

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.12>

Кушнірчук В.В., Малик І.В.

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДРОБОВИМ БРОУНІВСЬКИМ РУХОМ

The work is devoted to the study of sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of linear stochastic differential-functional equations with integral with fractional Brownian motion $B^{(H)}(t)$, $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. The work also considers an analogue of the method of variation of constants for such equations, which is an important result in the study of conditions for exponential stability in the mean square trivial solution of these equations.

Key words and phrases: stochastic differential equations, fractional Brownian motion, exponential stability, method of variation of constants.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: kushnirchuk.volodymyr@chnu.edu.ua (Кушнірчук В.В.), i.malyk@chnu.edu.ua (Малик І.В.)

1 Вступ

Теорії стохастичних диференціальних рівнянь та їх властивостям присвячена велика кількість робіт, основна увага в яких зазвичай зосереджена на якісних характеристиках розв'язків. Активного розвитку теорія випадкових процесів в цілому набула на початку ХХ століття, а теорія стохастичних диференціальних рівнянь зокрема бере початок із визначення стохастичного інтегралу [5]. Як виявилось, дана теорія має велику кількість застосувань в різних прикладних областях, включаючи фізику, хімію, біологію тощо. Теорія стійкості стохастичних диференціальних рівнянь Іто включає ряд підходів, а саме використання функцій Ляпунова та прямого підходу [2]. Слід зауважити, що хоча стохастичні диференціальні рівняння і розширюють область використання даних моделей для аналізу реальних явищ та процесів, проте володіють рядом обмежень. Одне із таких обмежень пов'язано із відсутністю післядії для стохастичних диференціальних рівнянь Іто. Тому, поряд із звичайними стохастичними диференціальними рівняннями, розвитку набуло дослідження стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням [3, 6, 8–10], де було розглянуто ряд реальних процесів, які описуються стохастичними диференціальними рівняннями із запізненням. Основна увага в цих дослідженнях звернена на умови стійкості

УДК 519.21

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60H10, 60G22.

стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням. Інший підхід для врахування післядії в стохастичних диференціальних рівняннях ґрунтується на використанні дробового броунівського руху [1, 7]. Згідно даних джерел дробовим броунівським рухом називається процес Гаусса із коваріаційною функцією

$$E\left(B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |s - t|^{2H}\right), \quad t, s \geq 0,$$

де $H \in (0, 1)$ – індекс Херста випадкового процесу $B^{(H)}(t)$. При $H = \frac{1}{2}$ дробовий броунівський рух є звичайним вінерівським процесом, $B^{\frac{1}{2}}(t) = W(t)$. У роботах Царькова Є.Ф. [9] та його учнів [6, 10] було визначено ряд необхідних та достатніх умов експоненціальної стійкості стохастичних диференціально-функціональних рівнянь запізнюючого типу та нейтрального типу для лінійного випадку, причому схема доведення ґрунтувалася на розгляді перетворення Лапласа від розв'язку. У випадку наявності стохастичного диференціального рівняння із індексом Херста $H \neq \frac{1}{2}$ дана методика потребує вдосконалення, оскільки виникає додатковий доданок при використанні ізометрії інтегралу Віка–Іто–Скорохода [1, 7].

Дана робота є першим кроком у дослідженні умов асимптотичної стійкості для лінійних стохастичних диференціальних рівнянь із інтегралом з дробовим вінерівським процесом $B^{(H)}(t)$, $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, тобто процесом із довготривалою пам'яттю. У роботі доведено два результати, один із яких наводить достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші, а другий результат присвячено аналогу методу варіації сталих для стохастичних диференціальних рівнянь.

