Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
(повне найменування закладу вищої освіти)

Факультет математики та інформатики
(назва факультету/навчально-наукового інституту)

Кафедра математичного моделювання
(назва кафедри, що забезпечує викладання)

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Декан факультету
математики та інформатики



_____ Ольга МАРТИНЮК

"25" 08 2026 року

РОБОЧА ПРОГРАМА
навчальної дисципліни

Випадкові процеси
(назва навчальної дисципліни)

обов'язкова
(вказати: обов'язкова)

Освітньо-професійна програма Системний аналіз
(назва програми)

Спеціальність 124 Системний аналіз
(вказати: код, назва)

Галузь знань 12 Інформаційні технології
(вказати: шифр, назва)

Рівень вищої освіти перший (бакалаврський)
(вказати: перший (бакалаврський) / другий (магістерський) / третій (освітньо-науковий)

Факультет математики та інформатики
(назва факультету/ навчально-наукового інституту, на якому здійснюється підготовка фахівців за вказаною освітньою програмою)

Мова навчання українська
(вказати: на якій мові читається дисципліна)

Чернівці 2026 рік

Робоча програма навчальної дисципліни «*Випадкові процеси*» складена відповідно до освітньо-професійної програми «Системний аналіз»

Розробник:
Малик Ігор Володимирович, завідувач кафедри математичних проблем управління і кібернетики, доктор фіз.-мат. наук, професор

Викладач, що забезпечує читання даної навчальної дисципліни:
Малик Ігор Володимирович, завідувач кафедри математичних проблем управління і кібернетики, доктор фіз.-мат. наук, професор

Погоджено з гарантом ОП _____ **Андрій ПЕРЦОВ**

Затверджено на засіданні кафедри математичного моделювання
Протокол № 1 від «27» серпня 2026 року

Завідувач кафедри _____ **Ігор ЧЕРЕВКО**

Схвалено методичною радою факультету математики та інформатики
Протокол № 1 від «28» серпня 2026 року

Голова методичної ради _____ **Тоня ФРАТАВЧАН**

Мета навчальної дисципліни: навчити студентів основним поняттям та методам теорії випадкових процесів та стохастичного аналізу, ознайомити їх з класифікацією та основними властивостями випадкових процесів.

Основними завданнями навчальної дисципліни «Випадкові процеси» є навчити студентів основам застосування методів теорії випадкових процесів для розв'язання прикладних задач.

Пререквізити. Навчальні дисципліни: "Програмування", "Лінійна алгебра", "Дискретна математика", "Теорія ймовірностей та математична статистика".

Результати навчання:

знати основні поняття теорії випадкових процесів (випадковий процес, класифікація випадкових процесів, умовні розподіли та умовні математичні сподівання, сепарабельні випадкові процеси, мартингали, марковські процеси, стохастичні інтеграли Вінера-Іто, заміна Іто, існування, єдиність, властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь);

вміти застосовувати набуті теоретичні знання до розв'язування практичних задач з теорії випадкових процесів, стохастичного аналізу.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми «Системний аналіз» дисципліна формує такі **компетентності:**

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях

ФК1. Здатність використовувати системний аналіз як сучасну міждисциплінарну методологію, що базується на прикладних математичних методах та сучасних інформаційних технологіях і орієнтована на вирішення задач аналізу і синтезу технічних, економічних, соціальних, екологічних та інших складних систем.

ФК2. Здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів.

ФК3. Здатність будувати математично коректні моделі статичних та динамічних процесів і систем із зосередженими та розподіленими параметрами із урахуванням невизначеності зовнішніх та внутрішніх факторів.

Наведені результати навчання за відповідною дисципліною співвідносяться із такими **програмними результатами навчання:**

ПР3. Вміти визначати ймовірнісні розподіли стохастичних показників та факторів, що впливають на характеристики досліджуваних процесів, досліджувати властивості та знаходити характеристики багатовимірних випадкових векторів та використовувати їх для розв'язання прикладних задач, формалізувати стохастичні показники та фактори у вигляді випадкових величин, векторів, процесів.

