце співвідношення,* $C_k \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow(+)} C_{k-1}$, де $\overline{1,n} = \{1,\ldots .n\}$.

У випадку, коли наперед відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, в позначеннях $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow(+)}$ і $\overset{\mathcal{Q}}{\underset{\mathcal{M}}{\twoheadleftarrow(+)}}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи, замість них позначення $\leftarrow(+)$ і $\overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow(+)}$ відповідно.

Безпосередньо з означення 6 випливає такий наслідок:

Наслідок 1. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина,* $A, B \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *і* $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$. *Тоді:*

1. *Якщо* $B \leftarrow(+) A$, *то* $A, B \neq \varnothing$.
2. *Якщо* $B \overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow(+)} A$, *то існують* $x \in A$ *і* $x' \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *такі, що* $x' \overset{+}{\leftarrow} x$, *а також існують* $y \in B$ *і* $y' \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *такі, що* $y \overset{+}{\leftarrow} y'$.

3. Якщо $B \overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow(+)} A$, *то* $A, B \neq \varnothing$.

Крім того, використовуючи означення 6 отримуємо наступне твердження:

Твердження 3. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина.*

1) Якщо $A, B \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *і* $B \leftarrow(+) A$, *то для довільних* $A', B' \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *таких, що* $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$ *справедливе співвідношення* $B' \leftarrow(+) A'$.

2) Нехай $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}' \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *— системи підмножин множини* $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, *причому* $\mathfrak{S} \sqsubseteq \mathfrak{S}'$ *(тобто для довільної множини* $A \in \mathfrak{S}$ *існує множина* $A' \in \mathfrak{S}'$ *така, що* $A \subseteq A'$*).*

Тоді для довільних $A, B \in \mathfrak{S}$ *і* $A', B' \in \mathfrak{S}'$ *таких, що* $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$ *з умови* $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow(+)} A$ *випливає, що* $B' \overset{\mathfrak{S}'}{\twoheadleftarrow(+)} A'$.

Означення 7. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина, а* $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *— час на* $\mathcal{M}$ *(заданий на лінійно упорядкованій множині* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$*).*

Відображення $\mathbf{h} : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *будемо називати* ***хронометричним*** процесом *(для часу* ψ*), якщо:*

1) $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$ *для довільного* $t \in \mathbf{T}$.

2) Для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ *умова* $t < \tau$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(t)$ *і* $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$, *де* $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{T}\}$;

Час ψ *на орієнтованій множині* $\mathcal{M}$ *будемо називати* ***внутрішнім***, *якщо для цього часу існує хоч один хронометричний процес.*

Зауваження 1. *З пункту 2) означення 7 та пункту 3 наслідка 1 випливає, що:*

Якщо відображення $\mathbf{h} : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є хронометричним процесом для деякого часу і при цьому часова шкала $\mathbf{T}$ містить хоча б два елемента, то для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\mathbf{h}(t)$ — непорожня ($\mathbf{h}(t) \neq \varnothing$).

Інтуїтивний зміст терміну "внутрішній час" полягає в тому, що якщо час на орієнтованій множині є внутрішнім, його можна "поміряти" в межах цієї орієнтованої множини, використовуючи хронометричний процес в якості "годинника", а стани хронометричного процесу в якості "індикаторів моментів часу".

3 Достатня ознака існування і єдиності внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині і проблеми пов'язані з нею

В цьому розділі буде наведено достатню ознаку існування і єдиності внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині і сформульовано деякі проблеми, породжені нею. Перш за все нижче вводяться деякі технічні поняття, необхідні для формулювання зазначеної достатньої ознаки.

Означення 8. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина.*

1) Одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *будемо називати* ***чутливою***,[1] *якщо для довільних* $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *таких, що* $y \leftarrow x$ *і* $x \neq y$ *існують множини* $A, B \in \mathbf{Y}$ *такі, що* $x \in A$, $y \in B$, $A \neq B$ *і* $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} A$.

В більш ранніх роботах див., напр. [16, 20] використовувався термін "чітка одночасність" для назви даного поняття. В даній роботі ми змінили даний термін на термін "чутлива одночасність", оскільки останній набагато краще характеризує сутність зазначеного поняття.

2) Систему множин $\mathfrak{S} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ будемо називати ***неповторною****, якщо не існує множин $A, B \in \mathfrak{S}$ таких, що $A \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow (+)} B$ і $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow (+)} A$. Зокрема, якщо одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є неповторною системою множин, будемо вживати термін* ***"неповторна одночасність"****.*

3) Одночасність $\mathbf{Y}$ будемо називати ***чутливо-неповторною****, якщо вона є чутливою і неповторною одночасно.*

Означення 9. *Одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ будемо називати* ***монотонно зв'язною****, якщо для довільних множин $A, B \in \mathbf{Y}$ таких, що $A \neq B$ має місце хоч одна з умов $A \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow (+)} B$ або $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow (+)} A$.*

В 2012 році було доведено наступну достатню ознаку існування і єдиності такого внутрішнього часу ψ на синхронізованій орієнтованій множині $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$, який породжує одночасність $\mathbf{Y}$ (тобто такого внутрішнього часу ψ, що $\mathbf{Y} = Y_\psi$).

Теорема 2 ([16], див, також, [19], Theorem 1.4.3 або [20], теорема 1.47)**.** *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина. Для довільної чутливо-неповторної і монотонно-зв'язної одночасності $\mathbf{Y}$ на $\mathcal{M}$ існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій внутрішній час ψ такий, що $\mathbf{Y} = Y_\psi$.*

Зауважимо, що єдиність з точністю до еквівалентності хронологізацій в теоремі 2 слід розуміти наступним чином:

"*Якщо на лінійно упорядкованих множинах $\mathbb{T}_1$ і $\mathbb{T}_2$ визначені (відповідно) внутрішні часи ψ_1 і ψ_2 такі, що $\mathbf{Y} = Y_{\psi_1} = Y_{\psi_2}$, то хронологізації $\mathcal{H}_1 = (\mathbb{T}_1, \psi_1)$ і $\mathcal{H}_2 = (\mathbb{T}_2, \psi_2)$ є еквівалентними (тобто $\mathcal{H}_1 \Uparrow \mathcal{H}_2$)*".

Філософський зміст теореми 2 полягає в тому, що ця теорема дає достатню ознаку існування і єдиності "власного", "внутрішнього" часу в деякому "абстрактному світі" $\mathcal{M}$.

Зазначимо, що теорема 2 носить лише достатній характер. Це буде видно з наступного прикладу.