2 Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Розглянемо лінійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння (СДФР) нейтрального типу

$$dDx_t = Lx_t dt + Gx_t dB^H(t), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

з початковою умовою

$$x_t = \varphi. \quad (2)$$

У рівнянні (1) та (2) x_t визначає відрізок траєкторії випадкового процесу $x : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R^1$, тобто

$$x_t := \{x(s), s \in [t - h, t]\}.$$

Лінійні функціонали D , L , G визначені на просторі обмежених неперервних функцій $C([-h, 0])$ наступними співвідношеннями

$$D\varphi = \varphi(0) - \int_{-h}^0 \varphi(s) dr_D(s),$$

$$L\varphi = l\varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi(s) dr_L(s),$$

$$G\varphi = g\varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi(s) dr_G(s),$$

де функції r_D , r_L , $r_G : [-h, 0] \rightarrow R^1$ – вимірні функції скінченної варіації неперервні в точці 0, причому

$$V_{-h}^0 r_D \leq K_D < 1. \quad (3)$$

Поряд із лінійним СДФР (1) розглянемо звичайне диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу

$$dDy_t = Ly_t dt. \quad (4)$$

Лемма 1. *Має місце представлення*

$$x(t) = y(t) + \int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

де $y(t)$ – розв'язок задачі Коші (4), (2), $X(t)$ – розв'язок диференціально-функціонального рівняння (4) з початковою умовою

$$X(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \in [-h, 0). \end{cases}$$

Proof. Перевіримо вірність початкової умови (2) та той факт, що випадковий процес (5) задовольняє стохастичне диференціальне рівняння (1). Початкова умова виконується, оскільки

$$x(t) = y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0].$$

Перевіримо тепер той факт, що випадковий процес $x(t)$ (5) задовольняє СДФР (1). Для цього подіємо функціоналом D на обидві частини рівняння (5):

$$Dx_t = Dy_t + D \left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s) \right).$$

Взявши диференціал від обох частин, отримаємо

$$\begin{aligned} dDx_t &= dDy_t + dD \left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s) \right) = \\ &= Ly_t dt + dD \left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s) \right) \end{aligned}$$

Враховуючи лінійність функціонала D та обмеженість функції $X(t)$, отримаємо

$$\begin{aligned} dD \left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s) \right) &= X(t-t)Gx_t dB^H(t) + \left(\int_0^t dDX(t-s)Gx_s dB^H(s) \right) = \\ &= Gx_t dB^H(t) + \left(\int_0^t LX(t-s)Gx_s dB^H(s) \right) dt = \\ &= Gx_t dB^H(t) + L \left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s) \right) dt. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$dDx_t = Ly_t dt + Gx_t dB^H(t) + L \left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s) \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= L \left(y(t) + \int_0^t X(t-s) G x_s dB^H(s) \right) dt + G x_t dB^H(t) = \\
&= L x_t dt + G x_t dB^H(t),
\end{aligned}$$

що і доводить твердження Лема 1. \square

Слід відмітити, що представлення (5) може бути використане для моделювання траєкторій випадкового процесу $x(t)$, крім того, дане представлення дає більш чітке розуміння того, що функція $y(t)$ є середнім значенням випадкового процесу $x(t)$, тобто

$$y(t) = E x(t).$$

Надалі в дослідженні стійкості розв'язку СДФР (1) ми будемо користуватися еквівалентністю стійкості для розв'язку $x(t)$ та перетвореного розв'язку

$$\gamma_x(t) = G x_t$$

у разі, коли G є ненульовим функціоналом, тобто $r_G(t) \neq 0$. В цьому випадку асимптотична поведінка $x(t)$ та $\gamma_x(t)$ повністю співпадають. Для подальшого дослідження зауважимо, що має місце співвідношення

$$G x_t = G y_t + \int_0^t G X(t-s) G x_s dB^H(s),$$

або в термінах позначень

$$\gamma_x(t) = \gamma_y(t) + \int_0^t \gamma_X(t-s) \gamma_x(s) dB^H(s). \quad (6)$$

Розглянемо питання існування та єдиності розв'язку задачі Коші (1), (2) за умови $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, що відповідає наявності довгострокової пам'яті. Зауважимо, що достатні умови існування та єдиності будуть зводитися до умов на коефіцієнти лінійного функціоналу $D\varphi$, а саме має місце теорема.