ПР14. Розуміти і застосовувати на практиці методи статистичного моделювання і прогнозування, оцінювати вихідні дані.

Опис навчальної дисципліни
Загальна інформація

Форма навчання	Рік підготовки	Семестр	Кількість		Кількість годин						Вид підсумкового контролю
			кредитів	годин	лекції	практичні	семінарські	лабораторні	самостійна робота	індивідуальні заняття	
Денна	4	7	4	120	30	30	-	-	60	-	екзамен

Структура змісту навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
Змістовий модуль 1. Сепарабельні випадкові процеси. Мартингали і напівмартингали												
Тема 1. Означення ВП. Задання міри для ВП на основному ймовірнісному просторі.	9	2	2			5						
Тема 2. Приклади випадкових процесів. Процес очікування. Процес Пуассона. Броунівський рух. Класифікація ВП. Сепарабельність ВП.	17	6	6			5						
Тема 3. Означення мартингала і напівмартингала. Математичні моделі мартингалів та напівмартингалів.	20	6	4			10						
Усього за ЗМ1	46	14	12			20						
Змістовий модуль 2. Дифузійні стохастичні диференціальні рівняння												
Тема 1. Вінерів процес.	22	4	8			10						
Тема 2. Стохастичні інтеграли Вінера-Іто.	18	4	4			10						
Тема 3. Формула Іто	18	4	4			10						
Тема 4. Існування, єдиність, властивості розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь	16	4	2			10						
Усього за ЗМ2	74	16	18			40						
Усього годин	120	30	30			60						

Тематика лекційних занять з переліком питань

№	Назва теми
1	Тема 1. Означення ВП. Задання міри для ВП на основному ймовірнісному просторі.
2	Тема 2. Приклади випадкових процесів. Процес очікування. Процес Пуассона. Броунівський рух. Класифікація ВП. Сепарабельність ВП.
3	Тема 3. Означення мартингала і напівмартингала. Математичні моделі мартингалів та напівмартингалів.
4	Тема 4. Вінерів процес. Означення, основні формули, властивості. Приклади
5	Тема 5. Стохастичні інтеграли Вінера-Іто. Означення, основні формули, властивості. Приклади
6	Тема 6. Формула Іто. Означення, властивості, приклади.
7	Тема 7. Існування, єдиність, властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Означення СДР, властивості, приклади

Тематика практичних занять з переліком питань

№ з/п	Назва теми
1	Процеси другого порядку. Стохастичний аналіз випадкових процесів другого порядку.
2	Процес Пуассона та споріднені з ним процеси.
3	Процеси відновлення.
4	Мартингали та напівмартингали.
5	Вінерів процес та його властивості.
6	Марковські процеси.
7	Стохастичний інтеграл та його властивості.
8	Формула Іто.
9	Стохастичні диференціальні рівняння.

Індивідуальні науково-дослідні завдання (ІНДЗ)

№	Завдання до тем
1	Приклади випадкових процесів (процес очікування, пуассоновий процес, броунівський рух). Особливості практичного застосування.
2	Моделювання дискретних випадкових величин.
3	Моделювання неперервних випадкових величин.
4	Основні теореми про задання міри на множинах мінімальної сігма-алгебри. Означення сепарабельності. Сепарабельні ВП.
5	Основні твердження про мартингали.
6	Розклад Дуба-Мейєра.

7	Граничні теореми для мартингалів. Збіжність рядів з незалежними членами.
8	Замкнення мартингала. Умова рівномірної інтегровності.
9	Властивості розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Модельні приклади.

Завдання для самостійної роботи студентів

Самостійна робота складається з повторення матеріалу, засвоєного на лекціях, самостійного опанування частини теоретичного матеріалу, роботи з контрольними запитаннями та завданнями.

Студенти можуть отримувати до 1 бала в рахунок виконання завдань СРС під час кожного лекційного заняття за правильні відповіді на запитання лектора, активне обговорення багатоваріантних підходів до рішення представленої лектором проблеми (для активізації пошукової та дослідної діяльності студентів).