Приклад 1. *Нехай $\mathcal{M}_{\widehat{2}} = \mathcal{M}_{\{1,2\}}$ — орієнтована множина така, що:*

($\mathcal{M}_{\widehat{2}}^{\mathbf{def}}$:1) $\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right) = \{1, 2\} = \widehat{2}$;

($\mathcal{M}_{\widehat{2}}^{\mathbf{def}}$:2) *Для $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\{1,2\}}\right)$ співвідношення $y \leftarrow x$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x \leq y$, де $\leq$ — стандартне відношення лінійного порядку на множині натуральних чисел.*

На орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\widehat{2}}$ розглянемо одночасність:

$$\mathbf{Y}_{\widehat{2}} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{2\}\} = \left\{\{1\}, \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right), \{2\}\right\}. \tag{1}$$

Покладемо

$$\mathbf{T}_{\widehat{2}} := \{0, 1, 2\}. \tag{2}$$

Тоді пара $\mathbb{T}_{\widehat{2}} = \left(\mathbf{T}_{\widehat{2}}, \leq\right)$ є лінійно упорядкованою множиною відносно звуження стандартного відношення лінійного порядку на множині цілих чисел $\leq$ на множину $\{0, 1, 2\}$. Легко бачити, що відображення:

$$\mathbf{T}_{\widehat{2}} \ni t \mapsto \psi_{\widehat{2}}(t) = \begin{cases} \{1\}, & t = 0 \\ \{1,2\} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right), & t = 1 \\ \{2\}, & t = 2 \end{cases} \tag{3}$$

є часом на $\mathcal{M}_{\widehat{2}}$. *Доведемо, що відображення:*

$$\mathbf{h}_{\widehat{2}}(t) = \psi_{\widehat{2}}(t) \quad \left(t \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}\right) \tag{4}$$

є хронометричним процесом для часу $\psi_{\widehat{2}}$.

По-перше зазначимо, що згідно з (3) і (4) для $t \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}$ *маємо:*

$$\mathbf{h}_{\widehat{2}}(t) = \psi_{\widehat{2}}(t) \subseteq \psi_{\widehat{2}}(t).$$

Отже, перша умова означення 7 для відображення $\mathbf{h}_{\widehat{2}}$ *виконується.*

По-друге з визначення $(\mathcal{M}_{\widehat{2}}^{\mathbf{def}}$***:2)*** *випливає, що для* $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right) = \{1,2\}$ *співвідношення* $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ *виконується тоді і тільки тоді, коли* $x_1 < x_2$, *тобто тоді і тільки тоді, коли* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. *Тому, за означенням 6, для підмножин* $A, B \subseteq \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right)$ *має місце наступна рівносильність:*

$$\left(B \underset{\mathcal{M}_{\widehat{2}}}{\leftarrow (+)} A\right) \Longleftrightarrow ((1 \in A) \,\&\, (2 \in B))\,, \tag{5}$$

де де & — знак логічної кон'юнкції, а $\Longleftrightarrow$ *— знак логічної рівносильності. Далі, для довільних* $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}$ *згідно з (3) і (4) маємо:*

$$\mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(t_i\right) = \psi_{\widehat{2}}\left(t_i\right) = \begin{cases} \{1\}\,, & t_i = 0 \\ \{1,2\} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right), & t_i = 1 \\ \{2\}\,, & t_i = 2 \end{cases} \quad (i \in \{1,2\})\,.$$

Звідси, враховуючи рівносильність (5), бачимо, що для $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}$ *співвідношення* $\mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(t_2\right) \leftarrow (+)\, \mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(t_1\right)$ *виконується тоді і тільки тоді, коли* $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ *або* $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ *або* $t_1 = t_2 = 1$ *або* $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. *Тобто, іншими словами,*

(1*) Для $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}$ співвідношення $\mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(t_2\right) \leftarrow (+)\, \mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(t_1\right)$ виконується тоді і тільки тоді, коли $t_1 < t_2$ або $t_1 = t_2 = 1$.

З результату ***(1*)*** *випливає наступний результат:*

(2*) Для $t, \tau \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}$ співвідношення $\mathbf{h}_{\widehat{2}}(\tau) \overset{\mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(\mathbf{T}_{\widehat{2}}\right)}{\twoheadleftarrow (+)} \mathbf{h}_{\widehat{2}}(t)$ виконується тоді і тільки тоді, коли $t < \tau$ або $t = \tau = 1$.

Справді, нехай $\mathbf{h}_{\widehat{2}}(\tau) \overset{\mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(\mathbf{T}_{\widehat{2}}\right)}{\twoheadleftarrow (+)} \mathbf{h}_{\widehat{2}}(t)$. *Тоді, за означенням 6 (пункт* ***2)****), існують моменти часу* $t_0, \ldots, t_n \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}$ $(n \in \mathbb{N})$, *такі, що* $t_0 = t$, $t_n = \tau$ *і для довільного* $k \in \overline{1,n}$ *має місце співвідношення,* $\mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(t_k\right) \leftarrow (+)\, \mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(t_{k-1}\right)$. *Звідси, на основі результату* ***(1*)****, випливає, що виконується хоч одна з умов* $t_0 = \cdots = t_n = 1$ *або* $t_0 \leq \cdots \leq t_n$ *і існує* $k \in \overline{1,n}$ *таке, що* $t_{k-1} < t_k$. *В першому випадку отримуємо, що* $t_0 = t_n = 1$, *тобто* $t = \tau = 1$, *а в другому випадку отримуємо, що* $t_0 < t_n$, *тобто* $t < \tau$. *Навпаки, якщо* $t < \tau$ *або* $t = \tau = 1$, *то, на основі результату* ***(1*)****, маємо* $\mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(t\right) \leftarrow (+)\, \mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(\tau\right)$, *тобто, за означенням 6 (пункт* ***2)****), отримуємо,* $\mathbf{h}_{\widehat{2}}(\tau) \overset{\mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(\mathbf{T}_{\widehat{2}}\right)}{\twoheadleftarrow (+)} \mathbf{h}_{\widehat{2}}(t)$.

З встановленого вище результату ***(2*)*** *і формул (4) та (3) випливає, що:*

(3*) Для $t, \tau \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}$ співвідношення $\mathbf{h}_{\widehat{2}}(\tau) \overset{\mathbf{h}_{\widehat{2}}\left(\mathbf{T}_{\widehat{2}}\right)}{\twoheadleftarrow (+)} \mathbf{h}_{\widehat{2}}(t)$ і $\mathbf{h}_{\widehat{2}}(t) \neq \mathbf{h}_{\widehat{2}}(\tau)$ виконуються тоді і тільки тоді, коли $t < \tau$.

