

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.15>

СЛАВІК О.В., ЧУМАЧЕНКО С.В.

МЕТОД ПРЯМИХ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ О.М. ЛИТВИНА У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Статтю присвячено розвитку чисельних методів розв'язування нестационарних задач математичної фізики. Метою дослідження є розробка та аналіз алгоритму розв'язання початково-крайових задач математичної фізики методом прямих (у повздовжньому та поперечному варіантах) із подальшим відновленням наближеного розв'язку за допомогою операторів інтерлінації. У роботі розглянуто першу початково-крайову задачу для одновимірного неоднорідного рівняння теплопровідності. Для побудови наближеного розв'язку цієї задачі спочатку застосовано метод прямих (у повздовжньому чи поперечному варіантах), за допомогою якого здійснюється часткова дискретизація задачі за однією із змінних. Відповідно до цього вихідна початково-крайова задача зводиться або до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, або до послідовності крайових задач для звичайного диференціального рівняння. Після отримання значень наближеного розв'язку на системі прямих наближений розв'язок вихідної задачі відновлюється за допомогою операторів інтерлінації. Таким чином, головною особливістю та науковою новизною запропонованого підходу є інтеграція в обчислювальну схему методу прямих операторів поліноміальної інтерлінації у формі Лагранжа, що дозволяє подолати дискретний характер класичного методу прямих. Ефективність запропонованого підходу продемонстровано на тестовій задачі та порівнянні з точним розв'язком, отриманим методом Фур'є. Перспективи подальших досліджень пов'язані із переходом до розв'язування багатовимірних нестационарних задач математичної фізики із використанням конструктивного апарату теорії R-функцій.

Ключові слова і фрази: чисельні методи, математичне моделювання, інтерлінація, крайова задача, початково-крайова задача, повздовжній метод прямих, поперечний метод прямих.

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна
e-mail: oleksii.slavik@nure.ua (Славик О.В.), svetlana.chumachenko@nure.ua (Чумаченко С.В.)

Вступ

Математична фізика традиційно є концептуальним містком між абстрактними математичними теоріями та фундаментальними законами природи. Опис таких складних явищ, як гідродинамічні потоки, поширення електромагнітних хвиль

УДК 519.633:519.651

2010 *Mathematics Subject Classification*: 65M20, 41A05, 41A63.

у неоднорідних середовищах, процеси тепломасопереносу чи еволюція механічних систем, зводиться до формулювання початково-крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними. Проте суттєва нелінійність операторів, багатомасштабна геометрія розрахункових областей та сильна неоднорідність фізичних характеристик у переважній більшості випадків унеможливають пошук точного аналітичного розв'язку [1].

Серед усього різноманіття обчислювальних підходів особливе місце займає метод прямих. Стосовно одновимірних нестационарних задач суть методу прямих полягає в частковій дискретизації за однією із змінних, тоді як інша змінна залишається неперервною. Це дозволяє звести вихідну задачу для диференціального рівняння із частинними похідними до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь або до послідовності крайових задач для звичайного диференціального рівняння, для розв'язання яких розроблено багато методів. Сучасні роботи показують, що метод прямих демонструє високу ефективність при моделюванні динамічних систем та хвиль, оскільки дозволяє гнучко відокремлювати просторову апроксимацію від інтегрування за часом [6, 7].

Проте класичний метод прямих дає наближений розв'язок лише на певній множині ліній (сітці ліній) у просторі. Для практичного використання, візуалізації полів або подальшого аналізу (наприклад, обчислення градієнтів чи інтегральних характеристик) виникає потреба відновлення функції в усій розрахунковій області. Традиційні підходи на основі кусково-лінійної або поліноміальної інтерполяції між лініями часто призводять до втрати гладкості або спотворення диференціальних властивостей розв'язку на межі.

Ефективним математичним інструментом для подолання цього обмеження є оператори інтерлінації функцій, концептуальні основи яких закладені в роботах української математичної школи, засновником якої є професор О.М. Литвин [3, 4, 8]. Інтерлінація дозволяє будувати наближені розв'язки (операторні поліноми), які точно співпадають із відомими значеннями та їхніми похідними на заданій системі прямих або кривих ліній.

Поєднання методу прямих як редуційного обчислювального алгоритму та операторів інтерлінації як високоточного інструменту апостеріорного опрацювання, відкриває нові можливості для створення швидких та економічних чисельних схем, особливо для задач із неоднорідними крайовими умовами складної структури.