Theorem 1. Нехай функція r_D задовольняє умову (3), мають місце оцінки

$$V_{-h}^0 r_L = K_L < \infty, \quad V_{-h}^0 r_G = K_G < \infty$$

та початкова умова $\varphi \in L_2([-h, 0])$.

Тоді задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок на скінченному інтервалі $[0, T]$, $T < \infty$ з точністю до стохастичної еквівалентності, тобто для двох довільних розв'язків $x(t)$ та $\tilde{x}(t)$ задачі (1), (2) та довільного $t \in [0, T]$ має місце співвідношення

$$E |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 = 0. \quad (7)$$

Proof. Доведемо спочатку існування розв'язку, використовуючи наближення розв'язку задачі Коші (1), (2) за допомогою наближень Пікара. Припустимо, що наближення будуються за наступним принципом

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h, 0], \\ \varphi(0), & t \in (0, T] \end{cases}$$

та наступні наближення

$$x^{(n+1)}(t) - D^0 x_t^{(n)} = \varphi(0) + \int_0^t Lx_s^{(n)} ds + \int_0^t Gx_s^{(n)} dB^{(H)}(s),$$

де лінійний функціонал $D^0\varphi$ визначається за таким правилом

$$D^0\varphi = \int_{-h}^0 \varphi(s) dr_D(s).$$

Зауважимо, що згідно нашого припущення норма оператора D^0 менша 1. Використовуючи означення інтегралу з дробовим броунівським рухом, отримаємо

$$\begin{aligned} E \left(x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) \right)^2 - E \left(D^0 x_t^{(n)} - D^0 x_t^{(n-1)} \right)^2 &\leq 2 \left(\int_0^t \left(Lx_s^{(n)} - Lx_s^{(n-1)} \right) ds \right)^2 + \\ &+ 2 \left(\int_0^t \left(Gx_s^{(n)} - Gx_s^{(n-1)} \right) dB^{(H)}(s) \right)^2. \end{aligned}$$

Знаходячи \sup від правої та лівої частини, отримаємо наступну нерівність

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [0, T]} E \left(x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) \right)^2 \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} E \left(D^0 x_t^{(n)} - D^0 x_t^{(n-1)} \right)^2 + 2 \sup_{t \in [0, T]} E \left(\int_0^t \left(Lx_s^{(n)} - Lx_s^{(n-1)} \right) ds \right)^2 + \\ &+ 2 \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t \left(Gx_s^{(n)} - Gx_s^{(n-1)} \right) dB^{(H)}(s) \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Для першого доданку скористаємося нерівністю для функціонала D^0 :

$$\sup_{t \in [0, T]} E \left(D^0 x_t^{(n)} - D^0 x_t^{(n-1)} \right)^2 \leq K_D \sup_{t \in [0, T]} E \left(x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t) \right)^2.$$

Для другого доданку скористаємося нерівністю Коші – Буняковського, тобто

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} E \left(\int_0^t \left(Lx_s^{(n)} - Lx_s^{(n-1)} \right) ds \right)^2 &\leq T \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t E \left(Lx_s^{(n)} - Lx_s^{(n-1)} \right)^2 ds \leq \\ &\leq T^2 K_L \int_0^T \sup_{t \in [0, t]} E \left(x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s) \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Для третього доданку нерівності (8) скористаємося властивостями дробового броунівського руху, а саме зазначимо, що для довільного $H \in (\frac{1}{2}, 1)$:

$$\int_0^T z(t) dB^{(H)}(t) = \int_0^T (K_H^* u) [t] dW(t),$$

де інтеграл в правій частині слід розуміти як інтеграл Іто, а $(K_H^* u) [t]$ визначається наступним чином

$$(K_H^* \varphi) [t] = c_H \Gamma \left(H - \frac{1}{2} \right) t^{\frac{1}{2}-H} \left(I_{T-}^{H-\frac{1}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} \varphi(u) \right) (t),$$

