DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.02

Дорош А.Б., Черевко І.М.

Моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу

Досліджено схему знаходження наближених розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу зі змінним відхиленням аргументів, що базується на запропонованій ітераційній схемі із застосуванням кубічних сплайнів дефекту два. Для практичного моделювання таких крайових задач розроблено прикладний застосунок зі зручним користувацьким інтерфейсом для задання вхідних параметрів та візуалізації отриманих результатів.

Ключові слова і фрази: крайова задача, інтегро-диференціальне рівняння, нейтральний тип, кубічний сплайн дефекту два, метод сплайн-апроксимації.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *a.dorosh@chnu.edu.ua (Дорош А.Б.), i.cherevko@chnu.edu.ua (Черевко І.М.)*

Вступ

Математичні моделі, що описуються інтегро-диференціальними рівняннями, виникають при вивченні прикладних фізичних, економічних, екологічних процесів. Зокрема, інтегро-диференціальні рівняння Вольтерри із запізненням відіграють важливу роль при моделюванні багатьох реальних явищ в екології [1]. Останніми роками зростає інтерес до інтегро-диференціальних рівнянь, які є комбінацією диференціальних та інтегральних рівнянь Фредгольма чи Вольтерри. Вони відіграють важливу роль у прикладних задачах техніки, астрономії, при математичному моделюванні поширення епідемій, в задачах математичної біології та хімічної кінетики [2, 3].

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням є достатньо складним об'єктом дослідження. Відомо, що не існує універсальних методів побудови їх точних розв'язків. Тому основними теоретичними питаннями при дослідженні таких задач є обґрунтування конструктивних підходів доведення існування їх розв'язків та розробка ефективних методів побудови наближених розв'язків. Важливою також є задача одержання оцінок похибок для наближених розв'язків. На даний час для знаходження розв'язків крайових задач із запізненням використовуються методи послідовних наближень, проекційно-ітераційні методи,

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.
Information on some grant ...

© Дорош А.Б., Черевко І.М., 2025

методи сплайн-функцій [4, 5, 6, 7]. Цікавими для прикладних застосувань виявились схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь [8, 9, 10].

Метою даної роботи є застосування ітераційної схеми знаходження наближених розв'язків нового класу крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу з багатьма запізненнями за допомогою кубічних сплайнів дефекту два.

1 Постановка задачі. Існування розвязку крайової задачі

Введемо позначення

$$\begin{aligned} [y(x)] &= \Big(y\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y\big(x-\tau_n(x)\big)\Big),\\ [y(x)]_1 &= \Big(y'\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y'\big(x-\tau_n(x)\big)\Big),\\ [y(x)]_2 &= \Big(y''\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y''\big(x-\tau_n(x)\big)\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)+ \tag{2}$$

$$+\int\limits_a^b g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)ds,\ x\in[a;b],$$

$$y^{(p)}(x)=\varphi^{(p)}(x),\ p=0,1,2,\ x\in[a^*;a],\ y(b)=\gamma, \tag{3}$$

де запізнення $\tau_0(x)=0$, а $\tau_i(x),\ i=\overline{1,n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*;a]$, $\gamma\in R$,

$$a^*=\min_{0<i\le n}\left\{\inf_{x\in[a;b]}(x-\tau_i(x))\right\}.$$

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x),\ldots,\tau_n(x)$:

$$\begin{aligned} E_{i1} &= \big\{x_j\in[a,b]:\ x_j-\tau_i(x_j)=a,\ j=1,2,\ldots\big\},\\ E_{i2} &= \big\{x_j\in[a,b]:\ x_0=a,\ x_{j+1}-\tau_i(x_{j+1})=x_j,\ j=0,1,2,\ldots\big\},\\ E_2 &= \bigcup_{i=1}^n\big(E_{i1}\cup E_{i2}\big). \end{aligned}$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x),\ i=\overline{1,n}$ – такі функції, що множини E_{i1},E_{i2}, $i=\overline{1,n}$, є скінченними. Занумеруємо точки множини E_2 в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$P=\sup\Bigg\{\Big|f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)\Big|+\Bigg|\int\limits_a^b g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)ds\Bigg|:$$

$$\Big|y\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\le P_1,\ \Big|y'\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\le P_2,$$

$$\Big|y''\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\le P_3,\ i=\overline{0,n},\ x,s\in[a;b]\Big\},$$