Отже, за означенням 7, $\mathbf{h}_{\widehat{2}}$ *є хронометричним процесом для часу* $\psi_{\widehat{2}}$*. Отже, час* $\psi_{\widehat{2}}$ *є внутрішнім. При цьому із співвідношень (1), (3) та означення 4 випливає, що* $Y_{\psi_{\widehat{2}}} = \left\{\{1\}, \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right), \{2\}\right\} = \mathbf{Y}_{\widehat{2}}$*. Отже,* $\psi_{\widehat{2}}$ *— внутрішній час, що породжує одночасність* $\mathbf{Y}_{\widehat{2}}$*.*

Доведемо, що внутрішній час $\psi_{\widehat{2}}$*, що породжує одночасність* $\mathbf{Y}_{\widehat{2}}$ *є єдиним з точністю до еквівалентності хронологізацій. Нехай* $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right)}$ *— інший внутрішній час, що породжує одночасність* $\mathbf{Y}_{\widehat{2}}$ *з хронометричним процесом* $\mathbf{h}$*, заданий на лінійно упорядкованій множині* $\mathbb{T} = \left(\mathbf{T}, \widetilde{\leq}\right)$*. Тоді виконуються наступні умови:*

$$Y_\psi = \{\psi(t) \,|\, t \in \mathbf{T}\} = \mathbf{Y}_{\widehat{2}} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{2\}\}; \tag{6}$$

$$\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t) \quad (t \in \mathbf{T}); \tag{7}$$

$$\forall\, t, \tau \in \mathbf{T} \left(\left(t \,\widetilde{<}\, \tau\right) \Longleftrightarrow \left(\left(\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}(t) \right) \& \left(\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)\right) \right) \right), \tag{8}$$

де $\widetilde{<}$ *— строгий лінійний порядок, породжений нестрогим порядком* $\widetilde{\leq}$ *(тобто для* $t, \tau \in \mathbf{T}$ *співвідношення* $t \,\widetilde{<}\, \tau$ *виконується тоді і тільки тоді, коли* $t \,\widetilde{\leq}\, \tau$ *і* $t \neq \tau$*).*

З умови (6) випливає існування моментів часу $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}$*, таких, що:*

$$\psi\left(\mathbf{t}_0\right) = \{1\}; \; \psi\left(\mathbf{t}_1\right) = \{1,2\}; \; \psi\left(\mathbf{t}_2\right) = \{2\}. \tag{9}$$

З формули (9) випливає, що множини $\psi\left(\mathbf{t}_0\right), \psi\left(\mathbf{t}_1\right), \psi\left(\mathbf{t}_2\right)$ *— попарно різні. Отже моменти часу* $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ *— також попарно різні. Із формули (8) випливає, що:*

$$\forall t, \widetilde{t} \in \mathbf{T} \; \left(\left(t \neq \widetilde{t}\right) \Longrightarrow \left(\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\widetilde{t})\right)\right). \tag{10}$$

Отже, множини $\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_0\right), \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right), \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_2\right)$ *— також попарно різні. Крім того з зауваження 1 випливає, що множини* $\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_0\right), \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right), \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_2\right)$ *— непорожні. Отже із співвідношенль (7) і (9) випливає, що*

$$\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_0\right) = \{1\}, \; \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_2\right) = \{2\}. \tag{11}$$

Згідно з доведеним вище $\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_0\right), \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right), \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_2\right)$ *— попарно різні і непорожні. Тому враховуючи (7), (9), (11), маємо* $\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right) \subseteq \psi\left(\mathbf{t}_1\right) = \{1,2\}$*,* $\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right) \neq \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_0\right) = \{1\}$*,* $\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right) \neq \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_2\right) = \{2\}$*,* $\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right) \neq \varnothing$*. Останні співвідношення можливі лише за умови:*

$$\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right) = \{1,2\}. \tag{12}$$

З формул (11), (12), (9), а також (3), (4) випливає рівність:

$$\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_i\right) = \psi\left(\mathbf{t}_i\right) = \psi_{\widehat{2}}(i) = \mathbf{h}_{\widehat{2}}(i) \quad \left(i \in \overline{0,2} = \mathbf{T}_{\widehat{2}}\right), \tag{13}$$

де $\overline{0,2} = \{0,1,2\}$*. З останньої рівності, на основі результату* ***(1*)*** *випливає співвідношення:*

$$\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_2\right) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_0\right),$$

з якого, за означенням 6 (пункт ***2)****), отримуємо:*

$$\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_2\right) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_0\right).$$

З останнього співвідношення, враховуючи, що, за доведеним вище, $\mathbf{h}\left(\mathbf{t}_0\right) \neq \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_1\right) \neq \mathbf{h}\left(\mathbf{t}_2\right)$*, на основі умови (8), отримуємо нерівність:*

$$\mathbf{t}_0 \,\widetilde{<}\, \mathbf{t}_1 \,\widetilde{<}\, \mathbf{t}_2. \tag{14}$$

Доведемо, що

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}\,. \qquad (15)$$

Оскільки, за доведеним вище, $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}$, *то залишилось довести, що в множині* $\mathbf{T}$ *немає інших елементів, крім* $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$. *Припустимо, що існує елемент* $\tau \in \mathbf{T}$ *такий, що* $\tau \neq \mathbf{t}_j$ $\left(\forall j \in \overline{0,2}\right)$. *Із співвідношень (6) та (7) випливає, що* $\mathbf{h}(\tau) \subseteq \{1,2\}$. *При цьому маємо* $\mathbf{card}(\mathbf{T}) \geq 2$ *(оскільки, за доведеним вище,* $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}$*), а отже, згідно з зауваженням 1,* $\mathbf{h}(\tau) \neq \varnothing$. *Таким чином,* $\varnothing \neq \mathbf{h}(\tau) \subseteq \{1,2\}$. *Тому можливими є лише такі випадки,* $\mathbf{h}(\tau) = \{1\}$, $\mathbf{h}(\tau) = \{2\}$ *або* $\mathbf{h}(\tau) = \{1,2\}$, *тобто, згідно з (11), (12),* $\mathbf{h}(\tau) = \mathbf{h}(\mathbf{t}_0)$, $\mathbf{h}(\tau) = \mathbf{h}(\mathbf{t}_1)$ *або* $\mathbf{h}(\tau) = \mathbf{h}(\mathbf{t}_2)$. *Але в усіх перелічених трьох випадках приходимо до суперечності з формулою (10).*

Отримана суперечність доводить, що припущення про існування елемента $\tau \in \mathbf{T}$ *такого, що* $\tau \neq \mathbf{t}_j$ $\left(\forall j \in \overline{0,2}\right)$ *— хибне, що обґрунтовує рівність (15).*

Побудуємо відображення $\nu : \mathbf{T}_{\widehat{2}} \to \mathbf{T}$ *(нагадаємо, що згідно з (2) і (15),* $\mathbf{T}_{\widehat{2}} = \{0,1,2\}$, $\mathbf{T} = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$*). Для* $j \in \mathbf{T}_{\widehat{2}} := \{0,1,2\}$ *покладемо:*

$$\nu(j) := \mathbf{t}_j \in \{\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\} = \mathbf{T} \qquad \left(j \in \mathbf{T}_{\widehat{2}} = \{0,1,2\}\right). \qquad (16)$$