де в свою чергу константа c_H визначена таким співвідношенням

$$c_H = \sqrt{\frac{(2H + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - H)}{\Gamma(\frac{1}{2} + H) \Gamma(2 - 2H)}},$$

а $(I_{t-}^\alpha f)(s)$ визначає дробову похідну

$$(I_{t-}^\alpha f)(s) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{ds} \int_s^t f(z)(z - s)^{-\alpha} dz.$$

Використовуючи дані факти та властивості дробової похідної, приходимо до висновку, що третій доданок правої частини нерівності (8) буде задовольняти наступну нерівність

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t (Gx_s^{(n)} - Gx_s^{(n-1)}) dB^{(H)}(s) \right)^2 \leq \\ & \leq K_{G,H} (T + T^2) \int_0^T \sup_{t \in [0, T]} E \left(x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s) \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Слід зауважити, що аналогічна нерівність отримується з використанням ізометрії інтегралу Віка – Іто – Скорохода [1, 7].

Враховуючи отримані нерівності, має місце наступна нерівність

$$\begin{aligned} & (1 - K_D) \sup_{t \in [0, T]} E \left(x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) \right)^2 \leq \\ & \leq 2T^2 K_L \int_0^T \sup_{s \in [0, t]} E \left(x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s) \right)^2 dt + \\ & + 2K_{G,H} (T + T^2) \int_0^T \sup_{s \in [0, t]} E \left(x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s) \right)^2 dt \leq \\ & \leq L(T + T^2) \int_0^T \sup_{s \in [0, T]} E \left(x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s) \right)^2 ds, \end{aligned} \tag{9}$$

де $L = 2(K_L + K_{G,H})$. Використовуючи нерівність (9), отримаємо оцінку для $\sup_{t \in [0, T]} E \left(x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) \right)^2$

$$\sup_{t \in [0, T]} E \left(x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) \right)^2 \leq \frac{L}{1 - K_D} (T + T^2) \int_0^T \sup_{t \in [0, t]} E \left(x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s) \right)^2 dt,$$

або ітераційно продовжуючи дану нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} E \left(x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) \right)^2 \leq \left(\frac{L}{1 - K_D} \right)^n \frac{Pol(T, n+1)}{n!},$$

де $Pol(T, n+1)$ – поліном степеня $n+1$ від T з обмеженими деякою константою коефіцієнтами. Таким чином можна стверджувати, що ряд $x^{(0)} + x^{(1)} + x^{(2)} + \dots$ є збіжним до деякого випадкового процесу в середньому квадратичному, тобто існує границя

$$x(t) = l.i.m._{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(t), \quad t \in [0, T],$$

крім того випадковий процес $x(t)$ задовольняє задачу Коші (1), (2).

Розглянемо тепер єдиність розв'язку в термінах стохастичної еквівалентності (7). Доведення проведемо від супротивного, припустивши що існують два розв'язки задачі

Копії (1), (2) та позначимо їх через $x(t)$ та $\tilde{x}(t)$. Використовуючи аналог нерівності (9), одержимо, що функція

$$u(t) = \sup_{t \in [0, t]} E (x(t) - \tilde{x}(t))^2$$

задовольняє нерівність

$$u(t) \leq \frac{L}{1 - K_D} (T + T^2) \int_0^t u(s) ds.$$

Використовуючи лему Гронуолла – Белмана, отримаємо що $u(t) \equiv 0$, тобто два розв'язки є стохастично еквівалентними, що і потрібно було показати.

Теорема 1 доведена.

