

**Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича**

(повне найменування закладу вищої освіти)

**Факультет математики та інформатики**

(назва факультету/навчально-наукового інституту)

**Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій**

(назва кафедри, що забезпечує викладання)



**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

**Декан факультету**

**математики та інформатики**

**Ольга МАРТИНЮК**

“25”

06

2025 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА**

**навчальної дисципліни**

**Обчислювальні методи**

(назва навчальної дисципліни)

**обов’язкова**

(вказати: обов’язкова)

**Освітньо-професійна програма «Системний аналіз»**

(назва програми)

**Спеціальність 124 Системний аналіз**

(вказати: код, назва)

**Галузь знань 12 Інформаційні технології**

(вказати: шифр, назва)

**Рівень вищої освіти перший (бакалаврський)**

(вказати: перший (бакалаврський) / другий (магістерський) / третій (освітньо-науковий))

**Факультет математики та інформатики**

(назва факультету/ навчально-наукового інституту, на якому здійснюється підготовка фахівців за вказаною освітньою програмою)

**Мова навчання українська**

(вказати: на якій мові читається дисципліна)

**Чернівці 2025 рік**

Робоча програма навчальної дисципліни «Обчислювальні методи» складена відповідно до освітньо-професійної програми «Системний аналіз»

**Розробник:**

Бігун Ярослав Йосипович, завідувач кафедри ПМІТ, д-р фіз.-мат. наук, професор

**Викладачі, що забезпечують читання даної навчальної дисципліни:**

Бігун Ярослав Йосипович, завідувач кафедри ПМІТ, д-р фіз.-мат. наук, професор,

Унгурян Галина Михайлівна, канд. фіз.-мат. наук, асистент;

Юрійчук Анастасія Олександрівна, асистент

Погоджено з гарантом ОП  Андрій ПЕРЦОВ

**Затверджено** на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

Протокол № 13 від «24» червня 2025 року

Завідувач кафедри  Ярослав БІГУН

**Схвалено** методичною радою факультету математики та інформатики

Протокол № 12 від «25» червня 2025 року

Голова методичної ради  Віра СІКОРА

**Мета навчальної дисципліни**

Забезпечення студентів необхідними теоретичними знаннями і практичними навиками використання числових методів при розв'язуванні та числовому моделюванні сучасних прикладних задач.

**Дисципліна формує такі компетентності за ОП:**

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК07. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

ФК4. Здатність визначати основні чинники, які впливають на розвиток фізичних, економічних, соціальних процесів, виокремлювати в них стохастичні та невизначені показники, формулювати їх у вигляді випадкових або нечітких величин, векторів, процесів та досліджувати залежності між ними.

**Пререквізити.** Алгебра і геометрія, математичний аналіз, диференціальні рівняння, програмування.

**Результати навчання**

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**знати:**

- методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, нелінійних рівнянь і систем,
- методи інтерполювання і наближення функцій сплайнами,
- середньоквадратичні наближення і метод найменших квадратів,
- методи числового диференціювання та інтегрування,
- числові методи розв'язування інтегральних рівнянь,
- однокрокові й багатокрокові числові методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами,
- числові методи розв'язування двоточкових лінійних та нелінійних крайових задач,
- основні поняття та твердження з програмного матеріалу курсу,
- методи та алгоритм розв'язування типових задач;

**вміти:** вибирати, модифікувати та застосовувати числові методи для розв'язування математичних задач, будувати для них обчислювальні алгоритми, аналізувати точність проведення обчислень та досліджувати на стійкість, здійснювати програмну реалізацію числових методів та проводити аналіз одержаних результатів.

Наведені результати навчання за відповідною дисципліною співвідносяться із такими **прог-рамними результатами навчання:**

ПР6. Знати та вміти застосовувати основні методи постановки та вирішення задач системного аналізу в умовах невизначеності цілей, зовнішніх умов та конфліктів

ПР17. Зберігати та примножувати досягнення і цінності суспільства на основі розуміння місця предметної області у загальній системі знань, використовувати різні види та форми рухової активності для ведення здорового.

