

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича



ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Матеріали

міжнародної наукової конференції
пам'яті академіка Миколи Перестюка

23-26 вересня 2026 року
м. Чернівці

УДК 51+004(08)

Рекомендовано до друку вченою радою факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 3 від 18 вересня 2026 року)

Диференціальні рівняння та їх застосування. Матеріали міжнародної наукової конференції, пам'яті академіка Миколи Перестюка, 23—26 вересня 2026 р. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2026. 365 с.

Збірник матеріалів міжнародної наукової конференції “Диференціальні рівняння та їх застосування”, пам'яті академіка Миколи Перестюка, містить наукові роботи вчених України, Європи, Азії та Америки, які проводять дослідження у теорії диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, алгебрі, теорії функцій, математичному моделюванні та інформаційних технологіях.

© Факультет математики та інформатики
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича, 2026

ЗМІСТ

МИКОЛА ОЛЕКСІЙОВИЧ ПЕРЕСТЮК: ВЧЕНИЙ, УЧИТЕЛЬ, ЛЮДИНА	14
ANDRYTSULIAK Taras, MARTYNIUK Sergiy Probabilistic Forecasting in Dynamic Rating Systems with Uncertain Initial Strength	18
ANDRUSYAK Ivanna, BRODYAK Oksana, HUZYK Nadiia Coecient inverse problems for parabolic equation	20
ASSANOVA Anar A nonlocal problem for an impulsive hyperbolic system with generalized piecewise-constant argument	22
BANDURA Andriy Homogeneous directional differential equations: growth estimates and boundednes of L-index of analytic solutions in the unit polydisc	25
BEBIYA Maksym On the extension of a class of stabilizing controls for two- and three-dimensional nonlinear	27
BENNER Peter, CHUIKO Sergii, NESMELOVA Olga Autonomous periodic boundary value problems with switching at non-xed times in critical	28
BENNER Peter, CHUIKO Sergii, CHUIKO Viktor Normally solvable boundary value problems with impulsive action	30
BIHUN Yaroslav, DROBOT Andrii Averaging in a generalized multifrequency system with linearly transformed arguments	32
BILOZEROVA Maria, SHARAI Natalia Asymptitoc representations of rapidly varying solutions to differential equations of the fourth order with nonlinearities, close to regularly varying	34
BOKALO Mykola Initial-boundary value problems for elliptic-parabolic equations in unbounded domains with conditions at infinity	35
BRYNZAN Anastasia, PASICHNYK Halyna Simulation-based evaluation of a fuzzy logic traffic light controller using the sumo microscopic traffic simulator	38
BUHRII Khrystyna Scattering in a waveguide with star-shaped resonators	41
BUJAC Cristina, VULPE Nicolae The family QSE of quadratic dierential systems possessing an invariant ellipse: Liouvillian integrability	42
CHEBITKO Iryna, REVINA Tetiana A Fixed-Iteration Comparison of Two Fictitious-Play Methods	44

CHEREVKO Ihor	Approximation schemes of differential-difference equations and their applications	47
COZMA Dumitru	Integrating factors of a cubic system with two parallel invariant lines and one invariant quartic	50
DRIN Yaroslav, DRIN Iryna, DRIN Svitlana, LUTSKIV Mykhailo	Study of problems for pseudodifferential equations of variable order	53
DUDKO Artem, GRIGORCHUK Rostyslav	Characters and IRSs on branch groups and embeddings into the hypernite III factor	55
GLAVAN Vasile, GUȚU Valeriu	Green-Samoilenko function in the Shadowing theory	57
GORBACHUK Volodymyr, SPIVAK Yuliya	On the approximation of solutions of operator-differential equations by their entire solutions of exponential type	59
HENTOSH Oksana	Integrable $(2 2 + 1)$ -dimensional supersymmetric dynamical systems and centrally extended Lie algebra of matrix super-integro-differential operators with two anticommuting variables	62
ILIKA Svitlana, MATVIY Oleksandr, PIDUBNA Larysa	Approximation of linear differential-functional equations	65
IVASIUK Ivan	Spectral theory of operators application for solution of some types of differential-difference Lax equations	67
KAPUSTYAN Oleksiy	Attracting compact sets and their stability for infinite-dimensional impulsive systems	68
KAPUSTYAN Oleksiy, SUKRETNA Anna	Stability of infection-free periodic and almost periodic solutions in impulsive SEIR-model	70
KARATAIEVA Tetyana, KOSHMANENKO Volodymyr	A model of conflict society with support for the weakest	73
KLEVCHUK Ivan	Invariant measures for discrete dynamical systems	76
KOROBov Valery, VOZNIAK Oleh	Reachability of a surface by controlled system of differential equations	77
KUDUK Grzegorz, SYMOTYUK Michail	Problem with integral condition for homogeneous system of partial differential equations of fourth order in Sobolev space	79

LOVEIKIN Yuriy On Quasiperiodic Motions of an Electron in a Toroidal Camera under the Influence of an Electromagnetic Field	81
MASLYUCHENKO Oleksandr, LIANHA Anastasiia Generating spaces and characterizations of perfect normality	84
MASLYUCHENKO Oleksandr, ONYPA Denys Cluster sets of continuous functions at a point of finite local rank in first countable spaces	86
MEDYNSKYI Ihor, PASICHNYK Halyna On the solvability of the Cauchy problem for a degenerate equation	88
MISIATS Oleksandr Regularity and asymptotic properties of nonlocal stochastic evolution equations arising in chemical and biomedical models	90
MYKHAYLYUK Volodymyr Box-flat spaces and diagonals of separately continuous maps	91
NESTERUK Igor, SHEPETYUK Bohdan Analysis of COVID-19 dynamics in Ukraine based on the new generalized SIR and SEIR models	93
PERJAN Andrei The hyperbolic relaxation of the IBVP for the Cahn-Hilliard equation	95
PETRYK Mykhayko, BOYKO Igor, SHYNKARYK Mykola, PETRYK Oksana Mathematical and computer modeling of nonlinear competitive diffusion in nanoporous particles media	98
PLOTNIKOV Andrii, KOMLEVA Tetyana, SKRIPNIK Natalia Linear fuzzy Cauchy problems	100
PRISHLYAK Oleksandr Topological Classification of SNIC Bifurcations on Closed Surfaces	103
RONTÓ András, RONTÓ Miklós Nonlinear boundary value problems with complex functions of real variables	105
SAMOILENKO Valerii Analytic Solutions of Impulsive Differential Equations and Their Asymptotic Properties	107
SAMOILENKO Valerii, SAMOILENKO Yuliia Asymptotic wave-like solutions of hydrodynamical type equations with variable coefficients and singular perturbation	110
SAVCHENKO Mariia, SKRYPNIK Igor Qualitative properties of solutions to parabolic anisotropic equations	113
SIKORA Vira, YURCHENKO Oleh Web application for visualizing the action of metasymmetric and metaalternating groups on rooted trees	116

SKURATOVSKII Ruslan Subwreath product as structure of normal subgroups of permutational wreath products	119
SKURATOVSKII Ruslan Minimal involutive generating sets in extended special linear groups $ESL_n(F_p)$, $ESL_n[\mathbb{Z}]$ and square roots in these groups	121
SKURIKHIN Roman, GEFTER Serhii Convolution equations for the Euler function and the Euler copolynomial	124
SOBCHUK Valentyn, PYKHIVSKYI Roman, RYZHOV Anton Construction of Lyapunov functions for systems with nonsmooth right-hand sides using genetic programming and sparse optimization	127
TARANETS Roman Finite speed of propagation and long-time properties of strong solutions to a nonlocal thin lm equation	129
TAVANOVA Nazgul, BEKBAUOVA Altynshash Application of the Dzhumabaev method in solving boundary value problems for evolutionary systems	130
UNHURIAN Halyna, YASHAN Bohdan Tinkercad circuits as a virtual design tool in robotics education	133
YATSENIAC Dariia, BUHRII Oleh Nonlinear parabolic equations on graphs	135
ZAVARZINA Olesia, LEVCHENKO Maksym On plasticity of the unit spheres of some Banach spaces	136
АКБЕРГЕНОВ Абдивалі, ДВОРНИК Анатолій, ТКАЧЕНКО Віктор Майже періодичні розв'язки в рівнянні неокласичної моделі зростання з нефікованими моментами імпульсної дії	138
АСРОРОВ Фарход, МАМСА Катерина Інтегральні множини нелінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням	140
АТЛАСЮК Олена, МИХАЙЛЕЦЬ Володимир Про апроксимаційні властивості багатоточкових крайових задач	142
БІГУН Ярослав, ПЕТРИШИН Роман Багатоточкова задача з параметрами для нелінійної багаточастотної системи з імпульсною дією	145
БІЛОЗЕРОВА Марія, ЧЕПОК Ольга Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з експоненціальною нелінійністю	147
БОБИЛЄВ Дмитро Чисельне оцінювання регулярності фрактальних функцій на скінченних масштабах	150

- БОЙКО Петро, ЛОПУШАНСЬКА Галина, ПУКАЧ Петро Обернена задача з невідомим джерелом у просторах беселевих потенціалів 152
- БОМБА Андрій, БАРАНОВСЬКИЙ Сергій Моделювання процесу інфекційного захворювання з урахуванням стану організму в умовах імунологічної і фармакологічної терапії 154
- БОНДАРЕНКО Кирило, КІЧМАРЕНКО Ольга, ДАШКОВСЬКИЙ Сергій Наближений розв'язок задачі оптимального керування для рівняння з похідною Хукухари зі швидкоколивними коефіцієнтами на півосі 156
- БОНДАРЕНКО Ольга , ПРАЦЬОВИТИЙ Микола , РАТУШНЯК Софія Один клас самоафінних функцій, асоційованих з мультиосновним зображенням чисел одиничного проміжка 158
- БУРТНЯК Іван, МАЛИЦЬКА Ганна Системи інерційного переносу 160
- ВАСИЛИШИН Костянтин Метод двобічних наближень на основі використання квазі-функції Гріна-Рвачова у аналізі задачі Діріхле для тривимірного нелінійного рівняння теплопровідності 162
- ВІННИЧУК Олена, ГОТИНЧАН Тетяна, ІВАСЮК Галина, ФРАТАВЧАН Тоня Застосування апарату нечіткої логіки Мамдані для моделювання ризику банкрутства виробничих підприємств в умовах воєнного стану 164
- ВОРОНЕНКО Микита, ГИБКІНА Надія Дослідження крайових задач стаціонарної дифузії із лінійним розпадом методом двобічних наближень 167
- ГВОЗДЄВ Микита Чисельний аналіз однієї математичної моделі мікроелектромеханічної системи методом двобічних наближень з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова 170
- ГЕМБАРСЬКА Світлана Найкращі наближення класів типу Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних у підпросторах Лебега 172
- ГЕСЕЛЕВА Катерина Застосування колокаційно-ітеративного методу для відшукування розв'язку інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю та обмеженнями 174
- ГЛАДУН Володимир Множини стійкості до збурень модифікованих регулярних C -дробів 176
- ГОРОДНІЙ Михайло, ТИХА Єлизавета Про обмежені розв'язки різницевого рівняння з необмеженими операторними коефіцієнтами 179

ГРАБОВЕЦЬ Анастасія, БУРИЛКО Олександр	Мультистабільність та оптимізація енергії в градієнтній моделі типу Курамото	180
ГРИГОРЧУК Любомир, ГРИГОРЧУК Галина	Про межі застосовності апарату обмеженого L -індексу до регуляризації нейронних мереж: спектральна константа Ліпшиця для безпеки soft-sensor'ів	182
ГРОД Іван, ГРОД Інна	Знакозмінні функції Ляпунова для розширень динамічних систем на многовидах	184
ГРОМИК Андрій, КОНЕТ Іван, ПИЛИПЮК Тетяна	Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі	185
ГРУШКА Ярослав	Посилений варіант теореми про неповернення	187
ДМИТРИШИН Мар'ян, ШАРИН Сергій	Спектральні апроксимації для наборів еліптичних диференціальних операторів на компактних многовидах	189
ДОМНІЦАК Максим	Обґрунтування методу усереднення для багаточастотних систем диференціальних рівнянь із сталим запізненням	192
ДОРОШ Андрій, ЖОЛТОВСЬКИЙ Олексій	Апроксимація розв'язків лінійних крайових задач із запізненням методом сплайн-функцій	194
ДОРОШЕНКО Ірина	Асимптотичний аналіз та усереднення для стохастичних диференціально-функціональних систем із малим параметром за наявності зовнішніх випадкових збурень	197
ЄВТУХОВ В'ячеслав, МАКСИМОВ Олександр	Асимптотична поведінка розв'язків циклічних систем зі швидко змінними нелінійностями	199
ЖУК Тетяна, КРАСНЄЄВА Анна, ПАНЬКОВ Андрій	Стійкість щодо граничних і зовнішніх збурень для атракторів параболічних багатокомпонентних систем	201
ЖУРАВЛЬОВ Валерій	Критерій керованості лінійних інтегральних рівнянь з невиродженим ядром у гільбертових просторах	204
ЗАВОРОТИНСЬКИЙ Андрій, МУРАЧ Олександр	Сингулярно збурена математична модель MEMS-діафрагми з ротаційно податливим краєм	207
ЗАХАРЕНКО Володимир	Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків з нелінійностями близькими до правильно змінних	210
ЗАШКОЛЬНИЙ Давид	Самовідтворювальні степені кристалографічних груп	213

- ЗЕЛЕНСЬКА Ірина, ЛЕБЕДЄВА Ірина Особливості асимптотичного інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь 3-го порядку з точкою звороту для конкретних матричних коефіцієнтів 215
- ЗРАЖЕВСЬКИЙ Григорій, ЗРАЖЕВСЬКА Віра Класифікація високоенергетичних хаотичних та ергодичних траєкторій системи Генона–Гейліса з використанням нейронних мереж 218
- КАСІМОВА Ніна, ГОРБАЧ Валентина Змішане оптимальне керування виродженим параболічним рівнянням 221
- КЛІМЧУК Тарас Рівняння рівноваги Ламе для середовища з функціонально-градієнтного матеріалу 223
- КОЛІСНИК Руслана, МАРТИНЮК Ольга Про розв’язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для такого рівняння з початковою узагальненою функцією, яка є елементом простору типу W' 226
- КОПИТКО Богдан, ШЕВЧУК Роман Про склеювання дифузійних процесів на прямій із заданими у рухомих точках нелокальними умовами спряження типу Феллера–Вентцеля 227
- КОСОВИЧ Ігор, КОСОВАН Василь, ШКІЛЬНЮК Дмитро Імітаційне моделювання SIR моделей методом клітинних автоматів 228
- КРАВЦОВ Кирило, МЕЛЬНИК Галина, МЕЛЬНИК Василь Комбінування ансамблевих методів машинного навчання з аналізом текстових даних для прогнозування медичних станів 230
- КРАСНОКУТСЬКИЙ Олександр, ЧЕРЕВКО Ігор Оцінка впливу запізнення на стійкість розв’язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь 233
- КУШНІРЧУК Василь, КУШНІРЧУК Володимир Динамічна двокритеріальна модель оптимізації вартості портфеля активів 235
- КУШНІРЧУК Володимир Асимптотика в $l.i.m.$ розв’язку стохастичного диференціально-різницевого рівняння з fBm для $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 238
- КУШНІР Роман, ТОКОВИЙ Юрій, ЮЗВ’ЯК Микола Пряме інтегрування диференціальних рівнянь теорії пружності з використанням функцій Вігака 240
- ЛАХВА Роксолана, МОГИЛЬОВА Вікторія, КРАВЕЦЬ Василь Асимптотичний аналіз нелінійних за керуванням інтегро-диференціальних систем зі швидкими осциляціями 243

ЛЕНЮК Олег, НІКІТІНА Ольга, ШИНКАРИК Микола	Моделювання фізичних процесів методом гібридних інтегральних перетворень Ейлера-Фур'є-Ейлера на сегменті	245
ЛИСЕНКО Ірина, ПЛАКИДА Віктор, ПРАЦЬОВИТИЙ Олександр	Канторівська дво-основна система числення в задачах теорії локально складних функцій	247
ЛІТОВЧЕНКО Владислав, ЛЕКА Максим	Про спряжену задачу Коші для рівнянь з дисипативною параболічністю, змінними коефіцієнтами та від'ємним родом	249
МАЙКО Ілля, КІЗІЛОВА Наталія	Математичне моделювання процесів переносу забруднень в атмосфері за допомогою сучасних статистичних методів та алгоритмів машинного навчання	251
МАЛИК Ігор, ІВАСЮК Роман	Про стаціонарні розподіли ієрархічних прихованих напівмарковських моделей	254
МАЛИК Ігор, НЕСТЕРЕНКО Володимир	Уніфіковане середовище для відтворюваного порівняння динамічних нейронних мереж	256
МАРТИНЮК Петро, МІЧУТА Ольга, УЛЯНЬЧУК-МАРТИНЮК Оксана	Про умови спряження для напорів в математичній моделі нелінійної фільтраційної консолідації при наявності композитного геобар'єра	259
МАРТИНЮК Сергій, СИДОРА Михайло	Координація рою дронів у задачі truck-and-multi-UAV доставки з гнучкими точками запуску та повернення	262
МАР'ЯНЧУК Олександр	Схеми апроксимації початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь та їх числове моделювання	265
МАЦЕНКО Василь	Аналіз узагальнень моделі Скеллама	268
МИХАЛЬЦОВ Кирило, КРЕНЕВИЧ Андрій	Порівняльний аналіз ефективності інструментарію Python для моделювання процесів гідродинаміки методом ґраткових рівнянь Больцмана на гетерогенних архітектурах	271
МІНКОВ Костянтин	Стійкий критерій відбору зразків для активного напівкерованого навчання при обмеженому маркуванні	273
НАЗАРЕНКО Олег, СТЕХУН Анжела, ВАСИЛЬЄВ Олександр	Задача дифракції ударної хвилі на жорсткому напівсферичному включенні	275
НЕСТЕРЕНКО Василь, ФОТІЙ Олена	Характеризація многозначних відображень в термінах замикання	278
НІКОРАК Олена	Модифіковане ланцюгове A_2 -зображення чисел	280

ОСИПЧУК Михайло Третя початково-крайова задача для параболічного псевдодиференціального рівняння порядку $\alpha \in (1, 2)$	283
ПІЧКУР Володимир, ГАГУРІН Євгеній Про достатні умови оптимальної стабілізації дискретних систем з фазовими обмеженнями	286
ПАРХОМЕНКО Владислав, СИДОРОВ Максим Метод двобічних наближень знаходження додатного аксіально-симетричного розв'язку першої крайової задачі для рівняння Гельмгольца з гетеротонною нелінійністю	288
ПЕРЕГУДА Олег, КУШНІРЕНКО Світлана Апроксимація оптимального керування функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу оптимальним керуванням рівнянь без запізнення у банахових просторах	291
ПЕРЕСТЮК Микола, КОРОЛЬ Ігор, КОРОЛЬ Юрій Дослідження диференціально-алгебраїчних систем з імпульсною дією та багатоточковими крайовими умовами	294
ПЕТРУЛЯ Валентин, ШАТИРКО Андрій Стійкість розв'язків систем «прямого» регулювання з запізнюванням та стохастичною невизначеністю	295
ПРАВДИВИЙ Олександр, ХАЛЕЦЬКА Зоя Існування обмеженого на всій прямій розв'язку стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу в гільбертових просторах	297
ПРАЦЬОВИТИЙ Микола Нескінченносимвольні системи зображення чисел у задачах теорії функцій з фрактальними властивостями	300
ПУКАЛЬСЬКИЙ Іван, ЯШАН Богдан Нелокальна загальна крайова задача для нерівномірно 2b-параболічних рівнянь зі степеневими особливостями	302
ПУКАЧ Петро, ЧЕРНУХА Юрій Комп'ютерне моделювання дифузійних потоків домішки в шарі із системою випадкових точкових внутрішніх джерел маси	304
РАДЧИН Євгеній, КІЧМАРЕНКО Ольга Задача оптимального керування для інтегродиференціального рівняння в Банахових просторах	307
РАТУШНЯК Софія Циліндричні дробі ланцюгових A_s -дробів	309
РИХЛІК Антон Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора збуреного випадковим процесом	312
РУСАКОВ Віктор, ІГНАТОВИЧ Світлана Поліноміальне керування для однієї нелінійної некерованої системи	314

САВЧЕНКО Антон	Метод двобічних наближень в аналізі задачі про статичний прогин балки мікроелектромеханічної системи із сегментованим електродом	317
САМУСЕНКО Петро	Асимптотичне інтегрування крайових задач для сингулярно збурених слабо нелінійних диференціально-алгебраїчних систем	320
САТУР Оксана	Властивості станів рівноваги дискретних динамічних систем із притягальною взаємодією типу середнього поля	321
СЕРДЮК Анатолій	Найкращі наближення класів згорток, породжуваних лінійними комбінаціями аналітичних ядер з синхронізованими фазовими зсувами	323
СКОРОЛІТНЯ Аліна, ПАЛАМАРЮК Іванна	Цифрові технології в діяльності вчителя математики	325
СЛИВКА-ТИЛИЩАК Ганна, ГЛЕБЕНА Мирослава	Задача Коші для рівняння коливань струни на площині з випадковими збуреннями у просторі Орліча	327
СОБЧУК Валентин, РУДИК Єлизавета, НЕСТЕРЕНКО Олексій	Існування циклів порядку Шарковського для імпульсної системи Лієнара	329
СОКОЛЕНКО Ігор	Наближення класів згорток періодичних функцій за допомогою лінійних поліноміальних методів, побудованих на основі коефіцієнтів Фур'є-Лагранжа	331
СОЛДАТОВ Віталій	Про d-характеристики крайових задач для диференціальних систем вищих порядків із найбільш загальними крайовими умовами	334
СТАНЖИЦЬКИЙ Олександр, МАРТИНЮК Ольга, ПЕРЕСТЮК Юрій	Інваріантні міри для нескінченновимірних стохастичних рівнянь	337
УКРАЇНЕЦЬ Олег	Стійкість стану здорового організму в моделі імунної відповіді під впливом екологічного фактору	338
ФЕРУК Віктор	Слабко нелінійна крайова задача для двочленного диференціального рівняння дробового порядку з секвенціальною похідною	341
ЦУРКАН Вячеслав	Контекстуальна марковська модель дискретної кооперативної гри	343
ШИНКАРЕНКО Володимир, ШАРАЙ Наталія	Асимптотика розв'язків диференціального рівняння третього порядку	346
ШТЕФАН Дмитро, СТАНЖИЦЬКИЙ Андрій	Існування мартингального розв'язку дробового стохастичного рівняння тонких плівок	349

ЮРЧЕНКО Ігор, ЯСИНСЬКИЙ Володимир	Про стійкість розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із частинними похідними спеціального вигляду	351
ЮСИПІВ Тарас, ЗИСКО Артем, ДЕНИСЕНКО Наталія	Збіжність атракторів гальоркінських апроксимацій параболічної імпульсної системи	355
ЯКОВЛЄВА Інна, ЦУРИК Вадим	Синтез структурної матриці мінімальної висоти паралельного алгоритму множення матриць Штрассена в альтернативному базисі	357
ЯНБЕКОВ Равіль	Дослідження просторових термохімічних процесів методом двобічних наближень з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова	360
АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ		362

МИКОЛА ОЛЕКСІЙОВИЧ ПЕРЕСТЮК: ВЧЕНИЙ, УЧИТЕЛЬ, ЛЮДИНА

Є люди, чий науковий доробок залишається у підручниках і статтях. Є люди, чії ідеї продовжують жити у працях учнів. А є вчені, вплив яких виходить далеко за межі власних досліджень – у розвиток цілої наукової галузі, у сформовані наукові школи, у долі поколінь математиків, для яких вони стали Вчителями.

Саме таким був **Микола Олексійович Перестюк** – видатний український математик, академік Національної академії наук України, доктор фізико-математичних наук, професор, учений зі світовим ім'ям у галузі якісної та асимптотичної теорії диференціальних рівнянь, авторитетний дослідник теорії диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Його життєвий і науковий шлях був нерозривно пов'язаний із Київським університетом. У 1963 році Микола Перестюк вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Тараса Шевченка, який закінчив у 1968 році. Уже наступного року розпочав викладацьку та наукову роботу в університеті, пройшовши шлях від асистента до професора, завідувача кафедри та декана механіко-математичного факультету.

Його становлення як ученого відбувалося у всесвітньо відомій київській науковій школі з нелінійної механіки Крилова–Боголюбова–Митропольського. Важливу роль у цьому становленні відіграв академік **Анатолій Михайлович Самойленко** – учитель і науковий наставник Миколи Олексійовича. Саме ця школа сформувала особливий стиль його наукового мислення – поєднання фундаментальності, глибокого аналізу та уваги до задач, що виникають у реальних математичних моделях.



*Микола Перестюк під час пленарної доповіді «Слово про вчителя», присвяченої академіку
Анатолію Михайловичу Самойленку (Чернівці, 28.09.2023)*

У 1972 році Микола Олексійович захистив кандидатську дисертацію, а в 1986 році – докторську. У 1987 році побачила світ монографія «Диференціальні рівняння з імпульсною дією», написана у співавторстві з Анатолієм Михайловичем Самойленком. Це була перша монографічна праця, у якій систематизовано основні результати теорії імпульсних систем. Важливою складовою наукової спадщини Миколи Олексійовича стали фундаментальні результати в теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією та розривних динамічних систем. Він розробив якісно нові методи дослідження таких систем, зокрема їхніх розв’язків та інтегральних множин, встановив умови існування і стійкості періодичних та майже періодичних розв’язків, отримав ефективні критерії стійкості та розвинув методи наближеного розв’язування диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Значний внесок Миколи Олексійовича пов’язаний також із розвитком теорії збурень інваріантних множин розривних динамічних систем, обґрунтуванням аналогів методів Пуанкаре та Боголюбова для імпульсних систем і дослідженням їхніх складних коливних режимів.



*Наукова школа триває доти, доки вчитель продовжується у своїх учнях.
Олександр Станжицький, Анатолій Самойленко, Микола Перестюк (Київ, 2012)*

За цими, на перший погляд, вузькоспеціальними математичними напрямками стояла ширша наукова проблема – зрозуміти закономірності складних динамічних процесів і створити математичний інструментарій для їх дослідження. Саме тому праці Миколи Олексійовича мали значення не лише для розвитку теорії диференціальних рівнянь, а й для ширшого кола задач математичного моделювання та нелінійної механіки.

Наукова спадщина Миколи Олексійовича – це **понад 350 наукових і науково-методичних праць**. Проте масштаб ученого визначається не тільки кількістю публікацій. Важливо й те, скільки знань і наукового досвіду він передав наступним поколінням. Під його керівництвом захищено **10 докторських і 25 кандидатських дисертацій**. Його учні сьогодні працюють у різних університетах та наукових центрах, продовжуючи розвивати напрями, до яких він доклав свою працю.

Наукове визнання Миколи Олексійовича було широким і вагомим. У 2009 році його

обрано академіком Національної академії наук України. Він – лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, Державної премії України в галузі освіти, премій імені М. М. Крилова та М. М. Боголюбова НАН України, удостоєний почесного звання «Заслужений діяч науки і техніки України», нагороджений орденами «За заслуги» III та II ступенів, а також відзначений численними державними й академічними нагородами.

Водночас його авторитет виходив далеко за межі одного університету. Микола Олексійович був **Почесним доктором Ужгородського національного університету та Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Заслуженим професором Київського національного університету імені Тараса Шевченка та Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка**. Він входив до складу редакційних колегій і був головним редактором наукових видань, упродовж багатьох років очолював спеціалізовану вчену раду із захисту дисертацій. Активно працював задля розвитку математичної науки та підготовки молодих науковців, очолював експертну раду ВАК України, працював у складі численних комісій Міністерства освіти і науки України.