□

3 Чисельне моделювання

У цьому розділі досліджено поведінку розв'язку стохастичного диференціального рівняння з фіксованим запізненням, у якому випадкове збурення моделюється дробовим броунівським рухом:

$$dx(t) = (-ax(t) - bx(t-r)) dt + \sigma x(t) dB^H(t), \quad x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0],$$

де $r > 0$ — затримка, $\varphi(t) \equiv 1$, $B^H(t)$ — дробовий броунівський рух з параметром Херста $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Чисельне моделювання проведено методом Ейлера з дискретизацією 2000 кроків на відрізьку $[0, 10]$ та методом Монте-Карло (10 реалізацій).

У першій серії експериментів параметри a та b підібрано згідно з аналітичною областю стійкості, наведеною у [4], стор. 108:

$$a = -b \cos(\hat{\zeta}r), \quad b \sin(\hat{\zeta}r) = \hat{\zeta}, \quad 0 < \hat{\zeta} < \frac{\pi}{r}.$$

При $\hat{\zeta} = 2.0$ та $r = 0.5$ отримаємо: $a \approx -1.0806$, $b = 2.0$. Побудовано сітку графіків для трьох значень $H \in \{0.5; 0.7; 0.95\}$ та двох значень інтенсивності шуму $\sigma \in \{0.6; 0.3\}$.