**Опис навчальної дисципліни**  
**Загальна інформація**

Форма навчання	Рік підготовки	Семестр	Кількість		Кількість годин					Вид підсумкового контролю	
			кредитів	годин	лекції	практичні	семінарські	лабораторні	самостійна робота		індивідуальні завдання
Денна	2	4	4	120	30			30	60		екзамен

### Структура змісту навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин - денна форма					
	усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7
<b>Змістовий модуль 1. Елементи комп'ютерної арифметики та методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь</b>						
Тема 1. Елементи теорії похибок і комп'ютерної арифметики	8	2		2		4
Тема 2. Прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь	11	4		3		4
Тема 3. Ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь	10	3		3		4
<b>Разом за змістовим модулем 1</b>	29	9		8		12
<b>Змістовий модуль 2. Ітераційні методи розв'язування нелінійних рівнянь та систем</b>						
Тема 1. Ітераційні методи розв'язування нелінійних рівнянь	12	3		3		6
Тема 2. Ітераційні методи розв'язування систем нелінійних рівнянь	9	2		3		4
<b>Разом за змістовим модулем 2</b>	21	5		6		10
<b>Змістовий модуль 3. Наближення функцій і числове інтегрування</b>						
Тема 1. Інтерполювання та середньоквадратичні наближення	13	4		3		6
Тема 2. Числове інтегрування та його застосування до розв'язування інтегральних рівнянь	16	3		3		10
<b>Разом за змістовим модулем 3.</b>	29	7		6		16
<b>Змістовий модуль 4. Числові методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь</b>						
Тема 1. Однокрокові та багатокрокові методи числового розв'язування задачі Коші	23	5		6		12
Тема 2. Різницеві методи розв'язування лінійних та нелінійних двоточкових крайових задач		4		4		10
<b>Разом за змістовим модулем 4</b>	41	9		10		22
<b>Усього годин</b>	120	30		30		60

### Тематика лекційних занять з переліком питань

№	Назва теми з основними питаннями
1	Тема 1.1. Елементи теорії похибок і комп'ютерної арифметики Абсолютна та відносна похибки. Похибка функції та арифметичних операцій. Заокруглення чисел, способи заокруглення. Особливості машинної арифметики для систем із плаваючою крапкою.
2	Тема 1.2. Прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь 1. Метод Гауса та його модифікації. Метод квадратного кореня. Методи прогонки для