Велику увагу Микола Олексійович приділяв розвитку шкільної математики, адже добре розумів: саме зі школи починається шлях майбутнього математика, формується інтерес до науки та математичне мислення. Він був автором і співавтором підручників, навчальних посібників і збірників задач з математики для школярів та вступників до закладів вищої освіти. Особливу увагу приділяв підтримці олімпіадного руху з математики в Україні та впродовж багатьох років очолював журі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

Микола Олексійович був членом програмних комітетів численних наукових конференцій, виступав із пленарними доповідями, активно долучався до наукових дискусій і завжди залишався відкритим до спілкування з колегами та молодими науковцями. Своїм прикладом він показував молодому поколінню, що наука розвивається не лише через власні дослідження, а й через живе спілкування, обмін ідеями, підтримку однодумців і постійний пошук нового. Так передається наукова культура, народжуються нові ідеї та продовжується традиція від покоління до покоління.

Для Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича Микола Олексійович був не просто знаним ученим, ім'я якого пов'язане з математикою світового рівня. Його багато років поєднували з університетом наукові та людські зв'язки. У 2010 році йому було присвоєно звання **Почесного доктора Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича** — на знак визнання його вагомого внеску в розвиток теорії диференціальних рівнянь і нелінійної механіки та багаторічної співпраці з університетом.

Особливим є і його зв'язок із математичною спільнотою Чернівців. Микола Олексійович був членом редакційної колегії **«Буковинського математичного журналу»**, підтримував його розвиток. Його ім'я стало частиною наукового середовища, у якому працювали й зростали чернівецькі математики, а під його керівництвом захищалися докторські дисертації та формувалися нові покоління дослідників.



Микола Олексійович Перестюк відкриває Міжнародну наукову конференцію «Математика та інформаційні технології», присвячену 55-річчю факультету математики та інформатики, з деканом Ольгою Мартинюк (Чернівці, 28.09.2023)

Та, мабуть, найважливішою рисою Миколи Олексійовича як ученого була його здатність залишатися Вчителем. Для нього математика не завершувалася отриманим результатом чи опублікованою статтею. Вона продовжувалася в учнях, у наукових дискусіях, у нових питаннях, які виникали після кожної знайденої відповіді.

25 січня 2024 року Микола Олексійович Перестюк відійшов у вічність. Проте його наукова спадщина продовжує жити – у працях, результатах його учнів, розвитку теорії диференціальних рівнянь і в нових наукових питаннях, до пошуку відповідей на які він надихнув не одне покоління математиків.

Саме тому міжнародна наукова конференція **«Диференціальні рівняння та їх застосування»**, присвячена пам'яті академіка Миколи Перестюка, – це не лише данина пам'яті видатному вченому. Це продовження наукового діалогу, якому він присвятив своє життя.

Нехай результати, ідеї та наукові пошуки, представлені на цих сторінках, стануть ще одним продовженням справи Вченого, Учителя і Людини, чиє ім'я назавжди залишиться в історії української математики.

Probabilistic Forecasting in Dynamic Rating Systems with Uncertain Initial Strength

Taras ANDRYTSULIAK, Sergiy MARTYNIUK

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

andrytsuliak.taras@chnu.edu.ua

Rating systems are widely used to estimate the relative strength of agents participating in repeated interactions. The Elo system provides a framework for updating the rating of an agent based on the difference between the observed and expected outcome [1]:

$$r_{ik}^{\text{calc}} = r_{i(k-1)}^{\text{calc}} + K(M, N, T) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (S_{ijk} - P_{ijk}), \quad (1)$$

where $r_{i(k-1)}^{\text{calc}}$ and r_{ik}^{calc} are the calculated ratings of agent i before and after interaction k ; $K(M, N, T)$ is the Elo update coefficient depending on the number of interactions M , interacting agents N , and interaction index T ; S_{ijk} and P_{ijk} are the actual and expected results of the sub-interaction with agent j .

The standard Elo framework assumes that an agent's rating is sufficiently accurate. In practice, an agent's strength may change over time, with such changes unknown before new interactions are observed. We therefore represent the initial rating as a probability distribution reflecting uncertainty in the agent's underlying strength and apply it to outcome forecasting using Monte Carlo simulation.

Elo ratings can predict individual interactions. However, when many interactions jointly determine an outcome, analytical probability estimation is generally infeasible due to the combinatorial complexity. Monte Carlo simulation provides an approach to such problems, as demonstrated by de Angelis and Fontana [2]. Their approach uses the Elo formula to evaluate future interactions. However, analysis shows that lower-rated agents have slightly higher winning chances than predicted by Elo. Therefore, the proposed approach uses logistic regression models to predict the outcomes x_{ij} of future interactions based on Elo ratings (r_i, r_j) and additional features $(h_1, \dots, h_L)$, if needed:

$$x_{ij} = f(r_i, r_j, h_1, \dots, h_L). \quad (2)$$

However, this approach still assumes that the input ratings are known precisely. In practice, a calculated Elo rating is only an estimate of an agent's underlying strength and is therefore subject to uncertainty. The proposed approach accounts for this uncertainty by treating the initial rating as a random variable rather than a fixed value. Thus, instead of using the same calculated rating r_{ik}^{calc} for each Monte Carlo simulation, we model the actual rating as the sum of the calculated rating and an uncertainty term ε_{ik} :

$$r_{ik} = r_{ik}^{\text{calc}} + \varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} \sim \mathcal{N}(\mu_{ik}, \sigma_{ik}^2). \quad (3)$$

where μ_{ik} is the difference between the true and calculated ratings and σ_{ik} is its standard deviation. The magnitudes of both parameters depend on the number of interactions. The higher the number of recent interactions, the more precise the agent's rating calculation becomes, and the less the calculated rating deviates from the true rating. Thus, the difference between the true and calculated ratings is modeled as

$$\varepsilon_{ik} \mid M_{ik}^{\text{recent}} \sim \mathcal{N}(\mu_{ik}(M_{ik}^{\text{recent}}), \sigma_{ik}^2(M_{ik}^{\text{recent}})). \quad (4)$$

Given an Elo rating uncertainty distribution at a particular time, a random rating can be sampled for each agent based on its calculated rating and uncertainty. After each interaction, the agent's rating is updated with a specific Elo update coefficient:

$$r_{ik}^{\text{sim}} = r_{i(k-1)}^{\text{sim}} + K^{\text{sim}}(M, N, T) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (S_{ijk} - P_{ijk}). \quad (5)$$

The model was implemented using English Premier League results for seasons from 2015/16 to 2024/25 [3]. The expected rating deviation is calculated based on the rating potential, which is the 90th percentile of the last 10 years of team ratings ($r_{ik}^{\text{potential}}$), and information about promotion/relegation to the Premier League (PR_{ik}), where 1 indicates promotion, -1 indicates relegation, and 0 means no change:

$$\mu_{ik}(M_{ik}^{\text{recent}}) = \frac{\beta_0 + \beta_1 (r_{ik}^{\text{potential}} - r_{ik}^{\text{calc}}) + \beta_2 PR_{ik}}{1 + \lambda M_{ik}^{\text{recent}}}. \quad (6)$$

The standard deviation is based on the average rating deviation between the beginning and end of a season.

$$\sigma_{ik}(M_{ik}^{\text{recent}}) = \frac{\sigma_0 D_k}{1 + \lambda M_{ik}^{\text{recent}}}. \quad (7)$$

Hyperparameters were optimized using gradient descent and evaluated with logarithmic loss. The proposed approach achieved the best result (2.554), compared with 2.596 without uncertainty and 2.652 without Elo updates during simulation.

References

- [1] Andrytsuliak T., Martyniuk S. Generalization of the Elo system for interactions between many agents. Буковинський математичний журнал 2025. 13, № 2. С. 137–151.
- [2] De Angelis L., Fontana S. Monte Carlo meets Wimbledon: Elo-based simulations for predicting tennis tournament winners. Available at SSRN 5027380, 2024.
- [3] https://github.com/andritar/multi_elo

Coefficient inverse problems for parabolic equation

Ivanna ANDRUSYAK, Oksana BRODYAK, Nadiia HUZYYK

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

ivanna.v.andrusyak@lpnu.ua, oksana.y.brodyak@lpnu.ua, hryntsiv@ukr.net

In a domain $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ we consider the coefficient inverse problems for the degenerate parabolic equation:

$$w_t = a(t)t^\beta w_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))w_x + c(x, t)w + f(x, t), \quad (1)$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$w_x(0, t) = \mu_1(t), \quad w_x(l, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\int_0^l w(x, t) dx = \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$\int_0^l xw(x, t) dx = \mu_4(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

It is known that $a(t) > 0, t \in [0, T]$ and the degeneration of the equation is caused by the power function t^β . Both cases of strong ($\beta \geq 1$) and weak ($0 < \beta < 1$) degenerations are investigated. The coefficient at the first derivative of unknown function $w = w(x, t)$ in the equation (1) is a polynomial of the first order for the space variable with two unknown functions with respect to time variable $b_1 = b_1(t), b_2 = b_2(t)$.

It is established conditions of existence and uniqueness of the local solutions to the named problem. To prove the existence of the solution to the problem (1)-(5) we apply the Schauder Fixed Point Theorem. For this purpose, using the apparatus of Green's functions of boundary value problems for the heat equation, the inverse problem (1)-(5) is reduced to an equivalent system of equations and conditions of Schauder's theorem are ensured for it. Uniqueness of the solutions is based on the properties of the system of homogeneous integral Volterra equations of second kind with integrable kernels.

Moreover, it is proved that for the case of strong degeneration for parabolic equation with Neumann boundary conditions the unknown function $w = w(x, t)$ and its first derivative with respect to space variable are continuous in $\overline{Q}_{T_0}$. The second derivative of this function has the singularity $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ at $t \rightarrow 0$ unlike both cases of weak degeneration when all these functions are continuous in $\overline{Q}_{T_0}$ and strong degeneration of parabolic equation with Dirichlet boundary conditions when the first derivative of unknown function behaves as $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ when $t \rightarrow 0$.

It is established also that the unknown functions $b_1 = b_1(t), b_2 = b_2(t)$ behave at $t \rightarrow 0$ as t^δ with $\delta = \min\{\gamma, \beta\}$ in contrast to the case of strong degeneration for parabolic equation with Dirichlet boundary conditions when $\delta = \min\{\gamma, \frac{\beta+1}{2}\}$ with $\gamma > \frac{\beta-1}{2}$.

Results of this paper can be used in research of inverse problems of identification the younger coefficients in parabolic equation which depend on both space and time variables. Besides, they are the first step in investigation parabolic equations with general strong degeneration or multi-dimensional degenerate parabolic equations.

A nonlocal problem for an impulsive hyperbolic system with generalized piecewise-constant argument

Anar ASSANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

assanova@math.kz; anartasan@gmail.com

In the present communication we consider the following nonlocal problem for an impulsive system of hyperbolic equations with generalized piecewise-constant argument on the domain $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = & A(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + C(t, x) u(t, x) + f(t, x) + \\ & + A_0(t, x) \frac{\partial u(\gamma(t), x)}{\partial x} + B_0(t, x) \frac{\partial u(\gamma(t), x)}{\partial t} + C_0(t, x) u(\gamma(t), x), \quad t \neq t_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$P(x) \frac{\partial u(0, x)}{\partial x} + S(x) \frac{\partial u(T, x)}{\partial x} = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_j+0} u(t, x) - \lim_{t \rightarrow t_j-0} u(t, x) = \varphi_j(x), \quad x \in [0, \omega], \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (3)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

where $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))'$ is unknown vector function, the $n \times n$ matrices $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $A_0(t, x)$, $B_0(t, x)$, $C_0(t, x)$ and n vector function $f(t, x)$ are continuous on Ω ; $\gamma(t) = \zeta_j$ if $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{0, N-1}$; $t_j \leq \zeta_j < t_{j+1}$ for all $j = 0, 1, \dots, N-1$; $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$; the $n \times n$ matrices $P(x)$ and $S(x)$ and the n vector function $\varphi(x)$ are continuously differentiable on $[0, \omega]$, the n vector functions $\varphi_j(x)$ are continuously differentiable on $[0, \omega]$, $j = \overline{1, N-1}$; the n vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0, T]$.

Let $PC(\Omega, \{t_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}^n)$ be the space of piecewise continuous on Ω vector functions $u(t, x)$ with possible discontinuities on lines $t = t_j$, $j = \overline{1, N-1}$, and norm

$$\|u\|_1 = \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{(t, x) \in \Omega_r} \|u(t, x)\|, \quad \Omega_r = [t_{r-1}, t_r) \times [0, \omega], \quad r = \overline{1, N}.$$

A vector function $u(t, x) \in PC(\Omega, \{t_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}^n)$ is a solution to problem (1)–(4) if:

- (i) $u(t, x)$ has partial derivatives $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ and $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$ belonging to $PC(\Omega, \{t_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}^n)$;
- (ii) the mixed partial derivative $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x}$ exists at each point $(t, x) \in \Omega$ with the possible exception of the points (t_j, x) , $j = \overline{0, N-1}$, for all $x \in [0, \omega]$, where the one-sided mixed partial derivatives exist;
- (iii) system of hyperbolic equations (1) is satisfied for $u(t, x)$ on each subdomain $(t_j, t_{j+1}) \times [0, \omega]$, $j = \overline{0, N-1}$, and it holds for the right mixed partial derivative of $u(t, x)$ at the points (t_j, x) , $j = \overline{0, N-1}$, $x \in [0, \omega]$;
- (iv) boundary conditions (2), (3) are satisfied for $u(t, x)$ at the lines $t = 0$, $x = 0$, respectively.
- (v) conditions of impulse effects (4) are satisfied for $u(t, x)$ at the lines $t = t_j$, $j = \overline{1, N-1}$, $x \in [0, \omega]$.

Problems for impulsive differential equations of various types have been the subject of active research for many years, see references in [1-2]. One important class of differential equations with discontinuities consists of equations with a piecewise constant argument [3]. A new type of piecewise constant arguments for differential equations was introduced in the work [4]. New results in the theory of impulsive hyperbolic equations with loads were obtained in [5]. The study of hyperbolic equations with a generalized piecewise constant argument was initiated in [6]. In this work we establish the coefficient conditions for the existence of a unique solution to problem (1)–(4).

We use the notations $\alpha(x) = \max_{t \in [0, T]} \|A(t, x)\|$, $\alpha_0(x) = \max_{t \in [0, T]} \|A_0(t, x)\|$,

$$\theta = \max \left\{ \max_{r=1, \overline{N}} (t_r - \zeta_{r-1}), \max_{r=1, \overline{N}} (\zeta_{r-1} - t_{r-1}) \right\},$$

$$D_r(t, x) = \int_{\zeta_{r-1}}^t [A(\tau, x) + A_0(\tau, x)] d\tau, \quad (t, x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, N},$$

and introduce the $(nN \times nN)$ matrix

$$Q_N(x) = \begin{bmatrix} P(x)[I + D_1(0, x)] & 0 & \cdot & 0 & S(x)[I + D_N(T, x)] \\ -I - D_1(t_1, x) & I + D_2(t_1, x) & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -I - D_2(t_2, x) & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & -I - D_{N-1}(t_{N-1}, x) & I + D_N(t_{N-1}, x) \end{bmatrix}.$$

Theorem 1. Assume that the $nN \times nN$ matrix $Q_N(x)$ is invertible for all $x \in [0, \omega]$ and the following conditions are valid:

(a) $\| [Q_N(x)]^{-1} \| \leq \gamma_N(x)$, where $\gamma_N(x)$ is positive continuous on $[0, \omega]$ function;

(b) $q_N(x) = \gamma_N(x) \max \left(\|P(x)\| + \|S(x)\|, 2 \right) \alpha(x) e^{\alpha(x)\theta} [\alpha(x) + \alpha_0(x)] \theta^2 \leq \chi < 1$, where χ is positive constant.

Then nonlocal problem (1)–(4) has a unique solution.

References

- [1] Perestyuk N., Samoilenko A.M. Impulsive Differential Equations. World Scientific, 1995. 472 p.
- [2] Akhmet M.U., Perestyuk M.O. On a comparison method for pulse systems in the space R_n . Ukrainian Math. J. 1993. 45, No 6. P. 826–836.
- [3] Wiener J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations. World Scientific, Singapore, 1993. 410 p.
- [4] Akhmet M.U. On the reduction principle for differential equations with piecewise constant argument of generalized type. J. Math. Anal. Appl. 2007. 336, No 1. P. 646–663.

- [5] Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M., Bakirova E.A. On the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions. Ukrainian Math J. 2018. 69, No 8. P. 1175–1195.
- [6] Assanova A.T., Uteshova R. Solution of a nonlocal problem for hyperbolic equations with piecewise constant argument of generalized type. Chaos Solitons & Fractals. 2022. 165, No 12. art. no 112816.

Homogeneous directional differential equations: growth estimates and boundedness of L -index of analytic solutions in the unit polydisc

Andriy BANDURA

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine

andriykopanytsia@gmail.com

We will use notations and definitions from [1]. Let $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ be a given direction, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ be the unit polydisc, $L: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a continuous function such that for all $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{D}^n$

$$L(z) > \beta \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|b_j|}{1 - |z_j|}, \quad \beta = \text{const} > 1. \quad (1)$$

For a given $z \in \mathbb{D}^n$ we denote $D_z = \{t \in \mathbb{C} : z + t\mathbf{b} \in \mathbb{D}^n\}$. In other words, $D_z = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \min_{1 \leq j \leq n} \frac{1 - |z_j|}{|b_j|}\}$. Here, if $b_j = 0$ then we suppose $\frac{1 - |z_j|}{|b_j|} = +\infty$. Denote

$$\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sup_{t_1, t_2 \in D_z} \left\{ \frac{L(z + t_1\mathbf{b})}{L(z + t_2\mathbf{b})} : |t_1 - t_2| \leq \frac{\eta}{\min\{L(z + t_1\mathbf{b}), L(z + t_2\mathbf{b})\}} \right\}.$$

The notation $Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{D}^n)$ stands for a class of positive continuous functions $L: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, satisfying (1) and $(\forall \eta \in [0, \beta])$ one has $\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$. We denote $a^+ = \max\{a, 0\}$. Set $u(r) = u(z^0, \theta, r) = L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})$. Let $W_{\mathbf{b}}(\mathbb{D}^n)$ be a class of positive continuous function $L: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfying all following conditions:

- 1) for all $z \in \mathbb{D}^n$ $L(z) > \beta \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|b_j|}{1 - |z_j|}$, where $\beta = \text{const} > 1$;
- 2) for every $z^0 \in \mathbb{D}^n$ and every $\theta \in [0, 2\pi]$ the function $u(r, z^0, \theta)$ be a continuously differentiable function of real variable $r \in [0, r_0)$, where $r_0 = \min\{s \in \mathbb{R}_+ : |z_j^0 + se^{i\theta}b_j| = 1, 1 \leq j \leq n\}$;
- 3) for every $z^0 \in \mathbb{D}^n$, $\theta \in [0, 2\pi]$ one has $\left(\frac{d}{ds} \frac{1}{L(z^0 + sre^{i\theta}\mathbf{b})} \Big|_{s=1} \right)^+ \rightarrow 0$ as $\max_{1 \leq j \leq n} |z_j^0 + re^{i\theta}b_j| \rightarrow 1$, i.e. $r \rightarrow r_0$. $(-u'_r(z^0, \theta, r))^+ / (L^2(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})) \rightarrow 0$

An analytic function $F: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{C}$ is called a function of *bounded L -index in a direction $\mathbf{b}$* , if there exists $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that for every $m \in \mathbb{Z}_+$ and every $z \in \mathbb{D}^n$ the following inequality is valid $\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m!L^m(z)} \leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k!L^k(z)} : 0 \leq k \leq m_0 \right\}$, where $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z)$, $\partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z))$, $k \geq 2$. The least integer $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ is called the *L -index in the direction $\mathbf{b}$ of an analytic function F* and is denoted by $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{D}^n) = m_0$.

Below we formulate proposition providing growth estimates of analytic solutions of the following homogeneous partial differential equation

$$g_0(z) \partial_{\mathbf{b}}^p F(z) + g_1(z) \frac{\partial^{p-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{p-1}} + \dots + g_p(z) F(z) = 0. \quad (2)$$

Theorem 1. *Let $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{D}^n) \cap W_{\mathbf{b}}(\mathbb{D}^n)$, functions $g_0, g_1, \dots, g_p$ be analytic in the unit polydisc and there exists $R \in [0, 1)$ such that for all $z \in \mathbb{D}^n$, $|z| \geq R$, one has $|g_j(z)| \leq m_j L^j(z) |g_0(z)|$ for $1 \leq j \leq p$, where m_j are some nonnegative constants. If an analytic function $F: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{C}$*

satisfies equation (2) and $\forall z \in \mathbb{D}^n$, $|z| < R$, $F(z + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$ then $F(z)$ is of bounded L -index in the direction $\mathbf{b}$ and for all $z^0 \in \mathbb{D}^n$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\overline{\lim}_{\max_{1 \leq j \leq n} |z_j^0 + re^{i\theta} b_j| \rightarrow 1} \frac{\ln |F(z^0 + e^{i\theta} r\mathbf{b})|}{\int_0^r L(z^0 + te^{i\theta} \mathbf{b}) dt} \leq \max \left\{ 1, \sum_{j=1}^p m_j \right\}. \quad (3)$$

Acknowledgments. This research was funded by the National Research Foundation of Ukraine (project 2025.07/0427, "Newest complex probabilistic methods for studying asymptotic properties of analytical solutions of differential equations represented by multiple random series and integrals and their potential applications", 0126U002547).

References

- [1] Bandura, A.I., Batsala, Ya.V. Growth estimates for analytic functions in the unit polydisc with bounded L -index in direction. Mat. Stud. 2026. 65, №2, 148–156.

On the extension of a class of stabilizing controls for two- and three-dimensional nonlinear systems

Maksym BEBIYA

V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

`m.bebiya@karazin.ua`

We consider the nonlinear control system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}^{2k_{i-1}+1} + f_{i-1}(t, x, u), \quad i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

where $u \in \mathbb{R}$ is a control input, $k_i > 0$ are given integer numbers, $f_i(t, x, u)$ are continuous functions representing higher-order nonlinear terms, with $f(t, 0, 0) = 0$ for all $t \geq 0$. We assume that the exponents k_i are strictly increasing, i.e., $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1}$. It is well known that system (1) has an uncontrollable linearization at the origin and is not feedback-linearizable.

The control $u(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_1^{2k_1+1} + \dots + a_{2n-1}x_{n-1}^{2k_{n-1}-1}$ was proposed in [1] for the stabilization of the equilibrium point $x = 0$ of system (1), under certain conditions on the coefficients a_i of the control. In the present work, we extend this result by employing a different estimate for the derivative of an appropriate Lyapunov function. In particular, for two- and three-dimensional systems, we obtain new conditions on a_i which are less restrictive than the corresponding conditions established in [1]. For example, in the two-dimensional case, the coefficients a_i may be chosen arbitrarily subject only to $a_i < 0$, $i = 1, 2, 3$. Some interesting results were also obtained in [2] for the case of non-strictly increasing k_i .

Furthermore, we modify the obtained stabilizing control to achieve finite-time convergence to the equilibrium and establish corresponding conditions for finite-time stabilization [3]. This modification is based on V.I. Korobov's controllability function method and leads to global finite-time stabilization.

References

- [1] Bebiya M.O., Korobov V.I. On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. 2016. 12, № 2. P. 113–133.
- [2] Bebiya M.O., Barska Y.M. On stabilization of canonical nonlinear systems in a special case. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*. 2026. 103. P. 38–59.
- [3] Bebiya M.O. On the bounded control synthesis for three-dimensional high-order nonlinear systems. *Bukovinian Mathematical Journal*. 2023. 11, № 2. P. 11–23.

Autonomous periodic boundary value problems with switching at non-fixed times in critical cases

Peter BENNER, Sergii CHUIKO, Olga NESMELOVA

Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany;

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Cherkasy, Ukraine

benner@mpi-magdeburg.mpg.de, chujko-slav@ukr.net, star-o@ukr.net

The study of impulsively perturbed systems of ordinary differential equations has a long tradition in the Kyiv school of nonlinear oscillations, particularly at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine [1, 2]. This research was initiated in 1937 by M.M. Krylov and M.M. Bogolyubov with the study of a clock mechanism in which damping caused by friction was compensated by periodic jolts of the anchor. Before 1967, research on the theory of impulsive boundary value problems were predominantly descriptive in nature, limited to the discussion of examples of impulsive processes occurring in mechanics, electronics, and physiology. Furthermore, the study of the theory of impulsive boundary value problems was focused on linear systems [3, 4, 5].

The study of the theory of impulsive boundary value problems was initiated in Kharkiv by A.D. Myshkis in connection with the question posed by engineer B.V. Abramov concerning the influence of periodic shocks on engine stability. A.D. Myshkis suggested this problem as the topic of V. Milman's thesis [6]. The research of M.M. Krylov and M.M. Bogolyubov was continued in the works of A.D. Mishkis and A.M. Samoilenko. The constructive theory of systems of ordinary differential equations with impulsive action developed rapidly following the publication the publication of monograph by A.M. Samoilenko and M.O. Perestyuk [2]. Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of impulsively perturbed boundary value problems for systems of ordinary differential equations in various critical and noncritical cases, as well as the construction of the Green's operator of the Cauchy problem and the Green's operator of a periodic boundary value problem with impulsive action were established in the works of Yu.O. Mitropolsky, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, S. Shvabik and O.A. Boichuk [1, 7, 2, 5, 10].

In the works of A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of Noether boundary value problems for systems of ordinary differential equations with non-degenerate impulsive action at fixed times were obtained [1, 7]. Systems of ordinary differential equations with impulsive action at non-fixed times, namely, with impulsive action on the hyperplane, are also investigated in the monograph by A.M. Samoilenko and M.O. Perestyuk [2].

We analysed the relationship between boundary value problems with impulsive perturbation at fixed times and boundary value problems with switching at fixed and non-fixed times [11]. We found the constructive conditions of solvability and the scheme for constructing solutions of a

nonlinear periodic boundary value problem with switchings at non-fixed times. Using the Adomian decomposition method, we obtained the solvability conditions and a new iterative technique for finding solutions of a weakly nonlinear periodic boundary value problem with switchings at non-fixed times is constructed. Furthermore, we obtained the constructive conditions for the convergence of the iterative scheme to the solution of the weakly nonlinear boundary value problem, as well as the switchings points. The resulting iterative scheme was applied to obtain approximations to a periodic solution of the equation with switchings at non-fixed times, which models a non-isothermal chemical reaction [11].

References

- [1] *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-value Problems; 2-th edition. Berlin; Boston: De Gruyter. 2016. 298 p.
- [2] *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. World Scientific Series on Nonlinear Science, Ser.A, Vol. 14. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1995. x + 462 p.
- [3] *Fitzhugh R.* Impulses and physiological states in models of nerve membrane. Biophysical Journal. 1961. 1. P. 445–466.
- [4] *Pignani T. J., Whyburn W. M.* Differential Systems with Interface and General Boundary Conditions. F. Elisha Mitchell Sci. Soc. 1956. 72. P. 1–14.
- [5] *Stallard F.W.* Differential systems with interface conditions. Oak Ridge National Laboratory Report, No. 1876.
- [6] *Myshkis A.D.* On the relation between systems with switching and hybrid systems. Funct. Differ. Equ. 2004. 11. P. 467–473.
- [7] *Samoilenko A.M., Boichuk A.A.* Linear Noether boundary-value problems for differential systems with impulsive effect. Ukr. Mat. Zh. 1992. 44, No 4. P. 564–568.
- [8] *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. World Scientific Series on Nonlinear Science, Ser.A. 14. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1995. x + 462 p.
- [9] *Sčhwabik S.* Differential Equations with Interface Conditions. Časopis Pro pestovani matematiky. 1980. roč. 105. P. 391–410.
- [10] *Akhmetov M.U., Perestyuk N.A.* Differential properties of solutions and integral surfaces for nonlinear pulse systems. Differ. Equ. 1992. 28, No. 4. P. 445–453.
- [11] *Benner, P., Chuiko, S., Nesmelova O.V.* Autonomous periodic boundary-value problems with switching at nonfixed times. J. Math. Sci. (US). 2025. 295, Is. 6. P. 673–698.