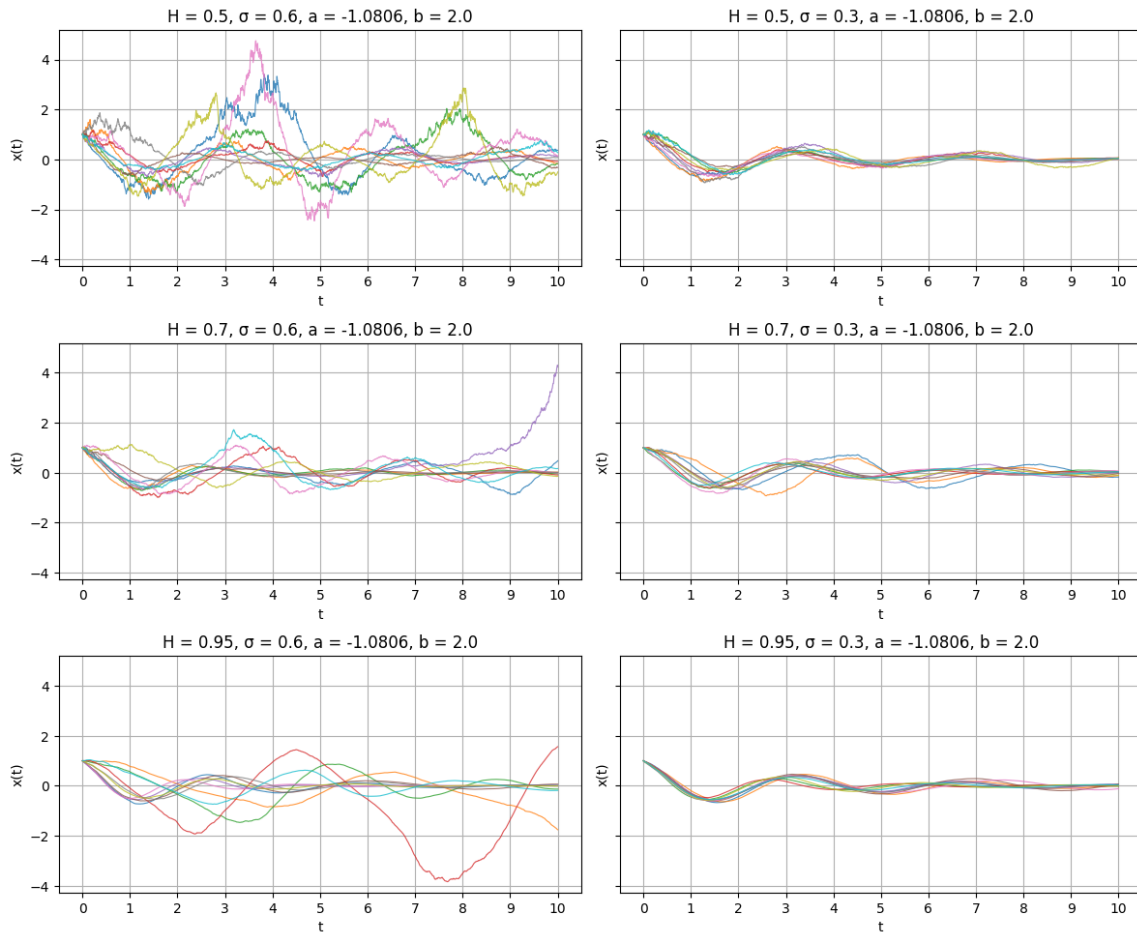


Figure 1: Стохастичні траєкторії при $a = -1.0806, b = 2.0$ (область стійкості з [4]).

У другій серії експериментів параметри a та b свідомо підбрано поза межами класичної області стійкості: $a = 0.2, b = 2.0$. Побудовано аналогічну сітку графіків для тих самих значень H та σ .

