Bukovinian Math. Journal. 2025, **13**, 1, 66–82 Буковинський матем. журнал 2025, Т.13, №1, 66–82

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.06

Українець О. З.

НЕПЕРЕРВНІ СКАЛЯРНІ ЗАРЯДИ НА L_0 ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДО МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ ЕРРОУ-ДЕБРЕ

У недавній статті автора, спільній з М. М. Поповим і О. Г. Фотій, в ролі прикладу ненульового ортогонально адитивного функціоналу на L_0, неперервного в нулі, використовувався ортогонально адитивний проектор на латеральну смугу, породжену одиничною функцією. Проте такого типу функціонали є розривними в деяких інших точках. Виникає природне питання про існування ненульового ортогонально адитивного функціоналу на L_0, неперервного в кожній точці. Ми даємо позитивну відповідь на це питання, побудувавши два типи таких прикладів. Далі ми застосовуємо отримані результати до економічної моделі Ерроу-Дебре.

Ключові слова і фрази: модель Ерроу-Дебре, відношення переваги, товарний вектор, функція попиту.

Jury Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *o.ukrainets@chnu.edu.ua*

Вступ

Ми використовуємо загальноприйняту термінологію і позначення з теорії векторних ґраток (= просторів Рісса), які детально описані, наприклад, у стандартному підручнику [2]. У вступному розділі ми надаємо необхідну інформацію як із загальної теорії векторних ґраток, так і спеціальної теорії латерального порядку на векторних ґратках і технікою операторів ε-штрихування, необхідною для основного результату. Щодо необхідної інформації про модель економіки Ерроу-Дебре, найкращим, на наш погляд, джерелом є підручник [1].

Деякі стандартні відомості з теорії векторних ґраток.

Нагадаємо означення деяких важливих понять. Нехай E – векторна ґратка. Елементи $x, y \in E$ називаються *диз'юнктними* (позначають цей факт так: $x \perp y$), якщо $|x| \wedge |y| = 0$. Диз'юнктним доповненням підмножини $A \subseteq E$ називають підмножину $A^d = \{x \in E : (\forall a \in A)\, x \perp a\}$. Підмножина $A \subseteq E$ називається:

- *тілесною*, якщо для довільних $x \in E$ та $a \in A$ з умови $|x| \leq |a|$ випливає, що $x \in A$;

УДК 519.865
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 47B38; Secondary 47B65.

- *ідеалом*, якщо A є тілесним лінійним підпростором E;
- *смугою*, якщо A є ідеалом з такою властивістю: для довільної підмножини $B \subseteq A$, якщо існує $a = \sup B$, то $a \in A$.

Очевидно, перетин будь-якої кількості ідеалів (чи смуг) є ідеалом (відповідно, смугою). *Ідеалом* (чи *смугою*), *породженим підмножиною* $A \subseteq E$, називається перетин всіх ідеалів (відповідно, смуг), що містять A. Смуга, породжена одноелементною підмножиною $\{e\}$, стандартно позначається через B_e. Для довільної підмножини $A \subseteq E$ множина A^d є смугою, а смуга, породжена підмножиною A, дорівнює $A^{dd} := (A^d)^d$, див. [2, с. 34].

Елемент $e \in E$ називається *проективним*, якщо для довільного $e \in E$ має місце розклад E у пряму суму смуг $E = B_e \oplus B_e^{dd}$, тобто, для довільного $x \in E$ існують єдині елементи $y \in B_e$ та $z \in B_e^{dd}$ такі, що $x = y + z$. При цьому відповідний проектор P_e на B_e є лінійним додатним оператором, дія якого обчисляється за формулою:

$$P_y\, x = \bigvee_{n=1}^{\infty} (x \wedge n|y|), \;\; x \in E^+, \tag{1}$$

див. [2, Theorem 1.47]. Кажуть, що векторна ґратка E має *головну проективну властивість* (principal projection property), якщо кожний її елемент є проективним. Кожна порядково повна векторна ґратка E (тобто, в якій кожна непорожня порядково обмежена підмножина має супремум) має головну проективну властивість [2, с. 36]. Так, векторні ґратки $L_p := L_p[0,1]$ є порядково повними при $0 \le p \le \infty$, а векторна ґратка $C[0,1]$ не має головної проективної властивості, оскільки, наприклад, елемент $e(t) \equiv t$ не є проективним.

Кажуть, що сітка (= напрямленість) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в E *порядково збігається* до елемента $x \in E$ (пишуть $x_\lambda \xrightarrow{o} x$), якщо існує сітка $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в E (з тією ж самою множиною індексів) така, що $|x_\lambda - x| \le u_\lambda$ для всіх $\lambda \in \Lambda$, а також $u_\lambda \downarrow 0$ (тобто $u_\beta \le u_\alpha$ при $\alpha < \beta$ та $\inf_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda = 0$). Відображення $f\colon E \to F$ між векторними ґратками E та F називається *порядково неперервним*, якщо для довільної сітки $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в E та довільного $x \in E$ з умови $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ випливає $f(x_\lambda) \xrightarrow{o} f(x)$.

Ми використовуємо позначення $A \sqcup B = C$ та $x \sqcup y = z$ як для множин A, B, C, так і для елементів x, y, z векторної ґратки E для диз'юнктної суми, тобто, наведена рівність для множин означає виконання двох умов $A \cup B = C$ та $A \cap B = \varnothing$, а для елементів E означає $x + y = z$ та $x \perp y$.

Латеральний порядок та оператори ε-штрихування.

На кожній векторній ґратці E визначається ще один частковий порядок: $x \sqsubseteq y$ для $x, y \in E$ тоді і лише тоді, коли x є фрагментом y, тобто, $x \perp y - x$. Дане бінарне відношення на E є відношенням порядку і називається *латеральним порядком*; див. [8], [9] для детального знайомства з цим порядком. Для довільного $e \in E$ множина всіх фрагментів елемента e позначається через $\mathfrak{F}_e$. Латеральний супремум (інфімум) двоелементної підмножини $\{x, y\} \subset E$ позначається через $x \mathbin{\pmb{\cup}} y$ (відповідно, $x \mathbin{\pmb{\cap}} y$). Для кожного $e \in E \setminus \{0\}$ множина $\mathfrak{F}_e$ є булевою алгеброю відносно латерального порядку з найменшим елементом 0 та найбільшим e [8, Proposition 3.4]. Отже, для довільних $x, y \in \mathfrak{F}_e$ існують $x \mathbin{\pmb{\cup}} y$ та $x \mathbin{\pmb{\cap}} y$, але не кожна двоелементна підмножина $\{x, y\} \subset E$ є латерально обмеженою зверху, тобто, $x, y \sqsubseteq e$ для деякого e (наприклад, $\{x, 2x\}$ при $x \neq 0$ не є латерально обмеженою зверху). Очевидно, кожна підмножина латерально обмежена знизу нулем. Але не в кожній векторній ґратці латеральний інфімум $x \Cap y$ (який фактично є найбільшим спільним фрагментом елементів x та y) існує для довільної пари x, y [8, Example 3.11]. Кажуть, що векторна ґратка E має *властивість перетинів*, якщо двоелементна підмножина $\{x, y\} \subset E$ має латеральний інфімум $x \Cap y$. З головної проективної властивості довільної векторної ґратки E випливає властивість перетинів для E [8, Theorem 3.13].