Normally solvable boundary value problems with impulsive action

Peter BENNER, Sergii CHUIKO, Viktor CHUIKO

Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany;

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

benner@mpi-magdeburg.mpg.de, chujko-slav@ukr.net, vitya.chuyko@gmail.com

We obtained solvability conditions for normally solvable [1] boundary value problems for a system of ordinary differential equations with a degenerate impulsive action at fixed times [2, 3], under the assumption of an infinite number of impulsive perturbations. We established differences between the structure of solutions of a system of ordinary differential equations with a nondegenerate impulsive action at fixed times [2] (with an infinite number of impulsive perturbations), and the solutions of a system with a finite number of degenerate impulsive perturbations [3].

The conditions for the boundedness of solutions of systems of ordinary differential equations with degenerate impulsive action at fixed times generalize the results of [1, 2, 3] to the case of a finite number of degenerate impulsive perturbations [3]. These results can also be extended to systems of ordinary differential equations with singular perturbations [4], as well as to systems of ordinary differential equations with impulsive action of a more general form [5, 6], including systems of ordinary differential equations with impulsive action at non-fixed times [2, 7, 8] and functional-differential equations with impulsive action with delay [1, 9, 10, 11, 12]. In the case of non-solvability, the boundary value problem with degenerate impulsive action, can be regularized in a similar manner to that described in [13, 14].

Solvability conditions obtained for normally solvable [1] boundary value problems for a system of ordinary differential equations with a degenerate impulse action at fixed moments of time, under the assumption of an infinite number of impulse perturbations were published in the article [15].

Co-author Viktor Chuiko was partially supported by the Grant of the Targeted Training Department of Taras Shevchenko National University of Kyiv at the National Academy of Sciences of Ukraine for 2025 — 2026.

References

- [1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. 2nd ed. Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. 298 p.
- [2] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A. Vol. 14. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1995. x + 462 p.

- [3] Boichuk A.A., Chuiko E.V., Chuiko S.M. Generalized Green operator of a boundary-value problem with degenerate pulse influence. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1996. Vol. 48, No. 5. P. 652–660.
- [4] Kiguradze I.T., Shekhter B.L. Singular boundary-value problems for ordinary second-order differential equations. *Journal of Soviet Mathematics*. 1988. Vol. 43, No. 2. P. 2340–2417.
- [5] Schwabik S. Differential equations with interface conditions. *Časopis pro pěstování matematiky*. 1980. Vol. 105. P. 391–410.
- [6] Chuiko S.M. A generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action. *Differential Equations*. 2001. Vol. 37, No. 8. P. 1189–1193.
- [7] Perestyuk N.A., Slyusarchuk V.E. Periodic solutions of nonlinear differential equations with pulse influence in a Banach space. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1995. Vol. 47, No. 3. P. 430–442.
- [8] Chuiko S.M., Nesmelova O.V., Shevtsova K.S. Periodic problem for a Lienard-type equation with switching at non-fixed time moments. *Ukrainian Mathematical Bulletin*. 2025. Vol. 22, No. 2. P. 176–193.
- [9] Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations. Applied Mathematical Sciences. Vol. 3. New York: Springer-Verlag, 1977. x + 365 p.
- [10] Chuiko S.M., Chuiko A.S. On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case. *Nonlinear Oscillations*. 2012. Vol. 14, No. 3. P. 445–460.
- [11] Domoshnitsky A., Drakhlin M. Nonoscillation of first order impulse differential equations with delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1997. Vol. 206, No. 1. P. 254–269.
- [12] Chuiko S.M., Sysoev D.V. Periodic Matrix Boundary-Value Problems with Concentrated Delay. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 243, No. 2. P. 326–337.
- [13] Krein S.G. Linear Differential Equations in Banach Space. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 29. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1971. v + 390 p.
- [14] Chuiko S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action. *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. Vol. 197, No. 1. P. 138–150.
- [15] Benner P., Chuiko S.M., Chuiko V.O. Normally solvable boundary-value problems with degenerate impulsive action. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2026. Vol. 78, No. 7–8. P. 513–527.

Averaging in a generalized multifrequency system with linearly transformed arguments

Yaroslav BIHUN, Andrii DROBOT

Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

y.bihun@chnu.edu.ua, a.drobot@chnu.edu.ua

Multifrequency systems of equations are studied in the monograph [1]

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= X(\tau, a, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y(\tau, a, \varphi).\end{aligned}\tag{1}$$

Consider a system of differential equations with linearly transformed arguments

$$\begin{aligned}\frac{da_\nu}{dt} &= \varepsilon^{\varkappa_\nu} X_\nu(a_\Lambda, \varphi_\Theta), \\ \frac{d\varphi_\nu}{dt} &= \omega_\nu(\tau_\nu) + \varepsilon^{\varkappa_\nu} Y_\nu(a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad \tau_\nu = \varepsilon^{\varkappa_\nu} t,\end{aligned}\tag{2}$$

where $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \dots \geq \varkappa_n > 0$, small parameter $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \geq 0$, $a_\Lambda(t) = (a(\lambda_1 t), \dots, a(\lambda_p t))$, $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq 1$; $\varphi_\Theta(t) = (\varphi(\theta_1 t), \dots, \varphi(\theta_q t))$, $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q \leq 1$.

For $\varkappa_\nu = 1$, $\lambda_i = 1$ and $\theta_j = 1$ we obtain system (1). The mathematical model of coupled oscillators with different asymptotics of interaction

$$\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} + \omega_\nu^2(\tau_\nu) x_\nu = \varepsilon^{\varkappa_\nu} f\left(x_\Lambda, \frac{dx_\Lambda}{dt}\right)\tag{3}$$

is reduced to the form of system (2) by the change of variables

$$x_\nu = a_\nu \cos \varphi_\nu, \quad \frac{dx_\nu}{dt} = -a_\nu \omega_\nu \sin \varphi_\nu.$$

For the system of equations (2), we construct a system of equations averaged by the components of the fast variables $\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_q}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{a}_\nu}{d\tau_\nu} &= X_{\nu,0}(\bar{a}_\Lambda), \\ \frac{d\bar{\varphi}_\nu}{d\tau_\nu} &= \frac{\omega_\nu(\tau_\nu)}{\varepsilon^{\varkappa_\nu}} + Y_{\nu,0}(\bar{a}_\Lambda).\end{aligned}\tag{4}$$

The method of averaging by phase variables is used to study a multifrequency system with linearly transformed arguments [2, 3, 4]. On the contrary to multifrequency systems of a standard form, we consider the systems of equations, in which the speed of amplitude and phase variables can depend on a small parameter to various degrees.

The existence and uniqueness of the solution of the system of equations (2) with the initial condition at the point $t = a$ is proved.

The resonance condition in system (2) is the equality

$$\sum_{\nu=1}^n \theta_{\nu}(k_{\nu}, \omega(\tau_{\nu})) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^n \|k_{\nu}\| \neq 0. \quad (5)$$

For a sufficiently small $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$, sufficient smoothness of the right-hand sides of the system of equations (2) and the fulfilment of the condition for the system to leave a small neighbourhood of the resonance, an estimate of the error of the averaging method is obtained:

$$\|a_{\nu}(\tau_{\nu}, \varepsilon) - \bar{a}_{\nu}(\tau_{\nu})\| + \|\varphi_{\nu}(\tau_{\nu}, \varepsilon) - \bar{\varphi}_{\nu}(\tau_{\nu}, \varepsilon)\| \leq c_{\nu} \varepsilon^{\alpha + \kappa_{\nu} - 1}, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (6)$$

where $\alpha = 1/(nq)$, $c_{\nu} > 0$ and does not depend on ε .

Estimate (6) holds for each ν on the interval $[0, L\varepsilon^{\kappa_{\nu} - 1}]$, $\nu = \overline{1, n}$, and for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$.

The results are illustrated for a system of coupled oscillators of Duffing type.

References

- [1] Samoilenko A., Petryshyn R. Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2004. 317 p.
- [2] Bihun Ya., Petryshyn R., Skutar I. Averaging in a generalized multifrequency system with a delay. Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems. Springer Nature Switzerland AG, 2025. P. 281–294.
- [3] Bihun Ya., Ukrainets O., Skutar I. Averaging in mathematical models under the influence of multi-frequency disturbances with delay. International Scientific Technical Journal. Problems of Control and Informatics. 2023. Vol. 69, No. 1. P. 34–42.
- [4] Bihun Ya., Skutar I. Averaging in multifrequency systems with multi-point conditions and a delay. Acta et Commentationes. Exact and Natural Sciences. 2023. Nr. 2(16). P. 13–24.

Asymptotic representations of rapidly varying solutions to differential equations of the fourth order with nonlinearities, close to regularly varying

Maria BILOZEROVA¹, Natalia SHARAI²

¹ *Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine*

² *Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine*

¹ marbel@ukr.net, ² olachepok@ukr.net

The differential equation

$$y^{(4)} = \alpha_0 p(t) \prod_{i=0}^3 \varphi_i(y^{(i)}) \exp \left(\gamma \left| \sum_{i=0}^3 \ln |y^{(i)}| \right|^\mu \right), \quad (1)$$

where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mu \in]0; 1[$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$), $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($i = 0, 1, 2, 3$) are the continuous functions, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} is either the interval $[y_i^0, Y_i[$ or the interval $]Y_i, y_i^0]$, is considered.

We suppose also, that every $\varphi_i(z)$ is regularly varying as $z \rightarrow Y_i$ ($z \in \Delta_{Y_i}$) of index σ_i and $\sum_{i=0}^3 \sigma_i \neq 1$.

Definition 1. We call defined on $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ solution y to the equation (1) the $P_\omega(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \lambda_0)$ -solution ($-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$) if next conditions take place

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'''(t))^2}{y^{(4)}(t) y''(t)} = \lambda_0.$$

The asymptotic representations for $P_\omega(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, 1)$ -solutions to equation (1) and their derivatives of the first and of the second order are found. Necessary and sufficient conditions of existence of such solutions are also established using [2]. All $P_\omega(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, 1)$ -solutions to equation (1) are rapidly varying functions [1], that essentially changes ways of establishing.

References

- [1] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 512 p.
- [2] Evtukhov V., Samoilenko A. Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. Ukrainian Math. J. 2010. 62. P. 56–86.

¹If $\omega > 0$ we will take $a > 0$.

²If $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) we take $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) correspondingly.

Initial-boundary value problems for elliptic-parabolic equations in unbounded domains with conditions at infinity

Mykola BOKALO

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine

mm.bokalo@gmail.com

Let n be a natural number, and $\mathbb{R}^n$ be the linear space of ordered collections $x = (x_1, \dots, x_n)$ of real numbers with a norm $|x| := (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$. Suppose that Ω is an unbounded domain in $\mathbb{R}^n$, and $\partial\Omega$ (boundary of the domain Ω) is a piecewise-smooth surface. Let $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ be a outward-pointing normal unit vector on $\partial\Omega$ at a point $x \in \partial\Omega$. Suppose $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, where Γ_0 is a closure of an open set on $\partial\Omega$ (in particular, $\Gamma_0 = \emptyset$ or $\Gamma_0 = \partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Put $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$, where $T > 0$ is some number. Denote by $Bd(\Omega)$ the set of all bounded subdomains of Ω .

Suppose that

(B) $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is a function such, that $b(x) \geq 0$ for every $x \in \Omega$, and there exists an open set $\Omega_0 \subset \Omega$ such that $b(x) > 0$ for $x \in \Omega_0$, and $b(x) = 0$ for $x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$; moreover b is continuous on $\overline{\Omega_0} \cap \Omega$, and $\sup_{x \in \Omega'} b(x) < \infty$ for every $\Omega' \in Bd(\Omega)$.

We consider the problem: to find the function $u(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q}$, that satisfies (in some sense) the equation

$$(b(x)u)_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

the boundary conditions

$$u|_{\Sigma_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}|_{\Sigma_1} = 0, \quad (2)$$

and the initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad (3)$$

where $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n}$, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ are given real-valued functions, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu_a} := \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u, \nabla u) \nu_i(x)$ is an exterior conormal derivative of u in point $(x, t) \in \Sigma_1$.

Assume that the spatial part of the differential expression in the left-hand side of (1) is elliptic, i.e., equation (1) is parabolic on $\Omega_0 \times (0, T)$ and is elliptic on $(\Omega \setminus \Omega_0) \times (0, T)$. Therefore it is called the *elliptic-parabolic equation*.

An example of the equations of type (1) considered here is

$$(b(x)u)_t - \sum_{i,j=1}^k (\widehat{a}_{ij}(x, t) u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=k+1}^n (\widehat{a}_i(x, t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i})_{x_i} + \widehat{a}_0(x, t) u = f(x, t), \quad (4)$$

$(x, t) \in Q$, where $k \in \{1, \dots, n-1\}$, and Ω such that $\Omega \cap \{x = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1|^2 + \dots + |x_k|^2 < \tau^2\}$ is bounded for each $\tau > 0$, for example, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, Ω_1 is an unbounded domain in space $\{(x_1, \dots, x_k) \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$, and Ω_2 is a bounded domain in space $\{(x_{k+1}, \dots, x_n) \mid x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Also we suppose that 1) $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji} \in L_\infty(Q)$, $i, j = \overline{1, k}$, are functions such that for a.e. $(x, t) \in Q$ a quadratic form $\sum_{i,j=1}^k \hat{a}_{ij}(x, t) \eta_i \eta_j$, $(\eta_1, \dots, \eta_k) \in \mathbb{R}^k$, is positive, 2) for every $i \in \{0, k+1, \dots, n\}$ a function $\hat{a}_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable, and $0 < \operatorname{ess\,inf}_{\Omega' \times (0, T)} \hat{a}_i \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega' \times (0, T)} \hat{a}_i < +\infty$ for all $\Omega' \in Bd(\Omega)$, 3) for every $i \in \{k+1, \dots, n\}$ a function $p_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable, and $1 < \operatorname{ess\,inf}_{\Omega'} p_i \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega'} p_i < +\infty$ for all $\Omega' \in Bd(\Omega)$ (the functions $p_i, i = \overline{k+1, n}$, are called *exponents of the nonlinearity*).

Boundary value problems for elliptic equations and initial-boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains (with respect to the spatial variables) were studied by many authors. Well known, to guarantee the uniqueness of the solution of these problems for linear equations (in particular, these problems can be described by (1), (2), (3) with either $b(x) = 0$ or $b(x) = 1$ for every $x \in \Omega$) we need some restrictions on solution's behavior as $|x| \rightarrow +\infty$, for example, solution's growth restriction as $|x| \rightarrow +\infty$, or belonging of solution to some functional spaces. For example, let $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| > R\}$, where $R > 0$ is arbitrary fix number, $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Then the external boundary value problem for Laplace equation

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad u(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } |x| \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

has a unique classical solution and it given formula

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial\Omega} \frac{|x|^2 - R^2}{|x - y|^3} \varphi(y) dS_y, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Note that restriction $u(x) \rightarrow 0$ as $|x| \rightarrow +\infty$ is an essential condition for the solution uniqueness of the problem. Indeed, it is easy to verify that the classical solutions of problem (5) for $\varphi = 0$ are the following functions

$$u(x) = C(1 - R/|x|), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ is arbitrary constant.}$$

For linear parabolic equations, the situation is similar. It was shown that the classical solution $u(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$, of the Cauchy problem for heat equation

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T], \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{on } \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

is unique in the class of functions such that

$$|u(x, t)| \leq C e^{a|x|^2} \quad \text{for all } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T], \quad (8)$$

where constants a and C depend on u , while restriction (8) is an essential condition for the solution uniqueness of the problem. More precisely, it was proved that problem (7) with $u_0 \equiv 0$ has a nontrivial classical solutions with growth $C e^{a|x|^2 + \varepsilon}$ as $|x| \rightarrow +\infty$ for $\varepsilon > 0$. It was shown

that classical solution of the problem (7), (8) exists if u_0 satisfies the condition: $|u_0(x)| \leq C e^{b|x|^2}$ for all $x \in \mathbb{R}^n$, where b, C are some constants. Note that restrictions on solution's behavior as $|x| \rightarrow +\infty$, can be interpreted as an analog of the boundary condition at infinity.

The existence and uniqueness of weak solutions of the studied problems are established under additional conditions on behavior of solutions and the growth of input data at infinity. A priori estimates of weak solutions of the studied problems are obtained. The study uses an analogue of the Saint-Venant principle known from mechanics and the monotonicity method.

Simulation-based evaluation of a fuzzy logic traffic light controller using the sumo microscopic traffic simulator

Anastasia BRYNZAN, Halyna PASICHNYK

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

`h.pasichnyk@chnu.edu.ua`

Urban traffic congestion remains one of the most persistent problems of modern city infrastructure. Growing numbers of vehicles at signalized intersections lead to longer waiting times, higher fuel consumption, and increased emissions. The situation becomes particularly critical when emergency vehicles — ambulances, fire trucks, or police cars — need to cross an intersection without delay. Classical fixed-time traffic light systems operate according to predefined cycles and do not respond to the actual traffic situation, which makes them poorly suited for such dynamic conditions. Intelligent control strategies, including fuzzy logic, offer a way to make traffic light behavior adaptive to real-time conditions, since traffic flow is inherently uncertain and difficult to describe with strict analytical rules.

The goal of this work is to design an adaptive fuzzy-logic-based traffic light controller and to evaluate its performance against a standard fixed-time controller within a realistic microscopic traffic simulation. Particular attention is given to the simulation environment itself, since a reliable evaluation of any control strategy depends heavily on the quality and configurability of the simulator used for testing.

The simulation part of the project is built on SUMO (Simulation of Urban MObility), an open-source, highly configurable microscopic traffic simulation package widely used in traffic engineering research. SUMO makes it possible to construct a custom road network, define lanes and intersections, generate vehicle routes and traffic demand, and simulate the movement of individual vehicles with realistic car-following and lane-changing behavior. For this project, a network with a signalized intersection was built, including separate lanes for each direction and a configurable traffic light program. Vehicle flows, including a subset of vehicles marked as emergency vehicles, were generated and injected into the simulation according to a route file, allowing repeatable and controllable experiments.

A key advantage of SUMO is its TraCI (Traffic Control Interface) API, which allows an external program — in this case, a Python script — to communicate with the running simulation step by step. Through TraCI, the program can query the simulation state in real time: the identifiers of vehicles present on each lane, their speed and accumulated waiting time, whether a given lane currently has a green or red signal, and whether any vehicle on a lane is an emergency vehicle. TraCI also allows the program to actively intervene in the simulation by switching the traffic light phase at the chosen moment. This tight, real-time coupling between the simulator and the control logic is what makes SUMO suitable for testing adaptive algorithms such as fuzzy controllers, as opposed to static traffic modeling tools.

Using this SUMO–TraCI setup, two simulation modes were implemented. The first is a baseline mode in which the traffic light runs its default fixed-time program while the Python script only collects statistics, without interfering with the signal control. The second is a fuzzy-controlled mode, in which the script actively monitors the intersection at every simulation step and decides whether the current phase should continue or switch.

The fuzzy controller itself takes several input variables describing the current state of the intersection: the number of vehicles waiting on the red-light lanes, the number of vehicles on the green-light lanes, the maximum waiting time on the red-light lanes, the number of emergency vehicles on the current green lane, the number of emergency vehicles on the opposite red lane, and the waiting time of emergency vehicles on both lane groups. Vehicle counts are represented by the fuzzy sets "too small," "small," "much," and "too much"; waiting time is represented by "negligible," "okay," "much," and "too much"; and the presence of emergency vehicles is represented by "absent," "present," and "much." The output variable of the controller has two linguistic states: "okay," meaning the current phase should be preserved, and "need switching," meaning the traffic light should change phase.

The rule base encodes intuitive traffic-management logic. If an emergency vehicle is present on the current green lane and no emergency vehicle is waiting on the red lane, the system keeps the current phase to let the emergency vehicle pass. Conversely, if an emergency vehicle is waiting on the red lane while the green lane has no emergency vehicle, the system recommends switching. Ordinary traffic load is also taken into account: a heavily loaded green lane combined with a lightly loaded red lane favors keeping the current phase, while the opposite situation favors switching. In addition, rules involving waiting time increase the likelihood of switching as the maximum waiting time on the red lane grows toward "much" or "too much."

At every simulation step, the Python program retrieves the relevant data from SUMO through TraCI: which lanes currently have green and red signals, the vehicles present on each group of lanes, their accumulated waiting times, and the emergency vehicles among them. These values are fed into the fuzzy inference engine, which computes a single output signal. When this signal exceeds a defined threshold, the program issues a phase-switch command back to SUMO through TraCI.

To compare the two control strategies, several performance indicators were collected during both simulation runs: the number of stopped and moving vehicles, the total accumulated waiting time of all vehicles, and separately the waiting time of emergency vehicles. Because both modes run on the same SUMO network and the same generated traffic demand, the resulting statistics provide a direct and fair comparison between fixed-time and fuzzy-based control. SUMO-GUI was additionally used to visually observe vehicle movement and phase changes during simulation, which helped verify that the controller behaves as intended and gave an intuitive, real-time illustration of how emergency vehicles are prioritized at the intersection.

The results obtained from the SUMO simulations show that the fuzzy logic controller adapts more effectively to changing traffic conditions than the fixed-time program, and it is able to reduce

the waiting time of emergency vehicles by giving them priority when needed. This confirms that combining fuzzy logic with a flexible microscopic traffic simulator such as SUMO provides a practical and extensible platform for experimenting with adaptive intersection control.

References

- [1] Mohit Jha, S. Shukla. Design Of Fuzzy Logic Traffic Controller For Isolated Intersections With Emergency Vehicle Priority System Using MATLAB Simulation. International Journal of Engineering Research and Applications. 2014. 4, № 6.

Scattering in a waveguide with star-shaped resonators

Khrystyna BUHRII

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine

`khrystyna.buhrii@lnu.edu.ua`

We study a one-dimensional scattering problem on quantum graphs (see e.g. [1, 2]) with a locally periodic structure. The quantum graph $\mathbb{G}_N$ consists of a metric graph $G_N = (E, V)$, which is the line with N identical compact resonators attached at the equidistant points $v_1, \dots, v_N$, the differential equation (negative second derivative) acting on the edges $e \in E$, and suitable matching conditions at the vertices $v \in V$. Scattering of a particle of energy k^2 is described by the solution $\psi = \{\psi_e\}_{e \in E}$ of the equations

$$\psi_e'' + k^2 \psi_e = 0, \quad e \in E,$$

which obeys the prescribed vertex conditions and has the asymptotics of an incident, reflected and transmitted wave on the two half-lines. In particular, at the points v_j , $j = 1, \dots, N$, we impose certain scale-invariant coupling conditions (see [3, 4]).

This study is a continuation of [4] in which the attached resonators are the single edges. Here, the resonator is a star graph, attached to the line either at a pendant or the central vertex. Our main goal is to investigate how the resonator structure affects the transmission probability. We reduce the problem to scattering on the line with energy-dependent matching conditions at the junction points v_j , which incorporate the structure of the resonators, and derive explicit formulas for the transmission probability. This allows us to establish its properties, such as symmetry and periodicity, and to locate the resonant frequencies. We further show that the parameters of the resonators (edge lengths, coupling constants, coefficients in boundary conditions) can be chosen so that the waveguide acts as a band-pass filter, with transmission close to one on a prescribed pass band and close to zero on a stop band.

References

- [1] Kuchment P. Quantum graphs: I. Some basic structures. *Waves in Random and Complex Media*. 2004. 14, No. 1. P. S107–S128.
- [2] Berkolaiko G., Kuchment P. *Introduction to quantum graphs*. American Mathematical Society. 2013. 186.
- [3] Manko S. S. On δ' -like potential scattering on star graphs. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2010. 43, No. 44. P. 445304.
- [4] Buhrii K., Golovaty Y., Hryniv R. Scattering in quantum graphs with scale-invariant vertex couplings: Resonances, gaps and (quasi-)periodic transmission. *arXiv*. 2026. arXiv:2606.14931.

The family QSE of quadratic differential systems possessing an invariant ellipse: Liouvillian integrability

Cristina BUJCA, Nicolae VULPE

Moldova State University, Institute of Mathematics and Computer Science „Vladimir Andrunachievici”, Chişinău, Republic of Moldova

cristina.bujac@math.md, nvulpe@gmail.com

We consider planar polynomial differential systems of the form

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

where $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$. In this work, we focus on the class of real quadratic differential systems possessing at least one invariant ellipse, denoted by QSE.

In [1], the family QSE was classified according to the configurations of invariant ellipses and invariant straight lines that these systems may possess. In [2], necessary and sufficient conditions in order to have at least one invariant ellipse for a system in QSE were established, and a global bifurcation diagram, expressed in terms of 36 affine-invariant polynomials $(\eta, \widetilde{M}, C_2, \theta, \widetilde{N}, N_7, H_2, H_9 - H_{12}, \mathcal{F}, \mathcal{T}_3, \widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_8, \widehat{\gamma}_1 - \widehat{\gamma}_9, \widehat{\mathcal{R}}_1 - \widehat{\mathcal{R}}_6)$ were constructed. The explicit forms of the above invariant polynomials are provided in [2], where beside the conditions of the existence of an invariant ellipse, there are also the conditions for distinguishing what kind of ellipse we have: real or complex, being limit cycle or not. The global topological classification of systems belonging to QSE was done in [3].

In the present paper, we continue the study of this class by addressing the problem of its Liouvillian integrability. A polynomial differential system is said to be *Liouvillian integrable* if it admits a Liouvillian first integral. By Singer's theorem [4], a planar polynomial differential system has a Liouvillian first integral if and only if it possesses a generalized Darboux integrating factor. Such an integrating factor is of the form $R(x, y) = e^{G/H} \prod_{i=1}^s f_i(x, y)^{\lambda_i}$, where $G, H \in \mathbb{C}(x, y)$ and $f_i \in \mathbb{C}[x, y]$ are irreducible invariant curves for the system and $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

The existence of a generalized Darboux integrating factor is closely related to the invariant algebraic curves and exponential factors of the system. An algebraic curve $f(x, y) = 0$ is invariant if $Pf_x + Qf_y = Kf$, where $K(x, y)$ is its cofactor. Similarly, an exponential factor $F = e^{G/H}$ satisfies $PF_x + QF_y = LF$, where L is the corresponding cofactor. If $f_i = 0$ are invariant algebraic curves with cofactors K_i and F_j are exponential factors with cofactors L_j , then a generalized Darboux integrating factor is obtained whenever

$$\sum_i \lambda_i K_i + \sum_j \mu_j L_j = -\operatorname{div}(P, Q),$$

where $\operatorname{div}(P, Q) = P_x + Q_y$ denotes the divergence of a system.

Based on the previously obtained configurations of invariant algebraic curves, we study the existence of generalized Darboux integrating factors for systems in the class QSE. Using

affine invariant polynomials, we obtain necessary and sufficient conditions for their existence and, consequently, for the Liouvillian integrability of these systems. Our main result is the following.

Theorem 1. *Let $S \in \mathbb{QSE}$ be a real quadratic differential system having finitely many singular points (finite and infinite). Then S admits a generalized Darboux integrating factor and hence is Liouvillian integrable if and only if either $\widehat{\beta}_2 \neq 0$ and $\theta = 0$, or $\widehat{\beta}_2 = 0$.*

This work was supported by a research project funded within the competition *Stimularea Excelenței în Cercetare 2025–2026* (project code: 25.80012.5007.83SE).

References

- [1] Mota M. C., Rezende A. C., Schlomiuk D., Vulpe N. Geometric analysis of quadratic differential systems with invariant ellipses. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. 2022. 59, No. 2A. P. 623–685.
- [2] Oliveira R. D. S., Rezende A. C., Schlomiuk D., Vulpe N. Characterization and bifurcation diagram of the family of quadratic differential systems with an invariant ellipse in terms of invariant polynomials. *Revista Matemática Complutense*. 2021. 35, No. 2. P. 361–413.
- [3] Artés J. C., Bujac C., Schlomiuk D., Vulpe N. Phase portraits of real quadratic differential systems possessing an invariant ellipse. Preprint. 2026. 28 p.
- [4] Singer M. F. Liouvillian first integrals of differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1992. 333, No. 2. P. 673–688.