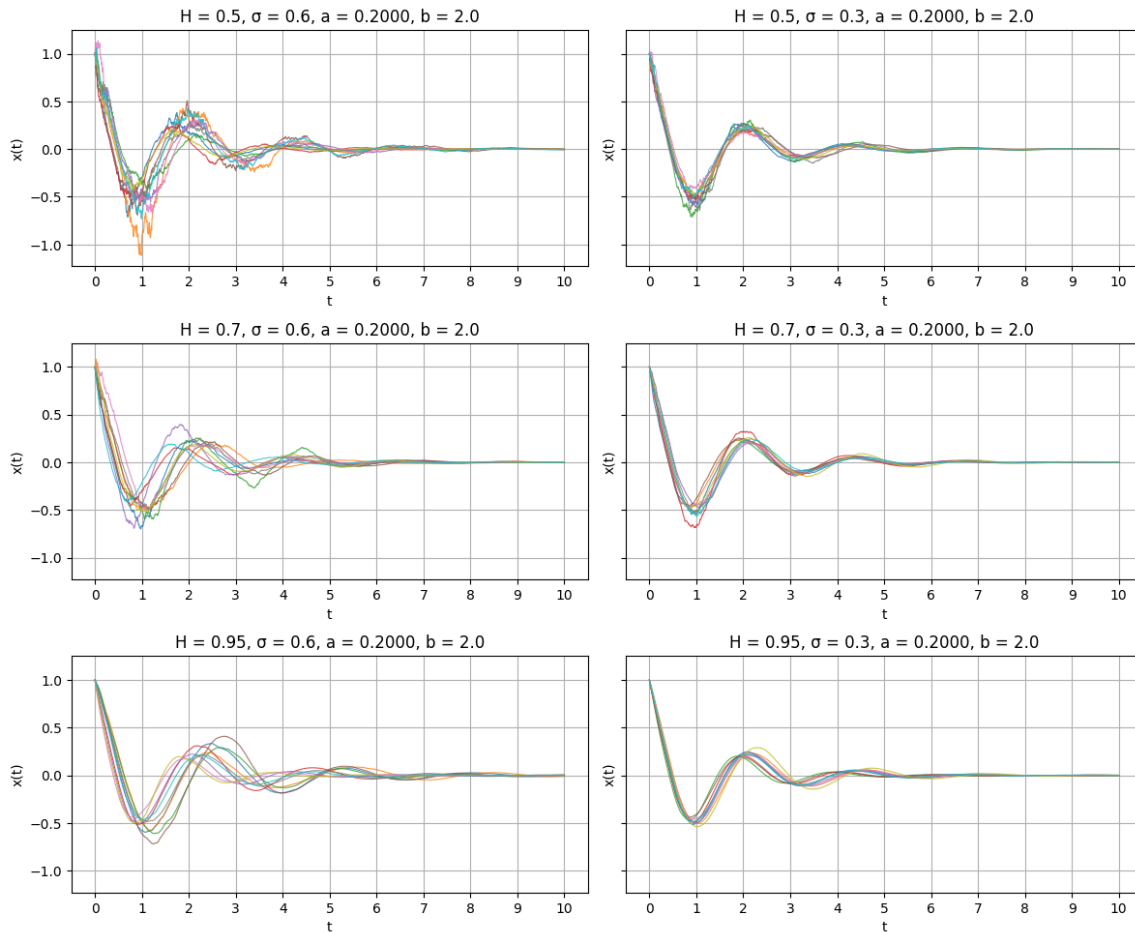


Figure 2: Стохастичні траєкторії при $a = 0.2$, $b = 2.0$ (поза областю стійкості).

Результати чисельного експерименту демонструють очікувану поведінку у випадку параметрів $a = -1.0806$, $b = 2.0$, які відповідають області стійкості із [4]. При таких значеннях параметрів стохастичні траєкторії залишаються обмеженими та згладженими — особливо при малих значеннях σ та великих значеннях H .

У другій серії експериментів параметри $a = 0.2$, $b = 2.0$ виходять за межі цієї області. Парадоксально, але при таких номінально нестійких коефіцієнтах система все одно демонструє стабілізацію траєкторій у випадках, коли H є великим (довготривала пам'ять), а інтенсивність збурення σ — малою. Виникає візуальний ефект “стійкості”, хоча аналітично така поведінка не гарантується. Це пояснюється тим, що при великому значенні параметра Херста флуктуації стають менш різкими, а низький рівень шуму зменшує загальний вплив збурень.

Ці результати наголошують на тому, що оцінювати стійкість лише за формою траєкторій може бути хибним. Важливо спиратися на математичний аналіз та розглядати взаємодію всіх параметрів системи: a , b , H , σ . У цьому контексті параметр Херста H відіграє роль індикатора пам'яті процесу, здатного як стабілізувати, так і розбалансувати поведінку системи.

4 Висновки

У роботі отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з дробовим броунівським рухом. Також запропоновано аналог методу варіації сталих, який може бути використаний для дослідження умов експоненціальної стійкості в середньому квадратичному тривіальному розв'язку.

Чисельне моделювання проведено для стохастичного рівняння з фіксованим запізненням при різних значеннях параметрів Херста H , інтенсивності шуму σ та коефіцієнтів a , b . У першій серії експериментів використано параметри a та b , які належать до області стійкості, описаної у [4]. У цьому випадку стохастичні траєкторії демонструють стійку поведінку, особливо при зменшенні σ або збільшенні H .

У другій серії параметри a та b були навмисно вибрані поза межами аналітичної області стійкості. Парадоксально, але при таких нестійких значеннях коефіцієнтів система в окремих випадках демонструє візуально стабільну поведінку. Це спостерігається, зокрема, при високих значеннях H (які відповідають сильній довготривалій пам'яті) та малих значеннях σ . Така стабілізація пояснюється тим, що дробовий броунівський шум із великим параметром Херста сприяє згладженню траєкторій. Це підкреслює, що стійкість слід оцінювати не лише за формою траєкторій, а на основі математичних критеріїв.

Отримані результати показують важливість аналізу взаємодії між параметрами a , b , H та σ при вивченні поведінки розв'язків. У перспективі планується розширити дослідження на нелінійні рівняння з запізненням, а також вдосконалити чисельні методи для моделювання у випадку дробового шуму. У майбутніх роботах в цьому напрямку планується розглянути достатні умови стійкості задачі Коші (1), (2) за аналогом відповідних критеріїв для випадку $H = \frac{1}{2}$ [6, 10].