Нехай E – векторна ґратка і X – дійсний лінійний простір. Відображення $T \colon E \to X$ називається *ортогонально адитивним оператором* (чи, коротко, *зарядом*, в термінології [13]), якщо для довільних диз'юнктних елементів $x, y \in E$, $x \perp y$, має місце рівність $T(x+y) = T(x) + T(y)$. Очевидно, кожний лінійний оператор є зарядом, а також кожний заряд T має властивість $T(0) = 0$. Якщо $E = \mathbb{R}$, то кожна функція $T \colon E \to X$ з властивістю $T(0) = 0$ є зарядом, оскільки умова $x \perp y$ для $x, y \in \mathbb{R}$ означає, що або $x = 0$, або $y = 0$. Якщо E має властивість перетинів, то для довільного $e \in E \setminus \{0\}$ відображення $Q_e \colon E \to E$, що визначається рівністю

$$Q_e(x) = x \Cap e, \ \ x \in E, \tag{2}$$

є зарядом, який проектує E на $\mathfrak{F}_e$ (тобто, $(\forall x \in E)\, Q_e(x) \in \mathfrak{F}_e$ та $(\forall x \in \mathfrak{F}_e)\, Q_e(x) = x$), див. [6, Theorem 4] для випадку, коли E має головну проективну властивість та [12, Proposition 2.6] у загальному випадку. Легко бачити, що оператор Q_e не є порядково неперервним в точці e (більш того, в довільній ненульовій точці множини $\mathfrak{F}_e$), адже послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot e$, $n \in \mathbb{N}$ порядково збігається до e, проте $Q_e(x_n) = 0$ для всіх n, у той час як $Q_e(e) = e \neq 0$.

Нехай E – векторна ґратка, $0 < e \in E$ та $0 < \varepsilon < 1$. *Оператор ε-штрихування $Q_e^\varepsilon \colon E \to E$, побудований на векторі* e, визначається рівністю

$$Q_e^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\big(x - (1-\varepsilon)\, e\big)^+ \wedge \big((1+\varepsilon)\, e - x\big)^+\Big), \ \ x \in E. \tag{3}$$

З іншого боку, згідно з лемою 3.1 з [10], цей же самий оператор дорівнює:

$$Q_e^\varepsilon(x) = \left(e - \frac{1}{\varepsilon}|x - e|\right)^+ = e - e \wedge \frac{1}{\varepsilon}|x - e|. \tag{4}$$

Основні властивості оператору ε-штрихування, частина з яких нам буде потрібною, сформульовані у наступній теоремі.

Теорема 1 (Теорема 3.2, [10])**.** *Нехай E – векторна ґратка, $0 < e \in E$ та $0 < \varepsilon < 1$. Тоді відображення Q_e^ε, що задане формулою (3), є додатним порядково неперервним ортогонально адитивним оператором, що зберігає диз'юнктність, причому виконуються наступні властивості.*

(i) $(\forall x \in E)\ \ 0 \le Q_e^\varepsilon(x) = Q_e^\varepsilon(x^+) \le x^+ \wedge e.$

(ii) $(\forall x, y \in E)\ \ |Q_e^\varepsilon(x) - Q_e^\varepsilon(y)| \le \frac{2}{\varepsilon}\, |x - y|.$

(iii) $(\forall x \in \mathfrak{F}_e)\ \ Q_e^\varepsilon(x) = x;$

(iv) Для довільного $x \in E$ такого, що або $x \le (1-\varepsilon)\, e$, або $x \ge (1+\varepsilon)\, e$, виконується рівність $Q_e^\varepsilon(x) = Q_e(x) = 0$.

(v) Для довільного $x \in E$, якщо $0 < \varepsilon' < \varepsilon'' < 1$, то $Q_e^{\varepsilon'}(x) \le Q_e^{\varepsilon''}(x)$.

(vi) *Якщо $x - e$ – проективний елемент E, то $\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_e^{1/n}(x)$ та $x \mathbin{\pmb{\cap}} e$ існують і*

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_e^{1/n}(x) = e - P_{x-e}\, e = x \mathbin{\pmb{\cap}} e = Q_e(x) = x - P_{x-e}\, x. \tag{5}$$

(vii) *Нехай $e = e' \sqcup e''$. Тоді $Q_{e'}^{\varepsilon}(x) \sqcup Q_{e''}^{\varepsilon}(x) = Q_e^{\varepsilon}(x)$ для всіх $x \in E$. Якщо, більш того, e' та e'' – проективні елементи E, то $Q_{e'}^{\varepsilon} \sqcup Q_{e''}^{\varepsilon} = Q_e^{\varepsilon}$.*

Властивості (v) та (vi) пояснюють назву оператору ε-штрихування (латерального інфімуму), адже з них, як наслідок, дістаємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай E – векторна ґратка з головною проективною властивістю та $0 < e \in E$. Тоді для довільного $x \in E$ маємо $Q_e^{\varepsilon}(x) \downarrow Q_e(x)$ при $\varepsilon \to 0$.*

Таким чином, порядково неперервні оператори ε-штрихування Q_e^{ε} поточково наближають порядково розривний оператор Q_e.

Постановка задачі.

Нагадаємо, що векторна ґратка E називається *латерально повною*, якщо кожна диз'юнктна підмножина $A \subseteq E^+$ (тобто, $(\forall x, y \in A)\, x \neq y \Rightarrow x \perp y$) має супремум $\sup A$ в E (еквівалентно, кожна диз'юнктна підмножина $A \subseteq E$ має латеральний супремум $\bigcup A$), [8, Proposition 5.3]. Стандартні приклади латерально повних нескінченновимірних векторних ґраток є L_0 та ℓ_0. Векторна ґратка L_0 всіх класів еквівалентності вимірних за Лебеґом функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ з природним порядком $f \leq g$ тоді і лише тоді, коли $f(t) \leq g(t)$ для майже всіх $t \in [0,1]$, $f, g \in L_0$ є у багатьох розуміннях "найширшою" з усіх безатомних векторних ґраток зі зліченною властивістю супремумів, що є ґратковим аналогом сепарабельності (кажуть, що векторна ґратка E має зліченну властивість супремумів, якщо для довільної підмножини $A \subset E$, що має супремум $a = \sup A$ існує не більш, ніж зліченна підмножина $A_1 \subseteq A$ з тим же самим супремумом $a = \sup A_1$). Водночас, L_0 є F-простором (тобто, повним метричним лінійним простором X з метрикою ρ, інваріантною відносно зсувів: $(\forall x, y, z \in X)\, \rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$) з метрикою

$$\rho(f, g) = \int_{[0,1]} \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}\, d\mu, \quad f, g \in L_0,$$

який має цікаві патологічні властивості. Наприклад, існує замкнений нескінченновимірний лінійний підпростір $X \subset L_0$, в якому кожний лінійний неперервний оператор $T\colon X \to X$ є кратним до тотожного оператора I_X на X (тобто, $T = \lambda I_X$ при деякому $\lambda \in \mathbb{R}$), [5, Theorem 3.6] (детальніше про цікаві властивості простору L_0 написано в [4]).