Метою цієї статті є розробка та аналіз алгоритму розв'язання початково-крайових задач математичної фізики методом прямих із подальшим відновленням наближеного розв'язку за допомогою операторів інтерлінації.

1 МЕТОД ПРЯМИХ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Для нестационарних задач математичної фізики існує дві варіації методу прямих: поперечний та повздовжній. Відмінність між поперечним та повздовжнім методом прямих полягає в тому, який саме диференціальний оператор буде апроксимовано.

Розглянемо першу початково-крайову задачу для одновимірного неоднорідного рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0, l],$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Вважаємо, що $f(x, t)$ – неперервна при $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$, $\varphi(x)$ – неперервна при $x \in [0, l]$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – неперервні при $t \in [0, T]$, а також що крайові та початкові умови узгоджені:

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_2(0) = \varphi(l).$$

У повздовжньому варіанті методу прямих у рівнянні (1) апроксимується відношенням скінченних різниць диференціальний оператор

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

На відрізку $x \in [0, l]$ введемо рівномірну сітку з кроком h , яка складається з точок:

$$x_j = jh, \quad j = \overline{0, N}, \quad Nh = l.$$

Позначивши через

$$u_j(t) = u(x_j, t), \quad f_j(t) = f(x_j, t), \quad j = \overline{0, N},$$

рівняння (1) замінюється на кожній прямій $x = x_j$, $j = \overline{1, N-1}$, відповідним рівнянням

$$\frac{du_j(t)}{dt} = a^2 \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} + f_j(t).$$

Використовуючи крайові умови задачі отримуються значення розв'язку на прямих $x_0 = 0$ та $x_N = l$:

$$u_0(t) = \mu_1(t), \quad u_N(t) = \mu_2(t).$$

Таким чином, для знаходження значень розв'язку на прямих $x = x_j$, $j = \overline{1, N-1}$, необхідно розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} &= a^2 \frac{\mu_1(t) - 2u_1(t) + u_2(t)}{h^2} + f_1(t), \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= a^2 \frac{u_1(t) - 2u_2(t) + u_3(t)}{h^2} + f_2(t), \\ &\dots \\ \frac{du_{N-2}(t)}{dt} &= a^2 \frac{u_{N-3}(t) - 2u_{N-2}(t) + u_{N-1}(t)}{h^2} + f_{N-2}(t), \\ \frac{du_{N-1}(t)}{dt} &= a^2 \frac{u_{N-2}(t) - 2u_{N-1}(t) + \mu_2(t)}{h^2} + f_{N-1}(t), \end{aligned}$$

із умовами при $t = 0$, що отримуються із початкової умови задачі:

$$u_j(0) = \varphi(x_j), \quad j = \overline{1, N-1}.$$

У поперечному варіанті методу прямих у рівнянні (1) апроксимується відношенням скінченних різниць диференціальний оператор

$$\frac{\partial u}{\partial t}.$$

На відрізку $t \in [0, T]$ введемо рівномірну сітку з кроком τ , що складається з точок:

$$t_k = k\tau, \quad k = \overline{0, M}, \quad M\tau = T.$$

Позначивши через

$$u^k(x) = u(x, t_k), \quad f^k(x) = f(x, t_k), \quad k = \overline{0, M},$$

рівняння (1) замінюється на кожній прямій $t = t_k$, $k = \overline{1, M}$, відповідним рівнянням

$$\frac{u^k(x) - u^{k-1}(x)}{\tau} = a^2 \frac{d^2 u^k(x)}{dx^2} + f^k(x).$$

Використовуючи початкові умови задачі отримується розв'язок на прямій $t_0 = 0$:

$$u^0(x) = \varphi(x).$$

Таким чином, для знаходження розв'язків на прямих $t = t_k$, $k = \overline{1, M}$, необхідно розв'язати послідовність перших крайових задач для звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$-\frac{d^2 u^k(x)}{dx^2} + \frac{1}{a^2 \tau} u^k(x) = \frac{1}{a^2 \tau} u^{k-1}(x) + \frac{1}{a^2} f^k(x),$$

із умовами при $x = 0$ та $x = l$, що отримуються із крайових умов задачі:

$$u^k(0) = \mu_1(t_k), \quad u^k(l) = \mu_2(t_k), \quad k = \overline{1, M}.$$

Аналогічно можна побудувати повздовжні та поперечні варіанти методу прямих і для інших типів нестационарних задач математичної фізики.