З нерівності (14) випливає, що відображення ν *є ін'єктивним і монотонним відображенням з* $\mathbf{T}_{\widehat{2}}$ *в* $\mathbf{T}$ *(тобто* $\nu(i) \neq \nu(j)$ *при* $i \neq j$ *і* $\nu(i) \mathrel{\widetilde{\leq}} \nu(j)$ *при* $i \leq j$*). Крім того, згідно з (16), маємо* $\nu\left(\mathbf{T}_{\widehat{2}}\right) = \left\{\nu(t) \,|\, t \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}\right\} = \mathbf{T}$. *Отже, відображення* ν *є порядковим ізоморфізмом між* $\mathbf{T}_{\widehat{2}}$ *і* $\mathbf{T}$. *При цьому для довільного* $\tau \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}$, *згідно з формулами (13) (див. внутрішню частину рівності (13)) та (16), маємо:*

$$\psi_{\widehat{2}}(\tau) = \psi(\mathbf{t}_\tau) = \psi(\nu(\tau))\,.$$

Отже, за означенням 3, хронологізації $\mathcal{H}_{\widehat{2}} = \left(\left(\mathbf{T}_{\widehat{2}}, \leq\right), \psi_{\widehat{2}}\right)$ *і* $\mathcal{H} = \left(\left(\mathbf{T}, \mathrel{\widetilde{\leq}}\right), \psi\right)$ *— еквівалентні.*

Таким чином, вище було доведено, що внутрішній час $\psi_{\widehat{2}}$, *що породжує одночасність* $\mathbf{Y}_{\widehat{2}}$ *на* $\mathcal{M}_{\widehat{2}}$ *є єдиним з точністю до еквівалентності відповідних хронологізацій. З іншого боку одночасність* $\mathbf{Y}_{\widehat{2}}$ *не є неповторною в сенсі означення 8, оскільки для множин* $Y_1 = Y_2 = \{1,2\}$ *згідно з формулами (1), (5) отримуємо:*

$$Y_1, Y_2 \in \mathbf{Y}_{\widehat{2}}, \qquad Y_2 \leftarrow\!(+)\, Y_1, \quad Y_1 \leftarrow\!(+)\, Y_2,$$

тобто, означенням 6 (пункт ***2)****):*

$$Y_1, Y_2 \in \mathbf{Y}_{\widehat{2}}, \qquad Y_2 \overset{\mathbf{Y}_{\widehat{2}}}{\twoheadleftarrow\!(+)} Y_1, \quad Y_1 \overset{\mathbf{Y}_{\widehat{2}}}{\twoheadleftarrow\!(+)} Y_2.$$

Таким чином, як показує приклад 1, теоерма 2 носить лише достатній характер і не дає необхідної і достатньої ознаки існування і єдиності внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині.

Теорема 2 попроджує, також, і наступну проблему:

Проблема 1. *Нехай* $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ *— синхронізована орієнтована множина. Чи завжди внутрішній час* ψ, *що породжує одночасність* $\mathbf{Y}$ *(якщо він існує) є єдиним?*

Наступний приклад дає негативне розв'язання проблеми 1.

Приклад 2. *Розглянемо на орієнтованій множині* $\mathcal{M}_{\widehat{2}}$, *введеній в прикладі 1 розглянемо одночасність:*

$$\mathbf{Y}^*_{\widehat{2}} = \{\{1,2\}\} = \left\{\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right)\right\}.$$

Покладемо:

$$\mathbf{T}_2 := \{0,1\}.$$

Тоді пара $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq)$ *є лінійно упорядкованою множиною відносно звуження стандартного відношення лінійного порядку на множині цілих чисел* $\leq$ *на множину* $\{0,1\}$. *Легко бачити, що відображення*

$$\psi_2^*(t) = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right) = \{1,2\} \quad (t \in \{0,1\} = \mathbf{T}_2); \tag{17}$$

$$\psi_{\widehat{2}}^*(t) = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right) = \{1,2\} \quad \left(t \in \{0,1,2\} = \mathbf{T}_{\widehat{2}}\right) \tag{18}$$

є часами на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\widehat{2}}$, *що пророджують одночасність* $\mathbf{Y}_{\widehat{2}}^*$. *Відповідні хронологізації* $\mathcal{H}_2^* = ((\mathbf{T}_2, \leq), \psi_2^*)$ *і* $\mathcal{H}_{\widehat{2}}^* = \left(\left(\mathbf{T}_{\widehat{2}}, \leq\right), \psi_{\widehat{2}}^*\right)$, *породжені часами* ψ_2^* *та* $\psi_{\widehat{2}}^*$ *не є еквівалентними, оскільки відповідні часові шкали* $\mathbf{T}_2$ *і* $\mathbf{T}_{\widehat{2}}$ *не є рівнопотужними, а отже неможливо встановити порядковий ізоморфізм між ними.*

Доведемо, що обидва часи ψ_2^* *і* $\psi_{\widehat{2}}^*$ *є внутрішніми.*

1. *Доведемо, що час* ψ_2^* *є внутрішнім з хронометричним процесом:*

$$\mathbf{h}_2(t) = \{t+1\} \quad (t \in \mathbf{T}_2 = \{0,1\}). \tag{19}$$

По-перше з формул (19) і (17) випливає, що:

$$\mathbf{h}_2(t) \subseteq \{1,2\} = \psi_2^*(t) \quad (t \in \mathbf{T}_2 = \{0,1\}). \tag{20}$$

По-друге, з рівносильності (5) випливає, що для $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_2$ *умова* $\mathbf{h}_2(t_2) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}_2(t_1)$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $1 \in \mathbf{h}_2(t_1)$ *і* $2 \in \mathbf{h}_2(t_2)$, *тобто, враховуючи (19), тоді і тільки тоді, коли* $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. *Звідси, враховуючи, що* $\mathbf{T}_2 := \{0,1\}$, *для* $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_2$ *отримуємо рівносильність:*

$$(\mathbf{h}_2(t_2) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}_2(t_1)) \Longleftrightarrow (t_1 < t_2). \tag{21}$$

Далі, якщо $\mathbf{h}_2(\tau) \overset{\mathbf{h}_2(\mathbf{T}_2)}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}_2(t)$, *де* $t, \tau \in \mathbf{T}_2$, *то, за означенням 6 (пункт **2)**), існують моменти часу* $t_0, \ldots, t_n \in \mathbf{T}_2$ $(n \in \mathbb{N})$, *такі, що* $t_0 = t$, $t_n = \tau$ *і для довільного* $k \in \overline{1,n}$ *має місце співвідношення,* $\mathbf{h}_2(t_k) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}_2(t_{k-1})$. *Звідси, на основі рівносильності (21), приходимо до висновку, що* $t = t_0 < \cdots < t_n = \tau$, *тобто* $t < \tau$. *Навпаки, якщо* $t, \tau \in \mathbf{T}_2$ *і* $t < \tau$, *то, на основі рівносильності (21), отримуємо* $\mathbf{h}_2(\tau) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}_2(t)$, *звідки, за означенням 6 (пункт **2)**), маємо,* $\mathbf{h}_2(\tau) \overset{\mathbf{h}_2(\mathbf{T}_2)}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}_2(t)$. *Крім того, оскільки, за формулою (19),* $\mathbf{h}_2(t_1) \neq \mathbf{h}_2(t_2)$ *при* $t_1 \neq t_2$, *то з нерівності* $t < \tau$ *випливає, що* $\mathbf{h}_2(\tau) \neq \mathbf{h}_2(t)$. *Таким чином, для довільних* $t, \tau \in \mathbf{T}_2$ *справедлива наступна рівносильність:*

$$(t < \tau) \Longleftrightarrow \left(\mathbf{h}_2(\tau) \overset{\mathbf{h}_2(\mathbf{T}_2)}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}_2(t)\right) \,\&\, (\mathbf{h}_2(\tau) \neq \mathbf{h}_2(t)) \tag{22}$$