З іншого боку, "найширшою" з усіх чисто атомних векторних ґраток зі зліченною властивістю супремумів є векторна ґратка ℓ_0 всіх послідовностей $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ дійсних чисел $x_n \in \mathbb{R}$ з покоординатним порядком $x \leq y$ тоді і лише тоді, коли $x_n \leq y_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, де $x, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_0$. Крім того, ℓ_0 є F-простором з метрикою

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad x, y \in \ell_0.$$

Для зручності відстань між нулем та довільним елементом x F-простору (X, ρ) називають F-нормою і позначають так: $\|x\| = \rho(x, 0)$ (див. [14] для детальнішого знайомства з F-просторами).

Основний результат спільної роботи автора даної статті з М. М. Поповим та О. Г. Фотій [4, Theorem 1] характеризує F-простори, які містять підпростір, ізоморфний до ℓ_0 (наприклад, таким є L_0, в якому кожний найменший підпростір, що містить диз'юнктну систему ненульових функцій, ізоморфний до ℓ_0). Для формулювання цього результату наведемо пару означень. Під словом "оператор" ми розуміємо довільну функцію $T\colon X \to Y$ між лінійними просторами X та Y таку, що $T0 = 0$.

Означення 1. *Нехай X, Y – F-простори. Ненульовий оператор $T\colon X \to Y$ називається* ***однорідно не зникаючим****, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що*

$$(\forall x \in X)(\forall a > 0)(\exists b > 0)\,\big(\|aTx\| \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; \|T(bx)\| \geq \delta\big).$$

Щоби побачити, що умова бути однорідно не зникаючим не є обтяжливою, зазначимо, що кожний додатний p-однорідний оператор при $p > 0$ (тобто, $T(\lambda x) = \lambda^p Tx$ для всіх $x \in X$ та $\lambda > 0$) є однорідно не зникаючим.

Означення 2. *Нехай X – лінійний простір. Ненульовий оператор $f\colon L_0 \to X$ називається* ***горизонтально не зникаючим****, якщо для кожного $x \in L_0$ такого, що $Tx \neq 0$, та кожного розкладу $x = y \sqcup z$ має місце або $Ty \neq 0$, або $Tz \neq 0$.*

Тепер ми готові сформулювати [4, Theorem 1].

Теорема 2. *Для довільного F-простору X наступні умови еквівалентні.*

(i) Існує ненульовий неперервний в нулі оператор $T\colon L_0 \to X$, який є водночас однорідно не зникаючим та горизонтально не зникаючим.

(ii) X містить підпростір, ізоморфний до ℓ_0.

Для обґрунтування істотності умов, які фігурують в теоремі 2, було побудовано приклад ненульового неперервного в нулі скалярного заряду на L_0, який автоматично є горизонтально не зникаючим (як кожний заряд) і не є однорідно не зникаючим (згідно з теоремою 2, адже числова пряма не містить підпросторів, ізоморфних до ℓ_0). Проте запропонований метод побудови не надавав прикладів неперервних в кожній точці ненульових скалярних зарядів на L_0, а саме неперервні скалярні заряди можуть бути векторами цін у економічній моделі Ерроу-Дебре. Отже, наступну задачу сформулював М. М. Попов.

Задача 1. *Чи існує ненульовий неперервний скалярний заряд на L_0?*

Трудність даного питання полягає в тому, що очевидні приклади неперервних скалярних зарядів на просторах L_p при $1 \leq p \leq \infty$ використовують інтеграл Лебеґа від елементів L_p, проте не всі елементи L_0 – інтегровні функції.

Добре відомо (і не важко бачити), що збіжність послідовності $(x_n)_{n=1}^\infty$ у просторі L_0 до елемента x рівносильна збіжності $(x_n)_{n=1}^\infty$ до x за мірою, тобто:

$$(\forall \varepsilon > 0)\;\lim_{n\to\infty} \mu\{t \in [0,1] : |x_n(t) - x(t)| \geq \varepsilon\} = 0, \tag{6}$$

де μ – міра Лебеґа.

1 Основні результати

Теореми 3 та 4 дають позитивну відповідь на задачу 1.

Теорема 3. *Для довільних $e \in L_1^+$ та $\varepsilon > 0$ відображення $\mathbf{p}_e^\varepsilon\colon L_0 \to \mathbb{R}$, яке задається формулою для довільного $x \in L_0$*

$$\mathbf{p}_e^\varepsilon(x) = \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x)\, d\mu,\ x \in L_0, \tag{7}$$

де Q_e^ε – оператор ε-штрихування на L_0, побудований на векторі e, є неперервним додатним зарядом.

Доведення. Зафіксуємо довільні $e \in L_1^+$ та $\varepsilon > 0$ і визначимо відображення $T\colon L_0 \to \mathbb{R}$, поклавши для кожного $x \in L_0$

$$Tx = \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x)\, d\mu,\ x \in L_0. \tag{8}$$

Згідно з п. (i) теореми 1,

$$0 \le Q_e^\varepsilon(x) \le x^+ \wedge e \le e, \tag{9}$$

звідки дістаємо, що підінтегральна функція в (8) є вимірною та обмеженою, а отже, відображення T є коректно визначеним формулою (8).

Оскільки відображення T є композицією $\mathrm{Int} \circ Q_e^\varepsilon$ ортогонально адитивного оператора $Q_e^\varepsilon\colon L_0 \to L_\infty \subseteq L_0$ справа на лінійний оператор $\mathrm{Int} : L_\infty \to \mathbb{R}$ зліва, який довільному елементу $z \in L_\infty$ ставить у відповідність $\int_{[0,1]} z\, d\mu$, то T також є ортогонально адитивним оператором. Дійсно, для довільних $x, y \in L_0$ таких, що $x \perp y$, маємо

$$\begin{aligned} T(x+y) &= \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x+y)\, d\mu = \int_{[0,1]} \left(Q_e^\varepsilon(x) + Q_e^\varepsilon(y)\right)\, d\mu \\ &= \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x)\, d\mu + \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon\, d\mu = T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Доведемо неперервність відображення T. Нехай $x, x_n \in L_0$ для $n \in \mathbb{N}$ та $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ за метрикою L_0, а отже, за мірою, тобто, має місце умова (6).