$$J=[a^*;a]\,,\ I=[a,b]\,,$$

$$I_1=[a,x_1]\,,\ I_2=[x_1,x_2]\,,\ \ldots,\ I_k=[x_{k-1},x_k]\,,\ I_{k+1}=[x_k,b]\,,$$

$$B_2\left(J\cup I\right)=\Bigg\{y\left(x\right):y\left(x\right)\in\Bigg(C(J\cup I)\cap\Big(C^1(J)\cup C^1(I)\Big)\cap$$

$$\cap\Bigg(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2\left(I_j\right)\Bigg)\Bigg),\ |y(x)|\le P_1,\ |y'(x)|\le P_2,\ |y''(x)|\le P_3\Bigg\},$$

де P_1,P_2,P_3 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (2)-(3) вважатимемо функцію $y=y\left(x\right)$, якщо вона задовольняє рівняння (2) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E_2) і крайові умови (3). Будемо шукати розв'язок задачі (2)-(3), який належить простору $B_2(J\cup I)$.

Із означення простору $B_2(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (2)-(3) буде неперервно-диференційовним для будь-якого $x\in[a,b]$, де $y'\left(a\right)$ – права похідна, а в точках множини E_2 існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

Введемо норму в просторі $B_2(J\cup I)$:

$$\|y\|_{B_2}=\max\Bigg\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}|y(x)|,\ \frac{2}{b-a}\max\Big(\max_{x\in J}|y'(x)|,\ \max_{x\in I}|y'(x)|\Big),$$

$$\max\Big(\max_{x\in J}|y''(x)|,\ \max_{x\in I_1}|y''(x)|,\ \ldots,\ \max_{x\in I_{k+1}}|y''(x)|\Big)\Bigg\}.$$

Простір $B_2(J\cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (2)-(3) еквівалентна інтегральному рівнянню [11, 12]

$$y\left(x\right)=\int\limits_{a^*}^b\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)+\int\limits_a^b g\big(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1,[y(\xi)]_2\big)d\xi\Big]\times$$

$$\times\overline{G}\left(x,s\right)ds+l\left(x\right),\ x\in J\cup I,\tag{4}$$

$$\overline{G}\left(x,s\right)=\begin{cases}G\left(x,s\right), & x,s\in I,\\ 0, & \text{в іншому випадку},\end{cases}$$

$$l\left(x\right)=\begin{cases}\varphi\left(x\right), & x\in J,\\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\left(x-a\right)+\varphi\left(a\right), & x\in I,\end{cases}$$

де $G\left(x,s\right)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''\left(x\right)=0,\ x\in I,\ y\left(a\right)=y\left(b\right)=0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B_2(J\cup I)$ наступним чином

$$(Ty)(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)+$$

$$+\int\limits_{a}^{b}g\big(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1,[y(\xi)]_2\big)d\xi\Big]\,\overline{G}\,(x,s)\,ds+l\,(x)\,,\;x\in J\cup I.$$

Нехай функція $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)$ – неперервна у $G=[a;b]\times G_1^{n+1}\times G_2^{n+1}\times G_3^{n+1}$, а $g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)$ – неперервна у $Q=[a;b]\times G$, де $G_1=\big\{u\;\in R:\;|u|\le P_1\big\}$, $G_2=\big\{v\;\in R:\;|v|\le P_2\big\}$, $G_3=\big\{w\;\in R:\;|w|\le P_3\big\}$, P_1,P_2,P_3 – додатні сталі, що входять в означення простору $B_2(J\cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|\,,\;\frac{(b-a)^2}{8}P+\max\Big\{|\varphi(a)|\,,\;|\gamma|\Big\}\right\}\le P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|\,,\;\frac{b-a}{2}P+\left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\le P_2,$

3) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi''(x)|\,,\;P\right\}\le P_3,$

4) *функції* $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)$ *і* $g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)$ *задовольняють умову Ліпшиця у* G *за змінними* $[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2$ *зі сталими* L_i^1 *та* L_i^2, $i=\overline{0,3n+2}$, *відповідно,*

5) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(L_i^1+(b-a)L_i^2\Big)+\frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=n+1}^{2n+1}\Big(L_i^1+(b-a)L_i^2\Big)+\sum\limits_{i=2n+2}^{3n+2}\Big(L_i^1+(b-a)L_i^2\Big)<1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2)-(3) *у просторі* $B_2(J\cup I)$.

Доведення теореми нескладно одержати застосовуючи принцип стислих відображень для оператора T [7, 13].