№ з/п	Назва теми	Завдання для самостійної роботи	Кількість год
1	Означення ВП. Задання міри для ВП на основному ймовірнісному просторі.	Теорема Колмогорова. Модельні приклади. Особливості практичного застосування.	5
2	Класифікація ВП.	Класифікація ВП: процеси з незалежними значеннями, процеси з незалежними приростами, гауссові ВП, марковські ВП, стаціонарні ВП.	5
3	Означення мартингала і напівмартингала. Математичні моделі мартингалів та напівмартингалів.	Основні означення (фільтрація, узгоджений ВП, мартингал, субмартингал, супермартингал). Основні твердження про мартингали. Приклади.	5
4	Зв’язок збіжностей для мартингалів. Допоміжні мартингальні нерівності	Розклад Дуба-Мейєра. Зв'язок збіжностей для субмартингалів. Основна теорема про збіжність. Граничні теореми для мартингалів. Збіжність рядів з незалежними членами. Замкнення мартингала. Умова рівномірної інтегровності	5
5	Вінерів процес	Неперервність, відсутність обмеженої варіації, недиференційовність по t вінерівського процесу. Моделювання на ПК вінерового процесу.	10
6	Стохастичні інтеграли Вінера Іто	Властивості. Інтеграли Вінера-Іто як функції верхньої межі.	10

7	Формула Ітo	Означення стохастичного диференціала. Заміна Ітo для скалярного та векторного випадків	10
8	Існування, єдиність, властивості розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь	Поняття стохастичного диференціального рівняння. Теореми про існування та єдиність розв'язків. Властивості розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Модельні приклади.	10

Самостійна робота студентів використовується при вивченні наступних тем і передбачає опрацювання теоретичного матеріалу, результати якого застосовуються під час виконання практичних завдань.

Методи навчання

Під час викладання навчальної дисципліни використовуються такі методи навчання:

1) за джерелом передачі та сприймання студентами навчальної інформації:

- словесні (лекція, пояснення, бесіда, інструктаж);
- наочні (ілюстрація, демонстрація);
- практичні (вправи, проєкти);

2) за логікою передачі та сприймання студентами навчальної інформації:

- інформаційно-рецептивний;
- репродуктивний;
- проблемний;
- частково-пошуковий (евристичний);

3) за стимулюванням навчально-пізнавальної діяльності:

- методи стимулювання пізнавальних потреб та інтересів;
- методи стимулювання обов’язку та відповідальності.

Система контролю та оцінювання

Засобами оцінювання та демонстрування результатів навчання є: стандартизовані тести; презентації результатів виконаних завдань та досліджень ІНДЗ, усний контроль у вигляді індивідуального та фронтального опитування на лекціях та практичних заняттях, самостійні і контрольні роботи.

Форми поточного та підсумкового контролю

1. Методи усного контролю (опитування)
2. Методи писемного контролю (самостійні і контрольні роботи)
3. Методи практичного оцінювання (оцінювання вміння застосовувати знання до розв’язування конкретних задач на практичних і лабораторних заняттях, оцінювання самостійної роботи студентів)
4. Дидактичні тести.

Формою підсумкового контролю є екзамен.

Критерії оцінювання поточного та підсумкового контролю

Критерієм підсумкового оцінювання є досягнення студентом мінімальних порогових рівнів оцінок (балів) за кожним передбаченим результатом навчання.

Система оцінювання рівня навчальних досягнень ґрунтується на принципах ECTS та є накопичувальною.

Екзаменаційний білет містить три питання, з яких два теоретичні й одне практичне. Повна відповідь на теоретичне питання оцінюється у 13 балів. Повна відповідь на практичне питання оцінюється у 14 балів.

За кожну помилку, яка допущена у відповіді, знімається певна кількість балів, а саме:

а) при відповіді на теоретичне питання у випадку неістотної помилки знімається 1-4 балів, а у випадку істотної 5-6 балів, якщо ж студент не опанував теоретичний матеріал дисципліни, плутається в означеннях, наводить логічно невірні твердження, то знімається до 12 балів;

б) при оцінці практичного завдання за помилку, допущену при обчисленнях, знімається 1-4 балів, за істотну помилку, знімається 5-6 балів, якщо ж розв'язання задачі логічно неправильне, то знімається до 13 балів.

