

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.04>

Воробйова А.В.

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ БЛИЗЬКИМИ ДО ПРАВИЛЬНО ЗМІННИХ

Досліджуються швидко змінні розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку загального виду, що є близькими до диференціальних рівнянь із правильно змінними нелінійностями. Важливою особливістю таких нелінійностей є те, що в загальному випадку їх неможливо представити у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної. Це унеможливило застосування багатьох методів, розроблених для чисельних узагальнень суттєво нелінійних диференціальних рівнянь типу Емдена-Фаулера, детальне дослідження яких було проведено у роботах Р. Г. Фаулера, Ф. В. Аткинсона, І. Т. Кігурадзе, Т. А. Чантурії, М. О. Ізובה, С. Белогорця, С. Д. Таліаферро, Дж. С. В. Вонга, О. В. Костіна, В. М. Євтухова та багатьох його учнів.

Дослідження швидко змінних розв'язків рівнянь цього типу потребує нових підходів, оскільки їх асимптотична поведінка в околі особливої точки суттєво відрізняється від поведінки правильно змінних функцій, для яких розроблено значно більше методів (див., наприклад, монографію В. Марича [7]).

У роботі отримано необхідні та достатні умови існування класу швидко змінних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь досліджуваного виду. Цей клас був уведений В. М. Євтуховим для суттєво нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку на базі більш загальної класифікації розв'язків І. Т. Кігурадзе. Властивості функцій із цього класу дозволяють проводити детальніші дослідження асимптотичної поведінки розв'язків та їхніх похідних. Доведення існування розв'язків із виявленими асимптотичними зображеннями проводилося шляхом зведення питання про існування таких розв'язків до питання про розв'язки систем квазілінійних диференціальних рівнянь, що зникають в особливій точці, та застосування до таких систем результатів В. М. Євтухова та А. М. Самойленка. Для зазначеного класу розв'язків та їхніх похідних першого порядку отримано точні асимптотичні формули.

Ключові слова і фрази: диференціальні рівняння другого порядку, нелінійні рівняння, швидкозмінні розв'язки, асимптотичні властивості, правильно змінні функції.

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна
e-mail: alla.vorobyova@stud.onu.edu.ua

ВСТУП

Істотно нелінійні диференціальні рівняння, які є узагальненнями рівнянь типу Емдена–Фаулера активно розвиваються у теперішній час. У роботах В.М. Євтухова та численних представників його наукової школи (див., наприклад, [1], [2] [3]–[4], [6]) було розроблено теорію дослідження достатньо широких класів розв’язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь з правильно змінними [5] нелінійностями. Актуальним залишається дослідження рівнянь більш загального виду, які можуть виникати при розгляді уточнених моделей різноманітних явищ. Саме таким типам рівнянь присвячено дану роботу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) f(t, y, y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) – неперервна функція і $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ є неперервно диференційовною, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} має вид або $]y_i^0, Y_i[$ або $]Y_i, y_i^0]$.

Покладемо

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{то } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{то } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Вважаємо, що функція f у (1) задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \gamma \text{ рівномірно по } (v_0, v_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \tag{2}$$

та для кожного $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{v_k \rightarrow y_k \\ v_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \sigma_k \text{ рівномірно по } t \in [a, w[\text{ та рівномірно по } v_j \in \Delta_{Y_j}, j \neq k, \tag{3}$$

$\sigma_i \in R$, причому $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Функції f , що задовольняють умови (2) та (3) є близькими до правильно змінних функцій по кожній зі змінних. Прикладом можуть слугувати зокрема функції виду $|\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \exp(|\ln |\pi_\omega(t) y y'|^\mu|)$, $0 < \mu < 1$. Важливою особливістю таких функцій є неможливість їх навіть асимптотично зобразити у вигляді добутку функції, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

В силу (2) та (3), $f(t, y, y')$ має вигляд

$$f(t, v_0, v_1) = |\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \cdot \Theta(t, y, y'), \tag{4}$$

де функція Θ задовольняє умову

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} = 0 \text{ рівномірно по } (v_0, v_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}, \tag{5}$$

а також для кожного $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{v_k \rightarrow y_k \\ v_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_k}(\Theta, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = 0 \text{ рівномірно по } t \in [a, w[\text{ та рівномірно по } v_j \in \Delta_{Y_j}, j \neq k. \tag{6}$$