2 Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b\}$ на відрізку $[a;b]$, таку що $E_2\subset\Delta$. Позначимо через $S(x,y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y\,(x)$, який належить простору $B_2(J\cup I)$.

Введемо позначення:

$$M_j^+=S''(x_j+0,y),\;j=0,1,\ldots,m-1,\tag{5}$$

$$M_j^-=S''(x_j-0,y),\;j=1,2,\ldots,m.\tag{6}$$

Сплайн $S(x,y)$ дефекту два, що інтерполює функцію $y(x)$, має вигляд [6, 7]:

$$S(x,y)=M_{j-1}^+\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}+M_j^-\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}+\tag{7}$$

$$+\left(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}^+h_j^2}{6}\right)\frac{x_j-x}{h_j}+\left(y_j-\frac{M_j^-h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_{j-1}}{h_j},$$

$$x\in[x_{j-1};x_j],\;j=1,2,\ldots,m.$$

Враховуючи властивості кубічного сплайна у внутрішніх вузлах сітки Δ, маємо рівності:

$$S'_j(x_j-0,y)=S'_{j+1}(x_j+0,y),\ j=\overline{1,m-1}. \tag{8}$$

Рівності (8), враховуючи вигляд сплайна, перепишемо у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку задовольняють величини M^+_{j-1} і M^-_j $(j=1,2,\dots,m)$.

$$\left\{\begin{array}{c} h_{j+1}y_{j-1}-(h_j+h_{j+1})y_j+h_jy_{j+1}=\frac{h_jh_{j+1}}{6}\times \\ \times\left(h_jM^+_{j-1}+2h_jM^-_j+2h_{j+1}M^+_j+h_{j+1}M^-_{j+1}\right), \\ j=\overline{1,m-1}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Будемо шукати розв'язок крайової задачі (2)-(3) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту два за наступною схемою:

А) Виберемо кубічний сплайн $S\left(x,y^{(0)}\right)=\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a)+\varphi(a)$, який задовольняє крайові умови (3) при $x=a$ та $x=b$.

Б) Використовуючи вихідне рівняння (2) та сплайн $S\left(x,y^{(k)}\right)$, знаходимо для $k=0,1,\dots$:

$$\begin{gathered} M_j^{+(k+1)}=f\big(x_j,[S(x_j+0,y^{(k)})],[S(x_j+0,y^{(k)})]_1,[S(x_j+0,y^{(k)})]_2\big)+ \\ +\int_a^b g\big(x_j,s,[S(s,y^{(k)})],[S(s+0,y^{(k)})]_1,[S(s+0,y^{(k)})]_2\big)ds, \\ j=\overline{0,m-1}, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} M_j^{-(k+1)}=f\big(x_j,[S(x_j-0,y^{(k)})],[S(x_j-0,y^{(k)})]_1,[S(x_j-0,y^{(k)})]_2\big), \\ +\int_a^b g\big(x_j,s,[S(s,y^{(k)})],[S(s-0,y^{(k)})]_1,[S(s-0,y^{(k)})]_2\big)ds, \\ j=\overline{1,m}. \end{gathered} \tag{11}$$

У співвідношеннях (10), (11) підставляємо $S^{(p)}\left(x,y^{(k)}\right)=\varphi^{(p)}(x),\quad p=0,1,2$ при $x<a$.

В) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, розв'язуючи систему рівнянь (9).

Г) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x,y^{(k+1)}\right)$ у формі (7), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j=\overline{0,m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j=\overline{1,m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1=\sum_{i=0}^{n}\big(L_i^1+(b-a)L_i^2\big), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \lambda_2=\sum_{i=n+1}^{2n+1}\big(L_i^1+(b-a)L_i^2\big),\ \lambda_3=\sum_{i=2n+2}^{3n+2}\big(L_i^1+(b-a)L_i^2\big), \\ u=\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8},\ v=\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2H}{3}, \\ \mu=5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1H^2+\lambda_2H+\lambda_3\right). \end{gathered}$$

Теорема 2. *Нехай розв'язок крайової задачі (2)-(3) існує та належить простору $B_2(J \cup I)$. Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1 \tag{13}$$