A Fixed-Iteration Comparison of Two Fictitious-Play Methods

Iryna CHEBITKO, Tetiana REVINA

V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

iryna.chebitko@student.karazin.ua, t.revina@karazin.ua

Motivation and objective. A Nash equilibrium gives a fixed strategy profile, while fictitious play (FP) is a repeated learning rule. Each player forms an empirical strategy from the opponent's observed actions and chooses a best response. In simultaneous FP (SFP), both players respond to the same pre-update histories. In Brown's alternating FP (AFP), the row player updates first and the column player then responds to the updated row history [1, 2]. We compare these update orders over 5000 recorded profiles and examine sensitivity to the initial pure-action pair.

Game model and learning rules. A finite game has payoff matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. The mixed strategies $p \in \Delta_m$ and $q \in \Delta_n$ give the probabilities of the m row actions and n column actions. Their expected payoffs are $u_1(p, q) = p^\top Aq$ and $u_2(p, q) = p^\top Bq$. The best-response sets are

$$\text{BR}_1(q) = \arg \max_i (Aq)_i, \quad \text{BR}_2(p) = \arg \max_j (p^\top B)_j.$$

Here i and j index the row and column actions. Thus, $\text{BR}_1(q)$ is the set of row actions that maximise the row player's expected payoff against q , while $\text{BR}_2(p)$ is the analogous set of best column actions against p .

Let p_t and q_t be empirical action frequencies after t recorded observations, and let e_i and e_j denote the corresponding unit vectors. SFP computes both next actions from the same histories,

$$i_{t+1} \in \text{BR}_1(q_t), \quad j_{t+1} \in \text{BR}_2(p_t),$$

before updating either empirical strategy. The row-first AFP order is

$$i_{t+1} \in \text{BR}_1(q_t), \quad p_{t+1} = \frac{tp_t + e_{i_{t+1}}}{t+1}, \quad j_{t+1} \in \text{BR}_2(p_{t+1}), \quad q_{t+1} = \frac{tq_t + e_{j_{t+1}}}{t+1}.$$

To compare the methods from identical initial conditions, we record the same arbitrary pure-action pair as observation 1 in both histories. Beginning with observation 2, AFP follows the row-first alternating order above, whereas SFP computes both responses from the pre-update histories.

Experimental design. Matching Pennies and Rock–Paper–Scissors (RPS) used $A_{\text{MP}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ and $A_{\text{RPS}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, with $B = -A$. The coordination game used $A = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. We recorded

5000 empirical profiles for every pure initialization: four in each 2×2 game and nine in RPS. Ties were resolved by choosing the smallest action index. For an empirical profile (p, q) , we measured

$$\text{NashConv}(p, q) = [\max_i (Aq)_i - p^\top Aq] + [\max_j (p^\top B)_j - p^\top Bq].$$

This residual is the sum of the players’ largest unilateral payoff improvements and is zero at a Nash equilibrium. Final values refer to empirical profile 5000. For each run, we record the first profile with $\text{NashConv} \leq 10^{-2}$; the initial profile is numbered 1. In the zero-sum games, NashConv equals the upper-minus-lower value gap $\max_i (Aq)_i - \min_j (p^\top A)_j$.

Numerical findings. Medians and ranges in the table are calculated across all pure initial profiles. “Reached” counts starts with at least one $\text{NashConv} \leq 10^{-2}$ profile; later values may exceed the threshold.

Game	Method	Median NashConv	Final min–max	Reached 10^{-2}
Matching Pennies	SFP	0.0200	0.0200–0.0200	0/4
Matching Pennies	AFP	0.0004	0.0000–0.0004	4/4
RPS	SFP	0.0234	0.0188–0.0238	0/9
RPS	AFP	0.0044	0.0040–0.0052	9/9
Coordination	SFP	0.0004	0.0000–0.0008	4/4
Coordination	AFP	0.0002	0.0000–0.0008	4/4

Median first profiles were 200 (Matching Pennies AFP), 1041 (RPS AFP), 200 (coordination SFP), and 100.5 (coordination AFP: the median of 1, 1, 200, 399 is $(1 + 200)/2$); zero-sum SFP never reached the threshold. AFP also had the smaller median final NashConv in all three games. In RPS, empirical strategies moved towards the uniform equilibrium although pure actions kept switching; action cycling does not preclude convergence of empirical strategies. Coordination paths depended on the initial profile, with equilibrium starts having zero residual immediately and other starts approaching equilibrium.

Extensions and applications. Smooth FP uses regularised responses; stochastic FP uses perturbed responses [3]. Fictitious Self-Play transfers the empirical-mixture principle to extensive-form games [4]. These variants provide broader research context and were not implemented in this study.

Conclusion. Under the stated horizon, initialization, and tie-breaking rule, AFP produced a lower median final NashConv in all three games. The coordination results also showed sensitivity to the initial profile.

References

- [1] Brown G.W. Iterative Solution of Games by Fictitious Play // Activity Analysis. 1951. 374–376: <https://cowles.yale.edu/sites/default/files/2022-09/m13-all.pdf>
- [2] Berger U. Brown’s Original Fictitious Play. J. Econ. Theory. 2007. 135(1). 572–578: <https://econwpa.ub.uni-muenchen.de/econ-wp/game/papers/0503/0503008.pdf>
- [3] Hofbauer J., Sandholm W.H. On the Global Convergence of Stochastic Fictitious Play. Econometrica. 2002. 70(6). 2265–2294: <https://homepage.univie.ac.at/josef.hofbauer/02ec.pdf>
- [4] Heinrich J., Lanctot M., Silver D. Fictitious Self-Play in Extensive-Form Games. ICML. 2015. 805–813: <https://proceedings.mlr.press/v37/heinrich15.pdf>

Approximation schemes of differential-difference equations and their applications

Ihor CHEREVKO

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

`i.cherevko@chnu.edu.ua`

Delay differential systems are widely used to model various real-world phenomena in fields such as automatic control and regulation systems, as well as chemical, biological, technical, economic, and other processes, where the evolution depends on their history. Specifically, in the modeling of processes in semiconductor laser devices with optical feedback, delays arise due to the time required for the signal to travel from the laser to the mirror. In biological systems, evolution is related to long-term processes such as reproduction, development, and extinction, which do not occur instantaneously but involve a certain delay. Considering delays often leads to significant changes in the properties of the system [1]-[3].

An important task for differential-functional equations is to construct and substantiate finding approximate solutions, since there are currently no universal methods for finding their precise solutions. Of particular interest are studies that allow the use of methods of the theory of ordinary differential equations for the analysis of delay differential equations.

Schemes for approximating differential-difference equations by special schemes of ordinary differential equations are proposed in the works [4, 5]. This allowed a qualitative study of the behavior of solutions of equations with delay to be reduced to the analysis of solutions of ordinary dynamical systems. The accuracy of approximation of nonlinear differential-difference equations with delay is investigated in the case when the solution of the initial problem is differentiable or satisfies the Lipschitz condition.

Further study of approximation schemes for differential-difference equations in spaces of continuous functions on a finite interval is carried out in [6, 7]. Analysis of the accuracy of approximation of the delay vector element for various input functions and generalization of approximation schemes for systems of differential-difference equations of delay and neutral types are considered in [8, 9]. A scheme for approximation of the DDE with delay of increased accuracy is proposed in [10, 11].

The study of approximation of linear stationary systems with a delay allowed us to construct algorithms for approximate detection of nonasymptotic roots of quasi-polynomials. Using these algorithms, a method for modelling the stability of solutions of linear systems with a delay is developed, as well as constructive computational algorithms for constructing coefficient regions of stability of linear systems with many delays [12]-[14].

The proposed approximation schemes allowed us to construct methods for studying the stability of linear systems with many delays, which can be constructively implemented on a computer using Mathematica software or Python libraries. Computational experiments on special

test cases showed the high efficiency of the proposed algorithms for studying the stability of linear differential equations.

References

- [1] Schiesser W.E. Time Delay ODE/PDE Models. *Applications in Biomedical Science and Engineering*. Boca Raton : CRC Press, 2019. 250 p.
- [2] Fathalla A. Rihan. Delay Differential Equations and Applications to Biology. Singapore : Springer Verlag, 2021. 303 p.
- [3] Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S. Functional Differential Equations and Applications. Fdea-2019, Ariel, Israel, September 22-27, 2022. Vol. 379. 265 p.
- [4] Krasovskii N.N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. *J. Appl. Math. Mech.* 1964. Vol. 28, No 4. 876-885.
- [5] Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. New York : Academic Press, 1981. P. 155-197.
- [6] Cherevko I., Piddubna L. Approximations of differential difference equations and calculation of nonasymptotic roots of quasipolynomials. *Revue D'Analyse numerique et de theorie de l'approximations*. 1999. Vol. 28, No 1. 15-21.
- [7] Cherevko I.M., Piddubna L.A. On the approximate solutions of differential difference 121 equation. *Matematychni Studii*. 1998. Vol. 9, No 2. 187-192.
- [8] Matviy O.V., Cherevko I.M. About approximation of system with delay and them stability. *Nonlinear oscilations*. 2004. Vol. 7, No 2. 208-216.
- [9] Matviy O.V., Cherevko I.M. On the approximation of systems of differential-difference equations of neutral type by systems of ordinary differential equations. *Nonlinear oscilations*. 2007. Vol. 10, No 3. 329-335.
- [10] Cherevko I.M. Approximation of differential-difference equations and approximation of non-asymptotic roots of quasi-polynomials. Nonlinear differential equations and their applications. K.: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Ukraine. 1992. 74-84.
- [11] Krasnokutskyi O.S., Cherevko I.M. Approximation Schemes for Differential–Difference Equations and Their Numerical Simulation. *Bukovinian Math. Journal*. 2026. Vol. 14, No 1. 7–15.
- [12] Cherevko I., Klevchuk I., Pernay S. Building of stability regions of linear differential-difference equations. *Adv. Academy of Sciences of Ukraine*. 2012. No 7. 28-34.

- [13] Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability. *2021 11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021*, Deggendorf, Germany, 15-17 September 2021. 49-52.
- [14] Tuzyk I., Cherevko I. Algorithms for studying the stability of linear systems with many delay. *12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, 26-28 September 2022, Spisska Kapitula, Slovakia. 164-167.

Integrating factors of a cubic system with two parallel invariant lines and one invariant quartic

Dumitru COZMA

"Ion Creangă" State Pedagogical University, Chişinău, Republic of Moldova

cozma.dumitru@upsc.md

We consider the cubic differential system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(1 + cx + mx^2) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -x - gx^2 - dxy - by^2 - sx^3 - qx^2y - nxy^2 - ly^3 \equiv Q(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

where $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ are real and coprime polynomials in the variables x and y . The origin $O(0, 0)$ is a singular point of a center or a focus type for (1). In this paper we study the problem of distinguishing between a center and a focus for cubic system (1) using the irreducible invariant algebraic curves (algebraic solutions).

The cubic system (1) has two parallel invariant straight lines $l_1 = 0$ and $l_2 = 0$ real or complex conjugated ($l_2 = \overline{l_1}$). In [1] it was proved the following Theorem.

Theorem 1. *The cubic system (1) has two parallel invariant straight lines of the form $l_{1,2} \equiv 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x = 0$ if and only if $m(c^2 - 4m) \neq 0$.*

According to [2], the cubic system (1) can have invariant quartic curves of the form

$$\begin{aligned}\Phi &\equiv a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + \\ &+ a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0,\end{aligned}\tag{2}$$

where $(a_{40}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{04}) \neq 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i + j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

It is known [1] that a singular point $O(0, 0)$ is a center for system (1) if and only if the system has a holomorphic integrating factor of the form $\mu(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x, y)$, where μ_k are homogeneous polynomials of degree k in some neighborhood of $O(0, 0)$.

The function $\mu(x, y)$ is an integrating factor for system (1) if and only if

$$P(x, y) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + Q(x, y) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \equiv 0.\tag{3}$$

In this paper we give the conditions under which the cubic system (1) has an integrating factor of the Darboux form [2]

$$\mu(x, y) = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi^{\alpha_3},\tag{4}$$

where $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ are parallel invariant straight lines, $\Phi = 0$ is an irreducible invariant quartic curve, and $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$.

Theorem 2. *The cubic system (1) has an integrating factor of the form (4), composed of two parallel invariant straight lines $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ and one invariant quartic $\Phi = 0$, if and only if one of the sets of conditions (i)–(iv) is satisfied:*

- (i) $c = 3(b+g)$, $n = (2d^2 - 9bg - 6g^2 - 12s)/9$, $l = (d(2b+g))/6$, $m = (18bg - d^2 + 12g^2 + 6s)/6$, $q = (dg)/2$, $36bs - d^2g + 24gs = 0$;
- (ii) $q = bd + dg - 3l$, $m = 3(2c - 3b - 3g)(b+g)/4$, $n = (2d^2 - 9b^2 + 6bc - 18bg - 3g^2 - 12s)/6$, $3(2c - 3b - 5g)[(3b+g)(18b+11g) - 4(3b+2g)(3b+c-g)] + 4d^2(3b-2c+4g) + 12s(6b-2c+7g) = 0$, $3d[2(2b+g)(3b+c-g) - (3b+g)(7b+4g) - 4s] + 2d^3 + 18l(c-2g) = 0$, $2d^2(2c-b-3g) + 3(3b+2g)[(2c-3b-5g)^2 - 4s] - 12dl = 0$;
- (iii) $q = bd + dg - 3l$, $m = 3(c-3b-3g)(b+g)$, $n = (d^2 - 9b^2 + 3bc - 18bg - 6g^2 - 6s)/3$, $d^2(2c-6b-7g) - 3g(c-b-2g)(2c-b-2g) + 6g(b+g)(5b+3g) + 3s(2c-g) = 0$, $9(3b+c+g)l + 3d(2b+g)(c-b-2g) - 3d(b+g)(10b+7g) + d(d^2-6s) = 0$, $d^2(c-2b-3g) + 3g(b+g)(8b+5g) + 3g(b+c)(b-c+2g) - 3dl + 3gs = 0$;
- (iv) $q = bd + dg - 3l$, $m = (c-3b-3g)(3b-2c+3g)$, $n = (d^2 - 3(3b-c+2g)(3b-2c+4g) - 6s)/3$, $3g(3c-8g-9b)(2c-4g-3b) - d^2g + 3s(6c-13g-12b) = 0$, $3d(6b^2+bg+2s) + 18d(c-2g-b)(c-2g-3b) - 9l(3c-5g-3b) - d^3 = 0$, $9dl - 3g(3c-7g-9b)(2c-4g-3b) - (3b+g)(d^2-6s) = 0$.

Indeed, identifying the coefficients of the monomials $x^i y^j$ in (3), we obtain a system of algebraic equations for the unknowns a_{ij} , α_1 , α_2 , α_3 , $i+j \in \{1, 2, 3, 4\}$ and the coefficients of system (1). The solutions of this system yields the sets of conditions (i)–(iv). In each of these cases we have an integrating factor of the form (4):

In Case (i): $l_{1,2} = 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x$, $\Phi_4 = x(6by + dx + 4gy)^3 dg^2 + 4(3b+2g)[6d^2 g^2 x^3 + 3dg(18bg + d^2 + 12g^2)x^2 y + 6g(18bg + d^2 + 12g^2)x^2 + 2d(2bd^2 + 3bg^2 + d^2 g + 2g^3)y^3 + 6(3b+2g)(2d^2 gxy^2 + 9dgxy + 12gx + 2d^2 y^2 + 6dy + 6)]$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = (-1)/3$, $\alpha_3 = -1$.

In Case (ii): $l_1 = 2 + 3(b+g)x$, $l_2 = 2 + (2c-3b-3g)x$, $\Phi_4 = 3s(a_{20} - g^2 - s)x^4 + 3a_{31}x^3 y + 3a_{22}x^2 y^2 + (9ba_{03} + 6ga_{03} - d^2 l)xy^3 + 3g(a_{20} - g^2)x^3 + 3(da_{20} + bdg - ds - 3gl)x^2 y + 2d(bd + dg - 3l)xy^2 + 3a_{03}y^3 + 3a_{20}x^2 + 3(bd + 2dg - 3l)xy + d^2 y^2 + 6gx + 3dy + 3$, where $a_{03} = (b^2 d + 2bdg + 6bl - 6cl + dg^2 + 12gl)/6$, $a_{31} = (bd + dg - 3l)a_{20} - bdg^2 - bds - dg^3 - dgs + 3g^2 l + 3ls$, $a_{22} = (a_{20}d^2 + b^2 d^2 + 2bd^2 g - 6bdl - 2d^2 s - 6dgl + 9l^2)/3$, $a_{20} = (27b^2 g - 18bcg + 8bd^2 + 54bg^2 + 6cg^2 + 4d^2 g - 24dl - 3g^3)/[6(2c-3g)]$ and $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$.

In Case (iii): $l_1 = 1 + 3(b+g)x$, $l_2 = 1 + (c-3b-3g)x$, $\Phi_4 = 3s(a_{20} - g^2 - s)x^4 + 3a_{31}x^3 y + 3a_{22}x^2 y^2 + (9ba_{03} + 6ga_{03} - d^2 l)xy^3 + 3g(a_{20} - g^2)x^3 + 3(da_{20} + bdg - ds - 3gl)x^2 y + 2d(bd + dg - 3l)xy^2 + 3a_{03}y^3 + 3a_{20}x^2 + 3(bd + 2dg - 3l)xy + d^2 y^2 + 6gx + 3dy + 3$, where $a_{03} = (2b^2 d + 4bdg + 3bl - 3cl + 2dg^2 + 6gl)/3$, $a_{31} = (bd + dg - 3l)a_{20} - bdg^2 - bds - dg^3 - dgs + 3g^2 l + 3ls$, $a_{22} = (a_{20}d^2 + b^2 d^2 + 2bd^2 g - 6bdl - 2d^2 s - 6dgl + 9l^2)/3$, $a_{20} = (54b^2 g - 18bcg + 4bd^2 + 108bg^2 - 6cg^2 + 2d^2 g - 12dl + 39g^3)/[3(2c-3g)]$ and $\alpha_1 = (-1)/3$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$.

In Case (iv): $l_1 = 1 + (3b-c+3g)x$, $l_2 = 1 + (2c-3b-3g)x$, $\Phi_4 = 3s(a_{20} - g^2 - s)x^4 + 3a_{31}x^3 y + 3a_{22}x^2 y^2 + (9ba_{03} + 6ga_{03} - d^2 l)xy^3 + 3g(a_{20} - g^2)x^3 + 3(da_{20} + bdg - ds - 3gl)x^2 y + 2d(bd + dg - 3l)xy^2 + 3a_{03}y^3 + 3a_{20}x^2 + 3(bd + 2dg - 3l)xy + d^2 y^2 + 6gx + 3dy + 3$, where $a_{03} = ((8(b+g)(b+g-c) + 2c^2)d + l(3b-3c+6g))/3$, $a_{31} = (bd + dg - 3l)a_{20} - bdg^2 - bds - dg^3 - dgs + 3g^2 l + 3ls$, $a_{22} = (a_{20}d^2 + b^2 d^2 + 2bd^2 g - 6bdl - 2d^2 s - 6dgl + 9l^2)/3$, $a_{20} = (54b^2 g - 54bcg + 4bd^2 + 108bg^2 + 12c^2 g - 42cg^2 + 2d^2 g - 12dl + 39g^3)/[3(2c-3g)]$ and $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = (-1)/3$, $\alpha_3 = -1$.

Acknowledgements. This work was supported by the National Agency for Research and Development of the Republic of Moldova under project number "25.80012.5007.76SE Qualitative and algebraic investigation of differential models".

References

- [1] Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics. Chişinău: Ştiinţa, 2013. 242 p.
- [2] Cozma D. Darboux integrability of a cubic differential system with two parallel invariant straight lines. Carpathian J. Math. 2022. 38. No. 1. P. 129–137.

Study of problems for pseudodifferential equations of variable order

Yaroslav DRIN¹, Iryna DRIN², Svitlana DRIN³, Mykhailo LUTSKIV⁴

¹*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine*

²*Chernivtsi Trade and Economic Institute of the State Trade University, Chernivtsi, Ukraine*

³*National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine*

⁴*Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ternopil, Ukraine*

y.drin@chnu.edu.ua, iryna.drin@gmail.com, svitlana.drin@ukma.edu.ua

Fractional partial differential equations of variable order (FPDEVOs) are used to model a wide range of phenomena in the fields of science, electric circuits, engineering and mechanical systems. In this paper, using the Euler-Fourier method, we study the solvability of the classical and nonclassical boundary problems for FPDEVO using the two-dimensional Chebyshev wavelets functions for the first time.

In works [1, 2, 3], we provided the first proof and a formula for solving the nonclassical boundary value problem for the heat conduction equation of constant order α , and studied numerical and analytical solutions in a special space in the Caputo sense [4, 5, 6]. Parabolic pseudodifferential equations with pseudodifferential operators with non-smooth symbols were first introduced by S.D. Eidel'man and Ya.M. Drin' in [7, 8]. In [9], the Cauchy problem for a parabolic pseudodifferential equation with a deviated argument is studied. In [10], the first boundary value problem for the heat equation with a deviated argument was solved for the first time.

In this paper we study the solvability of the mixed problem for equation (1) [11]

$$\frac{\partial^{\alpha(t)}}{\partial t} v(t, x) = a_1(t)v(t, x) + a_2(t)\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + a^2\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$t > 0, x \in \mathbb{R}$, where $\frac{\partial^{\alpha(t)}}{\partial t} v(t, x)$ is the fractional derivative

$$\frac{\partial^{\alpha(t)}}{\partial t} v(t, x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_0^t (t - s)^{-\alpha(t)} \frac{\partial v(s, x)}{\partial s} ds,$$

where $\alpha(t) \in (0, 1)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $t > 0$ are given functions, a^2 – constant, $v(t, x)$, $w(x)$ are unknown functions and $v(0, x) = \mu w(x)$, $v(t, 0) = v(t, l) = 0$, or $v(t, 0) = 0$, $\frac{\partial v(t, l)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} = 0$, $v(t, l) = 0$, $l > 0$.

References

- [1] Drin I., Drin S., Drin Y., Lutskev M. Non-classical boundary value problem for the heat conduction equation. XXXIX International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU-2024). Brno, Czech Republic. 2024. P. 52.

- [2] Drin I., Drin S., Drin Y., Lutsiv M. Study of numerical and analytical solutions of a generalized boundary value problem for the heat conduction equation. XXXIX International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU-2024). Brno, Czech Republic. 2024. P. 53–54.
- [3] Drin I., Drin S., Drin Y., Lutsiv M. Analysis of non-classical heat conduction models. The 13th International Conference on Electronics, Communications and Computing (IC ECCO-2024). Chisinau, Republic of Moldova. 2024. P. 147–148.
- [4] Luchko Y., Gorenflo R. The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivative. Preprint Series A08-98. Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin. Berlin. 1998.
- [5] Podlubny I. Fractional differential equations. Academic Press. San Diego. 1999.
- [6] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent–II. Geophysical Journal International. 1967. 13, No. 5. P. 529–539.
- [7] Eidel'man S. D., Drin' Ya. M. Necessary and sufficient conditions for the stabilization of solutions of the Cauchy problem for parabolic pseudodifferential equations. Approximate Methods of Mathematical Analysis. Kiev Gos. Pedagogich. Inst. 1974. P. 60–69.
- [8] Drin' Ya. M. Cauchy problem for quasilinear systems of parabolic pseudodifferential equations with deviating argument. Proceedings of the All-Ukrainian Scientific Conference “Differential Equations and Their Application in Applied Mathematics”. Chernivtsi. 2012. P. 70.
- [9] Drin Ya. M., Drin I. I., Drin S. S., Kotsur M. P. The Cauchy problem for one class of parabolic pseudodifferential equation with deviation of the argument. Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications (JODEA). 2025. 33, No. 1. P. 208–220.
- [10] Drin Ya. M., Drin I. I., Drin S. S. The analytical view of solution of the first boundary value problem for the nonlinear equation of heat conduction with deviation of the argument. Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications (JODEA). 2023. 31, No. 2. P. 115–124.
- [11] Drin Ya. M., Drin I. I., Drin S. S. Mixed problem for partial differential equation of large time variable order. Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications. 2026. 34, No. 1. P. 57–67.

Characters and IRSs on branch groups and embeddings into the hyperfinite II_1 factor

Artem DUDKO, Rostyslav GRIGORCHUK

IMPAN, Warsaw, Poland, Texas A&M University, College Station, USA

adudko@impan.pl, grigorch@tamu.edu

Branch and weakly branch groups were introduced in [1,2,3] and are objects of intensive studies during the last few decades. Totally non-free actions and invariant random subgroup (IRS) were introduced by A.Vershik and also attracted a lot of attention. The ideas of Vershik were further developed in the papers [6,7] and in the paper of the authors [8] where the stronger conditions in the form of absolutely non-free and perfectly nonfree actions were introduced. Moreover in [8] the diagonal actions were used to construct for every countable branch group infinitely many different ergodic perfectly non-free actions, infinitely many indecomposable characters and associated with them II_1 -factor representations, and infinitely many continuous ergodic invariant random subgroups.

Study of unitary representations up to unitary equivalence, weak equivalence or quasi-equivalence is a classical subject of mathematics going back to the classical works of von Neumann and Murray and I.M. Gelfand. Associated with representations C^* -algebras and von Neumann algebras are central objects of study in mathematics. This involves classification theory and applications.

Using the construction from [9] of invariant random subgroups on weakly branch groups acting on regular rooted trees we produce uncountably many indecomposable characters on these groups. We study three types of characters paying attention to their similarities and differences. The obtained results are used to show that each countable amenable weakly branch group has uncountably many pairwise non quasi-equivalent embeddings into Murray-von Neumann hyperfinite factor $\mathcal{R}$. For the canonical character associated with a self-similar group and studied as a self-similar trace we provide a number of examples when it is explicitly computed. The obtained results are the following:

Theorem 1. *Every countable weakly branch group admits a continuum of pairwise distinct indecomposable characters.*

Theorem 2. *Every countable weakly branch group admits a continuum of pairwise nonisomorphic ergodic totally-nonfree (in fact, perfectly nonfree) actions on a Cantor space.*

Theorem 3. *Let G be a countable amenable weakly branch group and $\mathcal{R}$ a Murray-von Neumann hyperfinite factor. There is a family $\{\theta_i, i \in I, |I| = 2^{\aleph}\}$ of embeddings $\theta_i : G \rightarrow U(\mathcal{R})$ into a unitary group $U(\mathcal{R})$ of $\mathcal{R}$ belonging to different orbits of the action of automorphism group $\text{Aut}(\mathcal{R})$.*

References

- [1] R. Grigorchuk, On extremal groups and branch groups, Abstracts of the International Algebraic Conference in Memory of A. G. Kurosh, 1998.
- [2] R. Grigorchuk, Just infinite branch groups. In New horizons in pro- p groups, volume 184 of *Progr. Math.*, pages 121–179. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000. [24]
- [3] R. Grigorchuk, Branch groups. *Math. Notes* 67 (2000), no. 5-6, 718–723.
- [4] L. Bowen, R. Grigorchuk, R. Kravchenko, Invariant random subgroups of the lamplighter group, *Israel Journal of Math.*, 207 (2015), no. 2, 763–782. 119.
- [5] L. Bowen, R. Grigorchuk, R. Kravchenko, Characteristic random subgroups of geometric groups and free abelian groups of infinite rank, *Trans. Amer. Math. Soc.* 369 (2017), no. 2, 755–781.
- [6] A. Dudko, R. Grigorchuk, On diagonal actions of branch groups and corresponding characters, *J. Funct. Anal.* 274 (2018), no. 11, 3033–3055.
- [7] F. Bencs, L.M. Tóth, Invariant random subgroups of groups acting on rooted trees, *Trans. of AMS*, 374 (2021), no. 10, pp. 7011–7040.