Означення. Розв'язок у рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, якщо він заданий на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ та для кожного $i \in \{0, 1\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (7)$$

Введемо необхідні позначення

$$C = (1 - \sigma_0 - \sigma_1)^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \cdot \frac{1 - \sigma_0 - \sigma_1}{1 - \sigma_1},$$

$$I(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega^2} p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^\gamma d\tau, \quad A_\omega^2 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^\gamma d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^\gamma d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$J(t) = \int_{B_\omega^4} |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau, \quad B_\omega^4 = \begin{cases} b, & \text{якщо } \int_b^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_b^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай у рівнянні (1) $\sigma_1 \neq 1$. Тоді, для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язків необхідно, а якщо

$$\sigma_1(1 - \sigma_1) \neq 0 \text{ або } (\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0, \quad (8)$$

то і достатньо виконання умов

$$y_0^0 \alpha_0 > 0, \quad y_1^0 I(t)(1 - \sigma_0 - \sigma_1) > 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega[, \quad (9)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_0 |J(t)|^{\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}} = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_1 |J(t)|^{\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}} = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{J(t)I'(t)}{J'(t)I(t)} = 1 - \sigma_1. \quad (10)$$

Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y(t) \cdot |y(t)|^{-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{(\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1 - \sigma_0 - \sigma_1}{1 - \sigma_1} (1 - \sigma_1)^{\frac{1}{1-\sigma_1}} J(t) [1 + o(1)], \quad (11)$$

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \frac{J(t)(1 - \sigma_0 - \sigma_1)}{J'(t)(1 - \sigma_1)} [1 + o(1)]. \quad (12)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $y : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R} \in P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – розв'язком рівняння (1), для якого $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Підставляючи в (1) зображення (4) отримуємо рівність

$$y'' = \alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \cdot \Theta(t, y, y'). \quad (13)$$

Розглянемо рівність

$$\left(\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)|^{\sigma_1} \Theta(t, y(t), y'(t))} \right)' = \frac{y''(t)}{|y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)|^{\sigma_1} \cdot \Theta(t, y(t), y'(t))} \cdot \left(1 - \sigma_0 - \sigma_1 - \frac{y'(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t, y(t), y'(t))}{\partial v_1}}{\Theta(t, y(t), y'(t))} - \frac{(y'(t))^2}{y''(t) \cdot y(t)} \cdot \frac{y(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t, y(t), y'(t))}{\partial v_0}}{\Theta(t, y(t), y'(t))} - \frac{y'(t)}{\pi_\omega(t) \cdot y''(t)} \cdot \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t, y(t), y'(t))}{\partial t}}{\Theta(t, y(t), y'(t))} \right). \quad (14)$$

При $t \uparrow \omega$ попередню рівність можна записати так:

$$\left(\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)|^{\sigma_1} \Theta(t, y(t), y'(t))} \right)' = I'(t)(1 - \sigma_0 - \sigma_1)[1 + o(1)]. \quad (15)$$

Звідси маємо

$$\frac{y'(t)}{|y'(t)|^{\sigma_1} \cdot |y(t)|^{\sigma_0} \cdot \Theta(t, y(t), y'(t))} = I(t)(1 - \sigma_0 - \sigma_1)[1 + o(1)]. \quad (16)$$

Звідси випливає друга з умов (9), а також наступне зображення при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}} \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = I(t)^{\frac{1}{1-\sigma_1}} (1 - \sigma_0 - \sigma_1)^{\frac{1}{1-\sigma_1}} [1 + o(1)]. \quad (17)$$

Тоді з використанням тверджень 1 і 2 з [7] (розділ 5, §1, стор. 115) отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y(t) \cdot |y(t)|^{-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{(\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = J(t)(1 - \sigma_1)^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \frac{1 - \sigma_0 - \sigma_1}{1 - \sigma_1} [1 + o(1)], \quad (18)$$

тобто перше з зображень (11).

З (17) і (18) отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{(1 - \sigma_1)}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1)} \cdot \frac{J'(t)}{J(t)} [1 + o(1)], \quad (19)$$

звідси має місце друге з зображень (12). Крім того, з урахуванням (11) виконуються перша та друга умови з (10).