References

1. Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., Zhang, T. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Springer, London, 2008. doi:10.1007/978-1-84628-797-8.
2. Гихман, И.И., Скороход, А.В. *Стохастические дифференциальные уравнения*. Наукова думка, Киев, 1968. (in Russian)
3. Guo, Q., Mao, X., Yue, R. *Almost Sure Exponential Stability of Stochastic Differential Delay Equations*. SIAM J. Control Optim. 2016, **54**(4), 1919–1933. doi:10.1137/15M1019465.
4. Hale, J.K. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer, New York, 1977. ISBN: 978-1-4612-9894-5.
5. Itô, K. *On a Stochastic Integral Equation*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1946, **22**(1), 32–35. doi:10.3792/pja/1195572371.
6. Малик, І.В., Ясинський, В.К. *Асимптотична поведінка в середньому квадратичному розв'язків систем стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу*. Доп. Нац. Акад. Наук Укр. 2009, **10**, 15–20. (in Ukrainian)

7. Mishura, Y. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Springer, Berlin, 2008. doi:10.1007/978-3-540-75873-0.
8. Shaikhet, L. *Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations*. Springer, Cham, 2013. doi:10.1007/978-3-319-00101-2.
9. Царьков, Є.Ф., Ясинський, В.К. *Квазілінійні стохастичні диференціально-функціональні рівняння*. Ориентир, Рига, 1992. (in Ukrainian)
10. Ясинская, Л.И., Ясинский, В.К. *Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастического дифференциально-функционального уравнения*. Укр. Мат. Ж. 1980, **32**(1), 78–83. (in Russian)

References

1. Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., Zhang, T. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Springer, London, 2008. doi:10.1007/978-1-84628-797-8.
2. Gikhman, I.I., Skorokhod, A.V. *Stochastic Differential Equations*. Naukova Dumka, Kyiv, 1968. (in Russian)
3. Guo, Q., Mao, X., Yue, R. *Almost Sure Exponential Stability of Stochastic Differential Delay Equations*. SIAM J. Control Optim. 2016, **54**(4), 1919–1933. doi:10.1137/15M1019465.
4. Hale, J.K. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer, New York, 1977. ISBN: 978-1-4612-9894-5.
5. Itô, K. *On a Stochastic Integral Equation*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1946, **22**(1), 32–35. doi:10.3792/pja/1195572371.
6. Malyk, I.V., Yasynskiy, V.K. *Asymptotic Mean Square Behavior of Solutions to Systems of Stochastic Differential-Functional Equations of Neutral Type*. Rep. Natl. Acad. Sci. Ukr. 2009, **10**, 15–20. (in Ukrainian)
7. Mishura, Y. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Springer, Berlin, 2008. doi:10.1007/978-3-540-75873-0.
8. Shaikhet, L. *Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations*. Springer, Cham, 2013. doi:10.1007/978-3-319-00101-2.
9. Tsarkov, Ye.F., Yasynskiy, V.K. *Quasilinear Stochastic Differential-Functional Equations*. Orientir, Riga, 1992. (in Ukrainian)
10. Yasinskaya, L.I., Yasinsky, V.K. *Asymptotic Mean Square Stability of the Trivial Solution of a Stochastic Differential-Functional Equation*. Ukr. Math. J. 1980, **32**(1), 78–83. (in Russian)

Кушнірчук В.В., Малик І.В. *Дослідження умов існування та єдиності розв'язків лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із дробовим броунівським рухом* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №1. — С. 129–140.

Робота присвячена дослідженню достатніх умов існування та єдиності розв'язку лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із інтегралом з дробовим броунівським рухом $B^{(H)}(t)$, $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Також у роботі розглянуто аналог методу варіації сталих для даних рівнянь, що є важливим результатом при дослідженні умов експоненціальної стійкості в середньому квадратичному тривіальному розв'язку даних рівнянь.