Отже, метод прямих дозволяє отримати наближення до розв'язку, що визначені на деякій системі прямих, яка паралельна відповідній осі координат.

2 ІНТЕРЛІНАЦІЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай $u(x, t)$ – функція двох змінних, що задана у деякій прямокутній замкненій області $\Omega = [0, l] \times [0, T]$, у якій задано дві системи взаємно перпендикулярних прямих, що паралельні осям координат:

$$\Gamma_{x,j} : x = x_j, \quad x_j = jh, \quad j = \overline{0, N}, \quad Nh = l, \quad (2)$$

$$\Gamma_{t,k} : t = t_k, \quad t_k = k\tau, \quad k = \overline{0, M}, \quad M\tau = T. \quad (3)$$

Означення 1. Слідом функції $u(x, t)$ на лінії Γ , яка може бути представлена у вигляді (2) або (3), називається функція однієї змінної $u(t)|_{\Gamma}$ або $u(x)|_{\Gamma}$, яка в кожній точці лінії Γ набуває таких же значень, як і функція $u(x, t)$.

Оператор інтерлінації у формі Лагранжа для наближення функції $u(x, t)$ за відомими її слідами на N прямих (2) має вигляд [8]:

$$O_x u(x, t) = \sum_{j=0}^N u(t)|_{\Gamma_{x,j}} \prod_{k=0, k \neq j}^N \frac{x - x_k}{x_j - x_k}. \quad (4)$$

Оператор (4) є математичною моделлю поверхні, яка на кожній прямій (2) точно відновлює функцію $u(x, t)$ та наближено між ними.

Оператор інтерлінації у формі Лагранжа для наближення функції $u(x, t)$ за відомими її слідами на M прямих (3) має вигляд [8]:

$$O_t u(x, t) = \sum_{k=0}^M u(x)|_{\Gamma_{t,k}} \prod_{j=0, j \neq k}^M \frac{t - t_j}{t_k - t_j} \quad (5)$$

Оператор (5) є математичною моделлю поверхні, яка на кожній прямій (3) точно відновлює функцію $u(x, t)$ та наближено між ними.

У контексті теорії нових інформаційних операторів О.М. Литвина розв'язки, отримані методом прямих є слідами функції на цих прямих. Отже, для побудови наближеного розв'язку у всій замкненій області $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ можна скористатися операторами інтерлінації.

Оператор інтерлінації для побудови наближеного розв'язку у всій замкненій області $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ на основі розв'язків повздовжнього варіанту методу прямих на N лініях (2) матиме вигляд:

$$O_x u(x, t) = \sum_{j=0}^N u_j(t) \prod_{k=0, k \neq j}^N \frac{x - x_k}{x_j - x_k}. \quad (6)$$

Оператор інтерлінації для побудови наближеного розв'язку у всій замкненій області $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ на основі розв'язків поперечного варіанту методу прямих на M лініях (3) матиме вигляд:

$$O_t u(x, t) = \sum_{k=0}^M u^k(x) \prod_{j=0, j \neq k}^M \frac{t - t_j}{t_k - t_j}. \quad (7)$$

3 ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Для проведення обчислювального експерименту розглянемо наступну початково-крайову задачу параболічного типу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{36\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin(t) \sin(3\pi x), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1], \\ u|_{t=0} &= 3 \sin(2\pi x) + 4 - 5x, \quad x \in [0, 1], \\ u|_{x=0} &= 4, \quad u|_{x=1} = -1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

За допомогою методу Фур'є [5] можна отримати точний розв'язок цієї задачі у вигляді:

$$u(x, t) = 4 - 5x + 3e^{-\frac{1}{9}t} \sin(2\pi x) - \frac{8}{17} \left(4e^{-\frac{1}{4}t} - 4 \cos(t) + \sin(t) \right) \sin(3\pi x)$$

Поверхню точного розв'язку наведено на рисунку 1.

Введемо до розгляду систему рівновіддалених прямих:

$$x = 0.2j, \quad j = \overline{0, 5}.$$

Застосувавши повздовжній варіант методу прямих, отримуємо значення наближеного розв'язку задачі на цій системі. На рисунку 2 наведено значення наближеного розв'язку задачі на кожній прямій та відповідні лінії похибок наближення на кожній прямій.