існує таке H^*, що при всіх $0 < H < H^*$ послідовність сплайнів $\left\{S\left(x, y^{(k)}\right)\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$ рівномірно збігається на $[a; b]$ і справджуються співвідношення

$$\left\| \lim_{k\to\infty} S^{(p)}(x, y^{(k)}) - y^{(p)}\left(x\right) \right\| \le R_p \omega\left(y''\left(x\right), H\right), \; p = 0, 1, 2, \tag{14}$$

$$R_0 = \sup_{H \le H^*} \left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}\right), \; R_1 = \sup_{H \le H^*} \left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H\right),$$

$$R_2 = \sup_{H \le H^*} \left(\frac{\mu}{1-\theta} + 5\right),$$

$$\omega\left(y''\left(x\right), H\right) = \max_{1 \le r \le l+1} \omega_r\left(y''\left(x\right), H\right),$$

де $\omega_r(f, H)$ – це модуль неперервності функції f на відрізку δ_r.

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно до теореми 1 для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням [11].

3 Числові експерименти

Для моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типів розроблено кросплатформне програмне забезпечення засобами мови JavaScript із використанням технології NodeJS та фреймворку NW.js, який дає змогу надати програмі зручний користувацький інтерфейс для введення параметрів різного типу.

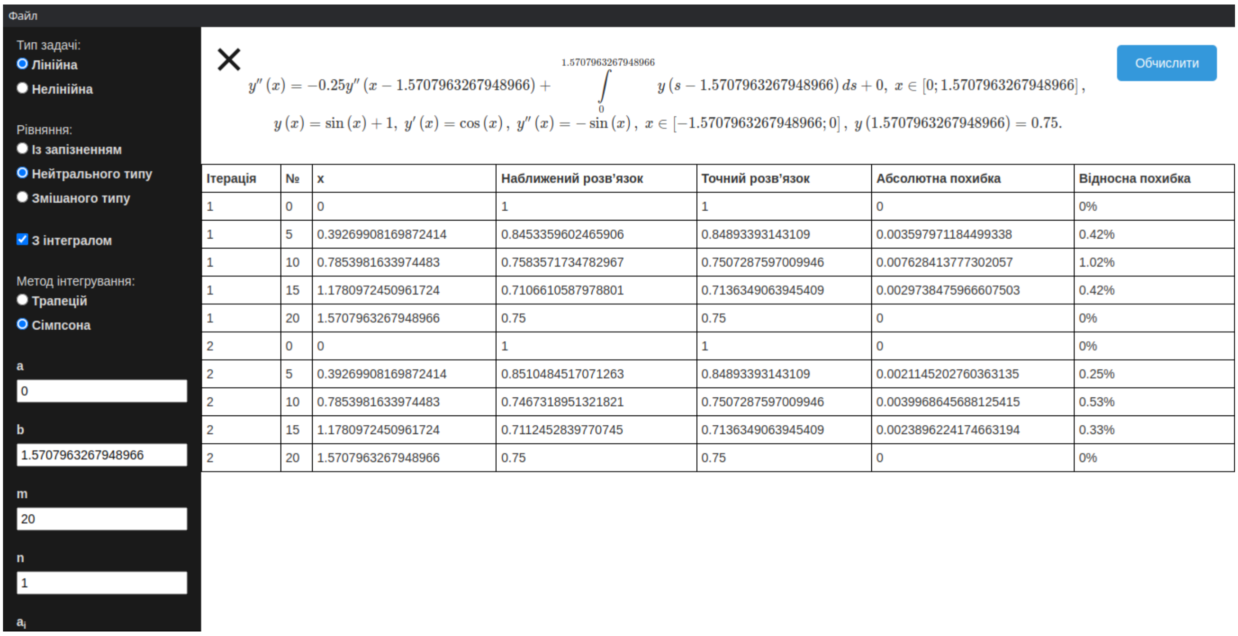

Рис. 1: Вигляд вікна застосунку

У боковій частині вікна програми задаються параметри крайової задачі, а саме початок a та кінець відрізка b, кількість точок розбиття m, коефіцієнти рівняння a_i, b_i, c_i, запізнення τ_i $(i = \overline{0,n})$, точність обчислення ε тощо. Функцію f можна ввести прямо в текстовому полі, її розпізнає вбудований синтаксичний аналізатор JavaScript. Якщо точний розв'язок рівняння невідомий, можна вимкнути прапорець "Показувати точний розв'язок". За наявності інтегрального доданка у рівнянні користувач може обрати метод його обчислення – квадратурну формулу трапецій або Сімпсона. Математичний вигляд крайової задачі відображається у верхній частині вікна.