Green-Samoilenko function in the shadowing theory

Vasile GLAVAN¹, Valeriu GUȚU²

¹*"V. Andrunachievici" Institute of Mathematics and Computer Science,*

²*Department of Mathematics,*

Moldova State University, Chișinău, Republic of Moldova

vasile.glavan.p@gmail.com, vgutu@yahoo.com

We are concerned with linear non-autonomous dynamical systems, defined on real vector bundles with compact base. For these systems we generalize the notion of pseudo-orbit tracing property (POTP) or, in other words, the Shadowing Property, intensively developed during the last decades for autonomous dynamical systems.

For the first time, the Shadowing Property has been defined independently by D. V. Anosov and R. Bowen [1]. It is an inherent consequence of the uniform hyperbolicity, as e.g. the Anosov flows, or so called "axiom-A" diffeomorphisms.

It is well known that for a linear autonomous system in a finite dimensional space the Shadowing Property is equivalent to hyperbolicity of the linear operator (see, e.g. [2]). As for linear operators in general Banach spaces, hyperbolicity implies the Shadowing Property, but it is not necessary for the latter.

The Green-Samoilenko function is a useful tool in the uniform hyperbolic theory (e.g. in the Grobman-Hartman Theorem on the structural stability of a hyperbolic linear operator under small non-linear perturbations).

This function was developed by A. M. Samoilenko in the problem of existence of invariant tori, and by I. U. Bronstein and A. Ya. Kopanskii [3] in the theory of (weak) regularity of linear extensions of dynamical systems. Further development with applications of Green-Samoilenko functions was elaborated by A. A. Boichuk [4], H. M. Kulyk and V. L. Kulyk [5], and by M. O. Perestyuk and V. Yu. Slyusarchuk [6], to mention just a few.

Our purpose is to generalize the results, known in the Shadowing theory of diffeomorphisms and flows, to non-autonomous dynamical systems. For this we adjust the definition of shadowing and develop some tools, including Green-Samoilenko function, which are sufficient for a non-autonomous dynamical system to possess the Shadowing property.

Acknowledgments. This work was supported by the Institutional Research Program 011303 "SATGED" Moldova State University.

References

- [1] R. Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. 470, Springer, Berlin, 1975.

- [2] J. Ombach. *The shadowing lemma in the linear case*, Univ. Iagel. Acta Math., **31** (1994), 69–74.
- [3] I. U. Bronstein, A. Ya. Kopanskii. *Smooth invariant manifolds and normal forms*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1994.
- [4] A. A. Boichuk, A condition for the existence of a unique Green-Samoilenko function for the problem of invariant torus,” Ukr. Mat. Zh., 53, No.4, 556–559 (2001).
- [5] H. M. Kulyk, V. L. Kulyk, Existence of Green-Samoilenko functions of some linear extensions of dynamical systems. Nonlinear Oscill 7, 454–460 (2004).
- [6] M. O. Perestyuk, V. Yu. Slyusarchuk. The Green–Samoilenko operator in the theory of invariant sets of nonlinear differential equations. *Ukrainian Math. J.*, **61** (2009), no. 7, 1123–1136.

On the approximation of solutions of operator-differential equations by their entire solutions of exponential type

Volodymyr GORBACHUK, Yuliya SPIVAK

*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv,
Ukraine*

v.m.horbach@gmail.com

Let A be a nonnegative self-adjoint operator in a Hilbert space $\mathfrak{H}$ with a scalar product $(\cdot, \cdot)$. Denote by $C_{\{1\}}(A)$ the set of all its exponential type entire vectors namely,

$$C_{\{1\}}(A) = \left\{ f \in C^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) \mid \exists \alpha > 0, \exists c = c(f) > 0 : \right. \\ \left. \|A^n f\| \leq c\alpha^n, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

(everywhere in the sequel c denotes various numerical constants corresponding the situations under consideration, $\mathcal{D}(A)$ is the domain of A and $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$). The number

$$\sigma(f, A) = \inf \{ \alpha > 0 \mid \exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \|A^n f\| \leq c\alpha^n \}$$

is called the type of the vector f with respect to the operator A .

As has been shown in [2],

$$C_{\{1\}}(A) = \{ f \in \mathfrak{H} \mid f = E(\lambda)g, \forall \lambda > 0, \forall g \in \mathfrak{H} \},$$

where $E(\lambda) = E([0, \lambda])$ is the spectral measure of A .

Now, consider the equation

$$y'(t) + Ay(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty). \quad (1)$$

By a weak solution of this equation we mean a continuous vector-valued function

$y(t) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathfrak{H}$ such that for any $t \in \mathbb{R}_+$
 $\int_0^t y(s) ds \in \mathcal{D}(A)$ and $y(t) = -A \int_0^t y(s) ds + y(0)$. Denote by S the set of all weak solutions of (1). As was established in [1],

$$S = \{ y(t) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathfrak{H} \mid y(t) = e^{-At}f, f \in \mathfrak{H} \}, \quad (2)$$

where

$$e^{-At}f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE(\lambda)f.$$

Note that the set of all strong (or simply) solutions of (1) is given by formula (2) with f going through the whole $\mathcal{D}(A)$.

It is not difficult to verify that S is a Hilbert space with norm

$$\|y\|_S = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|e^{-At}f\| = \|f\|. \quad (3)$$

If the operator A is bounded, then each weak solution $y(t)$ of equation (1) can be extended to an entire $\mathfrak{H}$ -valued vector function $y(z)$ of exponential type

$$\sigma(y) = \inf \{ \alpha > 0 : \|y(z)\| \leq ce^{\alpha|z|} \}.$$

But it is not the case if A is unbounded. The set S_0 of all weak solutions of (1) admitting an extension to an entire vector function of exponential type is described by the following theorem.

Theorem 1. *A weak solution $y(t)$ of equation (1) belongs to S_0 if and only if it can be represented in form (2) with $f \in C_{\{1\}}(A)$. The set S_0 is dense in S , and $\sigma(y) = \sigma(f, A)$.*

Recall some definitions and notations of the approximation theory required to formulate the further results.

For $y \in S$ and a number $r > 0$, we put

$$\mathcal{E}_r(y) = \inf_{y_0 \in S_0 : \sigma(y_0) \leq r} \|y - y_0\|_S.$$

Thus, $\mathcal{E}_r(y)$ is the best approximation of a weak solution $y(t)$ of equation (1) by its entire solutions of exponential type not exceeding r . If y is fixed, the function $\mathcal{E}_r(y)$ does not increase and, since $\overline{S_0} = S$, $\mathcal{E}_r(y) \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$.

For $f \in \mathfrak{H}$, set also $\mathcal{E}_r(f, A) = \inf_{f_0 \in C_{\{1\}}(A) : \sigma(f_0, A) \leq r} \|f - f_0\| = \|(I - E(r))f\|$. If $y(t) = e^{-At}f$, then, by virtue of (3),

$$\mathcal{E}_r(y) = \mathcal{E}_r(f, A).$$

Besides, for any $k \in \mathbb{N}_0$, we introduce the function

$$\omega_k(t, y) = \sup_{|h| \leq t} \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \left\| \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j y(s + jh) \right\|, \quad k \in \mathbb{N}; \quad \omega_0(t, y) \equiv \|y\|_S, \quad t > 0.$$

Taking into account (2) and the equality $e^{-As}y(t) = y(t + s)$, we conclude that

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \omega_k(t, y) = \sup_{|h| \leq t} \left\| (e^{-Ah} - I)^k y \right\|_S$$

(I is the identity operator).

The following theorem establishes a relation between $\mathcal{E}_r(y)$ and $\omega_k(t, y)$.

Theorem 2. *Let $y \in S$. Then*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists c_k > 0 : \mathcal{E}_r(y) \leq c_k \omega_k\left(\frac{1}{r}, y\right), \quad r > 0.$$

References

- [1] J.M. Ball, *Continuity properties of nonlinear semigroups*, J. Funct. Anal. **17** (1974), no. 1, 91 – 103.
- [2] M.L. Gorbachuk, *On analytic solutions of differential-operator equations*, Ukrain. Mat.Zh. **52** (2000), no. 5, 596 – 607. (Ukrainian)

Integrable $(2|2+1)$ -dimensional supersymmetric dynamical systems and centrally extended Lie algebra of matrix super-integro-differential operators with two anticommuting variables

Oksana HENTOSH

Pidstryhach IAPMM, NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine

ohen@ukr.net

Let us consider the Lie algebra $\mathfrak{g}$ which consists of matrix super-integro-differential operators with two anticommuting variables θ_1 and θ_2 ($\theta_1^2 = 0, \theta_2^2 = 0$) in the form

$$\mathcal{A} := \mathbf{1}\partial^q + \sum_{p < q} A_p \partial^p, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad p < q, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

where $A_p := A_p(x, \theta_1, \theta_2; D_{\theta_1}, D_{\theta_2}) = A_{0,p} + A_{1,p}D_{\theta_1} + A_{3,p}D_{\theta_2} + A_{2,p}D_{\theta_1}D_{\theta_2}$, $A_{r,p} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \Lambda_1^2; gl(m|n))$, $A_{r,p} = A_{r,p}(x, \theta_1, \theta_2) := A_{r,p}^0(x) + \theta_1 A_{r,p}^1(x) + \theta_2 A_{r,p}^3(x) + \theta_1 \theta_2 A_{r,p}^2(x)$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, $p \in \mathbb{Z}, p < q, q \in \mathbb{N}$ is an order of the matrix super-integro-differential operator (1), $gl(m|n)$ is a semi-simple Lie superalgebra of square supermatrices, for every $p \in \mathbb{Z}$ and $p < q$ the supermatrices $A_{r,p}$ are even if $r \in \{0, 2\}$ and odd if $r \in \{1, 3\}$, $\mathbf{1} \in gl(m+n)$ is an unit matrix, $\partial = \partial/\partial x$, $x \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\theta_1, \theta_2 \in \Lambda_1$, $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ is a Grassmann algebra over the field $\mathbb{C} \subset \Lambda_0$, $D_{\theta_\ell} := \partial/\partial\theta_\ell + \theta_\ell \partial/\partial x$ are superderivatives such that $D_{\theta_\ell}^2 = \partial/\partial x$ and $(D_{\theta_\ell} AB) = (D_{\theta_\ell} A)B + (-1)^{\varrho(A)} I A (D_{\theta_\ell} B)$ for any smooth supermatrix-valued functions $A, B \in C^\infty(\mathbb{S} \times \Lambda_1^2; gl(m|n))$, $\varrho(\cdot)$ is a parity function, $\varrho(A) = 0$ if $A \in gl(m|n)$ is an even supermatrix (the elements of its diagonal blocks are even) and $\varrho(A) = 1$ if $A \in gl(m|n)$ is an odd supermatrix (the elements of its diagonal blocks are odd), $I := \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{-1, \dots, -1}_n)$, and $\partial/\partial\theta_\ell$ is a left partial derivative by the anticommuting variable θ_ℓ , $\ell \in \{1, 2\}$, with the standard commutator

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} - \mathcal{B} \circ \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{g}. \quad (2)$$

Here the symbol " $\circ$ " denotes the product of two matrix super-integro-differential operators such that $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+, \nu_\ell=0,1} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(A \frac{\partial^{\nu_\ell}}{\partial \eta_\ell^{\nu_\ell}} \right) \right) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} D_{\theta_\ell}^{\nu_\ell} B \right)$, $\xi := \frac{\partial}{\partial x}$, $\eta_\ell := D_{\theta_\ell}$, $\frac{\partial}{\partial \eta_\ell}$ and $\frac{\partial_r}{\partial \eta_\ell}$ are left and right partial derivatives by the anticommuting variable θ_ℓ .

On the Lie algebra $\mathfrak{g}$ one can introduce the scalar product $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \int_{x \in \mathbb{S}} dx \int d\theta \text{sSp res}_{D_{\theta_1} D_{\theta_2}} (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$, where " $\text{res}_{D_{\theta_1} D_{\theta_2}}$ " denotes the coefficient at $D_{\theta_1} D_{\theta_2} \partial^{-1}$ in the expansion of a matrix super-integro-differential operator and " sSp " is a supermatrix supertrace, being invariant with respect to the commutator (2), i.e. $(\mathcal{A}, [\mathcal{B}, \mathcal{C}]) = ([\mathcal{A}, \mathcal{B}], \mathcal{C})$ for any $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathfrak{g}$, which allows us to identify the dual space $\mathfrak{g}^*$ to $\mathfrak{g}$, with the Lie algebra itself, that is $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$.

The Lie algebra $\mathfrak{g}$ is splitting into the direct sum $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\geq 1} \oplus \mathfrak{g}_{< 1}$, of two its Lie subalgebras $\mathfrak{g}_{\geq 1} := \{\mathcal{A} := \mathbf{1}\partial^q + \sum_{1 \leq p < q} A_{p_1}(x, \theta_1, \theta_2; D_{\theta_1}, D_{\theta_2}) \partial^{p_1} + A_{1,0} D_{\theta_1} + A_{3,0} D_{\theta_2} + A_{2,0} D_{\theta_1} D_{\theta_2}, p_1 =$

$\overline{1, q-1}\}$ and $g_{<1} := \{\mathcal{A} := A_{0,0} + \sum_{p_2>0} A_{p_2}(x, \theta_1, \theta_2; D_{\theta_1}, D_{\theta_2}) \partial^{-p_2}, p_2 \in \mathbb{N}\}$ and its dual space is written as $g^* = (g_{\geq 1})^* \oplus (g_{<1})^*$, where $(g_{\geq 1})^* \simeq g_{<-1}$, $(g_{<1})^* \simeq g_{\geq -1}$, $g_{\geq -1} := \{\mathcal{A} := \mathbf{1} \partial^q + \sum_{0 \leq p_1 < q} \partial^{p_1} (A_{0,p_1} + D_{\theta_1} A_{1,p_1} + D_{\theta_2} A_{3,p_2} + D_{\theta_1} D_{\theta_2} A_{2,p_2}) + \partial^{-1} D_{\theta_1} D_{\theta_2} A_{2,-1}, p_1 = \overline{0, q-1}\}$, $g_{<-1} := \{\mathcal{A} := \partial^{-1} (A_{0,-1} + D_{\theta_1} A_{1,-1} + D_{\theta_2} A_{3,-1}) + \sum_{p_2>1} \partial^{-p_2} (A_{0,p_2} + D_{\theta_1} A_{1,p_2} + D_{\theta_2} A_{3,p_2} + D_{\theta_1} D_{\theta_2} A_{2,p_2}), p_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$, $A_{r,-1}, A_{r,p_1}, A_{r,p_2} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \Lambda_1^2; gl(m|n))$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq p_1 < q, p_2 > 1, q \in \mathbb{N}$, the supermatrices $A_{r,-1}, A_{r,p_1}, A_{r,p_2}$ are even if $r \in \{0, 2\}$ and odd if $r \in \{1, 3\}$.

One constructs the central extension $\hat{g} := \tilde{g} \oplus \mathbb{C}$ of the parameterized Lie algebra $\tilde{g} := \prod_{y \in \mathbb{S}} g$ by the Maurer-Cartan two-cocycle on $\tilde{g}$ in the form $\omega_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \int_{y \in \mathbb{S}} dy (\mathcal{A}, \partial \mathcal{B} / \partial y)$ for any $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \tilde{g}$, with the commutator such that $[(\mathcal{A}, d), (\mathcal{B}, e)] = ([\mathcal{A}, \mathcal{B}], \omega_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$, $(\mathcal{A}, d), (\mathcal{B}, e) \in \hat{g}$, and introduces another commutator on $\hat{g}$ in the form

$$[(\mathcal{A}, d), (\mathcal{B}, e)]_{\mathcal{R}_1} = ([\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathcal{R}_1}, \omega_{2, \mathcal{R}_1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})), \quad (3)$$

where $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathcal{R}_1} = [\mathcal{R}_1 \mathcal{A}, \mathcal{B}] + [\mathcal{A}, \mathcal{R}_1 \mathcal{B}]$, $\omega_{2, \mathcal{R}_1}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \omega_2(\mathcal{R}_1 \mathcal{A}, \mathcal{B}) + \omega_2(\mathcal{A}, \mathcal{R}_1 \mathcal{B})$, $\mathcal{R}_1 = (P_{\geq 1} - P_{<1})/2$, $P_{\geq 1}, P_{<1}$ are projectors on the Lie subalgebras $\tilde{g}_{\geq 1}$ and $\tilde{g}_{<1}$ accordingly. On the space $\hat{g}^*$, dual to $\hat{g}$ with respect to the scalar product $((\mathcal{A}, d), (\mathcal{B}, e)) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle + de$, where $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \int_{y \in \mathbb{S}} dy (\mathcal{A}, \mathcal{B})$, the commutator (3) determines the Lie-Poisson bracket

$$\{\gamma, \mu\}_{\mathcal{R}_1}(l) = \langle l, [\nabla_l \gamma(l), \nabla_r \mu(l)]_{\mathcal{R}_1} \rangle + c \omega_{2, \mathcal{R}_1}(\nabla_l \gamma(l), \nabla_r \mu(l)) = \langle \nabla_l \gamma(l), \Theta \nabla_r \mu(l) \rangle, \quad (4)$$

where $\gamma, \mu \in \mathcal{D}(\tilde{g}^*)$ are arbitrary smooth by Frechet functionals on $\tilde{g}^* \simeq \tilde{g}$, at a point $(l, c) \in \hat{g}^*$. Here $l \in \tilde{g}^*$ is some matrix super-integro-differential operator of an order $q \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, ∇_l, ∇_r are left and right gradient operators accordingly, $\Theta : T^*(\tilde{g}^*) \rightarrow T(\tilde{g}^*)$ is the Poisson operator generating the Lie-Poisson bracket (4) at a point $l \in \tilde{g}^*$ and acting as $\Theta : \nabla \gamma(l) \mapsto [l - c \mathbf{1} \partial / \partial y, (\nabla \gamma(l))_{\geq 1}] - [l - c \mathbf{1} \partial / \partial y, \nabla \gamma(l)]_{\geq -1}$ for any $\gamma \in \mathcal{D}(\tilde{g}^*)$, the subscripts " ≥ 1 " and " < 1 " denote projections of the corresponding matrix super-integro-differential operator from $\tilde{g}$ on the Lie subalgebras $\tilde{g}_{\geq 1} := \prod_{y \in \mathbb{S}} g_{\geq 1}$ and $\tilde{g}_{<1} := \prod_{y \in \mathbb{S}} g_{<1}$ accordingly, the subscripts " ≥ -1 " and " < -1 " denote projections of the corresponding matrix super-integro-differential operator from $\tilde{g}$ on the subspaces $\tilde{g}_{\geq -1} := \prod_{y \in \mathbb{S}} g_{\geq -1}$ and $\tilde{g}_{<-1} := \prod_{y \in \mathbb{S}} g_{<-1}$ accordingly, $T(\tilde{g}^*), T^*(\tilde{g}^*)$ are tangent and cotangent spaces to $\tilde{g}^*$.

The Casimir functionals of the central extension $\hat{g}$ $\gamma_j \in \mathcal{I}(\hat{g}^*)$, $j \in \mathbb{N}$, whose left gradients obey the equalities such that $[l - c \mathbf{1} \partial / \partial y, \nabla_l \gamma_j(l)] = 0$, where $\nabla_l \gamma_j(l) := \mathbf{1} \partial^j + \sum_{p < j} A_{p,j} \partial^p$, $p \in \mathbb{Z}$, $p < j$, $j \in \mathbb{N}$, $A_{p,j} := A_{p,j}(x, \theta_1, \theta_2; D_{\theta_1}, D_{\theta_2}) = A_{0,p,j} + A_{1,p,j} D_{\theta_1} + A_{3,p,j} D_{\theta_2} + A_{2,p,j} D_{\theta_1} D_{\theta_2}$, $A_{r,p,j} = A_{r,p,j}(x, \theta_1, \theta_2) := A_{r,p,j}^0(x) + \theta_1 A_{r,p,j}^1(x) + \theta_2 A_{r,p,j}^3(x) + \theta_1 \theta_2 A_{r,p,j}^2(x)$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, $A_{r,p,j} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \Lambda_1^2; gl(m|n))$ for any $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, $p \in \mathbb{Z}$, $p < j$, $j \in \mathbb{N}$, at a point $(l, c) \in \hat{g}^*$, and the $\mathcal{R}_1$ -deformed Lie-Poisson bracket (4) give us the hierarchy of Lax type Hamiltonian flows on $\tilde{g}^* \simeq \tilde{g}$ in the form

$$dl/dt_j = [(\nabla_l \gamma_j(l))_{\geq 1}, l - c \mathbf{1} \partial / \partial y], \quad t_j \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

The Lax type hierarchy (5), reduced upon concrete orbits of the coadjoint action of the abstract Lie group $\hat{G}$, related with the Lie algebra $\hat{g}$, generate Lax integrable hierarchies of supersymmetric

dynamical systems on manifolds of supermatrix-valued functions of two commuting and two anticommuting independent variables, possessing infinite sequences of conservation laws.

One investigates the Lax type hierarchy (5) on the coadjoint orbits associated with the rational factorized elements of the dual space $\tilde{\mathfrak{g}}^* \simeq \tilde{\mathfrak{g}}$ also.

Approximation of linear differential-functional equations

Svitlana ILIKA, Oleksandr MATVIY, Larysa PIDUBNA

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

s.ilika@chnu.edu.ua, o.matviy@chnu.edu.ua, l.piddubna@chnu.edu.ua

Differential-difference and differential-functional equations arise when accounting for delays in the description of various technical, physical, and natural processes. This is why the systems of differential-functional equations have become a relevant subject of research [1]. Currently, there are no universal methods for finding exact solutions to differential-functional equations, which makes the development and justification of algorithms for obtaining approximate solutions to initial and boundary value problems for such equations an important and relevant task.

The methods for approximating differential-difference equations by ordinary dynamical systems were proposed in [2, 3]. In this work, we construct and justify approximation schemes for linear differential-functional equations with delay by sequences of special systems of ordinary differential equations [4, 5].

Let us consider the initial problem for a differential-functional equation of the form

$$\frac{dx(t)}{dt} = L(t, x_t), t \in [0, T], x_0 = \varphi. \quad (1)$$

where the linear functional $L(t, \varphi)$ has the form

$$L(t, \varphi) = \sum_{i=0}^p A_i(t) \varphi(-\tau_i) + \int_{-\tau}^0 D(t, \theta) \varphi(\theta) d\theta \quad (2)$$

often encountered in applied applications, $A_i(t), i = \overline{0, p}$, are $n \times n$ continuous matrix functions, $D(t, \theta)$ is an $n \times n$ matrix function, whose components $d_{ij}(\tau, \theta)$ are continuous functions over the set of variables on $[0, T] \times [-\tau, \theta], 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p = \tau$.

Let us consider the schemes for approximating the initial problem (1) by a sequence of Cauchy problems for systems of ordinary differential equations, which are similar to the approximation schemes for delay differential-difference equations.

In the case of a linear functional of the form (2), we associate the initial problem (1) with a system of ordinary differential equations

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^p A_i(t) z_{l_i}(t) + \frac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} D(t, -\frac{\tau(m-K)}{m}) z_{m-i}(t), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), j = \overline{1, m}, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3)$$

with the initial conditions

$$z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}), j = \overline{0, m}, \quad (4)$$

where the indices l_j are defined by the equalities $l_j = [\frac{m\tau_j}{\tau}], j = \overline{0, p}$ and the second term in the first equation of (3) is obtained by replacing the integral with the formula of left rectangles with a step $h = [\frac{\tau}{m}]$.

If the integral is replaced by the trapezoidal quadrature formula with a step $h = \frac{\tau}{m}$, then we associate with the initial problem (1) a Cauchy problem for a system of ordinary differential equations of the form

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^p A_i(t)z_{l_i}(t) + \frac{\tau}{2m}(D(t, -\tau)z_m + D(t, 0)z_0(t) + \\ &+ \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{m-1} D(t, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), j = \overline{1, m}, t \in [0, T],$$

$$z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}), j = \overline{0, m}. \quad (6)$$

Theorem. *If $A_i(t)$, $i = \overline{0, p}$, $D(t, \theta)$ are continuous matrix functions for $t \in [0, \tau]$, $\theta \in [-\tau, 0]$, then the solutions of the Cauchy problems (3), (4) and (5), (6) approximate the solutions of the original problem (1) as $m \rightarrow \infty$ [4, 5].*

References

- [1] Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional Differential Equations: Advances and Applications. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc. 2016. 343 p.
- [2] Halanay A., Răsvan V.I. Approximations of Delays by Ordinary Differential Equations. In: Recent Advances in Differential Equations. New York–London: Academic Press. 1981. P. 155–197.
- [3] Cherevko I., Pidubna L. On approximation of solutions of differential-difference equations. Mathematical Studies. 1998. 9, No. 2. P. 187–192.
- [4] Іліка С. А., Матвій О. В., Піддубна Л. А., Черевко І. М. Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування. Буковинський математичний журнал. 2014. 2, No. 2–3. С. 107–111.
- [5] Cherevko I., Dorosh A., Ilika S., Shkilniuk D. Approximation of Linear Differential-Functional Equations. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2026. 97. P. 13–22.

Spectral theory of operators application for solution of some types of differential-difference Lax equations

Ivan IVASIUK

Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

ivan.ivasiuk@cnu.edu.ua

Let us consider a Lax equation

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)(t) = G(t)A(t) - A(t)G(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

where $A(t) = (\alpha_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ is a given infinite continuous matrix and $G(t)$ is an unknown generalized three diagonal Jacobi hermitian matrix $G = G(t), t \in [0, T)$, with continuous elements of the form

$$c_j = \begin{pmatrix} c_{j;0,0} & c_{j;0,1} & 0 & \dots & 0 \\ c_{j;1,0} & c_{j;1,1} & c_{j;1,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j;j,0} & c_{j;j,1} & c_{j;j,2} & \dots & c_{j;j,j+1} \end{pmatrix}, \quad c_{j;i,i+1} > 0,$$

$$b_j = (b_j)^T, \quad a_j = (c_j)^T, \quad j = 0, 1, \dots, \quad i = 0, \dots, j.$$

Let also $A(t)$ is a three diagonal block Jacobi matrix with diagonal elements $\alpha_n(t)$ (left diagonal), $\beta_n(t)$ (main), $\gamma_n(t)$ (right). If we consider matrix $A(t)$ with elements $\alpha_n(t) = 0$, $\beta_n(t) = -\frac{1}{2}b_n(t)$, $\gamma_n(t) = -c_n(t), n \in \{0, 1, \dots\}$, then equation (1) transforms to the generalized Toda lattice

$$\begin{aligned} \frac{a_i(t)}{dt} &= \frac{1}{2} (b_{i+1}(t)a_i(t) - a_i(t)b_i(t)), \\ \frac{b_i(t)}{dt} &= a_i^T(t)a_i(t) - a_{i-1}(t)a_{i-1}^T(t), \\ a_{-1}(t) &= c_{-1}(t) = 0, \quad i \in \{0, 1, \dots\}, t \in [0, T). \end{aligned} \quad (2)$$

Then we can consider integration of (2) using the method described in [1] with respect to the direct and inverse spectral problems for the matrix $G = G(t)$. The direct and inverse spectral problems for the matrix $G = G(t)$ were investigated in [2, 3].

References

- [1] Berezanski Yu.M. The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem. Reports Math. Phys. 1986. Vol. 24, No. 1. P. 21–47.
- [2] Ivasiuk I.Ya. Inverse spectral problem for some generalized Jacobi Hermitian matrices. Methods of Funct. Anal. and Topology. 2009. Vol. 15, No. 4. P. 333–355.
- [3] Ivasiuk I.Ya. Direct spectral problem for the generalized Jacobi Hermitian matrices. Methods of Funct. Anal. and Topology. 2009. Vol. 15, No. 1. P. 3–14.