Максимальне значення похибки наближення, отриманого повздовжнім методом прямих, становить 0.23.

Аналітичні вирази для значень наближеного розв'язку задачі, отриманого повздовжнім методом прямих, використаємо для побудови наближеного розв'язку задачі у всій області $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ за допомогою оператора інтерлінації (6). На рисунку 3 наведено наближений розв'язок задачі, побудований на основі повздовжнього методу прямих із використанням операторів інтерлінації, та графік похибки наближення на всій області.

Максимальне значення похибки наближення становить 0.31, що є величиною одного порядку з кроком сітки за змінною x .

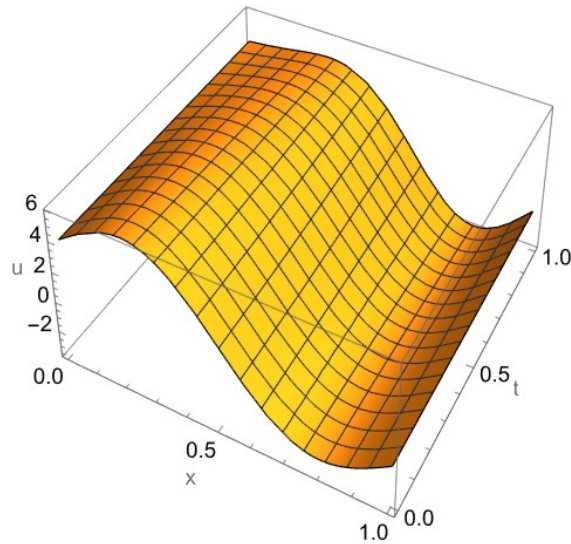


Рисунок 1: Поверхня точного розв'язку

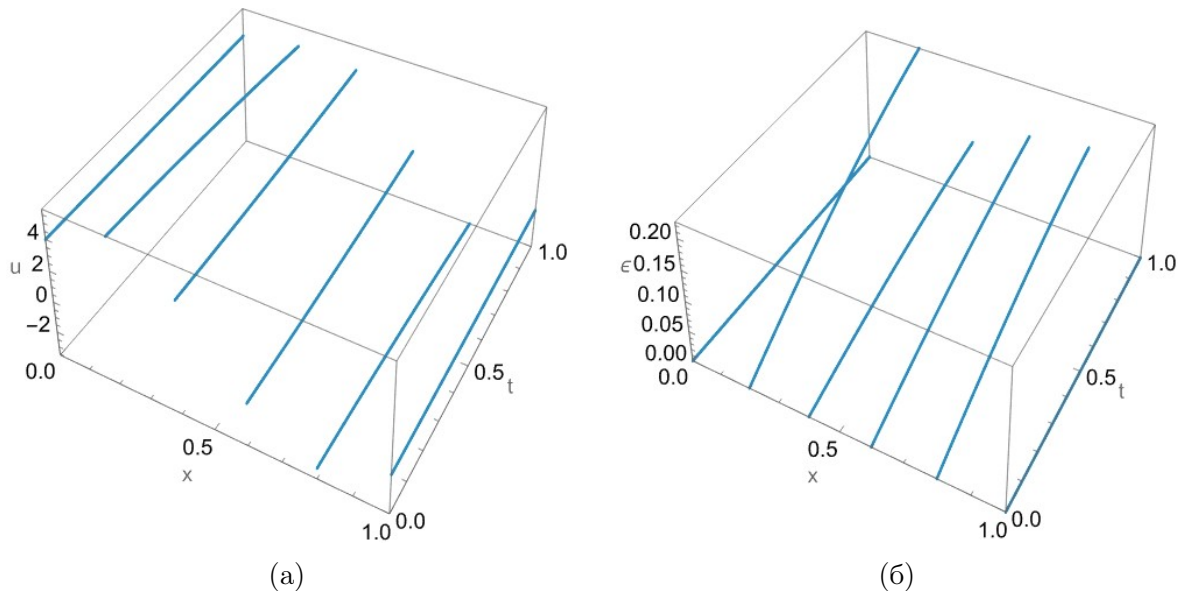


Рисунок 2: Значення наближеного розв'язку задачі на лініях (а) та похибки наближення на цих лініях (б), отримані повздовжнім методом прямих

Подальші обчислювальні експерименти для дрібніших кроків показали зменшення похибки наближеного розв'язку.