З урахуванням (1) і (18) отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{I'(t)}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1)I(t)} [1 + o(1)].$$

Звідси, з урахуванням (19) і (7) отримаємо третю з умов (10)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{J(t)I'(t)}{J'(t)I(t)} = 1 - \sigma_1.$$

Достатність. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ та виконуються умови (8)–(10). Покладемо

$$\begin{cases} \frac{y(t)}{(\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}} = \text{sign} y_0^0 |C|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |J(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} [1 + z_1(x)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{(1 - \sigma_1)}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1)} \cdot \frac{J'(t)}{J(t)} [1 + z_2(x)], \end{cases} \quad (20)$$

де

$$x = \beta \ln |J(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при } \omega < +\infty. \end{cases} \quad (21)$$

Враховуючи (5), оберемо $t_0 \in [a, \omega[$ так, щоб при $t \in [t_0, \omega[$ мала місце нерівність

$$\left| \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} \right| < \frac{1}{4}$$

Враховуючи (6), оберемо для кожного $i \in \{0, 1\}$ значення $y_i^1 \in \Delta_{Y_i}$ так, щоб

$$\left| \frac{v_i \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_i}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} \right| < \frac{1}{4} \quad (22)$$

де $v_i \in \Delta_{Y_i}^1$

$$\Delta_{Y_i}^1 = \begin{cases} [y_i^1, Y_i[, & \text{при } \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[\\]Y_i, y_i^1], & \text{при } \Delta_{Y_i} =]Y_i, y_i^0]. \end{cases}$$

Покладемо

$$D = \left\{ (z_1, z_2) \in R^2 : |z_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2 \right\}.$$

Розглянемо функцію

$$F(t, y, z_1, z_2) = \frac{y(t)}{\left(\Theta \left(t, y, \frac{\lambda_0 y [1+z_2]}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t)} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |C|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |J(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} [1+z_1]} - 1.$$

За рахунок (22) на множині $\Delta = [t_0, \omega[\times \Delta_{Y_0}^1 \times \Delta_{Y_1}^1$ за теоремою про неявну функцію рівність

$$F(t, y, z_1, z_2) = 0$$

задає функцію $y = Y_0(t, z_1, z_2)$. Покладемо $Y_1(t, z_1, z_2) = \frac{\lambda_0 Y(t, z_1, z_2) [1+z_2]}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t)}$. Тоді за рахунок (10) для $i = 1, 2$ маємо

$$\lim_{t \rightarrow \omega} Y_i(t, z_1, z_2) = Y_i \quad \text{рівномірно по } (z_1, z_2) \in D. \quad (23)$$

За допомогою (20) зведемо на множині Δ рівняння (1) до системи

$$\left\{ \begin{aligned} z_1' &= \frac{1}{\beta} [1+z_1] \cdot \frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1} \left[[1+z_2] - \frac{1}{1-\sigma_1} \left(G_2(t) K_0(x, z_1, z_2) + \right. \right. \\ &+ \frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1} [1+z_2] K_1(x, z_1, z_2) + \\ &+ \text{sign} y_0^1 \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} G_1(t) \cdot [1+z_2]^{\sigma_1-1} [1+z_1]^{-(1-\sigma_0-\sigma_1)} K_2(x, z_1, z_2) \left. \right) - 1 \Big]; \\ z_2' &= \frac{1}{\beta} [1+z_2] \cdot \\ &\left[\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} G_1(t) \cdot [1+z_2]^{\sigma_1-1} \cdot [1+z_1]^{-(1-\sigma_0-\sigma_1)} - \frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1} [1+z_2] - G_3(t) + 1 \right], \end{aligned} \right. \quad (24)$$

де

$$G_1(t) = \frac{J(t)I'(t)}{J'(t)I(t)}, \quad G_2(t) = \frac{J(t)}{\pi_\omega(t)J'(t)}, \quad G_3(t) = \frac{J''(t)J(t)}{(J'(t))^2},$$

$$K_0(x, z_1, z_2) = \frac{\pi_\omega(t(x)) \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))}{\Theta(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))},$$

$$K_1(x, z_1, z_2) = \frac{Y_0(t(x), z_1, z_2) \frac{\partial \Theta}{\partial v_0}(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))}{\Theta(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))},$$

$$K_2(x, z_1, z_2) = \frac{Y_1(t(x), z_1, z_2) \frac{\partial \Theta}{\partial v_1}(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2)))}{\Theta(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))}.$$