	<p>СЛАР із тридіагональною матрицею. Огляд прямих методів для систем із квадратною матрицею.</p> <p>2. Міра обумовленості матриці та її властивості. Оцінка похибки розв'язку СЛАР при збуренні правої частини.</p>
3	<p>Тема 1.3. Ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь</p> <p>Канонічна форма однокрокових ітераційних методів. Метод простої ітерації та Зейделя, достатні та необхідні і достатня умови збіжності та оцінка похибки методів.</p>
4	<p>Тема 2.1. Ітераційні методи розв'язування нелінійних рівнянь</p> <p>1. Канонічна форма однокрокових ітераційних методів. Метод простої ітерації та Зейделя, достатні та необхідні і достатня умови збіжності та оцінка похибки методів.</p> <p>2. Локалізація коренів нелінійних рівнянь та швидкість збіжності ітераційних методів. Метод поділу відрізка. Метод хорд і парабол. Метод простої ітерації: схема, збіжність. Метод Ньютона, умови і швидкість збіжності. Модифікації методу Ньютона. Метод січних.</p>
5	<p>Тема 2.2. Ітераційні методи розв'язування систем нелінійних рівнянь</p> <p>1. Розв'язування систем нелінійних рівнянь ітераційними методами простої ітерації та Ньютона.</p> <p>2. Нелінійний метод Якобі та Зейделя.</p>
6	<p>Тема 3.1. Інтерполювання та середньоквадратичні наближення</p> <p>1. Інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа, оцінка похибки інтерполювання. Поділені різниці та їх властивості. Інтерполяційний многочлен у формі Ньютона.</p> <p>2. Лінійні інтерполяційні сплайни, оцінка залишкового члена та збіжність. Кубічні інтерполяційні сплайни: означення, алгоритм побудови, оцінка похибки та екстремальні властивості.</p> <p>3. Елемент найкращого середньоквадратичного наближення. Метод найменших квадратів.</p>
7	<p>Тема 3.2. Числове інтегрування та його застосування до розв'язування інтегральних рівнянь</p> <p>1. Інтерполяційні квадратурні формули та їх похибки. Квадратурні формули Ньютона-Котеса. Властивості коефіцієнтів. Проста і складена квадратурні формули трапецій, Сімпсона і Ньютона та їх похибки.</p> <p>2. Поняття про квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності.</p> <p>3. Застосування квадратурних формул для числового розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра і Фредгольма.</p>
8	<p>Тема 4.1. Однокрокові та багатокрокові методи числового розв'язування задачі Коші</p> <p>1. Формули числового диференціювання для першої і другої похідної.</p> <p>2. Явний та неявний методи Ейлера. Загальна схема явних методів Рунге-Кутти. Методи 2 порядку точності та 3 і 4 порядку точності. Методи Рунге-Кутти для систем диференціальних рівнянь. Аналіз похибки в однокрокових методах. Правило Рунге.</p> <p>3. Багатокрокові методи. Різницеві схеми Адамса. Стійкість різницевих схем, область стійкості. Умова коренів.</p>
9	<p>Тема 4.2. Різницеві методи розв'язування лінійних та нелінійних двоточкових крайових задач</p> <p>1. Різницева схема для лінійної крайової задачі, похибка апроксимації. Поняття про стійкість різницевої схеми. Збіжність різницевої схеми, теорема Лакса.</p> <p>2. Різницевої схеми для нелінійної двоточної крайової задачі. Знаходження розв'язку різницевої схеми методом Ньютона.</p>

### Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Елементи комп'ютерної арифметики	2
2	Прямі та ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь	6
3	Числові методи розв'язування нелінійних рівнянь та систем	6
4	Наближення функцій (інтерполювання, середньоквадратичні наближення)	3
5	Числове інтегрування	3
6	Однокрокові та багатокрокові методи числового розв'язування задачі Коші для ЗДР	6
7	Числові методи розв'язування крайових задач для лінійних ЗДР	4

### Самостійна робота студентів

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Похибки арифметичних операцій і функцій, ок, і комп'ютерної арифметики	4
2	Прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь	4
3	Ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, варіаційні методи	4
4	Ітераційні методи розв'язування нелінійних рівнянь, модифікації методу Ньютона	6
5	Ітераційні методи розв'язування систем нелінійних рівнянь, варіаційні методи	4
6	Інтерполяційні методи Ньютона і Лагранжа, середньоквадратичні наближення многочленами	6
7	Числове інтегрування та застосування до розв'язування інтегральних рівнянь	10
8	Однокрокові та багатокрокові методи числового розв'язування задачі Коші. Методи Рунге-Кутти.	12
9	Різницьові методи розв'язування лінійних та нелінійних двоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь	10

Самостійна робота студентів використовується при вивченні наступних тем і передбачає опрацювання теоретичного матеріалу, результати якого застосовуються під час виконання лабораторних робіт.

### Методи навчання

Під час проведення лекцій використовуються пасивний та активний методи навчання. Консультаційна робота. Під час виконання студентами лабораторних робіт використовується активні методи навчання. Проведення модульних контрольних робіт та навчальна робота під час прийому лабораторних робіт.

### Методи контролю

1. Модульні роботи.
2. Вибіркове опитування на лекційних і лабораторних заняттях.
3. Тестові завдання.
4. Іспит у кінці семестру, який включає 2 теоретичних й 2 практичних завдання.