З формули (20) і рівносильності (22), на основі означення 7, випливає, що $\mathbf{h}_2$ *є хрономентричним прцесом для часу* ψ_2^*, *тобто цей час є внутрішнім з хронометричним процесом* $\mathbf{h}_2$. *Що й необхідно було довести.*

2. *Доведемо, що час* $\psi_{\widehat{2}}^*$ *є внутрішнім з хронометричним процесом* $\mathbf{h}_{\widehat{2}} : \mathbf{T}_{\widehat{2}} \to 2^{\{1,2\}} = 2^{\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right)}$ *тим самим, що і в прикладі 1, який, згідно з формулами (3) і (4) можна подати у вигляді:*

$$\mathbf{h}_{\widehat{2}}(t) = \begin{cases} \{1\}, & t = 0 \\ \{1,2\} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right), & t = 1 \\ \{2\}, & t = 2 \end{cases} \qquad \left(t \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}\right). \tag{23}$$

Згідно з формулами (23) і (18), маємо:

$$\mathbf{h}_{\widehat{2}}(t) \subseteq \{1,2\} = \psi^*_{\widehat{2}}(t) \quad \left(t \in \mathbf{T}_{\widehat{2}}\right). \tag{24}$$

*Тому, враховуючи факт **(3*)**, встановлений в прикладі 1, приходимо до висновку, що, за означенням 7,* $\mathbf{h}_{\widehat{2}}$ *є хронометричним прцесом для часу* $\psi^*_{\widehat{2}}$, *тобто цей час є внутрішнім з хронометричним процесом* $\mathbf{h}_{\widehat{2}}$. *Що й необхідно було довести.*

Таким чином, ми бачимо, що на синхронізованій орієнтованій множині $\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}, \mathbf{Y}^*_{\widehat{2}}\right)$ внутрішній час, що породжує одночасність $\mathbf{Y}^*_{\widehat{2}}$ **не** є єдиним.

Теорема 2 і приклади 1 та 2 породжують наступні проблеми, відповідь на які на даний час невідома:

Проблема 2. *На синхронізованій орієнтованій множині* $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ *знайти необхідну і достатню ознаку існування внутрішнього часу* ψ, *що породжує одночасність* $\mathbf{Y}$.

Проблема 3. *На синхронізованій орієнтованій множині* $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ *знайти необхідну і достатню ознаку існування і єдиності внутрішнього часу* ψ, *що породжує одночасність* $\mathbf{Y}$.

4 Необхідна ознака існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині

В цьому розділі буде встановлено одну необхідну ознаку існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині, яку можна вважати певним наближенням до розв'язання проблеми 2.

Для формулювання цієї ознаки необхідно ввести деяке ослаблення поняття чутливої одночасності.

Означення 10. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина. Одночасність* $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *будемо називати* ***слабко чутливою***, *якщо для довільних* $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *таких, що* $y \leftarrow x$ *і* $x \neq y$ *існують множини* $A, B \in \mathbf{Y}$ *такі, що* $x \in A$, $y \in B$ *і* $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow (+)} A$.

Зауваження 2. *Безпосередньо з означень 10 та 8 (пункт 1)) випливає, такий висновок:*

- Якщо одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є чутливою, то вона є слабко чутливою.

Приклад 2 показує, що обернене твердження, взагалі кажучи, не виконується. *Легко довести, що одночасність* $\mathbf{Y}^*_{\widehat{2}}$ *в цьому прикладі є слабко чутливою. Проте, оскільки одночасність* $\mathbf{Y}^*_{\widehat{2}}$ *складається лише з однієї множини* $\{1,2\} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right)$, *то* $\mathbf{Y}^*_{\widehat{2}}$ *не є чутливою (бо якщо для* $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\widehat{2}}\right)$ *таких, що* $y \leftarrow x$ *і* $x \neq y$ *ми маємо множини* $A, B \in \mathbf{Y}^*_{\widehat{2}}$ *такі, що* $x \in A$, $y \in B$ *і* $B \overset{\mathbf{Y}^*_{\widehat{2}}}{\twoheadleftarrow (+)} A$, *то все одно отримаємо рівність* $A = B$*).*

Твердження 4. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина. Якщо одночасність* $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *є слабко чутливою і неповторною, то вона є чутливою.*

Доведення. Нехай одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є слабко чутливою і неповторною. Розглянемо довільні $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$. Оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ — слабко чутлива, то, за означенням 10, існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$ і $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow (+)} A$. Оскільки

$B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} A$ і одночасність $\mathbf{Y}$ — неповторна, то, за означенням 8 (пункт 2)), рівність $A = B$ — неможлива (бо в протилежному випадку ми отримаємо $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} A$ і $A \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} B$). Отже, для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ таких, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$ існують $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$, $A \neq B$ і $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} A$. Тобто, за означенням 8 (пункт 1)), одночасність $\mathbf{Y}$ є чутливою. $\square$

Нижче, в прикладі 3 буде показано, що твердження, обернене до твердження 4 — не справедливе. В цьому прикладі буде побудовано чутливу, але не неповторну одночасність.

Зауважимо, що твердження 4 дає змогу дещо послабити засновок теореми 2. В результаті отримуємо наступний дещо посилений варіант цієї теореми:

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина. Для довільної слабко чутливої, неповторної і монотонно-зв'язної одночасності $\mathbf{Y}$ на $\mathcal{M}$ існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій внутрішній час ψ такий, що $\mathbf{Y} = Y_\psi$.*

Справедлива наступна необхідна ознака існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині:

Теорема 4. *Якщо на синхронізованій орієнтованій множині $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ існує внутрішній час ψ, що породжує одночасність $\mathbf{Y}$, то одночасність $\mathbf{Y}$ є слабко-чутливою і монотонно-зв'язною.*

Доведення. Нехай $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ — синхронізована орієнтована множина, $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — внутрішній час на $\mathcal{M}$, такий, що $Y_\psi = \mathbf{Y}$, де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина і $\mathbf{h} : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — хронометричний процес для часу ψ.

