

Голові разової спеціалізованої
вченої ради PhD 12748
Чернівецького національного
університету
імені Юрія Федьковича
доктору фізико-математичних наук,
професору Ігорю ЧЕРЕВКУ

ВІДГУК

офіційного опонента
на дисертаційну роботу аспіранта Українця О.З.
«Математичне моделювання природничих процесів
та економічних систем під дією збурень»
подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 113 – «Прикладна математика»

Актуальність теми та зв'язок з науковими планами та програмами

Сучасна теорія математичного моделювання розвивається у напрямку врахування дедалі ширшого переліку факторів, що впливають на динаміку стану об'єкту дослідження, як запізнення аргументу, багаточастотні збурення, флуктуації параметрів, екологічні впливи на природничі процеси, обмежені й дискретні ресурси тощо. Класичні моделі, побудовані на звичайних диференціальних рівняннях без запізнення та без врахування зовнішніх збурень, виявляються обмеженими для досить точного опису процесів в імунології, епідеміології, екології та інших областях. У зв'язку з цим розробка нових нелінійних моделей із запізненням, обґрунтування методів усереднення систем диференціальних рівнянь із врахуванням впливу багаточастотних збурень, дослідження стійкості стаціонарних розв'язків та аналіз поведінки моделей за наявності різного роду нелінійностей є актуальним завданням як з теоретичної, так і з прикладної точок зору. Не менш актуальним є й розвиток математичного апарату моделей загальної економічної рівноваги: широко відома модель Ерроу–Дебре, побудована на лінійних цінових функціоналах і дробовозначних товарних векторах, не охоплює таких важливих рис сучасних ринків, як дискретність товарних запасів, наявність оптових і нелінійних за обсягом цін, об'єднання ринків непорівнянних за цінами товарів, а отже, потребує узагальнення на ширші функціонально-аналітичні структури — впорядковані векторні простори, векторні ґратки і ортогонально адитивні (зарядові) функціонали.

Робота виконана на кафедрі прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича і відповідає напрямку досліджень в межах науково-дослідної теми «Математичне моделювання і числово-аналітичні методи дослідження динамічних та інформаційних процесів» (державний реєстраційний номер 0121U100117).

Аналіз змісту дисертації та основні результати роботи

У роботі розглянуто побудову і дослідження нелінійних математичних моделей із запізненням аргументу, що описують природничі процеси (екологію, біологію, імунологію, епідеміологію) та модифікацію моделей економічних систем ринкової рівноваги типу Ерроу-Дебре із впливом різних економічних впливів. Структурно робота складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел і додатків.

У *першому розділі* наведено системний огляд літератури, починаючи з робіт А.М. Самойленка, Р.І. Петришина, Я.Й. Бігуна щодо методу усереднення, праці Г.І. Марчука та інших авторів з математичної імунології, моделі Кермака–МакКендрика та К. Кука з епідеміології, до робіт із загальної економічної рівноваги від класичних джерел К.І. Arrow, Г. Debreu до праць останніх років авторів К. Подчек і Н. Яннеліс, С. Фратіні, Х. Янга та інших. Виокремлено невирішені питання, які стали відправною точкою досліджень.

Другий розділ є ключовою частиною роботи щодо дослідження динамічних систем, зокрема з урахуванням багаточастотних збурень. Автор розглядає систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними запізненнями вигляду

$$\frac{du}{d\tau} = U(\tau, u_\Delta) + \varepsilon^\beta V(\tau, a_\Delta, \varphi_\Theta)$$

та слугує моделлю природних процесів за наявності збурень, які описуються системою багаточастотних рівнянь із запізненням. У теоремі 2.2 доведено існування та єдиність розв'язку, а також виведено ефективну оцінку похибки усереднення вигляду $\|u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_3 \varepsilon^\alpha$. Важливо, що показник дробової асимптотики $\alpha = (mq)^{-1}$ явно враховує кількість фазових змінних m та запізнень q в них. Вагомим результатом є теорема 2.3, де автор дисертації послаблює вимоги на коефіцієнти Фур'є вектор-функцій V, X, Y , локалізуючи їх виконання вздовж розв'язку усередненої задачі, що суттєво розширює межі застосовності методу. Теоретичні здобутки успішно проілюстровано на канонічній моделі взаємодії «хижак–жертва» за наявності одночастотного коливного збурення та резонансу частот у точці $\tau = 0$.