### Критерії оцінювання результатів навчання

Оцінювання програмних результатів навчання здобувачів освіти здійснюється за шкалою європейської кредитно-трансферної системи (ECTS).

Критерієм успішного оцінювання є досягнення здобувачем вищої освіти мінімальних порогових рівнів (балів) за кожним запланованим результатом навчання.

### Розподіл балів, які отримують студенти

ЗМ1				ЗМ2			ЗМ3			ЗМ4			Екзам- ен	Усь о-го
T1	T2	T3	усього	T1	T2	усього	T1	T2	усього	T1	T2	усього		
6	8	8	22 Пр.-8 Лаб.-14	6	6	12 Пр.-4 Лаб.- 8	7	6	13 Пр.-5 Лаб.- 8	12	11	23 Пр.-8 Лаб.- 15	30 Пр.-25 Лаб.- 45	100

T1, T2 ... T9 – теми змістових модулів; Пр. – практичні; Лаб. - лабораторні

### Шкала оцінювання: національна та ЄКТС

Оцінка за національною шкалою	Оцінка за шкалою ЄКТС	
	Оцінка (бали)	Пояснення за розширеною шкалою
<b>Відмінно</b>	A (90-100)	відмінно
<b>Добре</b>	B (80-89)	дуже добре
	C (70-79)	добре
<b>Задовільно</b>	D (60-69)	задовільно
	E (50-59)	достатньо
<b>Незадовільно</b>	FX (35-49)	(незадовільно) з можливістю повторного складання
	F (1-34)	(незадовільно) з обов'язковим самостійним опрацюванням освітнього компоненту до перескладання

### Перелік питань для самоконтролю та підсумкового контролю навчальних досягнень студентів

1. Заокруглення в системі з плаваючою крапкою, оцінка похибки.
2. Оцінка похибки обчислення значення функції  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ .
3. Похибка арифметичних операцій.
4. Метод Гауса розв'язування СЛАР: алгоритм, умови реалізації, оцінка складності і похибки алгоритму.
5. Метод Гауса розв'язування СЛАР із вибором головного елемента: умови реалізації, оцінка складності і похибки алгоритму.
6. Метод прогонки для СЛАР із тридіагональними матрицями.
7. Оцінка відносної похибки СЛАР при збуренні правої частини.
8. Методи простої ітерації і Зейделя для СЛАР: алгоритм, швидкість збіжності і точність.
9. Методи Якобі та Гауса-Зейделя: алгоритм та його реалізація, достатня умова збіжності.
10. Складена квадратурна формула центральних прямокутників та її похибка.
11. Складена квадратурна формула трапецій та її похибка.
12. Складена квадратурна формула Сімпсона.
13. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.
14. Поділені різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона.
15. Лінійні інтерполяційні сплайни. Побудова і похибка апроксимації.

16. Кубічні інтерполяційні сплайни. Означення і схема побудови.
17. Середньоквадратичне наближення. Лінійне і квадратичне наближення.
18. Методи половинного поділу, лінійної інтерполяції і простої ітерації для нелінійних рівнянь.
19. Метод Ньютона для скалярного рівняння: алгоритм, швидкість збіжності, геометрична ілюстрація, точність, умова Фур'є.
20. Алгоритм методу Ньютона для систем нелінійних рівнянь.
21. Різницеві формули для наближеного обчислення першої і другої похідної.
22. Явний метод Ейлера розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних. Обчислення розв'язку, точність, геометрична ілюстрація.
23. Неявний метод Ейлера розв'язування задачі Коші. Обчислення розв'язку.
24. Загальна схема методів Рунге-Кутти розв'язування задачі Коші.
25. Явні методи Рунге-Кутти другого порядку розв'язування задачі Коші.
26. Побудова явних і неявних різницевих схем Адамса розв'язування задачі Коші.
27. Лінійна двоточкова крайова задача для диференціального рівняння другого порядку. Побудова різницевої схеми та знаходження її розв'язку.
28. Двоточкова крайова задача для нелінійного диференціального рівняння другого порядку. Побудова різницевої схеми та знаходження її розв'язку.