1. Нехай $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ — елементарні стани такі, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$. Тоді, за означенням 2, існують моммнти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x \in \psi(t_1)$, $y \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$. Оскільки $t_1 < t_2$ і $\mathbf{h}$ — хронометричний процес, то, за означенням 7 (пункт 2)), маємо $\mathbf{h}(t_2) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(t_1)$. Далі, за означенням 7 (пункт 1)), для довільного $t \in \mathbf{T}$ маємо $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$, тому $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(t) \mid t \in \mathbf{T}\} \sqsubseteq \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\} = Y_\psi = \mathbf{Y}$. Отже, за твердженням 3 (пункт 2)), із співвідношення $\mathbf{h}(t_2) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(t_1)$, враховуючи, що $\mathbf{h}(t_1) \subseteq \psi(t_1)$, $\mathbf{h}(t_2) \subseteq \psi(t_2)$, отримаємо $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} \psi(t_1)$. Якщо покласти $A := \psi(t_1)$, $B := \psi(t_2)$, то отримаємо, $A, B \in \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\} = Y_\psi = \mathbf{Y}$, $x \in \psi(t_1) = A$, $y \in \psi(t_2) = B$ і $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} A$. Отже, для $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ таких, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$ існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$ і $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} A$. Тому, за означенням 10, одночасність $\mathbf{Y}$ є слабко чутливою.

2. Розглянемо довільні $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $A \neq B$. Оскільки, за умовою, $\mathbf{Y} = Y_\psi$, то існують $t, \tau \in \mathbf{T}$ такі, що $A = \psi(t)$, $B = \psi(\tau)$. Оскільки, за умовою, $A \neq B$, то з останніх рівностей випливає, що $t \neq \tau$. Тому, оскільки $\mathbb{T}$ — лінійно упорядкована множина, можливі лише два випадки: $t < \tau$ або $\tau < t$. Звідси, оскільки $\mathbf{h}$ — хронометричний процес, за означенням 7 (пункт 2)), у випадку $t < \tau$ отримуємо $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(t)$, а у випадку $\tau < t$ отримуємо $\mathbf{h}(t) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(\tau)$. Отже, виконується хоча б одна з умов

$$\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(t) \quad \text{або} \quad \mathbf{h}(t) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(\tau). \tag{25}$$

Оскільки $\mathbf{h}$ — хронометричний процес для часу ψ, за означенням 7 (пункт 1)), маємо:

$$\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t) = A; \quad \mathbf{h}(\tau) \subseteq \psi(\tau) = B.$$

Далі, враховуючи, що, за доведеним вище, $\mathbf{h}(\mathbf{T}) \sqsubseteq \mathbf{Y}$, використовуючи співвідношення (25) та твердження 3 (пункт 2)), отримуємо, що для множин A і B справедливе хоча б одне із співвідношень:

$$A \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} B \quad \text{або} \quad B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(+)} A. \tag{26}$$

Таким чином, ми довели, що для довільних $A, B \in \mathbf{Y}$ таких, що $A \neq B$ справедливе хоча б одне із співвідношень (26). А це, за означенням 9 означає, що одночасність $\mathbf{Y}$ є монотонно зв'язною.

Теорему повністю доведено. □

Наступний приклад покаже, що теорема 4 не має "зворотньої сили". В цьому прикладі доводиться існування чутливої і монотонно-зв'язної одночасності, яка не породжує жодного внутрішнього часу.

Приклад 3. *Нехай n — натуральне число таке що $n \geq 3$. Розглянемо орієнтовану множину $\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$, що задовольняє такі умови:*

($\mathcal{M}^{\circlearrowleft\,\mathbf{def}}_{\widehat{n}}$:1) $\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right) = \{1, 2, \ldots, n\} = \widehat{n}$;

($\mathcal{M}^{\circlearrowleft\,\mathbf{def}}_{\widehat{n}}$:2) *Для $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right)$ співвідношення $y \leftarrow x$ виконується тоді і тільки тоді, коли $y = x$ або $y \equiv x + 1 \pmod{n}$.*

*Розглянемо довільні елементи $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right) = \{1, 2, \ldots, n\}$ такі, що $y \overset{+}{\leftarrow} x$. Оскільки, за позначенням 1, із останнього співвідношення випливає, що $y \leftarrow x$, то, згідно з умовою **($\mathcal{M}^{\circlearrowleft\,\mathbf{def}}_{\widehat{n}}$:2)**, має місце хоч одне із співвідношень $y = x$ або $y \equiv x + 1 \pmod{n}$. Але, випадку $x = y$, за умовою **($\mathcal{M}^{\circlearrowleft\,\mathbf{def}}_{\widehat{n}}$:2)**, отримуємо $y \leftarrow x$ і $x \leftarrow y$. Отже в цьому випадку, за позначенням 1, умова $y \overset{+}{\leftarrow} x$ виконуватись не може. Тому єдиноможливим залишається випадок $y \equiv x + 1 \pmod{n}$. Таким чином для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right)$ справедлива наступна логічна імплікація:*

$$\left(y \overset{+}{\leftarrow} x\right) \Longrightarrow (y \equiv x + 1 \pmod{n}). \tag{27}$$

Навпаки, нехай

$$y \equiv x + 1 \pmod{n}. \tag{28}$$

*Тоді, згідно з умовою **($\mathcal{M}^{\circlearrowleft\,\mathbf{def}}_{\widehat{n}}$:2)**, отримуємо $y \leftarrow x$. Припустимо, що умова $x \leftarrow y$ також виконується. Тоді, за умовою **($\mathcal{M}^{\circlearrowleft\,\mathbf{def}}_{\widehat{n}}$:2)**, має місце хоча б один з випадків $x = y$ або $x = y + 1 \pmod{n}$. Але випадок $x = y$ неможливий, оскільки у цьому випадку, згідно з (28), маємо $x \equiv x + 1 \pmod{n}$, тобто $0 \equiv 1 \pmod{n}$, що неможливо, бо $n \geq 3$ (за умовою). Випадок $x = y + 1 \pmod{n}$ також неможливий, оскільки у цьому випадку, враховуючи (28), отримуємо, $y \equiv x + 1 \equiv (y + 1) + 1 \equiv y + 2 \pmod{n}$, тобто $0 \equiv 2 \pmod{n}$, що неможливо, бо $n \geq 3$ (за умовою). Таким чином, якщо $y \equiv x + 1 \pmod{n}$ то $y \leftarrow x$ і $x \not\leftarrow y$, тобто $y \overset{+}{\leftarrow} x$. Отже, враховуючи імплікацію (27) для для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right)$ отримуємо логічну рівносильність:*

$$\left(y \overset{+}{\leftarrow} x\right) \Longleftrightarrow (y \equiv x + 1 \pmod{n}). \tag{29}$$

На орієнтованій множині $\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ введемо наступну одночасність:

$$\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}} := \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}. \tag{30}$$

Оскільки одночасність $\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ *складається лише з одноелементних множин, то для довільних* $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right)$ *і* $A \in \mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ *виконується рівносильність:*

$$(x \in A) \Longleftrightarrow (A = \{x\}).$$

Тому, згідно з означенням 6 і рівносильністю (29), для довільних множин $A, B \in \mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ *отримуємо таку рівносильність:*

$$(B \leftarrow\!(+)\, A) \Longleftrightarrow \exists\, x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right) \Big((A = \{x\}) \,\&\, (B = \{y\}) \,\&\, (y \equiv x + 1 \,(\mathrm{mod}\, n)) \Big). \tag{31}$$

Доведемо, що для довільних $A, B \in \mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ *мають місце обидва співвідношення:*

$$B \overset{\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}}{\twoheadleftarrow\!(+)} A \quad i \quad A \overset{\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}}{\twoheadleftarrow\!(+)} B. \tag{32}$$