Третій розділ присвячений розробці та комплексному аналізу двох нових нелінійних моделей: імунної відповіді людини на інфекційне захворювання та епідемічної SIR-моделі із втратою імунітету. Спільною рисою обох систем є інтеграція екологічного фактору $E(t)$ та наявність типових для біологічних процесів нелінійних зв'язків між станами системи. У межах дослідження автор строго встановлює достатні умови існування, єдиності та збереження невід'ємності розв'язків. Окремо досліджено стаціонарні розв'язки з доведенням їх існування та асимптотичної стійкості. Важливим прикладним результатом для імунної моделі є отримання конструктивної оцінки – імунологічного бар'єру вигляду

$$V^* = \frac{1}{\eta\beta} \left(\rho C^* - \mu_f \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}} \right) + \frac{\varepsilon_c \rho}{\eta\beta\mu_c} (2e^{-\mu_c \tau} - 1),$$

тієї порогової дози інфікування, за якої організм успішно долає хворобу самотійно. Для модифікованої SIR-моделі здобувач визначає базове репродуктивне число R_0 , на основі якого виводить достатні умови для уникнення спалаху епідемії. Завершальним етапом розділу є успішне поєднання строгих аналітичних розрахунків із комп'ютерним моделюванням у системі Mathematica, що забезпечує якісну візуалізацію динаміки систем залежно від рівня екологічного впливу.

Четвертий розділ присвячено теоретичному розширенню та удосконаленню класичної моделі загальної економічної рівноваги Ерроу–Дебре. Здобувач пропонує модифікацію цієї моделі, яка базується на використанні цілочисельних товарних векторів. Завдяки застосуванню геометричної форми теореми Гана–Банаха, у розділі доведено існування рівноважного вектора цін для одноагентної економіки обміну. Значна частина роботи зосереджена на розвитку математичного інструментарію: автор вводить поняття комплементарного простору, що слугує універсальним середовищем для коректного визначення зарядів – узагальнень ортогонально адитивних функціоналів. У цьому ж контексті успішно доведено аналог теореми Рісса–Канторовича, який стверджує порядкову повноту простору регулярних зарядів. Запропонована концепція «ціни-заряду» адекватно описує нелінійні оптові механізми та розширює теорію рівноваги на дискретні ресурси й нескінченновимірні простори товарів.

Наукова новизна, оцінка обґрунтованості наукових положень дисертації та їх достовірності

Наукова новизна дисертації виявляється у вдалому поєднанні методів теорії диференціальних рівнянь із запізненням, теорії стійкості, методу усереднення та функціонально-аналітичних інструментів економічного моделювання. Зокрема, вперше:

- обґрунтовано метод усереднення для систем із лінійно перетвореними запізненнями під дією багаточастотних збурень з оцінкою похибки, явно залежною від показників асимптотики, кількості фазових змінних і запізнень;
- побудовано математичну модель імунної відповіді з екологічним фактором, для якої доведено асимптотичну стійкість стану «здорового організму» та отримано значення імунологічного бар'єру – порогового значення для початкової дози інфекції, не перевищення якої гарантує асимптотичне згасання інфекційного захворювання;
- модифіковано SIR-модель епідемії під впливом екологічного фактору з втратою імунітету та на підставі отриманого базового репродуктивного числа доведено твердження про відсутність спалаху епідемії;
- встановлено імунологічний бар'єр – порогове значення для початкової дози інфекції, не перевищення якої гарантує асимптотичне згасання інфекційного процесу;
- запропоновано та обґрунтовано модифіковану модель Ерроу–Дебре з цілочисельними товарними векторами та модель з цінами-зарядами на комплементарних просторах, доведено існування ринкової рівноваги у відповідних класах задач.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів.

У дисертаційній роботі зроблено вагомий внесок у розвиток методу усереднення для багаточастотних систем для нового класу нелінійних систем із запізненням з конструктивним характером умов та оцінок похибок, які мають застосування у прикладних задачах. У роботі запропоновані і досліджено модифікації математичних моделей імунної відповіді та процесу поширення епідемії із фактором запізнення і врахуванням впливу екологічного фактору. Такі моделі мають як теоретичну цінність, так і можуть застосовуватися в медичних й екологічних цілях, оскільки надають змогу прогнозувати перебіг інфекційних

захворювань та епідемічних процесів, враховуючи комплексний вплив екологічних і соціально-психологічних факторів.