Доведемо таке твердження:

$$\begin{array}{l} \text{\textit{З кожної підпослідовності} } (y_n)_{n=1}^\infty \text{ \textit{послідовності} } (x_n)_{n=1}^\infty \text{ \textit{можна}} \\ \text{\textit{виділити рідшу підпослідовність} } (z_n)_{n=1}^\infty \text{ \textit{таку, що} } \lim\limits_{n\to\infty} Tz_n = Tx_0. \end{array} \tag{10}$$

Цього буде достатньо для доведення неперервності, адже (10) фактично означає, що з кожної підпослідовності $(Ty_n)_{n=1}^\infty$ послідовності $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ можна виділити рідшу підпослідовність $(Tz_n)_{n=1}^\infty$ таку, що $\lim_{n\to\infty} Tz_n = Tx_0$. Для послідовності чисел це означає, що $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$. Дійсно, якщо припустити, що це не так, то можна вибрати дійсне число $\delta > 0$ таке, що для довільного $m \in \mathbb{N}$ існує $n \ge m$ таке, що $|Tx_n - Tx_0| \ge \delta$. Таким чином, існує підпослідовність $(Ty_n)_{n=1}^\infty$ послідовності $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ така, що $|Ty_n - Tx_0| \ge \delta$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Ясно, що з такої підпослідовності не можна виділити жодну рідшу підпослідовність $(Tz_n)_{n=1}^{\infty}$ таку, що $\lim_{n\to\infty} Tz_n = Tx_0$, що суперечить умові (10). Отже, з (10) випливає, що $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$, і на цьому доведення неперервності T завершиться. Для доведення (10) зафіксуємо довільну підпослідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Як і сама послідовність, так і її підпослідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ прямує за мірою до x_0. Виберемо, згідно з [7, Теорема 4, с.40], рідшу підпослідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовності $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, яка прямує до x_0 майже скрізь на $[0, 1]$. Оскільки порядкова збіжність послідовностей на векторній ґратці L_0 рівносильна до збіжності майже скрізь [15], то послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ порядково збігається до x_0. Згідно з теоремою 1, оператор Q_e^{ε} є порядково неперервним, а отже, послідовність $(Q_e^{\varepsilon} z_n)_{n=1}^{\infty}$ порядково збігається до $Q_e^{\varepsilon} x_0$ в L_0. Знову, згідно з вищезгаданим критерієм, $(Q_e^{\varepsilon} z_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається до $Q_e^{\varepsilon} x_0$ майже скрізь. Згідно з теоремою Лебеґа про обмежену збіжність [7, с. 104], враховуючи (9), $\lim_{n\to\infty} Tz_n = Tx_0$. Таким чином, (10) доведено. □

Зауваження 1. *Для всіх значень $e \in L_0^+ \setminus \{0\}$ та $\varepsilon > 0$ заряд $\mathbf{p}_e^{\varepsilon}$ не є монотонно неспадним, оскільки $e = \mathbf{p}_e^{\varepsilon}(e) > 0 = \mathbf{p}_e^{\varepsilon}\big((1+\varepsilon)\,e\big)$, згідно з пп. (3) і (4) теореми 1, в той час як $e < (1+\varepsilon)\,e$. Наступний приклад неперервного заряду буде монотонно неспадним, як потрібно для застосувань до економіки.*

Другий приклад базується на іншому нелінійному операторі. Нехай E – векторна ґратка, $e \in E^+$. Умовна порядкова проекція $Q_e \colon E \to E$ *відносно вектору e в роботі [11] визначається так:*

$$Q_e(x) = x^+ \wedge e - x^- \wedge e. \tag{11}$$

Серед властивостей умовної порядкової проекції, встановлених у [11], немає саме тих двох, які нам потрібні. Тому почнімо з допоміжних лем.

Лема 1. *Нехай E – векторна ґратка, $u, v, w \in E^+$ та $u \perp v$. Тоді виконуються такі рівності:*

(*i*) $u + v = u \vee v$;

(*ii*) $(u + v) \wedge w = (u \wedge w) + (v \wedge w)$;

(*iii*) $(u + v)^+ = u^+ + v^+$ та $(u + v)^- = u^- + v^-$.

Доведення. Зазначимо, що для додатних u і v умова $u \perp v$ означає $u \wedge v = 0$.

(*i*) Згідно з [2, Theorem 1.3 (2)], $u + v = u \vee v + u \wedge v = u \vee v$, оскільки в нашому випадку $u \wedge v = 0$.

(*ii*) З умов $0 \le (u \wedge w) \wedge (v \wedge w) \le u \wedge v = 0$ випливає, що $(u \wedge w) \perp (v \wedge w)$. Тому, використовуючи дистриб'ютивність ґраткових операцій [2, Theorem 1.8], отримуємо

$$\begin{aligned}(u + v) \wedge w &\overset{(i)}{=} (u \vee v) \wedge w = \\ &= (u \wedge w) \vee (v \wedge w) \overset{(i)}{=} \\ &= (u \wedge w) + (v \wedge w).\end{aligned}$$

(*iii*) $(u + v)^+ \overset{(i)}{=} (u \vee v) \vee 0 = (u \vee 0) \vee (v \vee 0) = u^+ \vee v^+ \overset{(i)}{=} u^+ + v^+$. Друга рівність доводиться аналогічно. □

Перші два пункти наступної леми – це добре відомі нерівності Біркгофа, див. теорему 1.9 (2), [2].

Лема 2. *Нехай E – векторна ґратка, $u, v, w \in E$. Тоді виконуються такі нерівності:*

(i) $|u \wedge w - v \wedge w| \le |u - v|$;

(ii) $|u \vee w - v \vee w| \le |u - v|$, *а отже,* $|u^+ - v^+| \le |u - v|$ *при* $w = 0$.

(iii) *якщо, крім того,* $u, v, w \ge 0$, *то* $|u \wedge w - v \wedge w| \le |u - v| \wedge 2w$.

Доведення. (iii) Оскільки $|u \wedge w - v \wedge w| \le u \wedge w + v \wedge w \le w + w = 2w$, то, враховуючи (iii), отримуємо $|u \wedge w - v \wedge w| \le |u - v| \wedge 2w$. □

Лема 3. *Нехай послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ елементів L_0 збігається до $x_0 \in L_0$ за метрикою. Тоді для довільного елементу $w \in L_1^+$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu = 0.$$

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Згідно з абсолютною неперервністю інтеграла Лебеґа, виберемо $\delta > 0$ так, щоби для довільної вимірної підмножини $A \subseteq [0, 1]$ виконувалась імплікація

$$\mu(A) \le \delta \quad \Rightarrow \quad \int_A w \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Використовуючи, що послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ збігається до x_0 за мірою, виберемо $n_0 \in \mathbb{N}$ так, щоби

$$(\forall n \ge n_0) \quad \mu(A_n) \le \delta, \text{ де } A_n = \left\{ t \in [0,1] : |x_n(t) - x_0(t)| \ge \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \tag{13}$$

Тоді для кожного $n \ge n_0$ з врахуванням (12), (13) та нерівностей $|x_n - x_0| \wedge w \le |x_n - x_0|$, $|x_n - x_0| \wedge w \le w$ дістаємо

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu &= \int_{A_n} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu + \int_{[0,1]\setminus A_n} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu \le \\ &\le \int_{A_n} w \, d\mu + \int_{[0,1]\setminus A_n} \frac{\varepsilon}{2} \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Теорема 4. *Нехай $0 < e \in L_0^+$. Тоді відображення $\boldsymbol{q}_e \colon L_0 \to \mathbb{R}$, що задане рівністю*

$$\boldsymbol{q}_e(x) = \int_{[0,1]} Q_e(x) \, d\mu = \int_{[0,1]} (x^+ \wedge e - x^- \wedge e) \, d\mu, \tag{14}$$

є неперервним монотонно неспадним на L_0^+ зарядом.