Для цього достатньо показати, що для довільних $A, B \in \mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ *виконується перше із наведених співвідношень (бо друге отримується з першого перестановкою змінних* A *і* B*). Отже, нехай,* $A, B \in \mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$*. Тоді, згідно з (30), існують* $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right)$ *такі, що* $A = \{x\}$, $B = \{y\}$*. Тому, у випадку* $x < y$*, згідно з (31), отримаємо:*

$$B = \{y\} \overset{+}{\leftarrow} \{y-1\} \overset{+}{\leftarrow} \cdots \overset{+}{\leftarrow} \{x\} = A,$$

де $\{y\}, \{y-1\}, \ldots, \{x\} \in \mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$*. Звідси, за означенням 6, маємо,* $B \overset{\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}}{\twoheadleftarrow\!(+)} A$*. А у випадку* $y \leq x$*, згідно з (31), отримаємо:*

$$B = \{y\} \overset{+}{\leftarrow} \{y-1\} \overset{+}{\leftarrow} \cdots \overset{+}{\leftarrow} \{1\} \overset{+}{\leftarrow} \{n\} \overset{+}{\leftarrow} \{n-1\} \overset{+}{\leftarrow} \cdots \overset{+}{\leftarrow} \{x\} = A$$

(де $<$ *і* $\leq$ *— стандартні відношення лінійного порядку на множині натуральних чисел). Звідси, за означенням 6, знову отримаємо,* $B \overset{\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}}{\twoheadleftarrow\!(+)} A$*.*

Із співвідношень (32) (які виконуються для довільних $A, B \in \mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$*), за означенням 9, випливає, наступний висновок:*

(Conc1) Одночасність $\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ є монотонно зв'язною.

Розглянемо довільні $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right)$ *такі, що* $y \leftarrow x$ *і* $x \neq y$*. Покладемо:*

$$A := \{x\}, \quad B := \{y\}.$$

Тоді очевидно, що $x \in A$, $y \in B$ *і* $A \neq B$*. Крім того, згідно з (32), маємо* $B \overset{\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}}{\twoheadleftarrow\!(+)} A$*. Отже, за означенням 8 (пункт 1)), отримуємо такий висновок:*

(Conc2) Одночасність $\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ є чутливою.

Доведемо, що на орієнтованій множини $\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ *не існує внутрішнього часу, що породжує одночасність* $\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ *(тобто такого внутрішнього часу* ψ_0*, що* $\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}} = Y_{\psi_0}$*). Справді, припустимо, що* $\psi_0 : \mathbf{T}_0 \to 2^{\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right)}$ *— внутрішній час на* $\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}$ *такий, що* $\mathbf{Y}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}} = Y_{\psi_0}$ *з хронометричним процесом* $\mathbf{h}_0 : \mathbf{T}_0 \to 2^{\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}^{\circlearrowleft}_{\widehat{n}}\right)}$*, де* $\mathbb{T}_0 = (\mathbf{T}_0, \leq_0)$ *— лінійно упорядкована множина. З рівності*

$\mathbf{Y}_{\widehat{n}}^{\circlearrowleft} = Y_{\psi_0} = \{\psi_0(t) \,|\, t \in \mathbf{T}_0\}$, *(оскільки всі елементи одночасності* $\mathbf{Y}_{\widehat{n}}^{\circlearrowleft}$*, згідно (30), — одноелементні множини) випливає, що:*

$$\text{Для довільного } t \in \mathbf{T}_0 \text{ множина } \psi_0(t) \text{ є одноелементною.} \tag{33}$$

Також з рівності $\mathbf{Y}_{\widehat{n}}^{\circlearrowleft} = Y_{\psi_0} = \{\psi_0(t) \,|\, t \in \mathbf{T}_0\}$*, враховуючи рівність (30), в якій, за умомвою,* $n \geq 3$ *випливає, що множина* $\mathbf{T}_0$ *містить більше двох елементів.*

Оскільки $\mathbf{h}_0$ *— хронометричний процес для часу* ψ_0*, то за означенням 7, для довільного* $t \in \mathbf{T}_0$ *маємо* $\mathbf{h}_0(t) \subseteq \psi_0(t)$*, але з врахуванням висновку (33) і зауваження 1 з останнього включення отримуємо рівність,* $\mathbf{h}_0(t) = \psi_0(t)$ $(t \in \mathbf{T}_0)$*, з якої випливає, що* $\mathbf{h}_0(\mathbf{T}_0) = \{\mathbf{h}_0(t) \mid t \in \mathbf{T}_0\} = \{\psi_0(t) \mid t \in \mathbf{T}_0\} = Y_{\psi_0} = \mathbf{Y}_{\widehat{n}}^{\circlearrowleft}$*. Тому, враховуючи (32), для довільних* $t, \tau \in \mathbf{T}_0$ *отримуємо:*

$$\mathbf{h}_0(\tau) = \psi_0(\tau) \overset{\mathbf{h}_0(\mathbf{T}_0)}{\twoheadleftarrow\!(+)} \psi_0(t) = \mathbf{h}_0(t) \quad i \quad \mathbf{h}_0(t) \overset{\mathbf{h}_0(\mathbf{T}_0)}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}_0(\tau).$$

Оскільки $\mathbf{h}_0$ *— хронометричний процес, то з останніх співвідношень, за означенням 7 (пункт 2)) при* $t \neq \tau$ *отримаємо, що одночасно справедливі обидві нерівності* $t <_0 \tau$ *і* $\tau <_0 t$ *(де* $<_0$ *— відношення строгого порядку, породжене нестрогим порядком* $\leq_0$*), що неможливо. Остання суперечність доводить, що внутрішнього часу, що породжує одночасність* $\mathbf{Y}_{\widehat{n}}^{\circlearrowleft}$ *не існує.*

Таким чином, згідно з висновками ***(Conc1)*** *і* ***(Conc2)****, одночасність* $\mathbf{Y}_{\widehat{n}}^{\circlearrowleft}$ *є чутливою і монотонно зв'язною. Але при цьому на орієнтованій множини* $\mathcal{M}_{\widehat{n}}^{\circlearrowleft}$ *не існує внутрішнього часу, що породжує одночасність* $\mathbf{Y}_{\widehat{n}}^{\circlearrowleft}$*.*

5 Висновки.

Основні нові результати роботи можна сформулювати наступним чином:

1. Показано, що отримана в попередніх роботах достатня ознака існування і єдиності внутрішнього часу не є необхідною. Наведено приклад синхронізованої орієнтованої множини, для якої існує і єдиний (з точністю до еквівалентності хронологізацій) внутрішній породжуючий час, але при цьому відповідна одночасність не є неповторною.
2. Наведено приклад синхронізованої орієнтованої множини, для якої існують два внутрішні часи з не еквівалентними хронологізаціями, що її породжують.
3. Встановлено одну необхідну ознаку існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині і показано, що ця необхідна ознака не є достатньою.