Введемо тепер до розгляду іншу систему рівновіддалених прямих:

$$t = 0.2k, \quad k = \overline{0, 5}.$$

Застосувавши поперечний варіант методу прямих, отримуємо значення наближеного розв'язку задачі. На рисунку 4 наведено наближені розв'язки задачі на кожній прямій та похибки наближення на кожній прямій.

Аналітичні вирази для значень наближеного розв'язку задачі, отриманого поперечним методом прямих, використаємо для побудови наближеного розв'язку задачі у всій області $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ за допомогою оператора інтерлінації (7). На рисунку 5 наведено наближений

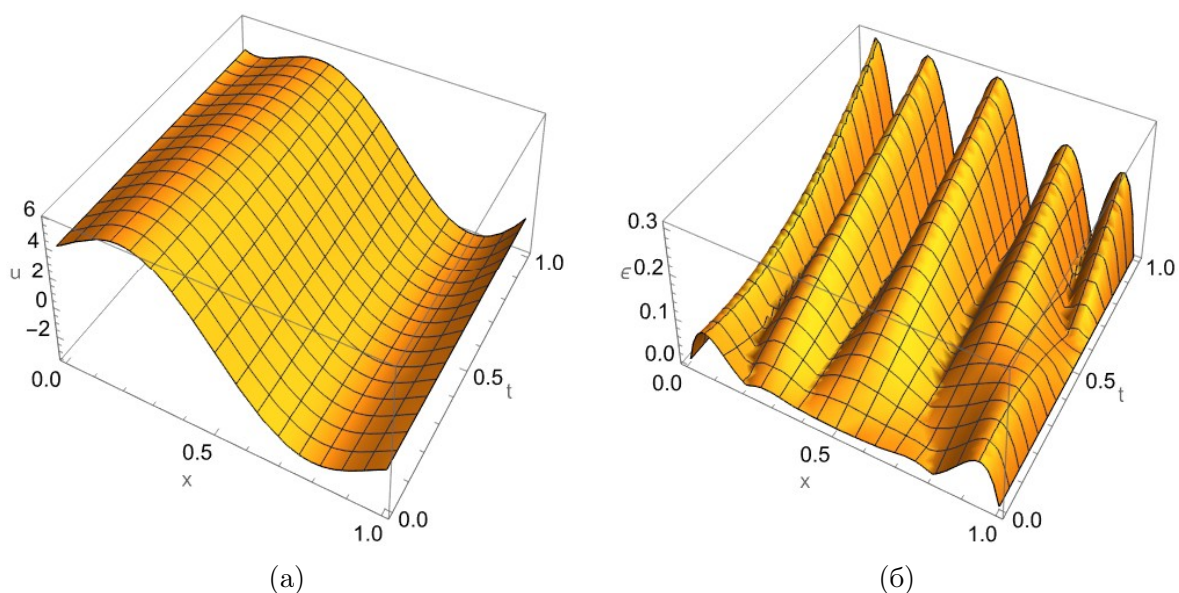


Рисунок 3: Наближений розв'язок задачі (а) та похибка наближення (б), отримані повздовжнім методом прямих із використанням операторів інтерлінації