В області математичної економіки запропонований інструментарій корисний для дослідження ринків із дискретним розподілом ресурсів та нелінійним ціноутворенням. Крім того, розроблені в дисертації методи та моделі мають важливий освітній потенціал, що робить їх придатними для використання у освітніх програмах, в яких закладено вивчення і застосування математичного моделювання природничих процесів, диференціальних рівнянь із запізненням, математичних методів в мікроекономіці.

Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях

Основні результати дисертації детально відображено у 6 наукових статтях, з яких 5 опубліковано у фахових виданнях України категорії «Б», а одна – у виданні, що індексується науково-метричною базою Scopus. Результати додатково апробовано у 6 матеріалах і тезах всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій (Софія, Кишинів, Вікно (Польща), Київ, Рівне) та ще у двох статтях. У публікаціях, виконаних у співавторстві, чітко зазначено особистий внесок здобувача. Кількість і рівень публікацій повністю відповідають вимогам щодо дисертацій на здобуття ступеня доктора філософії.

Зауваження і побажання

1. В моделі епідемії доцільно було б розглянути вплив не лише усередненого екологічного фактору $E(t)$, а й випадок стохастичних збурень цього фактору, що є природним для соціально-екологічних застосувань.
2. У пункті 2.4 вдало проілюстровано вплив багаточастотного збурення на поведінку розв'язків моделі Вольтер-Лотки (2.13), (2.14), але варто детальніше зобразити на рисунку 2.4 фазовий портрет, вказавши кілька фазових траєкторій і сепаратиси стаціонарної точки стійкий вузол.
3. При дослідженні стійкості розв'язку (3.39) в моделі епідемії (3.1), (3.30)-(3.33) доцільно розглянути і стійкість фактору $R(t)$, відобразивши це у характеристичному рівнянні на сторінці 80.
4. Стійкість стаціонарного розв'язку (3.40) у моделі епідемії досліджено тільки в частинних випадках, варто б знайти умови від'ємності дійсних частин коренів квазіполінома і побудувати області стійкості для коефіцієнтів моделі.

Висловлені зауваження є несуттєвими, мають характер дискусії та окреслюють перспективні вектори подальшого розвитку запропонованого автором підходу і ні

в якій мірі не зменшують наукової цінності одержаних у дисертаційній роботі важливих для теорії і практики результатів.

Загальний висновок

Дисертаційна робота О.З. Українця є завершеним самостійним науковим дослідженням, в якому зроблено вагомий внесок у розвиток методів аналізу динамічних систем із запізненням, теорії стійкості нелінійних моделей під дією багаточастотних і екологічних збурень, а також теорії економічної рівноваги для ринків із дискретними ресурсами та узагальненим ціноутворенням. Комплексний аналіз прикладних математичних моделей різних сфер застосування, дослідження їх властивостей та динаміки, використання прикладного програмного забезпечення для аналізу засвідчують, що напрям і зміст дисертації відповідає Освітньо-науковій програмі «Прикладна математика» спеціальності 113 Прикладна математика.

Підсумовуючи оцінку дисертаційної роботи в цілому, є достатні підстави стверджувати, що за актуальністю обраної теми, рівнем математичної строгості, обсягом і змістовністю отриманих результатів, науковою новизною та теоретико-практичною значущістю, дисертація Олега Захаровича Українця «Математичне моделювання природничих процесів та економічних систем під дією збурень» є завершеним науковим дослідженням. Дисертаційна робота виконана відповідно до вимог пунктів 6, 7, 8, 9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. №44 (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 341 від 21.03.2022, № 502 від 19.05.2023, № 507 від 03.05.2024), а її автор, Українець Олег Захарович, заслуговує на присудження ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика» в галузі знань 11 «Математика та статистика».

Офіційний опонент: доктор фізико-математичних наук,
професор, доцент кафедри моделювання складних систем
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

Андрій ШАТИРКО

ПІДПИС ЗА
ВЧЕНИЙ СЕК
КАРАУЛЬНИ

14.05