В силу (10)

$$\lim_{t \uparrow \omega} G_1(t) = 1 - \sigma_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} G_2(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} G_3(t) = 1. \quad (25)$$

З урахуванням (23),(5) та (6) маємо для кожного $i \in \{0, 1, 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} K_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{рівномірно по } (z_1, z_2) \in D. \quad (26)$$

Перепишемо систему (24) у вигляді

$$\begin{cases} z'_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R_1(x, z_1, z_2) + R_2(x, z_1, z_2), \\ z'_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + R_3(x, z_1, z_2) + R_4(x, z_1, z_2), \end{cases} \quad (27)$$

де

$$A_{11}(x) = 0, \quad A_{12}(x) = \beta \frac{\sigma_1 - 1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1}, \quad A_{21}(x) = \beta(1 - \sigma_1), \quad A_{22}(x) = -\beta \frac{\sigma_1(1 - \sigma_1)}{1 - \sigma_0 - \sigma_1}.$$

$$\begin{aligned} R_1(x, z_1, z_2) = & -\frac{1}{\beta} [1 + z_1] \cdot \frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \left(G_2(t) K_0(x, z_1, z_2) + \right. \\ & + \frac{1 - \sigma_1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} [1 + z_2] K_1(x, z_1, z_2) \\ & \left. + \text{sign} y_0^0 \frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} G_1(t) \cdot [1 + z_2]^{\sigma_1 - 1} [1 + z_1]^{-(1 - \sigma_0 - \sigma_1)} K_2(x, z_1, z_2) \right), \end{aligned}$$

$$R_2(x, z_1, z_2) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1 - \sigma_1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} z_1 z_2,$$

$$\begin{aligned} R_3(x, z_1, z_2) = & \beta [1 + z_2] \cdot \frac{G_1(t)}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \cdot \\ & \left([1 + z_2]^{\sigma_1 - 1} \cdot [1 + z_1]^{-(1 - \sigma_0 - \sigma_1)} - 1 - (\sigma_1 - 1) z_2 + (1 - \sigma_0 - \sigma_1) z_1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_4(x, z_1, z_2) = & \frac{1}{\beta} [1 + z_2] \left((1 + (\sigma_1 - 1) z_2 - \right. \\ & \left. - (1 - \sigma_0 - \sigma_1) z_1) \frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \left(G_1 - (1 - \sigma_1) \right) - G_3(t) + 1 \right). \end{aligned}$$

В силу (25) та (26) для $i \in \{1, 3\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{рівномірно за } z_1, z_2 : (z_1, z_2) \in D. \quad (28)$$

Крім того, маємо для $i \in \{2, 4\}$

$$\lim_{|z_1| + |z_2| \rightarrow 0} \frac{R_i(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0, \quad \text{рівномірно за } x \in [x_0, +\infty[. \quad (29)$$

Зауважимо, що характеристичне рівняння матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \frac{1 - \sigma_1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \\ \beta(\sigma_1 - 1) & -\beta \frac{\sigma_1(1 - \sigma_1)}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \end{pmatrix}$$

має вигляд

$$\mu^2 + \beta \frac{\sigma_1(1 - \sigma_1)}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \mu + \frac{(1 - \sigma_1)^2}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} = 0 \quad (30)$$

При виконанні умов (8) у цього рівняння немає коренів з нульовою дійсною частиною. Отримуємо, що у цих випадках для системи диференціальних рівнянь (27) виконано всі умови теореми з [2]. Відповідно до цієї теореми система (27) має однопараметричне сімейство розв'язків $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ ($x_1 \geq x_0$), які прямують до нуля при $x \rightarrow +\infty$. Цим розв'язкам у силу заміни (20), (21) відповідають розв'язки y рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (11), (12).