Attracting compact sets and their stability for infinite-dimensional impulsive systems

Oleksiy KAPUSTYAN

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine

kapustyan@knu.ua

It is well known that dissipative infinite-dimensional dynamical systems, particularly those generated by nonlinear partial differential equations, frequently possess a nontrivial invariant uniformly attracting set in the phase space, namely, a global attractor. Consequently, studying the qualitative behavior of the trajectories of a dynamical system reduces to investigating the properties of its global attractor. The existence of such a set in the infinite-dimensional case requires certain additional conditions. Specifically, a dissipative continuous dynamical system is known to possess a global attractor provided that it is asymptotically compact. The global attractor exhibits key properties essential for applications, such as stability and robustness. However, in many practically significant scenarios, the system dynamics are non-continuous due to phenomena like short-term perturbations (impacts, switching, etc.), which are mathematically modeled using impulsive actions. The foundations of the theory of systems with impulsive perturbations were established in the pioneering works of the prominent mathematicians A.M. Samoilenko and M.O. Perestyuk. The qualitative analysis of impulsive systems has been extensively studied by numerous authors over the past decades. One of the most application-critical yet least understood classes of such systems is impulsive dynamical systems (impulsive DS), i.e., autonomous systems whose trajectories undergo impulsive perturbations at the moments when they intersect a specific surface in the phase space. The primary challenge encountered when attempting to extend the theory of global attractors to impulsive DS stems from the lack of continuous dependence on initial data. This shortcoming precludes the application of classical approaches and necessitates a new concept of the attractor itself. In this work, we propose a new attractor concept wherein, alongside uniform attraction, the invariance property is replaced by minimality. This approach allows us not only to establish the existence of a compact uniform attractor for many classes of dissipative infinite-dimensional impulsive DS but also to prove the invariance and stability of its non-impulsive component.

This work was supported by the National Research Foundation of Ukraine, project no. 2023.03/0074 "Infinite-dimensional evolution equations with multi-valued and stochastic dynamics.

References

- [1] Kapustyan O. V., Perestyuk M. O. Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2016. 68, No. 4. P. 517–528.

- [2] Kapustyan O. V., Perestyuk M. O., Romanyuk I. V. Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. 70, No. 1. P. 30–41.
- [3] Dashkovskiy S., Kapustyan O., Perestyuk Y. Stability of uniform attractors of impulsive multi-valued semiflows. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. 2021. 40. Article 101025.

Stability of infection-free periodic and almost periodic solutions in impulsive SEIR-model

Oleksiy KAPUSTYAN, Anna SUKRETNA

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

kapustyan@knu.ua, sukretna.a.v@knu.ua

Mathematical models of the infection spread dynamics have remained a relevant area of research for the past few decades. Moreover, these models have also proven to be suitable for modelling DDoS-attacks in computer networks. The qualitative behaviour of solutions in such models is usually arranged as follows: there is some threshold value at which the global asymptotic stability of the solution with a zero component, which is responsible for the number of infected individuals, changes to the stability of the non-zero equilibrium position. From a meaningful point of view, this means that the self-exhaustion and disappearance of the infection changes to a constant circulation of the infection in the population. However, the presence of an impulsive perturbation can make the infection-free solution asymptotically stable regardless of the threshold value, and such impulsive perturbations allow a natural interpretation within the framework of the epidemiological model as the process of vaccination of a certain part of individuals. Such problems have already been considered for the SIR- and SEIR-models in the case of a simple structure of impulsive points, due to which the impulsive problem was actually reduced to a problem without impulsive perturbation. However, a more complex structure of the set and magnitudes of impulsive effects requires the application of the theory of impulsive differential equations, which is done in this work.

We consider a classical SEIR-model respect to the unknown functions $S(t)$ (Susceptible is the fraction of the population that can become infected), $E(t)$ (Exposed is the fraction of the population that is carried the infection), $I(t)$ (Infectious is the fraction of the population that is infected) and $R(t)$ (the fraction of the population that Recovered and has immune), for which equality

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = 1, \quad t \geq 0,$$

and ordinary differential equations system

$$\begin{cases} \dot{S} = -\lambda SI + \nu(1 - S) + \delta(1 - S - E - I), \\ \dot{E} = \lambda SI - (\varepsilon + \nu)E, \\ \dot{I} = \varepsilon E - (\gamma + \nu)I; \end{cases} \quad (1)$$

holds. Here $\lambda, \nu, \delta, \varepsilon, \gamma$ are positive parameters that determine the indicators of the spread of infection.

Let's $D = \{(S, E, I) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq S + E + I \leq 1\}$.

Modelling the vaccination process as a sharp decrease in the susceptible to infection population proportion we arrive at an impulsive problem

$$\Delta S|_{t=t_n} := S(t_n + 0) - S(t_n) = -b_n S(t_n), \quad (2)$$

where $\{b_n\} \subset (0, 1)$, $\{t_n\}$ are the given values and the moments of the impulsive perturbation. By solution (1), (2) according to [2] we will understand a left-continuous function, which satisfies the system (1), when $t \neq t_n$, and at points $\{t_n\}$ satisfies the equality (2).

The main result of the work is the following theorem.

Theorem. *Let in problem (1), (2) impulsive perturbations satisfy conditions*

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T, \quad t_{n+p} = t_n + T, \quad n \geq 1,$$

$$b_{n+p} = b_n, \quad n \geq 1.$$

or

$$t_i = iT + \alpha_i, \quad i \in \mathbb{Z},$$

$$\text{the sequence } \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ is almost periodic and } \sup_{i \in \mathbb{Z}} |\alpha_i| = \alpha < \frac{T}{2},$$

$$\text{the sequence } \{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ is almost periodic, } \{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in (0, 1) \text{ and } \inf_{i \in \mathbb{Z}} b_i \geq b > 0.$$

and $\bar{P}(t) = \{\bar{S}(t), 0, 0\}$ is corresponding infection-free impulsive almost periodic solution. Then there is such $T^* > 0$ that for $T < T^*$ the solution $\bar{P}(t)$ is globally (in $\text{Int}D$) asymptotically stable.

From a practical point of view, the obtained result means that by choosing a certain realistic vaccination schedule (which takes into account possible deviations from a strictly periodic nature) and supporting vaccination of a certain proportion of the population, it is possible to achieve the stability of the infection-free state of the system, which will mean the attenuation of the epidemic process. The obtained results can also be applied to high-dimensional systems of differential equations which are used for describing DDoS attacks in computer networks. The study generalizes previously known results by considering a more mathematically complex model that allows for a more realistic practical interpretation. It should be noted that the linear impulse perturbation condition (2) is due to empirical data on the cessation of the circulation of infections in the population upon reaching a sufficiently high level (80-90%, and sometimes more than 95%) of vaccinated people in the population (see, for example, <https://ourworldindata.org/vaccination>). As a rule, achieving such levels requires mass vaccination, so we really neglect the throughput of the medical system, considering it proportional to the population size. In our further studies, we plan to consider the case of a nonlinear dependence of the magnitude of the impulse disturbance on S , which is a more realistic case from the point of view of the practical vaccination process, which depends on the capabilities of the system.

References

- [1] Kapustyan O., Sukretna A., Kapustian D., Ospanov M. Stability of infection-free almost periodic solution in impulsive SEIR-model. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics. 2026. 82, No. 1. P. 130–135.
- [2] Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific. 1995. 472 p.

A model of conflict society with support for the weakest

Tetyana KARATAIEVA, Volodymyr KOSHMANENKO

Institute of Mathematics of NASU, Ukraine

mathkarat@gmail.com, koshman63@gmail.com

Let $\mathcal{S} = \{a_i\}_{i=1}^m$, $1 < m < \infty$ denote an abstract society whose individuals a_i are in conflict, fighting for their status. We assume that the energy status of each individual a_i is measured by a numerical value $0 \leq p_i^t \leq 1$, $\sum_{i=1}^m p_i^t = 1$ which changes in discrete time $t = 0, 1, \dots$. Thus, the states of the social system S are presented by the stochastic vectors $\mathbf{p}^t = (p_1^t, \dots, p_i^t, \dots, p_m^t)$. If the conflict struggle occurs according to the rule, each against all, then the evolution is described (see [1], [2]) by the difference equations:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - r_i^t)}{z^t}, \quad r_i^t = (1 - p_i^t)/(m - 1),$$

where z^t is the normalizing denominator.

In this report, we discuss a more complex typical situation where one of the individuals or a fixed cluster, currently in minimal status, receives external support to survive. In such case the dynamics is described as follows

$$\mathbf{p}^{t+1} = (p_1^{t+1}, \dots, p_i^{t+1}, \dots, p_m^{t+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}^t) = (f_1(\mathbf{p}^t), \dots, f_i(\mathbf{p}^t), \dots, f_m(\mathbf{p}^t)), \quad (1)$$

$$p_i^{t+1} = f_i(\mathbf{p}^t) = (p_i^t + b \prod_{k \neq i} H(p_k^t - p_i^t)) \cdot \frac{(1 - r_i^t)}{z^t}, \quad 0 < b < 1, \quad t = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Here $H(\cdot)$ is the Heaviside function. From (2) it is seen that $b \prod_{k \neq i} H(p_k^t - p_i^t) > 0$ only if the coordinate p_i^t is minimal relative to all others and it is subject to an additive shift $0 < b < 1$, which corresponds to receiving support.

In the case of $m = 3$ we obtain the whole spectrum of typical variants of behavior of our dynamical system depending on the value of the parameter. In addition, we illustrate our results with the corresponding figures (we represent only one of them).

Are there fixed points in the three-component dynamical system (1)? We have a positive answer. The dynamical system has three pairs of fixed points. The existence of fixed points is possible only when at the initial moment of time the two larger coordinates are equal, and the parameter b is less than $3.5 - \sqrt{48}/2$. This value is a bifurcation point.

The issue of stability of fixed points is investigated by the method of estimating the modules of the eigenvalues of the Jacobian matrix at these points. According to our calculations, fixed points are not stable. For example, for the parameter value $b = 0.02512$ three of them are saddles (with eigenvalues of the Jacobian matrix greater and less than unity) and three are repellers (with multipliers greater than unity).

Let us consider the case when all coordinates are different. Then the smaller coordinate of those on which the shift does not act at some moment of time always becomes the smallest, in

particular, smaller than the one on which the shift acts. Therefore, the property of a coordinate to be the smallest among the three coordinates changes, just at the moment when it increases due to the shift. Another coordinate becomes the smallest and then the additive shift will act on this other coordinate until it is smaller. Thus, an index number of the smallest coordinate is not constant.

The largest coordinate can retain its status as the largest, and therefore periodic states can arise when two smaller coordinates alternately equal two different constant values, and the largest coordinate does not change. Such situation is possible when $0 < b < \sqrt{7} - 2.5$. In this case 6 cycles of period 2 exist. Three of them are stable, and three are not. The value $b = \sqrt{7} - 2.5$ is a bifurcation point. Cycles of such type do not exist when $b > \sqrt{7} - 2.5$.

Besides for $0 < b < \sqrt{7} - 2.5$ there exists a zone for coordinate values that is located outside the basin of attraction of both fixed points and periodic states. All trajectories starting from this zone have unpredictable behavior with a limiting set of complex structure. We show that among them there are also trajectories with Lyapunov exponents greater than zero which corresponds to the chaotic nature of such ones.

The dynamical system has unstable behavior for $\sqrt{7} - 2.5 < b < 0.34$. For $0.34 < b < 0.364$ it depends significantly on the initial data. We clearly demonstrate this for different initial states and the same values of the shift parameter. The dynamical system can have either chaotic or periodic behavior including cycles of period 3 and period 6.

Finally, numerous examples confirm the existence of stable cycles of period 3 for $b > 0.3645$ regardless of the initial data.

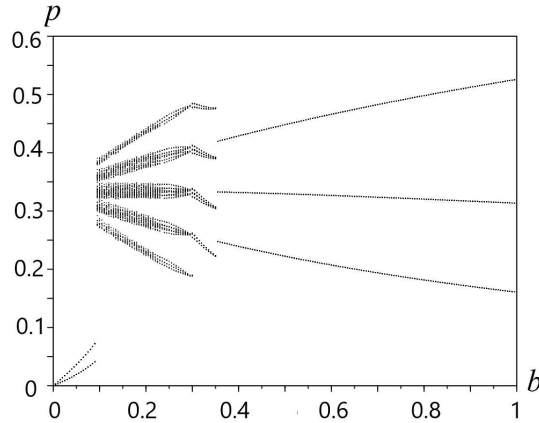


Figure 1: Bifurcation diagram of the mapping $\mathbf{f}(\mathbf{p}^t)$. The parameter b varies from 0 to 1 with the step of 0.005. The dynamical system starts at $\mathbf{p}^0 = (0.1, 0.4, 0.5)$. For each value of the parameter b , the values of the first coordinate of $\mathbf{p}^t$ are plotted.

References

- [1] Karataieva T. V., Koshmanenko V. D. A model of conflict society with external influence. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. 272, No. 2. P. 244–266.
- [2] Karataieva T. V., Koshmanenko V. D. Equilibrium states of the dynamic conflict system for three players with a parameter of influence of the ambient environment. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. 274, No. 6. P. 861–880.
- [3] Alligood K. T., Sauer T. D., Yorke J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. New York, NY: Springer-Verlag. 1996. 603 p.

This work was supported in part by a grant from the Simons Foundation (Grant No. SFI PD-Ukraine-00014586, T.V.K., V.D.K.).

Invariant measures for discrete dynamical systems

Ivan KLEVCHUK

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

`i.klevchuk@chnu.edu.ua`

We investigate of some properties of solutions of nonlinear difference equations [1, 2]. We use permutable rational functions for study of some classes of one-dimensional mappings. We consider rational functions $R(x) = x^k \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x) = x^n + \sum_{p=1}^n a_p x^{n-p}$, $Q(x) = 1 + \sum_{p=1}^n a_p x^p$, where $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. The maps $x \rightarrow R(x)$ and $x \rightarrow \frac{1}{R(x)}$ are permutable. We investigate the map $x \rightarrow \frac{x^2 + ax}{1 + ax}$ on unit circle. The map $x \rightarrow ax - \frac{a}{x}$, $0 < a < 1$, has invariant measure on $\mathbb{R}$. We consider the map $x \rightarrow ax - 2a + \frac{a}{x}$, $0 < a < 1$, and map $x \rightarrow \frac{x(1-x)}{a + (1-4a)x(1-x)}$ on $[0, 1]$. We investigate polynomial and rational mappings with invariant measure and construct equivalent piecewise linear mappings. These mappings have countably many cycles. We applied the methods of symbolic dynamics to the theory of unimodal mappings. We use whole p -adic numbers for study the invariant set of some mapping in the theory of universal properties of one-parameter families. Feigenbaum constants play an important role in this theory. We investigate of Mandelbrot sets and Julia sets of some mappings in complex plane.

References

- [1] Klevchuk I. I. Investigation of difference equations with rational right-hand sides. In: Non-linear Differential Equations and Their Applications: Collection of Scientific Works. Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. 1992. P. 27–40.
- [2] Klevchuk I. I. Investigation of difference equations with a rational right-hand sides. Bukovinian Mathematical Journal. 2020. 8, No. 2. P. 71–82.

Reachability of a surface by controlled system of differential equations

Valery KOROBV, Oleh VOZNIAK

V.N Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

valerii.korobov@gmail.com, o.vozniak0@gmail.com

We consider the problem of constructing a control that transfers a linear system from a given point onto a surface in finite time. This problem belongs to the class of control problems with variable endpoints. The main results are an explicit algorithm for constructing controls, both with and without control constraints, as well as conditions for controllability from a point onto a surface in the presence of control constraints. Examples were considered earlier in [3].

Consider the control problem of transferring an arbitrary point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ onto a surface $G = \{x : F(x) = 0\}$ along the trajectories of the system

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

where A and B are real matrices of dimensions $n \times n$ and $n \times r$, respectively.

Definition. The system (1) is called controllable onto the set $G \subset \mathbb{R}^n$ if, for any initial point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, there exist a finite time $T(x_0) < \infty$ and a measurable control $u(t, x_0)$ defined on the interval $0 \leq t \leq T(x_0)$ such that the trajectory of the system (1), starting from x_0 at $t = 0$, reaches the set G at time moment $T(x_0)$.

A necessary and sufficient condition for the controllability of the system at a given time T is the equality

$$L + G = \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

where L denotes the linear span of the columns of the Kalman matrix $Q = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$, that is $L = \text{Lin}(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$.

The paper proposes an explicit algorithm for constructing a control for systems satisfying condition (2), reducing the system to the form

$$\begin{cases} \dot{y} = A_{11}y, \\ \dot{z} = A_{21}y + A_{22}z + B_1u, \end{cases}$$

where the second subsystem is completely controllable. The algorithm introduces the new initial and final points $\tilde{z}_0 = -e^{-A_{22}T}z_T + z_0 + \int_0^T e^{-A_{22}\tau}A_{21}y(\tau)d\tau$ and $\tilde{z}_T = 0$, where $x_0 = (y_0, z_0)$ and $x_T = (y_T, z_T)$.

Note that the condition (2) is not sufficient in the presence of control constraints. We obtain conditions for controllability from a point onto a surface in the presence of control constraints for the case when controllable subsystem is canonical. The results are based on the controllability function method of V. I. Korobov and generalise the results on constructing control for a non-equilibrium point obtained in [1, 2]. The results are presented in the following theorem.

Theorem. Consider the control problem of transferring the point $x_0 = (y_0, z_0)$ onto the surface $G = \{x = (y, z) : F(y, z) = 0\}$ for the linear controlled system $\dot{y} = A_1 y$, $\dot{z} = A_2 z + bu$, where

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assume that $L + G = \mathbb{R}^n$ and that the eigenvalues λ_i of A_1 satisfy $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$. Then the equation

$$2a_0\Theta - (N^{-1}(\Theta)\tilde{z}_0(\Theta), \tilde{z}_0(\Theta)) = 0,$$

where

$$N(\Theta) = \int_0^\Theta \left(1 - \frac{t}{\Theta}\right) e^{-A_2 t} b b^* e^{-A_2^* t} dt,$$

has at least one positive root $\Theta > 0$ for every a_0 satisfying

$$0 < a_0 \leq 2d^2 \min \left\{ l, \frac{\gamma}{\|b\|^2} \right\}, \quad l > 0, \gamma > 0.$$

Moreover, the control

$$u(z) = -\frac{1}{2}b^*N^{-1}(\Theta(z))z,$$

transfers the initial state $\tilde{z}_0$ to the origin at time Θ and the initial state x_0 to x_T along the trajectory $y(t) = e^{A_1 t} y_0$, $z(t) = e^{A_2 t} \left(z_0 + \int_0^t e^{-A_2 \tau} b u(\tau) d\tau \right)$, and satisfies the control constraint $|u(z(t))| \leq d$ for all $t \in [0, \Theta]$.

References

- [1] Korobov V. I., Skoryk V. O. Construction of restricted controls for a non-equilibrium point in global sense. Vietnam Journal of Mathematics. 2015. 43, No. 2. P. 459–469. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10013-015-0132-4>.
- [2] Korobov V., Stiepanova K. The Peculiarity of Solving the Synthesis Problem for Linear Systems to a Non-Equilibrium Point. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2021. 17, No. 3. P. 326–340. DOI: <https://doi.org/10.15407/mag17.03.326>.
- [3] Korobov V. I., Vozniak O. S. Time-optimal control on a subspace for the two and three-dimensional system. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2024. 100. P. 48–60. DOI: <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2024-100-03>.

Problem with integral condition for homogeneous system of partial differential equations of fourth order in Sobolev space

Grzegorz KUDUK, Michail SYMOTYUK

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine

gkuduk@onet.eu

In the strip $\Omega(T) : \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in ([T_1, T_2] \cup [T_3, T_4]), x \in \mathbb{R}^n\}$ we consider nonlocal problem with integral conditions

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{U}(t, x) = \frac{\partial^4 \vec{U}(t, x)}{\partial t^4} + \sum_{i=1}^4 A_i \frac{\partial^{4-i} \vec{U}}{\partial t^{4-i} \partial x^i} = 0, \quad (1)$$

$$\int_{T_1}^{T_2} t^k \vec{U}(t, x) dt + \int_{T_3}^{T_4} t^k \vec{U}(t, x) dt = \vec{\varphi}_i(x), \quad k = \{0, 1, 2, 3\}, \quad (2)$$

where $\vec{U}(t, x) = \text{col}(U^1(t, x), U^2(t, x), U^3(t, x), U^4(t, x))$, $\vec{\varphi}_i(x) =$

$\text{col}(\varphi_i^1, \varphi_i^2, \varphi_i^3, \varphi_i^4)$, A_i for $i = \{1, 2, 3, 4\}$, are square matrix 4×4 . Let $H_\alpha, \alpha > 0$ be a Sobolev space with norm. $\|\varphi(x); H_\alpha\| =$

$\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{2\alpha} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi} < \infty$, where $\tilde{\varphi}(\xi)$ is a Fourier transformation of the function $\varphi(x)$. $\overline{H}_\alpha$ is a vector space of the function $\varphi(x)$, with norm $\|\varphi(x), \overline{H}_\alpha\| = \max \|\varphi^j(x); H_\alpha\|$

Theorem. Let conditions occur, let $\Delta(\xi) \neq 0$ for everyone $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. If $\vec{\varphi}_j \in \overline{H}_{\alpha_1}^4$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 + 4(C_4^2 + 1)$, $\alpha_2 > 1$, $j = \{1, \dots, n\}$, then the space $C^4([T_1, T_2] \cup [T_3, T_4], \overline{H}_\alpha^4)$ exists and unique solution $\vec{U}(t, x)$ of the problem (1)-(2), which still is depending on vector-function $\vec{\varphi}_j$, $j = \{1, 2, 3, 4\}$. Solution is the represented in the form

$$\vec{U}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \sum_{j,q=1}^{16} \frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} e^{\lambda_q \xi} \vec{h}_q \psi_j(\xi) d\xi,$$

where $\Delta_{j,q}(\xi)$, $j, q = \{1, \dots, 16\}$, $\xi \neq 0$, algebraic complement the standing element j this poem and q for this column of indicator $\Delta(\xi)$,

$\text{col}(\psi_1(\xi), \dots, \psi_{16}(\xi)) = \text{col}(\tilde{\varphi}_1^1(\xi), \dots, \tilde{\varphi}_1^4(\xi); \dots; \tilde{\varphi}_4^1(\xi), \dots, \tilde{\varphi}_4^4(\xi))$, $\tilde{\varphi}_j^q(\xi)$ is a Fourier transformation of the function $\varphi_j^q(x)$, $j = \{1, 2, 3, 4\}$, $q = \{1, 2, 3, 4\}$. This result continues the research of work [1, 3, 4, 5, 6, 7].

References

- [1] Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kuduk G., Symotyuk M. M. Problem with integral conditions for system equations of second order. 13th Scientific Conference dedicated to the 125th

anniversary of Stefan Banach, National University “Lviv Polytechnic”. Lviv, Ukraine. 2017. P. 42–43.

- [2] Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kuduk G., Symotyuk M. M. Integral problem for partial differential equation of second order in unbounded layer. *Bukovinian Mathematical Journal*. 2016. 4, No. 3–4. P. 69–74.
- [3] Kuduk G., Symotyuk M. M. Problem with integral conditions for linear partial differential equations of second order. International Conference “Boundary Value Problems, Functional Equations Applications”, 3rd Meeting, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszow. Rzeszow, Poland. 2016. P. 40.
- [4] Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kuduk G., Symotyuk M. M. Integral problem for partial differential equation of higher order in an infinite strip. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. 231, No. 4. P. 495–506.
- [5] Kuduk G. Problem with integral conditions for nonhomogeneous partial differential equations of fourth order. XX International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference. Kyiv, Ukraine. 2025. P. 77–78.
- [6] Kuduk G. Problem with integral conditions for linear partial differential equations of third order in Sobolev space. XX International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference. Kyiv, Ukraine. 2025. P. 79–80.

On Quasiperiodic Motions of an Electron in a Toroidal Camera under the Influence of an Electromagnetic Field

Yuriy LOVEIKIN

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

y.loveikin@knu.ua

We consider the problem of an electron motion on a two-dimensional torus $\mathbb{T}^2$ under the influence of an electromagnetic field.

Let the torus $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ embedded in three-dimensional space be described by equations

$$x = (R + r \cos \varphi_1) \cos \varphi_2, \quad y = (R + r \cos \varphi_1) \sin \varphi_2, \quad z = r \sin \varphi_1,$$

where φ_1, φ_2 are angular coordinates, and r and R are the radii of the small and large circles, respectively, with $r < R$.

Assuming that the magnetic field is orthogonal to the torus and has constant intensity B , and that the electric field is tangent to the torus, the motion of the electron is described by the Lagrange equations on the two-dimensional torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \text{mod } 2\pi\}$ with the Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m(R + r \cos \varphi_1)^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{e}{c}B\varphi_1\dot{\varphi}_2 + eE_1\varphi_1 + eE_2\varphi_2,$$

where m is the electron mass, e is its charge, c is the speed of light, and E_1, E_2 are the components of the electric field.

To study the dynamics of electron motion in such a system, we transform the given Lagrangian system into Hamiltonian form. The dynamical system obtained after transformation has a Hamiltonian form on the symplectic manifold $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2, \omega^2)$ with symplectic structure

$$\omega^2 = -\frac{c}{eB}dp_1 \wedge dp_2 + \frac{eB}{c}d\varphi_1 \wedge d\varphi_2,$$

with a multivalued Hamiltonian function

$$H = \frac{p_1^2}{2mr^2} + \frac{p_2^2}{2mR^2} \left(1 + \frac{r}{R} \cos \left(\varphi_1 - \frac{cp_2}{eB}\right)\right)^{-2} - \frac{cE_2p_1}{B} + \frac{cE_1p_2}{B} - eE_1\varphi_1 - eE_2\varphi_2,$$

where $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$. The system is locally Hamiltonian, because the Hamiltonian function is multivalued, or, equivalently, the corresponding 1-form is not globally exact.

Under the condition $\mu = \frac{r}{R} \ll 1$, the system can be considered as a small perturbation of a locally Hamiltonian system with Hamiltonian function

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2mr^2} + \frac{p_2^2}{2mR^2} - \frac{cE_2p_1}{B} + \frac{cE_1p_2}{B} - eE_1\varphi_1 - eE_2\varphi_2.$$

This unperturbed system with Hamiltonian H_0 has a single-valued first integral

$$\mathcal{I}(p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2mr^2} + \frac{p_2^2}{2mR^2}$$

and all trajectories of the unperturbed system are quasiperiodic on three-dimensional tori in four-dimensional space with frequency basis

$$\frac{eB}{cmrR}, \quad \frac{cE_2}{B}, \quad -\frac{cE_1}{B}. \quad (1)$$

On attempting to apply the theorem on perturbation of invariant tori of locally Hamiltonian systems from [3] to the perturbed system (with Hamiltonian H), difficulties arise because the absolute value of the perturbation of the H is estimated as of order $\max\{r/R^3, rR\}$, while the first frequency is estimated as of order $1/(rR)$; consequently this frequency grows without bound as the perturbation tends to zero.

After a series of transformations the perturbed system becomes a system with transformed Hamiltonian

$$H = (\kappa_0 + \mu^2 \kappa_2)y - eE_1\varphi_1 - eE_1\varphi_1 - eE_2\varphi_2 + h(y, \varphi_1, \psi, v, \mu), \quad (2)$$

where $\kappa_0 = \frac{(eB)^2}{m(cR)^2}$, $v = (B, E_1, E_2)$, $\kappa_2 = \kappa_2(v, \xi)$, $h = O(\mu^3)$, $\xi > 0$ is internal parameter numerating the tori of nonperturbed system; and Poisson brackets

$$\{\psi, y\} = 1, \quad \{\varphi_1, \varphi_2\} = -\mu. \quad (3)$$

Applying the theorem on perturbation of invariant tori of locally Hamiltonian systems from [3] to the perturbed system with transformed Hamiltonian (2) and Poisson brackets (3), we can state that most trajectories (in the measure sense) of the original system with multivalued Lagrangian that describes the motion of an electron under the influence of an electromagnetic field are quasiperiodic on three-dimensional tori in four-dimensional space with the same frequency basis (1) as unperturbed system.

In the considered problem, the existence of three-dimensional invariant tori in the four-dimensional phase space of the system that describes the motion of an electron on the two-dimensional torus $\mathbb{T}^2$ under the influence of an electromagnetic field has been proved. These invariant tori persist under the small perturbations arising from the torus geometry and the applied fields, and they support quasiperiodic motions with the same fundamental frequency basis as in the unperturbed model. The obtained result covers both the degenerate case ($\mu \rightarrow 0$) and the nondegenerate case (when μ is sufficiently small but nonzero), thus unifying the study of different situations.