Список літератури

[1] David Hilbert. Mathematical problems. *Bull. Amer. Math. Soc*, 8:437–479, 1902. URL: `https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1902-00923-3`.

[2] Yu.I. Petunin and D.A. Klyushin. A structural approach to solving the 6th Hilbert problem. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 71(71):165–179, 2005. `doi:10.1090/S0094-9000-05-00656-3`.

[3] A.N. Gorban. Hilbert's sixth problem: the endless road to rigour. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 376(2118):20170238, 2018. URL: `http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2017.0238`.

[4] L. Corry. Hilbert's sixth problem: between the foundations of geometry and the axiomatization of physics. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0221.

[5] L. Accardi. Quantum probability and Hilbert's sixth problem. *Phil Trans R Soc A,*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2018.0030.

[6] S. Majid. On the emergence of the structure of physics. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0231.

[7] M. Slemrod. Hilbert's sixth problem and the failure of the Boltzmann to Euler limit. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0222.

[8] G. M. D'Ariano. The solution of the sixth Hilbert problem: the ultimate Galilean revolution. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0224.

[9] Adonai S. Sant'Anna. The definability of physical concepts. *Bol. Soc. Parana. Mat. (3)*, 23(1-2):163–175, 2005. URL: http://dx.doi.org/10.5269/bspm.v23i1-2.7471, doi:10.5269/bspm.v23i1-2.7471.

[10] Newton C. A. da Costa and F. Antonio Doria. Janus–Faced Physics: On Hilbert's 6th Problem. In *Randomness and Complexity, From Leibniz to Chaitin*, page 25–68. World Scientific, 2007. doi:10.1142/9789812770837_0003.

[11] A.P. Levich. Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows. In *On the Way to Understanding the Time Phenomenon: the Constructions of Time in Natural Science (Part 1)*, chapter 5, page 149–192. World Scientific, 1995. URL: http://www.chronos.msu.ru/old/EREPORTS/levich1.pdf, doi:10.1142/9789812832092_0010.

[12] Michael Barr, Colin Mclarty, and Charles Wells. Variable Set Theory. page 1–12. 1986. URL: http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf.

[13] John L. Bell. *Abstract and Variable Sets in Category Theory*, page 9–16. Polimetrica International Scientific Publisher, 2006. URL: http://publish.uwo.ca/~jbell/Bell2.pdf.

[14] F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for Mathematics.* Cambridge University Press, 2003.

[15] Я.І. Грушка. Мінливі множини та їх властивості. *Доповіді Національної академії наук України*, (5):12–18, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/236120448.

[16] Я.І. Грушка. Примітивні мінливі множини та їх властивості. *Математичний вісник НТШ*, 9:52–80, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/236120647.

[17] Я.І. Грушка. Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем. *Укр. мат. журн.*, 65(9):1198–1218, 2013. URL: http://umj.imath.kiev.ua/article/?lang=ua&article=8385, doi:10.1007/s11253-014-0862-6.

[18] Я.І. Грушка. Видимість у мінливих множинах. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 9(2):122–145, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/236217050.

[19] Ya.I. Grushka. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). page 1–208. Preprint: ResearchGate, 2017. URL: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521.

[20] Я.І. Грушка. *Теоретико-множинні методи в релятивістській кінематиці.* Інститут математики НАН України (Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук), Київ, 2023. URL: http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.18858.12481.

References

[1] David Hilbert. Mathematical problems. *Bull. Amer. Math. Soc*, 8:437–479, 1902. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1902-00923-3.

[2] Yu.I. Petunin and D.A. Klyushin. A structural approach to solving the 6th Hilbert problem. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 71(71):165–179, 2005. doi:10.1090/S0094-9000-05-00656-3.

[3] A.N. Gorban. Hilbert's sixth problem: the endless road to rigour. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 376(2118):20170238, 2018. URL: http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2017.0238.

[4] L. Corry. Hilbert's sixth problem: between the foundations of geometry and the axiomatization of physics. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0221.

[5] L. Accardi. Quantum probability and Hilbert's sixth problem. *Phil Trans R Soc A*,, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2018.0030.

[6] S. Majid. On the emergence of the structure of physics. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0231.

[7] M. Slemrod. Hilbert's sixth problem and the failure of the Boltzmann to Euler limit. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0222.

[8] G. M. D'Ariano. The solution of the sixth Hilbert problem: the ultimate Galilean revolution. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0224.

[9] Adonai S. Sant'Anna. The definability of physical concepts. *Bol. Soc. Parana. Mat. (3)*, 23(1-2):163–175, 2005. URL: http://dx.doi.org/10.5269/bspm.v23i1-2.7471, doi:10.5269/bspm.v23i1-2.7471.

[10] Newton C. A. da Costa and F. Antonio Doria. Janus–Faced Physics: On Hilbert's 6th Problem. In *Randomness and Complexity, From Leibniz to Chaitin*, page 25–68. World Scientific, 2007. doi:10.1142/9789812770837_0003.

[11] A.P. Levich. Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows. In *On the Way to Understanding the Time Phenomenon: the Constructions of Time in Natural Science (Part 1)*, chapter 5, page 149–192. World Scientific, 1995. URL: http://www.chronos.msu.ru/old/EREPORTS/levich1.pdf, doi:10.1142/9789812832092_0010.

[12] Michael Barr, Colin Mclarty, and Charles Wells. Variable Set Theory. page 1–12. 1986. URL: http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf.

[13] John L. Bell. *Abstract and Variable Sets in Category Theory*, page 9–16. Polimetrica International Scientific Publisher, 2006. URL: http://publish.uwo.ca/~jbell/Bell2.pdf.

[14] F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press, 2003.

[15] Ya.I. Grushka. Changeable sets and their properties. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (5):12–18, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/236120448.

[16] Ya.I. Grushka. Primitive changeable sets and their properties. *Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society*, 9:52–80, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/236120647.

[17] Ya.I. Grushka. Base Changeable Sets and Mathematical Simulation of the Evolution of Systems. *Ukr Math J*, 65(9):1332-1353, 2014. doi:10.1007/s11253-014-0862-6.

[18] Ya.I. Grushka. Visibility in changeable sets. *Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 9(2):122–145, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/236217050.

[19] Ya.I. Grushka. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). page 1–208. Preprint: ResearchGate, 2017. URL: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521.

[20] Ya.I. Grushka. *Set-theoretic methods in relativistic kinematics.* Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine (Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences), Kyiv, 2023. URL: http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.18858.12481.

Надійшло 20.11.2025

Grushka Ya.I. *On internal time on a synchronized oriented set*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 96–113.

Oriented sets are the simplest mathematical structures that model collections of evolving objects. This work is devoted to the problem of the existence of internal time on a synchronized oriented set. From an intuitive point of view, internal time is the time whose flow can be "observed and recorded" while "living inside" the oriented set. In the paper we prove that the sufficient condition for the existence and uniqueness of internal time on a synchronized oriented set, obtained in previous works, is not a necessary one. Also we establish some necessary condition for the existence of internal time on a synchronized oriented set and show that this condition is not sufficient.