Доведення. Доведемо диз'юнктну адитивність $\boldsymbol{q}_e$. Нехай $x, y \in L_0$ $x \perp y$. Тоді, враховуючи, що $x^+ \wedge y^+ \leq |x| \wedge |y| = 0$, а отже, $x^+ \perp y^+$ та аналогічно $x^- \perp y^-$, отримуємо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_e(x+y) &= (x+y)^+ \wedge e - (x+y)^- \wedge e \overset{\text{Лема 1}\,(iii)}{=} \\ &= (x^+ + y^+) \wedge e - (x^- + y^-) \wedge e \overset{\text{Лема 1}\,(ii)}{=} \\ &= x^+ \wedge e + y^+ \wedge e - x^- \wedge e + y^- \wedge e = \boldsymbol{q}_e(x) + \boldsymbol{q}_e(y).\end{aligned}$$

Отже, $\boldsymbol{q}_e$ є зарядом. Доведемо неперервність $\boldsymbol{q}_e$. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність в L_0, яка збігається до $x_0 \in L_0$ за метрикою. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{q}_e(x_n) - \boldsymbol{q}_e(x_0)| &= \left| \int_{[0,1]} \big(x_n^+ \wedge e - x_n^- \wedge e - x_0^+ \wedge e + x_0^- \wedge e\big)\, d\mu \right| \leq \\ &\leq \int_{[0,1]} \big|\big(x_n^+ \wedge e - x_n^- \wedge e - x_0^+ \wedge e + x_0^- \wedge e\big)\big|\, d\mu \leq \\ &\leq \int_{[0,1]} \big|x_n^+ \wedge e - x_0^+ \wedge e\big|\, d\mu + \int_{[0,1]} \big|x_0^- \wedge e - x_n^- \wedge e\big|\, d\mu \overset{\text{Лема 2}\,(iii)}{\leq} \\ &\leq \int_{[0,1]} \big|x_n^+ - x_0^+\big| \wedge 2e\, d\mu + \int_{[0,1]} \big|x_0^- - x_n^-\big| \wedge 2e\, d\mu \overset{\text{Лема 2}\,(ii)}{\leq} \\ &\leq 2 \int_{[0,1]} \big|x_n - x_0\big| \wedge 2e\, d\mu\end{aligned}$$

З отриманих нерівностей та леми 3 дістаємо $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{q}_e(x_n) = \boldsymbol{q}_e(x_0)$. Таким чином, неперервність $\boldsymbol{q}_e$ доведено. Залишається показати, що $\boldsymbol{q}_e$ є неспадною на L_0^+. Нехай $x, y \in L_0$ та $0 \leq x \leq y$. Тоді

$$\boldsymbol{q}_e(x) = \int_{[0,1]} x \wedge e\, d\mu \leq \int_{[0,1]} y \wedge e\, d\mu = \boldsymbol{q}_e(y),$$

що і треба було встановити. □

2 Застосування до моделі економіки Ерроу-Дебре

Нагадаємо, що бінарне відношення $\succeq$ на множині P називається відношенням переваги *(див. [1, Definition 1.1.1]), якщо виконуються наступні умови для довільних $x, y, z \in P$:*

1. *$x \succeq x$ (рефлексивність);*
2. *$x \succeq y$ або $y \succeq x$ (лінійність);*
3. *якщо $x \succeq y$ та $y \succeq z$, то $x \succeq z$ (транзитивність).*

Очевидно, що кожне відношення нестрогого лінійного порядку є відношенням переваги, але, наприклад, максимальне відношення P^2, тобто, $(\forall x, y \in P)\, x \succeq y$ є відношенням переваги, яке не є відношенням порядку. З іншого боку, на фактор-множині по *відношенню еквівалентності $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли $x \succeq y$ та $y \succeq x$, відношення переваги індукує відношення порядку. Запис $x \not\succeq y$ означає заперечення $x \succeq y$. "Строга" версія відношення переваги визначається так: $x \succ y$ означає, що $x \succeq y$ та $y \not\succeq x$. Вживають також $y \preceq x$, як рівносильну версію запису $x \succeq y$ (аналогічне правило стосується відношень $\succ$ та $\not\succeq$). Відношення $x \not\succ y$ означає заперечення $x \succ y$.*

Нехай $\succeq$ – відношення переваги на множині P. Елемент $q_0 \in Q$ підмножини $Q \subseteq P$ називається $\succeq$-максимальним (чи просто максимальним, якщо зрозуміло, про яке відношення переваги йдеться), якщо не існує $x \in Q$ такого, що $x \succ q_0$.

Нехай $(G, \sqsubseteq)$ – частково впорядкована множина з найменшим елементом $0 \in G$. Супремум та інфімум двоелементної підмножини $\{x, y\} \subset G$ позначатимемо через $x \sqcup y$ та $x \sqcap y$ відповідно. Запис $x = y \oplus z$ означає, що $y \sqcup z = x$ та $y \sqcap z = 0$.

Частково впорядкована множина $(G, \sqsubseteq)$ з найменшим елементом 0 називається комплементарним простором, *якщо виконуються наступні умови:*

$(CS1)$ *для довільних $x, y \in G$ таких, що $y \sqsubseteq x$, існує елемент $z \in G$ такий, що $x = y \oplus z$;*

$(CS2)$ *для довільних $x, y, u, v \in G$ таких, що $x \oplus y = u \oplus v$ існують елементи $a, b, c, d \in G$ такі, що $x = a \oplus b$, $y = c \oplus d$, $u = a \oplus c$ та $v = b \oplus d$.*

Нехай G – комплементарний простір та X – лінійний простір. Відображення $T\colon G \to X$ називається зарядом, *якщо для довільних $x, y, z \in G$ з умови $x = y \oplus z$ випливає, що $T(x) = T(y) + T(z)$. Стандартний приклад комплементарного простору є довільна векторна ґратка E з латеральним порядком $(E, \sqsubseteq)$, а нове поняття заряду на комплементарному просторі $(E, \sqsubseteq)$ збігається із поняттям заряду на векторній ґратці E. Інший стандартний приклад комплементарного простору є довільна булева алгебра $\mathcal{B}$ відносно свого порядку, а поняття заряду збігається з поняттям скінченно-адитивної X-значної міри на $\mathcal{B}$.*

Класична модель економіки Ерроу-Дебре [3], [1] базується на додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$ d-вимірної векторної ґратки $\mathbb{R}^d$, де $d \in \mathbb{N}$ – це кількість товарів даної економіки. Вектори $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d_+$ розглядаються як вибірки кількостей товарів і називаються товарними векторами, *які можуть вироблятися, продаватися, обмінюватися та споживатися. У деяких версіях моделі економіки замість скінченновимірної векторної ґратки $\mathbb{R}^d$ розглядається довільна векторна ґратка E, або ще загальніше, комплементарний простір [13].*

Традиційно, ціною *на векторній ґратці E,* додатний конус якої *E^+ розглядається, як множина всіх товарних векторів, називається звуження на E^+* довільного додатного *лінійного функціоналу $\mathbf{p}\colon E \to \mathbb{R}$ (додатність лінійного функціоналу $\mathbf{p}$ означає, що $\mathbf{p}(\mathbf{x}) \geq 0$ для довільного $\mathbf{x} \in E^+$). Значення $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ визначає ціну довільного товарного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^+$.*