References

- [1] Loveikin Yu. V. Perturbation of invariant tori that foliate the central manifold of conditionally integrable locally Hamiltonian systems. Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. 2011. 4. P. 177–192. (in Ukrainian).

- [2] Loveikin Yu. V., Parasyuk I. O. Invariant tori of locally Hamiltonian systems close to conditionally integrable systems. Ukrainian Mathematical Journal. 2007. 59, No. 1. P. 70–99.
- [3] Loveikin Yu. V., Parasyuk I. O. Theorem on perturbation of coisotropic invariant tori of locally Hamiltonian systems and its applications. Nonlinear Oscillations. 2005. 8, No. 4. P. 487–512.

Generating spaces and characterizations of perfect normality

Oleksandr MASLYUCHENKO, Anastasiia LIANHA

Institute of Mathematics, University of Silesia in Katowice, Katowice, Poland

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

ovmasl@gmail.com, lianha.anastasiia@chnu.edu.ua

A pair (g, h) of functions $g, h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on a topological space X is called a *Hahn pair* if $g \leq h$, g is upper semicontinuous, and h is lower semicontinuous. Such a pair is called a *functional Hahn pair* if both the functions g and h are functionally semicontinuous. We say that a pair (g, h) is *separated* if there exists a continuous function $u : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ such that $g \leq u \leq h$.

In [1], V. K. Maslyuchenko and co-authors introduced *the minimal and the maximal sections* $\wedge_f, \vee_f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ of a function $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, defined by

$$\wedge_f(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y) \quad \text{and} \quad \vee_f(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y), \quad x \in X.$$

We will call the pair $(\wedge_f, \vee_f)$ the *extremal section* of the function f .

The authors of [1] observed that $(\wedge_f, \vee_f)$ is a Hahn pair for any separately continuous function. Evidently, the extremal section of a separately continuous function is separated. Moreover, it is a functional Hahn pair provided that X is perfectly normal or Y is separable.

We say that a pair (g, h) of functions on X is *C-generated* (resp. *CC-generated*) with respect to Y if there exists a continuous (resp. separately continuous) function $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ such that $g = \wedge_f$ and $h = \vee_f$. In [1] it was proved that every Hahn pair on $[a; b]$ is *CC-generated* with respect to $[c; d]$. General results of this type were obtained in [2].

A topological space X is called *C-generating* (resp. *CC-generating*) with respect to a topological space Y if every separated functional Hahn pair (g, h) on X is *C-generated* (resp. *CC-generated*) with respect to Y . It is clear that every *C-generating* space is *CC-generating*.

Using the approach from [2], we obtain the following characterization of perfect normality.

Theorem 1. *Let X be a completely regular space. Then the following conditions are equivalent:*

- (0) X is perfectly normal;
- (1) X is *C-generating* with respect to $\mathbb{N}$;
- (2) X is *C-generating* with respect to $(0; 1]$;
- (3) X is *C-generating* with respect to every non-pseudocompact space;
- (4) X is *C-generating* with respect to some separable space;
- (5) X is *CC-generating* with respect to $\mathbb{N}$;
- (6) X is *CC-generating* with respect to $[0; 1]$;

- (7) X is CC -generating with respect to every space which has a non-scattered compactification;
- (8) X is CC -generating with respect to some separable space.

And finally, we present one result on C -generating spaces which are not perfectly normal.

Theorem 2. *Let X be a completely regular topological space. Then X is C -generating with respect to the space $Y = C^b(X)$ of bounded continuous functions with the topology of uniform convergence.*

References

- [1] Maslyuchenko V. K., Mel'nyk V. S., Voloshyn H. A. Hahn's pairs and zero inverse problem. *Mat. Stud.* 2017. 48, No. 1. P. 74–81. (in Ukrainian). DOI: <https://doi.org/10.15330/ms.48.1.74-81>.
- [2] Kushnir A. S., Maslyuchenko O. V. Pairs of Hahn and separately continuous functions with the given extremal sections. *Bukovinian Mathematical Journal.* 2021. 6, No. 1. P. 210–229. (in Ukrainian). DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.18>. Authors' English translation in arXiv:2501.01261 [math.GN]. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.01261>.

Cluster sets of continuous functions at a point of finite local rank in first countable spaces

Oleksandr MASLYUCHENKO, Denys ONYPA

Institute of Mathematics, University of Silesia in Katowice, Katowice, Poland

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

ovmasl@gmail.com, d.onypa@chnu.edu.ua

Let X be a topological space, Y a subspace of a compact space $\bar{Y}$, $D \subseteq X$ and $f : D \rightarrow Y$. Following P. Painlevé [5] and Collingwood–Lohwater [1], the *cluster set* of f at a point $x \in X$ is

$$\bar{f}(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{f(U \cap D)},$$

where $\mathcal{U}_x$ is the family of all neighbourhoods of x and the closure is taken in $\bar{Y}$; the associated multifunction $\bar{f} : X \rightarrow 2^{\bar{Y}}$ has graph $\overline{\text{gr } f}$, so $\text{dom } \bar{f} = \bar{D}$, and f is continuous at $x \in D$ iff $\bar{f}(x) = \{f(x)\}$. We address the following

Problem. *Given X , $D \subseteq X$, a point $x \in \bar{D} \setminus D$, and a dense subspace Y of a compact space $\bar{Y}$, describe the sets $F \subseteq \bar{Y}$ that can be realised as $\bar{f}(x)$ for some continuous $f : D \rightarrow Y$.*

For X metrizable, D a boundary locally connected open set and $Y = \mathbb{R}$, $\bar{Y} = \bar{\mathbb{R}}$, the problem was solved in [2]. The case where $L = \{x\}$ is a single point and Y is a general topological space was initiated in [3], and [4] treated upper semicontinuous compact-valued cluster multifunctions on a closed nowhere dense subset. Here we complete the picture for a single point in an arbitrary T_1 -space, measuring the local structure of D at x by its *local rank*.

Recall that the *rank* $r(x, E)$ of a point $x \in \bar{E}$ in $E \subseteq X$ is the supremum of $n \in \mathbb{N}$ for which E splits into pairwise disjoint non-empty clopen pieces $E_1, \dots, E_n$ with $x \in \bar{E}_k$ for each k ; the *local rank* is $\text{lr}(x, E) = \sup_{U \in \mathcal{U}_x} r(x, E \cap U)$. Denote by $\text{nc}(F)$ the number of connected components of F (with $\text{nc}(F) = \infty$ if there are infinitely many). A subspace Y of $\bar{Y}$ is *locally arcwise connectedly embedded* in $\bar{Y}$ [3] if for every $a \in \bar{Y}$ and every neighbourhood U of a in $\bar{Y}$ there is a neighbourhood $V \subseteq U$ of a such that any two points of $V \cap Y$ are joined by a continuous curve lying in $U \cap Y$. The following necessary bound is straightforward.

Proposition 1. *Let $D \subseteq X$, $a \in \bar{D}$ and $f : D \rightarrow Y$ be continuous. Then $\text{nc}(\bar{f}(a)) \leq \text{lr}(a, D)$.*

To reverse this bound we control D near x by a single scalar. A continuous function $\varphi : X \rightarrow [0; +\infty)$ is a *base function* at $a \in X$ if $\{\varphi^{-1}([0; \varepsilon)) : \varepsilon > 0\}$ is a base of neighbourhoods of a in X ; for a T_1 -space X such a φ exists iff X is completely regular at a and $\chi(X, a) = \aleph_0$, and then $\varphi^{-1}(0) = \{a\}$. A mapping $g : X \rightarrow Y$ is *open at a point a* if $g(U)$ is a neighbourhood of $g(a)$ for every neighbourhood U of a .

Proposition 2. *Let X be a T_1 -space, φ a base function at $a \in X$, $D \subseteq X$ with $\text{lr}(a, D) = n \in \mathbb{N}$ and $a \in \bar{D} \setminus D$. Then there exist a neighbourhood U of a and pairwise disjoint clopen sets*

$E_1, \dots, E_n$ in $E = D \cap U$ with $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$, $a \in \overline{E_k}$, and each restriction $\varphi_k = \varphi|_{E_k \cup \{a\}}$ is open at a .

Although φ itself need not be open at a on all of D , it becomes open at a once restricted to each piece E_k of a decomposition adapted to the local rank. Openness at a is exactly what makes composition with φ_k transport cluster sets: if $g : X \rightarrow T$ is continuous and open at x_0 , $h : T \rightarrow Y$, and $t_0 = g(x_0)$, then $\overline{h \circ g}(x_0) = \overline{h}(t_0)$. Combined with the following realisation theorem on the half-line [3] this yields our main result.

Theorem 1. *Let X be a T_1 -space that is completely regular and first countable at a point x , let $D \subseteq X$ with $x \in \overline{D} \setminus D$ and $\text{lr}(x, D) < \infty$, and let Y be a dense locally arcwise connectedly embedded subspace of a metrizable compact $\overline{Y}$. Then for every non-empty closed set $F \subseteq \overline{Y}$ the following are equivalent:*

- (i) $\text{nc}(F) \leq \text{lr}(x, D)$;
- (ii) *there exists a continuous $f : D \rightarrow Y$ with $\overline{f}(x) = F$.*

Remark. For a metric space (X, d) the distance $\varphi(t) = d(x, t)$ is a base function at x , so Theorem 3 of [6], announced by the authors for the metrizable case, is an immediate corollary of Theorem 1.

Finally, we emphasize that the assumption of finiteness of the local rank is essential for the method used above. The case $\text{lr}(x, D) = \infty$ remains open.

References

- [1] Collingwood E. F., Lohwater A. J. The Theory of Cluster Sets. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 56. Cambridge: Cambridge University Press. 1966.
- [2] Maslyuchenko O. V., Onypa D. P. The cluster sets of continuous functions. Mat. Stud. 2016. 46, No. 1. P. 44–50. (in Ukrainian).
- [3] Maslyuchenko O. V., Onypa D. P. On cluster sets of continuous functions with values in locally arcwise connected spaces. Bukovyn. Mat. Zh. 2015. 3, No. 3–4. P. 127–132. (in Ukrainian).
- [4] Maslyuchenko O. V., Onypa D. P. Construction of functions with given cluster sets. Colloq. Math. 2018. 152. P. 55–64.
- [5] Painlevé P. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895). Paris: A. Hermann. 1897.
- [6] Onypa D., Maslyuchenko O. Construction of continuous functions with the given cluster set in a point with finite local rank. In: Mathematics and Information Technologies. Proceedings of the International Scientific Conference dedicated to the 55th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics (Chernivtsi, September 28–30, 2023). Chernivtsi: Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University. 2023. P. 106–107.

On the solvability of the Cauchy problem for a degenerate equation

Ihor MEDYNSKYI¹, Halyna PASICHNYK²

¹*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

²*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine*

ihor.p.medynskyi@lpnu.ua, h.pasichnyk@chnu.edu.ua

Parabolic equations with growing coefficients, which are considered in the report, arise in problems of the theory of random processes and statistical radio engineering.

Let n_1, n_2, n_3 given natural numbers such that $n_3 \leq n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2 + n_3$; the variable $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$, $x_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$. In the layer $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ of finite thickness $T > 0$ we consider the equation

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - b \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \partial_{x_{1j}} \right) u(t, x) = f(t, x),$$

where a_{js} and b are real constants, with $a_{js} = a_{sj}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, and the condition of parabolicity holds

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \sigma_{1j} \sigma_{1s} \geq \delta |\sigma_1|^2.$$

For such an equation, the fundamental solution of the Cauchy problem was found in explicit form in [1, 2], and its properties as well as the properties of the Poisson integrals generated by it were studied. Based on these properties, theorems on the representation of solutions to the Cauchy problem and solutions defined in an open layer from special weighted L_p -spaces in the form of Poisson integrals were proved for the homogeneous equation in [3]. The properties of the volume potential generated by the fundamental solution of the Cauchy problem in classes of bounded functions are presented in [4].

The report is dedicated to the implementation of the Eidelman–Ivasyshen approach to obtaining exact results on the well-posedness of the Cauchy problem in special weighted spaces.

References

- [1] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. Fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic equation with growing lowest coefficients. 2014. 11, No. 2. P. 126–153.
- [2] Ivasyshen S., Pasichnyk H. The Cauchy problem for parabolic equation with growing lowest coefficients. Math. Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. 2014. 11. P. 73–87.
- [3] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. Integral representation of solutions for parabolic equation with growing lowest coefficients. Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. 2015. 12, No. 2. P. 205–229.

- [4] Medynskyi I. P., Pasichnyk H. S. The properties of the volume potential for one parabolic equation with growing lowest coefficients. Bukovinian Mathematical Journal. 2023. 11, No. 2. P. 197–210.

Regularity and asymptotic properties of nonlocal stochastic evolution equations arising in chemical and biomedical models

Oleksandr MISIATS

Virginia Commonwealth University, Richmond, United States

omisiats@gmail.com

This talk is devoted to the influence of stochastic perturbations on the long time behavior of nonlocal evolution equations. I will start with a brief overview of the theory of stochastic evolution equations, and their applications. I will specifically focus on two of such models: the bidomain model of heart tissue, and the aggregation-diffusion equation (Keller-Segel model).

The nonlocal character of these equations can be present either in the differential operator (bidomain) or in the reaction term (Keller-Segel). Using the fundamental concepts in the area of stochastic analysis, semigroup theory and PDEs, in my talk, I will address the effects of noise on the existence of global vs. local solutions (Keller-Segel) and their regularity, as well as the existence of invariant measures (for the bidomain model), which is the key step in establishing the qualitative behavior of the underlying physical system. This is the joint project with Prof. Oleksandr Stanzhytskyi (Kyiv) and Prof. Ihsan Topaloglu (VCU)

Box-flat spaces and diagonals of separately continuous maps

Volodymyr MYKHAYLYUK

Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

vmykhaylyuk@ukr.net

Let $f : X^n \rightarrow Y$ be a map. Then the map $g : X \rightarrow Y$ defined by $g(x) = f(x, \dots, x)$ is called a *diagonal of f* .

Investigations of diagonals of separately continuous functions $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}$ were started in classical works of R. Baire [1], H. Lebesgue [4, 5] and H. Hahn [2] who proved that diagonals of separately continuous functions of n real variables are exactly the functions of the $(n - 1)$ -th Baire class.

Let $(X_s)_{s \in S}$ be a family of topological spaces X_s . The product $X = \prod_{s \in S} X_s$ endowed with the *box topology* generated by the family of all boxes $\prod_{s \in S} G_s$, where $(G_s)_{s \in S}$ is a family of open subsets of X_s for every $s \in S$, is called *the box product* and is denoted by $\square_{s \in S} X_s$.

The problem on constructing a separately continuous mapping with a given diagonal with values in products of topological spaces endowed with the box topology was investigated in [3]. The following result was obtained there.

Theorem 1. [3, Theorem 1.1] *Let X be a paracompact connected space, $Z = \prod_{s \in S} Z_s$ be a product of a family of equiconnected metrizable spaces endowed with the box topology and $g : X \rightarrow Z$ be a Baire-one map. Then there exists a separately continuous map $f : X^2 \rightarrow Z$ with the diagonal g .*

For a fixed point $a = (a_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} X_s$ we consider the set

$$\sigma(a) = \{(x_s)_{s \in S} : |\{s \in S : x_s \neq a_s\}| < \omega\}.$$

Definition 1. A topological space X is called *box-flat* if for each set S and each continuous map $f : X \rightarrow \square^S \mathbb{R}$, every point $x \in X$ has a neighborhood $U_x \subseteq X$ such that

$$f(U_x) \subseteq \sigma(f(x)) \subseteq \mathbb{R}^S.$$

Theorem 2. *Let X be a topological space such that for every $x \in X$ any one of the following condition holds:*

- (1) $\chi(x, X) \leq \aleph_0$;
- (2) *there exists a connected neighborhood U of x in X ;*
- (3) *there exists a pseudocompact neighborhood U of x in X ;*
- (4) *there exists a neighborhood U of x with the countable chain condition.*

Then the space X is a box-flat space.

Proposition 1. *There exists a perfect space X which is not box-flat.*

Proposition 2. *Assume that the character $\chi(\square^\omega[0, 1]) = \aleph_1$. Then there exists a Lindelöf space X which is not box-flat.*

Theorem 3. *Let $Z = \square_{s \in S} Z_s$ be the box-product of equiconnected metrizable spaces and X be a box-flat paracompact space. Then each function $f : X \rightarrow Z$ of the first Baire class is the diagonal of some separately continuous function $g : X \times X \rightarrow Z$.*

Theorem 3 combined with Theorem 2 implies the following corollary extending Theorem 1.1 of [3].

Corollary 1. *Let $Z = \square_{s \in S} Z_s$ be the box-product of equiconnected metrizable spaces and X be a paracompact space such that for every $x \in X$ any one of the following condition holds:*

- (1) $\chi(x, X) \leq \aleph_0$;
- (2) *there exists a connected neighborhood U of x in X ;*
- (3) *there exists a pseudocompact neighborhood U of x in X ;*
- (4) *there exists a neighborhood U of x with the countable chain condition.*

Then each function $f : X \rightarrow Z$ of the first Baire class is the diagonal of some separately continuous function $g : X \times X \rightarrow Z$.

References

- [1] Baire R. Sur les fonctions de variables réelles. Ann. Mat. Pura Appl., Ser. 3. 1899. 3. P. 1–123.
- [2] Hahn H. Theorie der reellen Funktionen. 1. Band. Berlin: Verlag von Julius Springer. 1921.
- [3] Karlova O., Mykhaylyuk V. Diagonals of separately continuous maps with values in box products. Topol. Algebra Appl. 2018. 6. P. 26–33.
- [4] Lebesgue H. Sur l'approximation des fonctions. Bull. Sci. Math. 1898. 22. P. 278–287.
- [5] Lebesgue H. Sur les fonctions représentables analytiquement. Journ. de Math. 1905. 2, No. 1. P. 139–216.

Analysis of COVID-19 dynamics in Ukraine based on the new generalized SIR and SEIR models

Igor Nesteruk¹, Bohdan Shepetyuk²

¹*Institute of Hydromechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

²*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine*

inesteruk@yahoo.com, shepetyukb@gmail.com

Keywords: SEIR model; the COVID-19 pandemic in Ukraine; reproduction number.

Daily numbers of COVID-19 cases, the classical SIR (Susceptible-Infectious-Removed) model [1], the exact solution of corresponding differential equations [2] and the original parameter identification procedure [2] were used to simulate and predict the first pandemic wave in Ukraine. Unfortunately, the accuracy of the best prediction was only 69.2% (compared with best predictions for China (3.8%), South Korea (7.8%), Austria (6.6%), Italy (11.6%)), [2]. It looks like the second epidemic wave started in our country before the first one finished. Next pandemic waves in Ukraine were simulated in [2, 3] with the use of assumptions that the model parameters are constant only for i -th epidemic wave. Both national dataset and one available in [4] were used in [3] and the results of SIR simulations were compared.

Weekly numbers of COVID-19 cases W_j ($j = 1, 2, \dots, n$) and deaths in Ukraine [4, 5] are less random than daily datasets and need no smoothing [6, 7]. In this study we will add some recent data from [5] and try to analyze time series of W_j using the novel generalized SEIR (Susceptible-Exposed-Infectious-Removed) [8] and SIR [9] models, which take into account also hidden (asymptomatic/unregistered) patients. The most reliable generalized SEIR model (which takes into account also the incubation periods) consists of 6 differential equations and 14 parameters [8]. The calculations of the optimal values of these parameters (providing the best coincidence with the limited number of observations n) is a non-trivial problem and probably can be solved only with the use of High Performance Computing or AI. Nevertheless, the proposed model allows estimating the ratio of the numbers of exposed persons at different moments of time $R_{E\tau}(t) = E(t)/E(t - \tau)$ [8]. When $\tau = 1$ week, the corresponding weekly increasing/decreasing rates of the numbers of exposed persons can be estimated as $R_{Ej} \approx W_j/W_{j-1}$ [8]. Epidemiologists widely use this ratio (see, e.g., [5]), which according to the mathematical model [8] corresponds to the weekly increasing/decreasing rates for the number of exposed persons and can be useful for making decisions about epidemic control.

The generalized SIR model [9] allows obtaining oscillating solutions and equilibrium points with the non-zero constant rate of increasing the numbers of visible cases. In 2022 and 2023, in Ukraine, we can see the periods with almost constant W_j values [6]. The same stagnation periods occurred from the beginning of April 2026 until mid-May 2026 (with some increase during the period from April 14 to May 5, 2026, likely caused by the emergence of the new “Cicada” variant [10]). After May 17, 2026, no new COVID-19 cases were registered in Ukraine during

6 weeks. Models [8, 9] allow existing a solution with zero numbers of infectious persons. Its stability has to be investigated in the future. Probably the abrupt transfer from the equilibrium to the zero solution is the result of increasing the visibility coefficient $\beta_i \geq 1$ — the ratio of total infections to the visible ones. Due to the weakening of the virus and increasing the immunity $\beta_i \rightarrow \infty$, and the epidemic becomes totally hidden.

References

- [1] M. Keeling, P. Rohani, *Modelling Infectious Diseases in Humans and Animals*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2008.
- [2] I. Nesteruk, *COVID-19 Pandemic Dynamics*. Springer Nature, 2021. DOI: [10.1007/978-981-33-6416-8](https://doi.org/10.1007/978-981-33-6416-8).
- [3] I. Nesteruk, Detections and SIR simulations of the COVID-19 pandemic waves in Ukraine, *Comput. Math. Biophys.* **9** (2021), 46–65. DOI: [10.1515/cmb-2020-0117](https://doi.org/10.1515/cmb-2020-0117).
- [4] COVID-19 Data Repository by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University (JHU). <https://github.com/owid/covid-19-data/tree/master/public/data>. Accessed 11 December 2023.
- [5] Інформація за епідемічний сезон ГРВІ 2025/2026: інформаційні бюлетені за 21–52 тижні 2025 року (з 19.05–28.12.2025 року) і за 1–15 тижні 2026 року до 12.04.2026 року. <https://phc.org.ua/kontrol-zakhvoryuvan/inshi-infekciyni-zakhvoryuvannya/zakhvoryuvanist-na-grip-ta-grvi-v-ukraini>.
- [6] I. Nesteruk, Real Infection Spreading Rates for the COVID-19 pandemic in Ukraine estimated with the Use of the Novel Reproduction Number. Research Square, Posted September 26th, 2025. DOI: [10.21203/rs.3.rs-7710352/v1](https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-7710352/v1).
- [7] I. Nesteruk, B. Shepetyuk, O. Dorozhkin, SARS-CoV-2 and Influenza Epidemic Dynamics in Ukraine in 2025 and 2026 and global trends. Preprint ResearchGate, May 6, 2026. DOI: [10.13140/RG.2.2.19919.85923](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.19919.85923).
- [8] I. Nesteruk, Generalized SEIR model and a new reproduction number reflecting the real epidemic dynamics, 24 June 2026, PREPRINT Research Square. DOI: [10.21203/rs.3.rs-10137598/v1](https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-10137598/v1).
- [9] I. Nesteruk, How Re-Infections and Newborns Can Impact Visible and Hidden Epidemic Dynamics? *Computation* **13** (2025), 113. DOI: [10.3390/computation13050113](https://doi.org/10.3390/computation13050113).
- [10] <https://www.radiosvoboda.org/a/news-moz-koronavirus-tsykada/33737954.html>

The Hyperbolic Relaxation of the IBVP for the Cahn–Hilliard Equation

Andrei Perjan

Moldova State University, Chişinău, Republic of Moldova

andrei.perjan@usm.md; aperjan1249@gmail.com

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$) be a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $T > 0$, and $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Our goal is to study the behaviour of the solutions to the initial boundary value problem (IBVP)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \partial_{tt}^2 u_\varepsilon + \partial_t u_\varepsilon - \Delta(-\Delta u_\varepsilon + a u_\varepsilon + B(u_\varepsilon)) = f_\varepsilon(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ u_\varepsilon|_{t=0} = u_{0\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega, \\ \partial_t u_\varepsilon|_{t=0} = u_{1\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega, \\ u_\varepsilon|_{x \in \partial\Omega} = \Delta u_\varepsilon|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (P_\varepsilon)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$, where $\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}$, and $B(u) = |u|^p u$.

The problem (P_ε) is the relaxation of the corresponding IBVP for the Cahn–Hilliard equation

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v - \Delta(-\Delta v + a v + B(v)) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \Omega, \\ v|_{x \in \partial\Omega} = \Delta v|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (P_0)$$

The model (P_0) is governed by the celebrated Cahn–Hilliard equation, which was proposed to describe phase separation phenomena in binary systems, including phase separation processes between healthy and tumour tissues and the phase separation of binary mixtures [1]. The unknown u stands for the relative concentration of one phase, or component, in a binary material.

In recent years, researchers' attention has turned to other versions of (P_0) related to specific physical situations. Among them, we are interested here in the so-called hyperbolic relaxation of the equation, proposed by P. Galenko and V. Lebedev [2]. This can be written as (P_ε) , where ε is a small relaxation parameter, and the new term εu_{tt} takes into account the occurrence of “inertial” effects. From a mathematical point of view, equation (P_ε) is a semilinear damped wave equation.

By $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, we denote the usual real Sobolev space endowed with the norm

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=0}^k |\partial^\alpha u(x)|^2 dx.$$

The space $H_0^k(\Omega)$ is the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in the norm of $H^k(\Omega)$.

Denote by $V = H_0^1(\Omega)$ the space endowed with the scalar product

$$(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$

and by $V' = H^{-1}(\Omega)$ the dual space of V .

For $k \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p \leq +\infty$, $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, and a Banach space X , we denote by $W^{k,p}(a, b; X)$ the Banach space of all vector-valued distributions $u \in D'(a, b; X)$ such that $u^{(j)} \in L^p(a, b; X)$, $j = 0, 1, \dots, k$, endowed with the norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^k \|u^{(j)}\|_{L^p(a,b;X)}^p \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty), \\ \max_{0 \leq j \leq k} \|u^{(j)}\|_{L^\infty(a,b;X)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Definition 1. Let $T > 0$, $f \in L^\infty(0, T; V')$, and $B : D(B) \subseteq L^2(\Omega) \rightarrow V'$. We say that a function

$$u_\varepsilon \in W^{2,\infty}(0, T; V') \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^3(\Omega))$$

is a *quasi-strong solution* (in what follows, simply called a solution) to the problem (P_ε) if u_ε satisfies the equation (P_ε) in V' for a.e. $t \in (0, T)$ and satisfies the corresponding initial and boundary conditions.

Definition 2. Let $T > 0$, $f \in L^\infty(0, T; V')$, and $B : D(B) \subseteq L^2(\Omega) \rightarrow V'$. We say that a function

$$v \in L^\infty(0, T; V') \cap L^\infty(0, T; H^3(\Omega))$$

is a solution to the problem (P_0) if v satisfies the equation (P_0) in V' for a.e. $t \in (0, T)$ and satisfies the corresponding initial and boundary conditions.

Theorem 1. Let $T > 0$, $b \geq 0$, and

$$\begin{cases} q \geq 0, & \text{if } n = 1, \\ q \in [1, 2], & \text{if } n = 2. \end{cases} \quad (1)$$

If

$$u_{0\varepsilon} \in H^3(\Omega) \cap V, \quad u_{1\varepsilon} \in V, \quad f_\varepsilon \in L^2(0, T; V'),$$

then there exists a unique quasi-strong solution to the problem (P_ε) .

Theorem 2. Let $T > 0$, $b \geq 0$, and let q satisfy conditions (1). If

$$u_0 \in H^3(\Omega) \cap V, \quad f \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)),$$

then there exists a unique quasi-strong solution to the problem (P_0) .

Theorem 3. Let $T > 0$, $n = 1, 2$, and $b \geq 0$. Suppose that

$$a_0 = \lambda_1 + \min\{0, a\} > 0,$$

where λ_1 is the first eigenvalue of the Dirichlet problem for the Laplace equation, and suppose that conditions (1) are fulfilled.