Розподіл балів, які отримують студенти

Поточне оцінювання (*аудиторна та самостійна робота*)						Кількість балів (екзамен)	Сумар-на к-ть балів
Змістовий модуль №1			Змістовий модуль № 2				
ТЕМА 1.	ТЕМА 2.	ТЕМА 3.	ТЕМА 1.	ТЕМА 2-3.	ТЕМА 4.	40	100
10	10	10	10	10	10		

Шкала оцінювання: національна та ЄКТС

Оцінка за національною шкалою	**Оцінка за шкалою ECTS**	
	Оцінка (бали)	**Пояснення за розширеною шкалою**
Відмінно	A (90-100)	відмінно
Добре	B (80-89)	дуже добре
	C (70-79)	добре
Задовільно	D (60-69)	задовільно
	E (50-59)	достатньо
Незадовільно	FX (35-49)	(незадовільно) з можливістю повторного складання
	F (1-34)	(незадовільно) з обов'язковим самостійним опрацюванням освітнього компоненту до перескладання

На оцінку "відмінно" заслуговує студент, який виявив всебічні, систематичні та глибокі знання, здатність самостійно виконувати завдання, передбачені програмою, ознайомлений з основною і додатковою літературою, рекомендованою програмою. Така оцінка передбачає також засвоєння студентом взаємозв'язку основних понять дисципліни та їх значення для набутої професії.

Оцінку "добре" ставлять студенту, який засвоїв навчально-програмовий матеріал у повному обсязі, успішно виконує передбачені програмою завдання, опрацював основну літературу, рекомендовану програмою, тобто студенту, який засвідчив систематичний характер знань із дисципліни і здатний до їх самостійного поповнення й оновлення у процесі подальшої навчальної роботи і професійної діяльності.

На оцінку "задовільно" заслуговує студент, який виявив знання основного навчального матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання і майбутньої роботи за професією, здатний виконувати завдання, передбачені програмою, ознайомлений з основною літературою, рекомендованою програмою. Як правило, цю оцінку виставляють студентам, які припустилися огріхів у відповіді на іспиті та при виконанні екзаменаційних завдань, але продемонстрували спроможність усунути їх.

Оцінку "незадовільно" ставлять студенту, у знаннях якого є прогалини, який припустився принципових помилок у виконанні передбачених програмою завдань, тобто студенту, який неспроможний продовжити навчання чи приступити до професійної діяльності після закінчення вищого навчального закладу без додаткових занять з відповідної дисципліни.

Перелік питань для самоконтролю та підсумкового контролю навчальних досягнень студентів

1. Означення ВП
2. Властивості ВП.
3. Задання міри для ВП
4. Приклади випадкових процесів.
5. Процес очікування.
6. Процес Пуассона.
7. Броунівський рух.
8. Класифікація ВП.
9. Сепарабельність ВП
10. Означення мартингала
11. Означення напівмартингала
12. Основні твердження про мартингали. Приклади
13. Математичні моделі мартингалів та напівмартингалів.
14. Вінерів процес. Означення
15. Неперервність, відсутність обмеженої варіації, недиференційовність по t вінерівського процесу
16. Властивості процесу Вінера.
17. Моделювання процесу Вінера

18. Інтеграли Вінера-Іто, як функції верхньої межі
19. Поняття стохастичного диференціального рівняння.
20. Теореми про існування та єдиність розв'язків.
21. Властивості розв'язків стохастичного диференціального рівняння.

Зарахування результатів неформальної/інформальної освіти

Здобувачі вищої освіти має право на участь у неформальній/інформальній освіті.

У межах поточного контролю можуть визнаватися результати неформальної/інформальної освіти за умови наявності сертифікату або освітньої декларації про результати неформальної/інформальної освіти з питань, що відповідає тематиці курсу («Порядок визнання у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича результатів навчання, здобутих шляхом неформальної та/або інформальної освіти», https://www.chnu.edu.ua/media/4g5fzssb/poriadok-vyznannia-rezultativ-navchannia-zdobutykh-shliakhom-neformalnoi-ta-abo-informalnoi-osvity.pdf).