### Рекомендована література

#### Основна

1. Бігун Я.Й. Числові методи: навч. посібник. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2019. 436 с.
2. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. К.: Видавнича група BVH, 2006. 480 с.  
[https://drive.google.com/drive/folders/1\\_A\\_Qzr5b2v9Y9ZzsPyR\\_fNDtCmE8klX](https://drive.google.com/drive/folders/1_A_Qzr5b2v9Y9ZzsPyR_fNDtCmE8klX)

#### Допоміжна

1. Бойко Л.Т. Основи чисельних методів. Дніпропетровськ: ДНУ, 2009. 244 с.
2. Волонтир Л.О, Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А. Чисельні методи: Навч. Посібник. Вінниця. ВНАУ, 2020. 322 с.  
<http://repository.vsau.org/getfile.php/27703.pdf>
3. Задачин В.М., Конюшенко І.Г. Чисельні методи: навч. посібник. Харків. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с. [http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/CHM\\_Zadachin.pdf](http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/CHM_Zadachin.pdf)
4. Програмування числових методів мовою Python: / А.В. Анісімов, А.Ю. Дорошенко, С.Д. Погорілий, Я.Ю. Дорогий. К.: ВПЦ «Київський університет», 2014. 560 с.
5. Шахно С.М., Дудекевич А.Т., Левицька С.М. Практикум з чисельних методів: навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. 432 с.
6. Hairer E., Norsett S., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 528 p.
7. Gautschi W. Numerical analysis. New York, Berlin, London: Springer Dordrecht Heidelberg, 2012. 588 p.
8. Butcher J.C. Numerical methods for ordinary differential equations. John Wiley & Sons Ltd, 2008. 463 p.
9. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. New York, Berlin, London: Springer Dordrecht Heidelberg, 2012. 588 p.

### Інформаційні ресурси

1. Комп'ютерна система Mathematical14 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL : [www.wolfram.com/](http://www.wolfram.com/)
2. Сторінка MATLAB на сайті The MathWorks [Електронний ресурс]. – Режим доступу : URL : <http://www.mathworks.com/>
3. Classroom [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL: <https://classroom.google.com/c/NjYxOTM0NDUzMDYy>

### Зарахування результатів неформальної/інформальної освіти

Здобувачі вищої освіти має право на участь у неформальній/інформальній освіті.

У межах поточного контролю можуть визнаватися результати неформальної/інформальної освіти за умови наявності сертифікату або освітньої декларації про результати неформальної/інформальної освіти з питань, що відповідає тематиці курсу («Порядок визнання у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича результатів навчання, здобутих шляхом неформальної та/або інформальної освіти», <https://www.chnu.edu.ua/media/4g5fzssb/poriadok-vyznannia-rezultatuv-navchannia-zdobutykh-shliakhom-neformalnoi-ta-abo-informalnoi-osvity.pdf>).

Студентам можуть бути зараховані додаткові бали, отримані через неформальну освіту, до загальної суми балів, набраної з освітньої компоненти, за умови, що результати з проблеми, за якою відбувалося навчання, відповідають тематиці курсу.

### Політика щодо академічної доброчесності

Дотримання політики щодо академічної доброчесності учасниками освітнього процесу при вивченні навчальної дисципліни регламентовано такими документами:

1. «Етичний кодекс Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича» <https://www.chnu.edu.ua/universytet/normatyvni-dokumenty/etychnyi-kodeks-chernivetskoho-natsionalnoho-universytetu-imeni-yurii-fedkovycha/>
2. «Положенням про виявлення та запобігання академічного плагіату у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича» <https://www.chnu.edu.ua/universytet/normatyvni-dokumenty/polozhennia-pro-vyavlennia-ta-zapobihannia-akademichnomu-plahiatu/>