Ціною *на комплементарному просторі $(G, \sqsubseteq)$ називатимемо довільний додатний неспадний скалярний заряд $\mathbf{p}\colon G \to [0, +\infty)$.*

Кожна фіксована ціна $\mathbf{p}$ та фіксований товарний вектор $\boldsymbol{\omega} \in E^+$ на векторній ґратці E або $\boldsymbol{\omega} \in G$ на комплементарному просторі $(G, \sqsubseteq)$, який називається початковим запасом, *визначають* бюджетну множину *товарних векторів за допомогою рівності:*

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) := \big\{x \in E^+ : \, \mathbf{p}(\mathbf{x}) \le \mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})\big\} \ \text{ чи відповідно } \ \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) := \big\{x \in G : \, \mathbf{p}(\mathbf{x}) \le \mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})\big\}.$$

У скінченновимірному випадку $E = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, де простір лінійних функціоналів на E ототожнюється із самим E, геометрично бюджетна множина – це багатовимірна піраміда, яка за умови строгої додатності ціни $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ (тобто, $\mathbf{p}(\mathbf{e}_k) > 0$ для всіх елементів $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \dots, d$ стандартного базису простору $\mathbb{R}^d$) компактною підмножиною $\mathbb{R}^d$, і яка цілком природно має $\succeq$-максимальні елементи для широкого класу відношень переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ (див. [1, Subsection 1.2]), а при певних умовах на відношення переваги максимальний елемент єдиний [1, Theorem 1.2.3]. Оскільки умова строгої додатності $\mathbf{p}$ є, очевидно, необхідною для обмеженості бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$, то максимальні елементи бюджетних множин розглядаються лише для строго додатних цін $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$.

Для побудови моделі економіки Ерроу-Дебре важливим є питання існування та єдиності максимальних елементів бюджетних множин (див. підрозділ 1.2 монографії [1]).

Носієм *елемента $\mathbf{z} \in L_0$ називається множина* $\operatorname{supp} \mathbf{z} = \{t \in [0,1] : \, \mathbf{z}(t) \ne 0\}$, *яка визначена з точністю до множини нульової міри.*

Розглянемо в ролі комплементарного простору G порядковий інтервал $[0, \mathbf{f}_0]$ у векторній ґратці L_0 з додатним вектором $\mathbf{f}_0 \in L_0$, носій якого є максимальним: $\operatorname{supp} \mathbf{f}_0 = [0,1]$, *тобто,*

$$G = [0, \mathbf{f}_0] = \big\{\mathbf{x} \in L_0 : \, 0 \le \mathbf{x} \le \mathbf{f}_0\big\}$$

і наступне відношення переваги на G, залежне від параметру $\mathbf{e} \in L_0^+$, задане для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$:

$$\mathbf{x} \succeq_{\mathbf{e}} \mathbf{y} \ \ \Leftrightarrow \ \ \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}\| \ge \|\mathbf{y} \wedge \mathbf{e}\|,$$

де норма розглядається у просторі L_0.

Наступне означення є аналогом строгої додатності ціни для випадку скінченновимірних векторних ґраток.

Наступний результат є аналогом теореми 1.2.3 з [1] для нашого випадку.

Теорема 5. *Для довільного $\mathbf{f}_0 \in L_0$, $G = [0, f_0]$, довільного $\mathbf{e} \in L_1 \cap G$ та довільного початкового товарного запасу $\boldsymbol{\omega} \in G$ існує $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальний елемент $\mathbf{x}^*$ бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$, який має вигляд $\mathbf{x}^* = (\gamma_0 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}) \wedge \mathbf{f}_0$, $\gamma_0 \in [0, +\infty)$.*

Доведення ґрунтується на двох лемах.

Лема 4. *Для довільної вимірної підмножини $A \subseteq [0,1]$, $\mu(A) > 0$ та довільного $x \in L_1^+$ виконується нерівність:*

$$\int_A \frac{x}{1+x}\, d\mu \le \frac{\int_A x\, d\mu}{1 + \frac{1}{\mu(A)} \int_A x\, d\mu}. \tag{15}$$

Доведення леми 4. Згідно з відомими властивостями інтеграла Лебеґа, достатньо довести (15) для випадку простої функції $x \in L_1^+$. Отже, нехай $x = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$, де

$a_k \in [0, +\infty)$, $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_k$. Зазначимо, що $\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$. У нових позначеннях нерівність (15) набуває вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \mu(A_k)}{1+a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)}{1 + \frac{1}{\mu(A)} \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)}{\frac{1}{\mu(A)} \sum_{k=1}^n (1+a_k) \mu(A_k)}. \tag{16}$$

Здійснімо кілька послідовних еквівалентних перетворень нерівності (16), яку потрібно довести:

$$\frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+a_k)\mu(A_k) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \mu(A_i)}{1+a_i} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} (1+a_k)\mu(A_k) - \mu(A);$$

$$\sum_{k=1}^{n} (1+a_k)\mu(A_k) - \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+a_k)\mu(A_k) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \mu(A_i)}{1+a_i} \geq \mu(A);$$

$$\sum_{k=1}^{n} (1+a_k)\mu(A_k) \left(1 - \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_i \mu(A_i)}{1+a_i} \right) \geq \mu(A). \tag{17}$$

Помножимо (17) на $\mu(A)$ та, з урахуванням рівності

$$1 = \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1+a_i}{1+a_i} \, \mu(A_i),$$

перепишемо (17) у наступній еквівалентній формі:

$$\sum_{k=1}^{n} (1+a_k)\mu(A_k) \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(A_i)}{1+a_i} \geq \big(\mu(A)\big)^2. \tag{18}$$

Але нерівність (18) є відомою нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \right)^2, \;\; u_k, v_k \geq 0$$

при $u_k = \sqrt{(1+a_k)\mu(A_k)}$, $v_i = \sqrt{\frac{\mu(A_i)}{1+a_i}}$, адже тоді $\sum_{k=1}^n u_k v_k = \mu(A)$. □

Лема 5. *Нехай $a > 0$ – дійсне число та $u, v, w \in L_1$ такі елементи, що $0 < v \leq w \leq a \cdot \mathbf{1}_Y$ та $a \cdot \mathbf{1}_X \leq u$. Нехай для вимірних множин $X, Y \subseteq [0,1]$ виконується нерівність*

$$\int_X (u - a) \, d\mu \leq \int_Y (w - v) \, d\mu.$$

Тоді

$$\int_X \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u} \right) d\mu \leq \int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w} \right) d\mu.$$

Доведення леми 5. Використовуючи умови леми, запишемо:

$$\begin{aligned}\int_X \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u}\right) d\mu &= \int_X \frac{u-a}{au}\, d\mu \le \\ &\le \int_X \frac{u-a}{a^2}\, d\mu = \\ &= \frac{1}{a^2}\int_X (u-a)\, d\mu \le \\ &\le \frac{1}{a^2}\int_Y (w-v)\, d\mu = \\ &= \int_Y \frac{w-v}{a^2}\, d\mu \le \\ &\le \int_Y \frac{w-v}{vw}\, d\mu = \\ &= \int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right) d\mu.\end{aligned}$$

$\square$

Доведення теореми 5. Зафіксуємо довільні $\mathbf{f}_0 \in L_0$, $\mathbf{e} \in L_1$ та $\boldsymbol{\omega} \in G$. Зазначимо, що $\boldsymbol{q_e}(\boldsymbol{\omega}) \le \int_{[0,1]} \mathbf{e}\, d\mu$ і розглянемо два випадки.