Отже, отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язками. Теорему доведено. \square

ВИСНОВКИ

Для диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями загального виду, що є близькими до правильно змінних отримано необхідні та достатні умови існування одного класу швидко змінних розв'язків. Крім того, отримано асимптотичні формули для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Білозерова М.О. Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями, які є композиціями експоненціальної та правильно змінних функцій. Буковинський матем. журнал 2023, **11** (2), 33–40. doi:10.31861/bmj2023.02.03
- [2] Евтухов В.М., Самойленко А.М. Условія сущестовання исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. Український математичний журнал 2010, **62** (1), 52–80.
- [3] Евтухов В.М., Черникова А.Г. Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двухчленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Journal of Mathematical Sciences 2019, **236** (3), 284–299. doi:10.1007/s10958-018-4111-7
- [4] Belozerova M.A., Gerzhanovskaya G.A. Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of essentially nonlinear ordinary differential equations of the second order. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics 2019, **77**, 1–12.
- [5] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular Variation. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [6] Evtukhov V., Chernikova A. Asymptotic of Slowly Varying Solutions of Ordinary Binomial Differential Equations of the Second Order with Rapidly Varying Nonlinearity. Journal of Mathematical Sciences 2018, **228** (3), 207–225. doi:10.1007/s10958-017-3616-9
- [7] Marić V. Regular variation and differential equations. In: Dold A., Eckmann B. (Eds.) Lecture Notes in Mathematics, 1726. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Bilozerova M.O. *Asymptotic behavior of solutions to second order differential equations with nonlinearities that are compositions of exponential and regularly varying functions*. Bukovinian Math. Journal 2023, **11** (2), 33–40. doi:10.31861/bmj2023.02.03 (in Ukrainian)
- [2] Evtukhov V.M., Samoilenko A.M. *Conditions for the existence of solutions vanishing at a critical point for real nonautonomous systems of quasilinear differential equations*. Ukrainian Mathematical Journal 2010, **62** (1), 52–80. (in Russian)
- [3] Evtukhov V., Chernikova A. *Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity*. Journal of Mathematical Sciences 2019, **236** (3), 284–299. doi:10.1007/s10958-018-4111-7 (in Russian)
- [4] Belozerova M.A., Gerzhanovskaya G.A. *Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of essentially nonlinear ordinary differential equations of the second order*. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics 2019, **77**, 1–12.
- [5] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. *Regular Variation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [6] Evtukhov V., Chernikova A. *Asymptotic of Slowly Varying Solutions of Ordinary Binomial Differential Equations of the Second Order with Rapidly Varying Nonlinearity*. Journal of Mathematical Sciences 2018, **228** (3), 207–225. doi:10.1007/s10958-017-3616-9
- [7] Marić V. *Regular variation and differential equations*. In: Dold A., Eckmann B. (Eds.) *Lecture Notes in Mathematics*, 1726. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

Надійшло 30.12.2025

Vorobiova A.V. *Asymptotic properties of rapidly-varying solutions to second-order differential equations with nonlinearities close to regularly varying*, Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 34–42.

Rapidly varying solutions of general second-order differential equations that are close to differential equations with regularly varying nonlinearities are investigated. A crucial feature of such nonlinearities is that, in the general case, they cannot be represented as a product of functions, each depending on only one variable. This precludes the application of many methods developed for numerous generalizations of essentially nonlinear Emden–Fowler type differential equations, which were studied in detail in the works of R. G. Fowler, F. V. Atkinson, I. T. Kiguradze, T. A. Chanturia, N. A. Izobov, S. Belohorec, S. D. Taliaferro, J. S. W. Wong, O. V. Kostin, V. M. Evtukhov, and many of his students.

The study of rapidly varying solutions for equations of this type requires new approaches, as their asymptotic behavior in the neighborhood of a singular point differs substantially from the behavior of regularly varying functions, for which a much broader range of methods has been developed (see, for example, the monograph by V. Maric [7]).

In this paper, necessary and sufficient conditions are obtained for the existence of a class of rapidly varying solutions for the nonlinear differential equations under study. This class of solutions was introduced by V. M. Evtukhov for essentially nonlinear second-order differential equations based on a more general classification of solutions for nonlinear differential equations by I. T. Kiguradze. The properties of functions within this class allow for more detailed investigations into the asymptotic behavior of solutions and their derivatives. The existence of solutions with the identified asymptotic representations was proved by reducing the problem to

the existence of solutions vanishing at the singular point for systems of quasilinear differential equations and applying the results of V. M. Evtukhov and A. M. Samoilenko for such systems. Precise asymptotic formulas have been obtained for this class of solutions and their first-order derivatives.