Студентам можуть бути зараховані додаткові бали, отримані через неформальну освіту, до загальної суми балів, набраної з освітньої компоненти, за умови, що результати з проблеми, за якою відбувалося навчання, відповідають тематиці курсу.

Рекомендована література

Основна

1. Mishura Y., Shevchenko G. Theory and Statistical Applications of Stochastic Processes.- Wiley, 2017.- ISTE.
2. Peter W. Jones, Peter Smith. Stochastic Processes: An Introduction, Third Edition.- CRC Press: Taylor & Francis, 2017.- 255 p.
3. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів.- Київ: Либідь, 1990.- 168 с.
4. Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Лекції з теорії стохастичного моделювання. Частина 1. Основи теорії випадкових процесів.– Чернівці: Зелена Буковина, 1999.– 296 с.
5. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Лекції з теорії стохастичного моделювання. Частина 2. Стохастичні динамічні системи зі скінченною післядією.– Чернівці: Зелена Буковина, 2000.– 560 с.
6. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. В 3-х т.– Т.1.– Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009.- 798 с.

Допоміжна

1. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М. Й. Теоретико- ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. - Київ: Інформтехніка, 1995.- 380 с.
2. Гусак Д.В., Кукуш О.Г., Кулик О.М., Мішура Ю.С., Пилипенко А.Ю.

Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 398 с.
3. Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Розора І.В. Моделювання випадкових процесів у фізичних системах: навч. посібник – К:ВПЦ «Задруга», 2010. – 230 с.
4. Ofosu, J. B., Hesse, C. A. & Otchere, F. (2014). Applied stochastic processes. EPP Books Services, Accra.
5. Pierre Del Moral, Spiridon Penev. Stochastic Processes: From Applications to Theory.- CRC Press: Taylor & Francis, 2016.- 866 p.

Інформаційні ресурси

https://moodle.chnu.edu.ua/enrol/index.php?id=7777

Політика щодо академічної доброчесності

Дотримання політики щодо академічної доброчесності учасниками освітнього процесу при вивченні освітнього компонента регламентовано чинними документами ЧНУ:

- «Кодекс академічної доброчесності та етики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича» https://www.chnu.edu.ua/universytet/normatyvni-dokumenty/kodeks-akademichnoi-dobrochesnosti-ta-etyky-chernivetskoho-natsionalnoho-universytetu-imeni-yuriia-fedkovycha/
- «Положенням про виявлення та запобігання академічного плагіату у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича» https://www.chnu.edu.ua/universytet/normatyvni-dokumenty/polozhennia-pro-vyiavlennia-ta-zapobihannia-akademichnomu-plahiatu-u-chernivetskomu-natsionalnomu-universyteti-imeni-yuriia-fedkovycha/
- «Політика використання штучного інтелекту в Чернівецькому національно-му університету імені Юрія Федьковича» https://www.chnu.edu.ua/universytet/normatyvni-dokumenty/polityka-vykorystannia-shtuchnoho-intelektu-v-chernivetskomu-natsionalnomu-universyteti-imeni-yuriia-fedkovycha-zi-zminamy-zatverdzhenymy-vchenoiu-radoiu-chnu-imeni-yuriia-fedkovycha/

Використання здобувачами освіти інструментів штучного інтелекту (ШІ) під час виконання навчальних завдань:

- *допускається за умови* дотримання принципів академічної доброчесності (здобувач освіти несе відповідальність за зміст, достовірність і результати поданої роботи, а у разі використання ШІ зобов'язаний зазначити факт і спосіб його застосування);
- *не допускається* використання ШІ як заміни самостійного виконання завдань або з метою порушення вимог академічної доброчесності;
- *додаткові обмеження чи вимоги* щодо використання ШІ *можуть визначатися* викладачем в освітньому процесі для конкретних видів навчальної діяльності відповідно до особливостей дисципліни.