Випадок (*i*): $\boldsymbol{q_e}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{[0,1]} \mathbf{e}\, d\mu$. Тоді $\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_0$ є $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальним елементом бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q_e})$, оскільки в цьому випадку $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q_e})$ і $\mathbf{f}_0$ є $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальним елементом G.

Випадок (*ii*): $\boldsymbol{q_e}(\boldsymbol{\omega}) < \int_{[0,1]} \mathbf{e}\, d\mu$. Для довільного $\gamma \in [0, +\infty)$ покладемо:

$$\mathbf{x}_\gamma = (\gamma \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}) \wedge \mathbf{f}_0.$$

Крім того, визначимо функцію $\varphi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, поклавши для кожного $\gamma \in [0, +\infty)$

$$\varphi(\gamma) = \mathbf{q_e}(\mathbf{x}_\gamma) = \int_{[0,1]} \mathbf{x}_\gamma \wedge \mathbf{e}\, d\mu.$$

З неперервності ґраткових операцій на L_0 та інтеграла Лебеґа випливає неперервність функції φ. Оскільки $\varphi(0) = 0$ та $\lim_{\gamma\to+\infty} \varphi(\gamma) = \int_{[0,1]} \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_0\, d\mu$, то існує (не обов'язково єдине) значення $\gamma_0 \in [0, +\infty)$ таке, що $\mathbf{q_e}(\mathbf{x}_{\gamma_0}) = \mathbf{q_e}(\boldsymbol{\omega})$. Покладемо $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{\gamma_0}$ і доведемо максимальність $\mathbf{x}^*$. Згідно з вибором, маємо

$$\mathbf{q_e}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{q_e}(\boldsymbol{\omega}), \tag{19}$$

а отже, $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q_e})$. Розглянемо довільний $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q_e})$ і доведемо, що

$$\|\mathbf{x}^*\| \ge \|\mathbf{x}\|. \tag{20}$$

З умови $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q_e})$ та (19) випливає

$$\int_{[0,1]} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu \le \int_{[0,1]} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu. \tag{21}$$

Покладемо

$$A := \{t \in [0,1] : \mathbf{x}^*(t) < \boldsymbol{e}(t)\}, \;\; A^C = [0,1] \setminus A.$$

Тоді

$$\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{1}_A = \gamma_0 \cdot \mathbf{1}_A \quad \text{та} \quad \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{1}_{A^C} = \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{1}_{A^C}. \tag{22}$$

Розглянемо два підвипадки.

Підвипадок (*ii.a*): $\int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu \leq \int_A (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu$. Оскільки $\int_A (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu = \int_A \gamma_0 \, d\mu = \gamma_0 \cdot \mu(A)$, то

$$\int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu \leq \gamma_0 \cdot \mu(A). \tag{23}$$

Отже, згідно з лемою 4, використовуючи імплікацію (яка є добре відомою вправою)

$$(\forall s, t \in \mathbb{R})\; 0 \leq s \leq t \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{1+s} \leq \frac{t}{1+t}, \tag{24}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\| = \int_A \frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}}{1 + \mathbf{x} \wedge \mathbf{e}}\, d\mu &\overset{(15)}{\leq} \\ \leq \frac{\int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu}{1 + \frac{1}{\mu(A)} \int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu} &\overset{(23)}{\leq} \\ \leq \frac{\gamma_0 \cdot \mu(A)}{1 + \gamma_0} &= \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\|. \end{aligned} \tag{25}$$

Крім того,

$$\|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\| \leq \|(\mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\| \overset{(22)}{=} \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\|. \tag{26}$$

Нарешті, з (25) і (26) випливає:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\| = \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\| + \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\| \leq \\ \leq \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\| + \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\| = \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\|, \end{aligned}$$

тобто, $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \preceq_e (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})$.

Підвипадок (*ii.a*):

$$\alpha := \int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu - \int_A (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu = \int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu - \gamma_0 \cdot \mu(A) > 0. \tag{27}$$

Покладемо $B := \{t \in A^C : \mathbf{x}(t) < \mathbf{e}(t)\}$ і зазначимо, що $\mu(B) > 0$, оскільки у протилежному випадку було б $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C} = \mathbf{e} = (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, що разом з (27) суперечило би (21). Далі покладемо для кожного $s \in [0,1]$

$$A_s = \{t \in A \cap [0,s] : (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})(t) > \gamma_0\} = \{t \in A \cap [0,s] : (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})(t) > (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})(t)\}.$$

Визначимо функцію $\varphi \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, поклавши

$$\varphi(s) = \int_{A \setminus A_s} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu - \int_{A \setminus A_s} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu, \quad s \in [0,1].$$

Зазначимо, що $\varphi(0) > 0$ завдяки (27), а також $\varphi(1) \leq 0$, згідно з означенням множини A_s. З відомих властивостей інтеграла Лебеґа випливає неперервність функції φ. А отже, виберемо $s_0 \in (0,1]$ так, щоби $\varphi(s_0) = 0$, тобто,

$$\int_{A \setminus A_{s_0}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu = \int_{A \setminus A_{s_0}} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu. \tag{28}$$

Тепер покладемо $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{[0,1]}$, $X = A_{s_0}$, $Y = A^C$, $v = (\mathbf{1} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, $w = (\mathbf{1} + \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, $a = 1 + \gamma_0$, $u = (\mathbf{1} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{A_{s_0}}$. Тоді $v > 0$, оскільки $\mathbf{x} \geq 0$, $B \subseteq A^C$ і $\mu(B) > 0$. Крім того, з (22) дістаємо, що $v \leq w$. Далі, з означення $\mathbf{f}_0$ випливає, що $\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{1}_{A^C} \leq \gamma_0 \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, а отже, $w \leq a \cdot \mathbf{1}_Y$. Нарешті, з означення множини A_s отримуємо $a \cdot \mathbf{1}_X = (1 + \gamma_0) \cdot \mathbf{1}_{A^C} \leq (\mathbf{1} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{A^C} = u$. Таким чином, виконуються умови леми 5: $0 < v \leq w \leq a \cdot \mathbf{1}_Y$ та $a \cdot \mathbf{1}_X \leq u$.