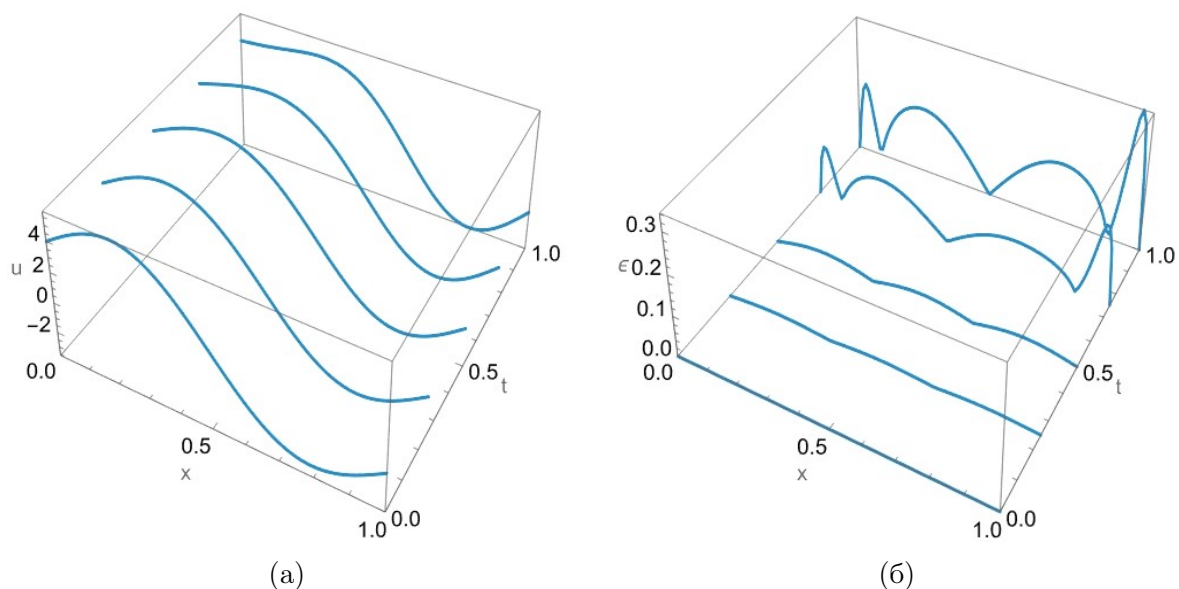


Рисунок 4: Значення наближеного розв'язку задачі на лініях (а) та похибки наближення на цих лініях (б), отримані поперечним методом прямих

розв'язок задачі, побудований на основі поперечного методу прямих із використанням операторів інтерлінації, та графік похибки наближення на всій області.

Максимальне значення похибки наближення становить 0.34, що теж є величиною одного порядку з кроком за змінною t .

Висновки

У роботі запропоновано новий підхід до побудови наближених розв'язків крайових задач для рівнянь у частинних похідних, який базується на сумісному застосуванні методу прямих

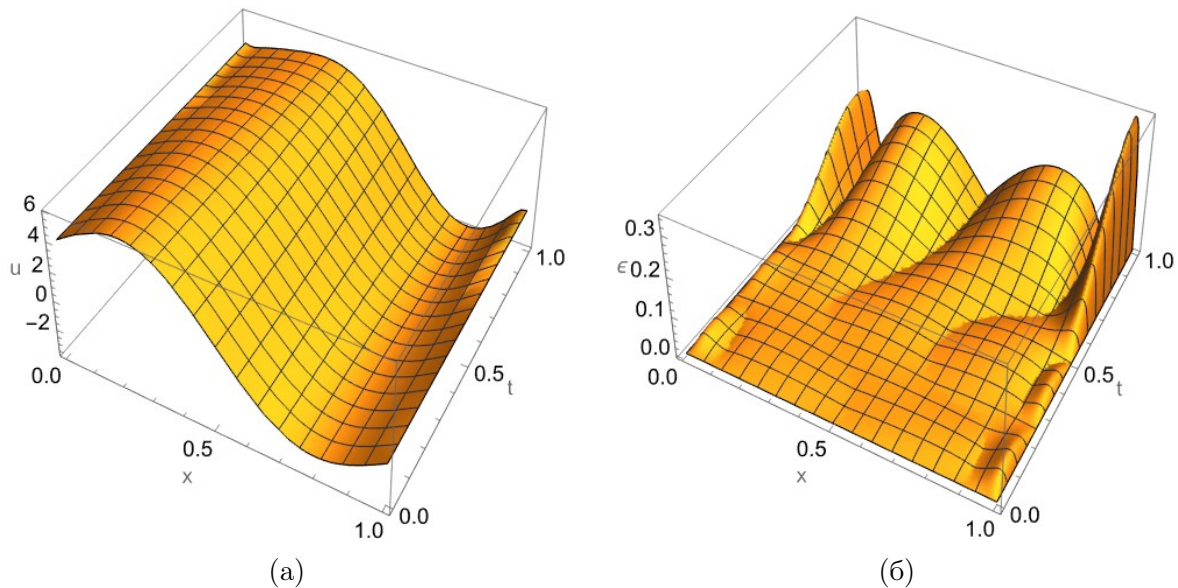


Рисунок 5: Наближений розв'язок задачі (а) та похибка наближення (б), отримані поперечним методом прямих із використанням операторів інтерлінації

(у повздовжньому та поперечному варіантах) та апарату теорії інтерлінації функцій.