Увівши всі параметри, користувач натискає кнопку "Обчислити", щоб побачити результат.

Програма виводить на екран усі ітерації обчислювальної схеми, поки не досягне потрібної точності. У таблиці з'явиться наступна інформація: номер ітерації, номер кожної точки відрізка та її значення, наближений розв'язок. Якщо задано точний розв'язок, то він теж буде відображатися разом з абсолютною та відносною похибкою між точним і наближеним розв'язками.

Приклад. *Розглянемо крайову задачу:*

$$y''(x) = -\alpha y''\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \tag{15}$$

$$y(x) = \sin x + 1,\ y'(x) = \cos x,\ y''(x) = -\sin x,\ x \le 0, \tag{16}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \alpha.$$

При $\alpha = 0.25$ існує єдиний розв'язок крайової задачі, а також виконується умова (13) теореми 2, оскільки при $h = 0.1$ маємо, що $\theta \approx 0.7357 < 1$.

Точний розв'язок даної крайової задачі $y(x)$ знайдено методом кроків:

$$y(x) = \alpha\cos x + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{x^2}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{\pi}{4}x + 1 - \alpha.$$

Наближений розв'язок $y_S^{20}(x)$, одержаний на 2-й ітерації при 20 точках розбиття відрізка та $\alpha = 0.25$, наведено в таблиці 1.

Табл. 1: Результати числових експериментів для крайової задачі (15)-(16).

x	Точний розв'язок $y(x)$	Наближений розв'язок $y_S^{20}(x)$	Δ_S^{20}
0	1	1	0
$\frac{\pi}{8}$	0.848934	0.851048	0.002114
$\frac{\pi}{4}$	0.750729	0.746732	0.003997
$\frac{3\pi}{8}$	0.713635	0.711245	0.00239
$\frac{\pi}{2}$	0.75	0.75	0

Список літератури

[1] Cushing J.M. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 20. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[2] Yang Kuang. Delay differential equations: with applications in population dynamics. Academic Press, New York, 1993. 398 p.

[3] Forrest-Owen O. Mathematical Modelling and it's Applications in Biology, Ecology and Population Study. Master's Thesis, Chester, 2016. 124 p.

[4] Luchka A., Feruk, V. *Projection-iterative method for systems of differential equations with delay and constraints*. Nonlinear oscillations, 2003, **6** (2), 206–232. (in Ukrainian)

[5] Bellour A., Bousselsal M. *Numerical Solution of Delay Integro-Differential Equations by Using Taylor Collocation Method*. Mathematical Methods in Applied Science, 2014, **37**, 1491–1506. doi:10.1002/mma.2910

[6] Nikolova T.S., Bainov D.D. *Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations*. Yokohama Math. J., 1981, **29** (1), 108–122.

[7] Cherevko I.,Dorosh A. *Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations*. J. Numer. Anal. Approx. Theory, 2015, **44** (2), 154–165. doi:10.33993/jnaat442-1054

[8] Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. Academic Press, New York, 1981. Pp. 155–197.

[9] Cherevko I.M., Matviy O.V. *On the approximation of systems with a delay and their stability*. Nonlinear oscillations. 2004, **7** (2), 208–216.

[10] Dorosh A.B., Tuzyk I.I., Cherevko I.M. *Approximation schemes for boundary value problems for integro-differential equations with delay*. Nonlinear oscillations. 2023, **26** (1), 33–41. (in Ukrainian)

[11] Dorosh A., Cherevko I. *Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Dierential Equations With Many Delays*. Carpathian Mathematical Publications. 2018, **10** (1), 65–70. doi:10.15330/cmp.10.1.65-70

[12] Grim L.J., Schmitt K. *Boundary value problems for delay differential equations*. Bull. Amer. Math. Soc. 1968, **74** (5), 997–1000.

[13] Nastasieva N.P., Cherevko I.M. *Approximate method for solving boundary value problems for neutral type integro-differential equations*. Math Studios. 1998, **10** (2), 147–152. (in Ukrainian)

Надійшло 28.10.2025

Dorosh A.B., Cherevko I.M. *Modeling boundary value problems for neutral-type integro-differential equations*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 16–23.

A scheme for finding approximate solutions to boundary value problems for neutral-type integro-differential equations with variable argument deviation is studied, based on the suggested iterative scheme using cubic splines with the defect two. For a practical modeling of such boundary value problems, an application with a user-friendly interface for setting input parameters and visualizing the results has been developed.