Позначимо $\mathbf{z} = (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) - (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})$. Згідно з (28),

$$\int_{A \setminus A_{s_0}} \mathbf{z}\, d\mu = 0. \tag{29}$$

Тому

$$\int_Y (w - v)\, d\mu - \int_X (u - a)\, d\mu = \int_{A^C} \mathbf{z}\, d\mu + \int_{A_{s_0}} \mathbf{z}\, d\mu \overset{(29)}{=} \int_{[0,1]} \mathbf{z}\, d\mu \overset{(21)}{\geq} 0.$$

Згідно з лемою 5, має місце нерівність

$$\int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w} \right) d\mu - \int_X \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u} \right) d\mu \geq 0. \tag{30}$$

Зазначимо, що для довільного $\mathbf{y} \in L_0^+$ та довільної вимірної підмножини $D \subseteq [0,1]$

$$\|\mathbf{y} \cdot \mathbf{1}_D\| = \int_D \frac{\mathbf{y}}{1 + \mathbf{y}}\, d\mu = \int_D \left(1 - \frac{1}{1 + \mathbf{y}} \right) d\mu = \mu(D) - \int_D \frac{d\mu}{1 + \mathbf{y}}.$$

Із врахуванням останньої рівності запишемо:

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_Y\| - \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_Y\| = \\ &= \mu(Y) - \int_Y \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} - \mu(Y) + \int_Y \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} = \\ &= \int_Y \left(\frac{1}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} - \frac{1}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} \right) d\mu = \\ &= \int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w} \right) d\mu; \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_X\| - \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_X\| = \\ &= \mu(X) - \int_X \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} - \mu(X) + \int_X \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} = \\ &= \int_X \left(\frac{1}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} - \frac{1}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} \right) d\mu = \\ &= -\int_X \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{a} \right) d\mu. \end{aligned} \tag{32}$$

Крім того, згідно з лемою 4,

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\| &= \int_{A\setminus A_{s_0}} \frac{\mathbf{x}\wedge\mathbf{e}}{1+(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})}\,d\mu \le \\
&\le \frac{\int_{A\setminus A_{s_0}}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\,d\mu}{1+\frac{1}{\mu(A\setminus A_{s_0})}\int_{A\setminus A_{s_0}}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\,d\mu} \overset{(28)}{=} \\
&= \frac{\int_{A\setminus A_{s_0}}(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})\,d\mu}{1+\frac{1}{\mu(A\setminus A_{s_0})}\int_{A\setminus A_{s_0}}(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})\,d\mu} \overset{(24)}{\le} \\
&\le \frac{\int_{A\setminus A_{s_0}}\gamma_0\,d\mu}{1+\frac{1}{\mu(A\setminus A_{s_0})}\int_{A\setminus A_{s_0}}\gamma_0\,d\mu} = \\
&= \frac{\gamma_0\cdot\mu(A\setminus A_{s_0})}{1+\gamma_0} = \int_{A\setminus A_{s_0}}\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0}\,d\mu = \\
&= \|\gamma_0\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\| \overset{(22)}{=} \|(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\|.
\end{aligned}$$

Отже, доведено нерівність

$$\|(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\| - \|(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\| \ge 0. \tag{33}$$

Враховуючи, що $X\sqcup Y\sqcup(A\setminus A_{s_0})=[0,1]$ і додаючи нерівності (31), (32) та (33), отримуємо $\|\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e}\|-\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{e}\|$, тобто, $(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\preceq_e(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})$. □

Зауваження 2. *Легко бачити, що в умовах теореми 5, $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальний елемент бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$ не завжди єдиний у випадку, коли $\mathbf{e}<\mathbf{f}_0$. Наприклад, у випадку **(i)**: $\boldsymbol{q_e}(\boldsymbol{\omega})=\int_{[0,1]}\mathbf{e}\,d\mu$ кожний вектор $\mathbf{x}\in[\mathbf{e},\mathbf{f}_0]$ є $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальним для $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$.*

Зазначимо, що практичний сенс поняття бюджетної множини – це множина всіх можливих закупівель, які можна здійснити у межах даного запасу коштів, а максимальний елемент бюджетної множини – це саме той вибір закупівлі, який матиме максимальний ефект з точки зору певного відношення переваги, яке має властивості 1-3, згідно з означенням.

Автор висловлює щиру подяку М. М. Попову за постановку основної задачі і корисні консультації.

Список літератури

[1] *Aliprantis C. D., Brown D. J., Burkinshaw O.* Existence and Optimality of Competitive Equilibria, *Springer-Verlag, Berlin. (1989). DOI 10.1007/978-3-662-21893-8*

[2] *Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators, Springer, Dordrecht, 2006.*

[3] *Arrow K. J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competetive economy, *Econometrica 1954,* 22, *265–290.*

[4] *Fotiy O., Popov M., Ukrainets O. A characterization of F-spaces containing an isomorph of $\boldsymbol{\ell_0}$, Carpathian Math. Publ. 77 (2025), no 1, 777–777. https://doi.org/10.*

[5] *Kalton N. J., Roberts J. W.* A rigid subspace of L_0. *Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), no 3, 353–381.*

[6] *A. Kamińska, I. Krasikova, M. Popov.* Projection lateral bands and lateral retracts, *Carpathian Math. Publ., 12 (2020), no. 2, 333–339. DOI: 10.15330/cmp.12.2.333-339*

[7] *Maslyuchenko V. K.* Lectures on measure and integral theory. *Part 2. Chernivtsi: Chernivtsi National University (2011), 175 p.*

[8] *V. Mykhaylyuk, M. Pliev, M. Popov,* The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators, *Positivity 25, no 2 (2021), 291-327. DOI: https://doi.org/10.1007/s11117-020-00761-x*

[9] *V. Mykhaylyuk, M. Pliev, M. Popov,* The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators II. *Positivity 28, 8 (2024). https://doi.org/10.1007/s11117-023-01025-0*

[10] *V. Mykhaylyuk, M. Popov. ε-shading operator on Riesz spaces and order continuity of orthogonally additive operators. Results in Math. 77, 209 (2022). https://doi.org/10.1007/s00025-022-01742-0*

[11] *M. Popov,* Horizontal Egorov property of Riesz spaces. *Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), no 1, 323–332. DOI: https://doi.org/10.1090/proc/15235*

[12] *M. Popov*, Banach lattices of orthogonally additive operators, *J. Math. Anal. Appl. 514, no 1 (2022), Paper No. 126279, 26 pp. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126279*

[13] *Popov M. M., Ukrainets O. Z. A maximal Riesz-Kantorovich theorem with applications to markets with an arbitrary commodity set. Mat. Studii. 62 (2024), no 2, 199–210. https://doi.org/10.30970/ms.62.2.199-210*

[14] *S. Rolewicz,* Metric linear spaces, *PWN, Warszawa (1985).*

[15] *Vulikh B. Z. Introduction to the theory of partially ordered spaces. Wolters-Noordhoff Sci. Publ. Ltd. Groningen (1967), 387 p.*

Надійшло 31.05.2025

Ukrainets O. Z. Continuous charges on L_0 with an application to the Arrow-Debreu model of economy, Bukovinian Math. Journal. ***13**, 1 (2025), 66–82.*

In a recent paper by the author, joint with O. G. Fotiy and M. M. Popov, we used the orthogonally additive projection of L_0 onto the lateral band generated by the unit function, to construct an example of a nonzero orthogonally additive functional on L_0, which is continuous at zero. However, all examples of the kind are discontinuous at some other points. So the question on the existence of a nonzero orthogonally additive functional on L_0, which is continuous at every point, naturally arises. We give an affirmative answer to this question by constructing of two different types of such examples. Next we apply the obtained results to the Arrow-Debreu model of economy.