Головна наукова новизна та практична цінність підходу полягає в подоланні дискретного характеру класичного методу прямих. Як відомо, традиційний метод прямих дозволяє знайти розв'язки лише безпосередньо на системі прямих (повздовжніх або поперечних), залишаючи поведінку шуканої функції між ними невизначеною. Інтеграція операторів інтерлінації у розрахункову схему дозволила використати знайдені на прямих значення наближеного розв'язку як опорні дані для інтерлінації, що забезпечує аналітичне відновлення та побудову гладкого наближеного розв'язку в усій області визначення задачі.

Попри те, що представлений у роботі чисельний експеримент мав відносно простий (базовий) характер, його ключовою метою була не демонстрація граничних можливостей алгоритму на надскладних геометріях, а наочна верифікація та ілюстрація самого потенціалу комбінації цих двох методів. Результати обчислень підтвердили достатньо високу ефективність запропонованого підходу. Встановлено, що поєднання цих двох методів дозволяє отримати неперервний і диференційовний розв'язок у будь-якій точці досліджуваної області.

Таким чином, розроблений підхід є перспективним інструментом для комп'ютерного моделювання фізичних процесів, де важливим є неперервний аналіз полів (теплових, деформаційних, електромагнітних тощо) в усій області дослідження.

Важливим вектором подальших досліджень є залучення теорії R-функцій [2] для поширення запропонованого підходу на області складної (некласичної) геометричної форми. Інтеграція R-функцій дозволить аналітично описувати межі складних областей за допомогою єдиного диференційовного рівняння. У комбінації з методом прямих та інтерлінацією це дасть змогу будувати наближені розв'язки, які точно задовольняють крайові умови на межах складної геометричної форми, мінімізуючи похибку дискретизації геометрії, що є слабким місцем більшості сучасних сіткових методів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Evans L.C. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, 2010.
- [2] Kurpa L.V., Mazur O.S., Shmatko T.V. Application of the R-functions theory to the solution of nonlinear problems of multilayer plates dynamics. V dele, Kharkiv, 2016. (in Ukrainian)

- [3] Lytvyn O.M. Interlination of functions. Osnova, Kharkiv, 1993. (in Ukrainian)
- [4] Lytvyn O.M. Interlination of functions and some of its approaches. Osnova, Kharkiv, 2002. (in Ukrainian)
- [5] Perestyuk M.O., Marynets V.V. The theory of mathematical physics equations. Lybid, Kyiv, 2006. (in Ukrainian)
- [6] Schiesser W. E. The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1991.
- [7] Schiesser W.E., Griffiths G.W. A Compendium of Partial Differential Equation Models: Method of Lines Analysis with Matlab. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511576270>
- [8] Sergienko I.V., Lytvyn O.M. New information operators in mathematical modeling. Naukova dumka, Kyiv, 2018. (in Ukrainian)

Надійшло 10.05.2026

Slavik O.V., Chumachenko S.V. *The method of lines and O.M. Lytvyn information operators in the numerical analysis of non-stationary problems of mathematical physics*, Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 166–174.

The paper is devoted to the development of numerical methods for solving non-stationary problems of mathematical physics. The purpose of the work is to develop and analyze an algorithm for solving initial-boundary-value problems of mathematical physics by the method of lines (in the longitudinal and transverse variants) with the subsequent restoration of the approximate solution using interlination operators. The paper considers the first initial-boundary-value problem for a one-dimensional inhomogeneous heat equation. To construct an approximate solution to this problem, the method of lines (in the longitudinal or transverse variants) is first applied, with the help of which a partial discretization of the problem is carried out by one of the variables. Accordingly, the original initial-boundary-value problem is reduced either to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, or to a sequence of boundary-value problems for an ordinary differential equation. After obtaining the values of the approximate solution on the system of lines, the approximate solution of the original problem is restored using interlination operators. Thus, the main feature and scientific novelty of the proposed approach is the integration into the computational scheme of the method of lines the operators of polynomial interlination in the Lagrange form, which allows overcoming the discrete nature of the classical method of lines. The effectiveness of the proposed approach is demonstrated on a test problem and compared with the exact solution obtained by the Fourier method. Prospects for further research are associated with the transition to solving multidimensional non-stationary problems of mathematical physics using the constructive apparatus of the theory of R-functions.