If

$$u_0, u_{0\varepsilon} \in H^3(\Omega) \cap V, \quad u_{1\varepsilon} \in V,$$

and

$$f, f_\varepsilon \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega)), \quad p \geq 1,$$

then there exist C and ε_0 , depending on a_0, q, p, b, Ω , such that

$$\|u_\varepsilon - v\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq C [\mathbf{M}(T)\varepsilon^\beta + D_\varepsilon], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad (2)$$

where u_ε and v are solutions to the problems (P_ε) and (P_0) , respectively,

$$\mathbf{M}(T) = \|u_{0\varepsilon}\|_{H^2(\Omega)} + \|u_{1\varepsilon}\|_V + \|f\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))},$$

$$D_\varepsilon = \|u_{0\varepsilon} - u_0\| + \|f_\varepsilon - f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

and

$$\beta = \begin{cases} 1/4, & \text{if } f = f_\varepsilon = 0, \\ (p-1)/(2p), & \text{if } f \neq 0. \end{cases}$$

Conclusions. The main result of Theorem 3 shows that the small relaxations of the IBVP for the nonviscous semilinear Cahn–Hilliard equation have a regular character. We also indicate the rate of convergence of the solutions of the perturbed problem to the corresponding solutions of the unperturbed problem as the relaxation parameter tends to zero.

Acknowledgments

This study was supported by the research project 011303, funded by IMCS “Vladimir Andrunachievici”, Moldova State University.

References

- [1] Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a non-uniform system I. Interfacial free energy. J. Chem. Phys. 1958. Vol. 2. P. 258–267.
- [2] Galenko P., Lebedev V. Analysis of the dispersion relation in spinodal decomposition of a binary system. Philos. Mag. Lett. 2007. Vol. 87. P. 821–827.
- [3] Grasselli M., Schimperna G., Zelik A. On the 2D Cahn–Hilliard Equation with Inertial Term. Communications in Partial Differential Equations. 2009. Vol. 34. P. 137–170. DOI: 10.1080/0360530080268247.

Mathematical and computer modeling of nonlinear competitive diffusion in nanoporous particles media

Mykhayko PETRYK¹, Igor BOYKO¹, Mykola SHYNKARYK², Oksana PETRYK¹

¹*Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ternopil, Ukraine*

²*West Ukrainian National University, Ternopil, Ukraine*

mykhaylo_petryk@tntu.edu.ua

Based on the principles of multicomponent mass transfer in the nanoporous media [1, 2], a competitive diffusion and adsorption model is developed:

$$\frac{\partial C_s(t, Z)}{\partial t} = \frac{D_{inter_s}}{l^2} \frac{\partial^2 C_s}{\partial Z^2} - \varepsilon_{inter} K_s \frac{D_{intra_s}}{R^2} \left(\frac{\partial Q_s}{\partial X} \right)_{X=1} \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q_s(t, X, Z)}{\partial t} = \frac{D_{intra_s}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 Q_s}{\partial X^2} + \frac{2}{X} \frac{\partial Q_s}{\partial X} \right) \quad (2)$$

with initial conditions:

$$C_s(0, Z) = 0, \quad Q_s(0, X, Z) = 0, \quad Z \in (0, 1), \quad X \in (0, 1), \quad s = 1, 2 \quad (3)$$

Boundary conditions for dimensionless coordinate X of the nanoporous particle and Langmuir's equilibrium conditions:

$$\frac{\partial Q_s}{\partial X}(t, 0, Z) = 0, \quad Q_s(t, 1, Z) = \frac{K_s C_s(t, Z)}{1 + K_{s1} C_{s1}(t, Z) + K_{s2} C_{s2}(t, Z)}, \quad s = 1, 2 \quad (4)$$

Boundary conditions for dimensionless coordinate Z :

$$C_s(t, 1) = 1, \quad \frac{\partial C_s}{\partial Z}(t, 0) = 0, \quad t > 0 \quad (5)$$

where C_s, Q_s – concentrations of the s -type diffused components in the gas and solid phases, D_{inter_s}, D_{intra_s} – diffusion coefficients in the interparticle and intraparticle spaces, K_s – adsorption constants, l – interparticle space dimension, R – radius of the particle.

The non-isothermal model (1)–(5) is decomposed into a system of boundary value problems with nonlinear Langmuir competitive adsorption equilibrium to a convergent series at the phase transition point and a small parameter. The diffusion coefficients were identified based on the results of solving the inverse problem and experimental data of real adsorption processes, and computer multiparameter modeling of the concentration spatial-temporal distributions of diffused components in the interparticle and intraparticle spaces was performed.

References

- [1] Petryk M., Boyko I., Fessard J., Lebovka N. Modelling of non-isothermal adsorption of gases in nanoporous adsorbent based on Langmuir equilibrium. *Adsorption*. 2023. 29. P. 141-150. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10450-023-00389-9>.
- [2] Petryk M., Ivanchov N., Leclerc S., Canet D., Fraissard J. Competitive adsorption and diffusion of gases in a microporous solid. In: *Zeolites - New Challenges*. London, UK: IntechOpen. 2020. DOI: 10.5772/intechopen.

Linear fuzzy Cauchy problems

Andrii PLOTNIKOV^a, Tetyana KOMLEVA^a, Natalia SKRIPNIK^b

^a*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine*

^b*Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine*

a-plotnikov@ukr.net, t-komleva@ukr.net, natalia.skripnik@gmail.com

Let $\text{conv}(R^n)$ be the family of all nonempty compact convex subsets of R^n with the Pompeiu-Hausdorff metric $h(X, Y) = \max\{\max_{\xi \in X} \min_{\zeta \in Y} \|\xi - \zeta\|, \max_{\zeta \in Y} \min_{\xi \in X} \|\xi - \zeta\|\}$, where $\|\cdot\|$ denotes the usual Euclidean norm in R^n .

Let E^n be the family of mappings $x : R^n \rightarrow [0, 1]$ satisfying the following conditions:

- 1) x is normal, i.e. there exists an $\xi_0 \in R^n$ such that $x(\xi_0) = 1$;
 - 2) x is fuzzy convex, i.e. $x(\lambda\xi + (1 - \lambda)\zeta) \geq \min\{x(\xi), x(\zeta)\}$ whenever $\xi, \zeta \in R^n$ and $\lambda \in [0, 1]$;
 - 3) x is upper semicontinuous, i.e. for any $\xi_0 \in R^n$ and $\varepsilon > 0$ exists $\delta(\xi_0, \varepsilon) > 0$ such that $x(\xi) < x(\xi_0) + \varepsilon$ whenever $\|\xi - \xi_0\| < \delta$, $\xi \in R^n$;
 - 4) the closure of the set $\{\xi \in R^n : x(\xi) > 0\}$ is compact.
- Let $\widehat{0}$ be the fuzzy mapping defined by $\widehat{0}(\xi) = 0$ if $\xi \neq 0$ and $\widehat{0}(0) = 1$.

Definition. [1] The set $\{\xi \in R^n : x(\xi) \geq \alpha\}$ is called the α - level $[x]^\alpha$ of a mapping $x \in E^n$ for $0 < \alpha \leq 1$. The closure of the set $\{\xi \in R^n : x(\xi) > 0\}$ is called the 0 - level $[x]^0$ of a mapping $x \in E^n$.

Define the metric $D : E^n \times E^n \rightarrow R_+$ by the equation $D(x, y) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} h([x]^\alpha, [y]^\alpha)$.

We know that (E^n, D) is a complete metric space [1].

Let X, Y, Z be in $\text{conv}(R^n)$. The set Z is the Hukuhara difference of X and Y , if $Y + Z = X$, i.e. $Z = X \overset{H}{-} Y$ [2]. Hence, if $x, y, z \in E^n$, then z is the fuzzy difference of x and y , if $[z]^\alpha = [x]^\alpha \overset{H}{-} [y]^\alpha$ for all $\alpha \in [0, 1]$, i.e. $z = x - y$.

Definition. [1] A fuzzy mapping $x : [0, T] \rightarrow E^n$ is fuzzy differentiable at $t \in [0, T]$ if for some $h > 0$ the fuzzy differences $x(t + \Delta) - x(t)$, $x(t) - x(t - \Delta)$ exist for all $0 < \Delta < h$ and there exists an $\dot{x}(t) \in E^n$ such that

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0+} D(\Delta^{-1}(x(t + \Delta) - x(t)), \dot{x}(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0+} D(\Delta^{-1}(x(t) - x(t - \Delta)), \dot{x}(t)) = 0.$$

The report discusses the following linear fuzzy Cauchy problems

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) + f(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) + f(t) = \widehat{0}, \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

where $A : [0, T] \rightarrow R^{n \times n}$ is a continuous matrix function, $f : [0, T] \rightarrow E^n$ is a continuous fuzzy mapping, and $x_0 \in E^n$.

Unlike Cauchy problems for ordinary linear differential equations, in this case we will have different existence theorems and solution formulas.

Theorem. *The Cauchy problem (1) has a solution $x(\cdot)$ on $[0, T]$, given by*

$$x(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t A(\tau_k) \int_0^{\tau_k} A(\tau_{k-1}) \dots \int_0^{\tau_2} A(\tau_1) g(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{k-1} d\tau_k,$$

where $g(t) = x_0 + \int_0^t f(s)ds$, the integral is understood in the sense of the fuzzy Riemann integral [3].

Theorem. *The Cauchy problem (2) has a solution $x(\cdot)$ on $[0, T]$, given by*

$$\begin{aligned} x(t) = & g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t A(\tau_{2k}) \int_0^{\tau_{2k}} A(\tau_{2k-1}) \dots \int_0^{\tau_2} A(\tau_1) g(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{2k-1} d\tau_{2k} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t A(\tau_{2k-1}) \int_0^{\tau_{2k-1}} A(\tau_{2k-2}) \dots \int_0^{\tau_2} A(\tau_1) g(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{2k-2} d\tau_{2k-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

if and only if the fuzzy difference in (5) for all $t \in (0, T]$ and the fuzzy difference $f(0) - A(0)x_0$ exist, where $g(t) = x_0 + \int_0^t f(s)ds$.

Theorem. *The Cauchy problem (3) has a solution $x(\cdot)$ on $[0, T]$, given by*

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t A(\tau_k) \int_0^{\tau_k} A(\tau_{k-1}) \dots \int_0^{\tau_2} g(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{k-1} d\tau_k$$

if and only if there exists a continuous fuzzy mapping $g(t)$ on $[0, T]$ such that $g(t) = A(t)x_0 - f(t)$ for all $t \in [0, T]$.

Theorem. *The Cauchy problem (4) has a solution $x(\cdot)$ on $[0, T]$, given by*

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^t A(\tau_k) \int_0^{\tau_k} A(\tau_{k-1}) \dots \int_0^{\tau_2} A(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{k-1} d\tau_k \right] x_0 - \\ & - \int_0^t \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_s^t A(\tau_k) \int_{\tau_k}^t A(\tau_{k-1}) \dots \int_{\tau_2}^t A(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{k-1} d\tau_k \right] f(s) ds \end{aligned}$$

if and only if $[x_0]^0 \in R^n$ and $[f(t)]^0 \in R^n$ for all $t \in [0, T]$.

References

- [1] A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik, Differential equations with clear and fuzzy set-valued right-hand side. Asymptotic methods, AstroPrint, Odessa, 2009.
- [2] N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik, Differential equations with impulse effects: Multivalued right-hand sides with discontinuities, Walter De Gruyter GmbH& Co, Berlin/Boston, 2011, <https://doi.org/10.1515/9783110218176>.
- [3] B. Bede, Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer Berlin, Heidelberg, 2013, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35221-8>.

Topological Classification of SNIC Bifurcations on Closed Surfaces

Oleksandr PRYSHLIAK

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

prishlyak@knu.ua

We consider a one-parameter family of autonomous differential equations on a closed two-dimensional surface,

$$\dot{z} = X_\mu(z), \quad z \in M,$$

and study the qualitative changes of the phase portrait caused by a saddle-node on an invariant circle (SNIC) bifurcation.

We use the following local model of a SNIC bifurcation. Consider the one-parameter family of vector fields on the open infinite cylinder

$$M = \mathbb{R} \times S^1 = \mathbb{R} \times [0, \pi] / (u, 0) \sim (u, \pi)$$

given by

$$\dot{u} = u, \quad \dot{v} = \mu + \sin^2 v.$$

At the critical value $\mu = 0$, the invariant circle $\gamma = \{u = 0\}$ contains the unique singular point $s = (0, [0])$. In local coordinates near s the system has the form

$$\dot{u} = u, \quad \dot{v} = v^2 + O(v^4),$$

which is the normal form of a saddle-node singularity. The u -direction is repelling, so the node component of the saddle-node is a source. For $\mu < 0$ two singular points occur on the invariant circle, whereas for $\mu > 0$ there are no singular points on it and the trajectories rotate around the circle. Thus $\mu = 0$ represents a saddle-node on an invariant circle bifurcation.

The same local model can also be considered on the open Möbius strip obtained from $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ by the identification

$$(u, 0) \sim (-u, \pi).$$

We follow the approach developed in [1] and apply it to the global topological classification of phase portraits generated by SNIC bifurcations on closed surfaces. Although the local structure of the bifurcation is standard, the global phase portrait depends essentially on the way in which the separatrices of the saddle-node are connected with the rest of the phase portrait. In particular, several saddles and periodic orbits may lead to different global topological configurations.

To classify these configurations, we introduce a stable separatrix skeleton. After cutting the surface along its periodic orbits, the resulting surface with boundary contains a finite separatrix structure. Its combinatorial organization is encoded by a finite code which records the cyclic arrangement of separatrices, the regions of the separatrix skeleton, and the compatibility of

orientations. Additional parts of the code record the pairs of boundary components corresponding to repelling and attracting periodic orbits.

Choosing the lexicographically smallest code among all admissible representations gives a canonical code.

Theorem. *Two SNIC bifurcations with topologically equivalent local models have topologically equivalent global structures if and only if their canonical codes coincide.*

Thus, the canonical code provides a complete topological invariant of the global phase portrait generated by a SNIC bifurcation. In particular, the topological structure can be determined without solving the corresponding differential equations explicitly.

An important consequence is that the global topological structure generated by a SNIC bifurcation is determined by the combinatorial structure at the bifurcation moment. This establishes a connection between the local theory of saddle-node bifurcations and the global qualitative theory of differential equations on closed surfaces.

We apply the obtained classification to the enumeration of possible structures generated by SNIC bifurcations. For the sphere, we describe all structures with at most four saddles and at most three periodic orbits. For the torus, we obtain the corresponding classification in the case without periodic orbits. The enumeration was performed using the software developed by the author [2].

The author is deeply grateful to the late Academician M. O. Perestyuk for his inspiring lectures on the qualitative theory of differential equations and for his constant interest in the author's research.

References

- [1] Prishlyak A., Ovtsynov I. Optimal codimension one gradient flows on closed surfaces. Proceedings of the International Geometry Center. 2025. 18, No. 1. P. 68–101. DOI: <https://doi.org/10.15673/pigc.v18i1.2835>.
- [2] Prishlyak A. Codes of Rotation Systems of a Cell-Embedded Graph in an Oriented Surface. Software. Zenodo. 2026. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.22298943>.

Nonlinear boundary value problems with complex functions of real variables

András RONTÓ, Miklós RONTÓ

Brno University of Technology, Czech Republic; University of Miskolc, Hungary

miklos.ronto@uni-miskolc.hu

We consider the construction of solutions of the nonlinear boundary value problem

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

$$\Phi(u) = d, \quad (2)$$

where $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ and Φ is a functional defined on continuous complex-valued vector functions on $[a, b]$. By writing $x = u$, $y = u$ and setting $\varphi(t, x, y) = f(t, x + iy)$, $\psi(t, x, y) = f(t, x + iy)$ we can interpret (1), (2) as the system of two boundary value problems for the real-valued vector functions x and y :

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x, y), \quad \Phi_1(x, y) = d_1, \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi(t, x, y), \quad \Phi_2(x, y) = d_2 \quad (4)$$

with $\Phi_1(x, y) = \Phi(x + iy)$, $\Phi_2(x, y) = \Phi(x + iy)$, $d_1 = d$, $d_2 = d$.

Assume that $\varphi : [a, b] \times D_x \times D_y \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : [a, b] \times D_x \times D_y \rightarrow \mathbb{R}^n$ with bounded $D_x \subset \mathbb{R}^n$, $D_y \subset \mathbb{R}^n$ are Lipschitz continuous. We suggest to use the idea based on [1]–[5], according to which problem (3), (4) is reduced to the parameterized system of simple auxiliary boundary value problems

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x, y), \quad x(a) = z_x, \quad x(b) = \gamma_x, \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi(t, x, y), \quad y(a) = z_y, \quad y(b) = \gamma_y, \quad (6)$$

where $z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y$ are unknown vector parameters. Problems (5), (6) can be studied with the help of the recurrence sequences of functions

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y) &= z_x + \int_a^t \varphi(s, x_m(s, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y), y_m(s, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y)) ds \\ &\quad - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b \varphi(s, x_m(s, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y), y_m(s, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y)) ds + \frac{t-a}{b-a} [\gamma_x - z_x] \end{aligned} \quad (7)$$

and

$$\begin{aligned} y_{m+1}(t, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y) &= \gamma_y + \int_a^t \psi(s, x_m(s, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y), y_m(s, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y)) ds \\ &\quad - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b \psi(s, x_m(s, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y), y_m(s, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y)) ds + \frac{t-a}{b-a} [\gamma_y - z_y], \end{aligned} \quad (8)$$

where $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$x_0(t, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y) = z_x + \frac{t-a}{b-a} [\gamma_x - z_x], \quad y_0(t, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y) = \gamma_x + \frac{t-a}{b-a} [\gamma_y - z_y].$$

Under suitable assumptions it is proved that these sequences converge uniformly to the limit functions $x_\infty(\cdot, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y)$, $y_\infty(\cdot, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y)$, which are solutions of problems (5), (6) respectively. The limit functions are solutions of the original problem (1),(2) if and only if the numerical values of parameters $z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y$ satisfy a certain system of equations of dimension $4n$ determined by the functions $\varphi, \psi, x_m(\cdot, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y), y_m(\cdot, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y)$ and the functionals Φ_1, Φ_2 . For the practical investigation of the non-linear problems (3), (4), it is suggested to use a scheme with polynomial interpolation [6], where instead of (7), (8) one uses the sequences

$$\{x_{m+1}^{N+1}(\cdot, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y)\}_{m=0}^\infty, \quad \{y_{m+1}^{N+1}(\cdot, z_x, \gamma_x, z_y, \gamma_y)\}_{m=0}^\infty$$

of vector polynomials of degree $N + 1$ constructed using Lagrange interpolation with Chebyshev nodes. Numeric examples demonstrate the effectiveness of the method.

References

- [1] Rontó A., Rontó M., Varha Y., A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems, *Appl. Math. Comput.*, vol. 250 (2015), 689-700.
- [2] Rontó M., On non-linear differential systems with mixed boundary conditions, *Axioms*, vol. 13 (2024), 866.
- [3] Rontó A., Parametrization and trigonometric approximation of periodic solutions of non-linear equations with deviating arguments, *Mediterr. J. Math*, vol. 23 (2026), 69.
- [4] Rontó A., Rontó M. Successive Approximation Techniques in Non-Linear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, *Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations*, 2008, vol. IV, 441–592, eds. F. Batelli and M. Fečkan, Elsevier B.V.
- [5] Rontó A., Rontó M., Shchobak N. On periodic solutions of systems of linear differential equations with argument deviations, *J. Math. Sciences*, vol. 263 (2022), No. 2, 282–298.
- [6] Rontó A., Rontó M., Shchobak N. Parametrisation for boundary value problems with transcendental non-linearities using polynomial interpolation, *El. J. Qualit. Theory Differential Equat.* (2018), No. 59, 1–22.

Analytic Solutions of Impulsive Differential Equations and Their Asymptotic Properties

Valerii SAMOILENKO

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

`v.samoilenko@imath.kiev.ua`

This talk provides an overview of research in the theory of impulsive differential equations, focusing on the development of asymptotic methods and the qualitative and dynamical properties of impulsive systems. Asymptotic methods have played an important role in the research of the Kyiv School of Nonlinear Mechanics for many years. In particular, the Krylov–Bogolyubov–Mitropolsky asymptotic method and the Bogolyubov averaging method were extensively developed for a broad class of differential equations, among which differential equations with impulsive action occupied a prominent place.

The considerable interest in such systems stems both from the wide range of their theoretical and practical applications [1] and from the specific features of their dynamics. The theory of impulsive differential systems constitutes an independent area of research, since the presence of impulsive perturbations can substantially alter the behavior of a system. In particular, even linear impulsive systems may, under certain conditions, exhibit complex dynamical properties that are usually associated with nonlinear systems.

This can be illustrated by relatively simple systems described by second-order linear differential equations with constant coefficients [2]. Despite the simplicity of the underlying equation, the introduction of impulsive action, even at fixed moments of time, can substantially change the nature of its solutions. In particular, for different types of equilibrium points determined by the coefficients of the corresponding differential equation, an appropriate choice of the impulsive conditions can lead to the existence of both bounded and unbounded solutions and, in certain cases, of periodic and even quasiperiodic solutions. In the case of a center-type equilibrium point, quasiperiodic solutions may arise in the form of a sum of two periodic components with incommensurable periods. At the same time, the corresponding differential equation without impulsive perturbations may have no solutions possessing the aforementioned properties.

Another interesting phenomenon that may arise in impulsive systems is related to the nature of the impulsive action [3]. In particular, systems with non-fixed impulse times may exhibit complex dynamics characteristic of chaotic systems. As an example, one can mention the possibility of the coexistence of infinitely many periodic solutions with different periods, with the set of their periods exhibiting the structure described by the Sharkovsky ordering [2]. Even more complex dynamical behavior is, of course, characteristic of nonlinear systems [4, 5].

The examples presented above demonstrate that impulsive action can not only modify the behavior of solutions of the underlying differential system but also give rise to qualitatively new dynamical regimes that are absent in the corresponding system without impulsive effects. Thus,

impulsive action is not merely a mathematical means of modeling instantaneous changes in the state of a system, but also a mechanism that may give rise to specific dynamical properties. This circumstance largely motivates the study of differential systems with impulsive action and the development of effective methods for their qualitative and asymptotic analysis.

The talk also considers the construction of asymptotic solutions for first-order ordinary differential equations [6, 7, 8], as well as for systems with a degenerate matrix at the highest-order derivative [9], subject to singular perturbations and impulsive action. Such solutions are constructed using the boundary-layer function method. In addition, asymptotic solutions are constructed for a boundary-value problem for the heat equation with impulsive perturbations, using the Vishik–Lyusternik method [10].



This work is a part of the project that has received funding from the EU Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement Number 873071, SOMPATY.

References

- [1] Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific. 1995. 472 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/2892>.
- [2] Samoilenko V. G., Elgondyev K. K. On periodic solutions of linear differential equations with pulsed influence. Ukrainian Mathematical Journal. 1997. 49, No. 1. P. 156–164. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02486623>.
- [3] Perestyuk M. O., Samoilenko V. H., Elgondiev K. K. Sequence mapping and periodic solutions of differential equations with an impulse effect. Nonlinear Oscillations. 1998. 1, No. 1. P. 44–50.
- [4] Samoilenko A. M., Samoilenko V. H., Sobchuk V. V. On periodic solutions of the equation of a nonlinear oscillator with pulse influence. Ukrainian Mathematical Journal. 1999. 51, No. 6. P. 926–933. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02591979>.
- [5] Samoilenko V. H., Sobchuk V. V. Periodic solutions of Lienard equations with impulsive effects. Nonlinear Oscillations. 2000. 3, No. 2. P. 256–265.
- [6] Samoilenko V. H., Kaplun Y. I. Existence and extendability of solutions of the equation $g(t, x) = 0$. Ukrainian Mathematical Journal. 2001. 53, No. 3. P. 427–437. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012344305548>.
- [7] Kaplun Yu., Perestyuk M., Samoilenko V. Implicit function equation with discontinuous trajectories. Miskolc Mathematical Notes. 2001. 2, No. 2. P. 145–157.
- [8] Samoilenko A. M., Kaplun Y. I., Samoilenko V. H. Singular perturbed equations with impulse action. Ukrainian Mathematical Journal. 2002. 54, No. 3. P. 1309–1323. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1023483507636>.

- [9] Potorocha V. V., Samoylenko V. H. Asymptotic solutions of singularly perturbed nonlinear systems of impulsive differential equations with degeneration. *Differential Equations*. 2007. 43, No. 3. P. 334–345. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266107030044>.
- [10] Samoilenko V. H., Khomchenko L. V. A von Neumann boundary-value problem for a singular perturbed heat equation with an impulsive effect. *Nonlinear Oscillations*. 2005. 8, No. 1. P. 89–123.

Asymptotic wave-like solutions of hydrodynamical type equations with variable coefficients and singular perturbation

Valerii SAMOILENKO ^a and Yuliia SAMOILENKO

^a*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

^a`v.samoilenko@imath.kiev.ua`

This talk is related with the study of some generalized models of hydrodynamics, namely the variable coefficients (vc) Korteweg–de Vries equation [1, 2]

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x, t, \varepsilon)u_t + b(x, t, \varepsilon)uu_x, \quad (1)$$

the vc Benjamin–Bona–Mahony equation [3]

$$\varepsilon^2 u_{xxt} = a(x, t, \varepsilon)u_t + b(x, t, \varepsilon)u_x + c(x, t, \varepsilon)uu_x, \quad (2)$$

the vc Burgers equation [4]

$$\varepsilon u_{xx} = a(x, t, \varepsilon)u_t + b(x, t, \varepsilon)uu_x, \quad (3)$$

the vc modified Camassa–Holm equation [5]

$$a(x, t, \varepsilon)u_t - \varepsilon^2 u_{xxt} + b(x, t, \varepsilon)u^2 u_x = 2\varepsilon^2 u_x u_{xx} + \varepsilon^2 uu_{xxx}, \quad (4)$$

and the vc Camassa–Holm equation [6]

$$a(x, t, \varepsilon)u_t - \varepsilon^2 u_{xxt} + b(x, t, \varepsilon)uu_x = 2\varepsilon^2 u_x u_{xx} + \varepsilon^2 uu_{xxx}, \quad (5)$$

where ε is a small parameter.

The coefficients appearing in equations (1) – (5) are assumed to admit asymptotic expansions in a small parameter, with nonvanishing main terms. This assumption guarantees the nondegeneracy of the corresponding problem.

In this generalized setting, explicit forms of exact solutions are generally unavailable, since the presence of variable coefficients makes many classical analytical techniques inapplicable. Nevertheless, the existence of a small parameter allows asymptotic methods to be employed effectively. Within this framework, we construct approximate solutions that, in an appropriate sense, remain close to the wave solutions of the corresponding constant-coefficient equations. In particular, we consider soliton-like solutions of equations (1) and (2), step-like solutions of equation (3), and soliton- and peakon-like solutions of equations (4) and (5). These solutions can therefore be viewed as deformations of the standard wave-type solutions resulting from the presence of variable coefficients.

The methodology employed in this study is based on the nonlinear WKB approach [7], which provides a general framework for constructing asymptotic wave-type solutions of the required

form. Nevertheless, the specific implementation of this approach depends essentially on the structure and nonlinear properties of the equation under consideration and therefore requires substantial modifications from one equation to another. In particular, the analysis of equation (4) and (5) is especially challenging, as the construction of the corresponding asymptotic solutions cannot be achieved by a straightforward application of the standard nonlinear WKB scheme and requires a significantly more involved procedure.

The main results comprise the development of an algorithm for constructing asymptotic solutions and the rigorous justification of the proposed approach based on accuracy estimates for the resulting approximations. In general, the constructed asymptotic solutions are not global, since the phase function corresponding to each solution is determined by a nonlinear differential equation and may fail to be globally well defined. However, for an appropriate choice of the equation coefficients, the resulting solutions can be shown to exist globally. This property is demonstrated by several specific examples.

The theoretical results are complemented by graphical representations of the asymptotic approximations for several equations with prescribed coefficients.



This work is a part of the project that has received funding from the EU Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement Number 873071, SOMPATY.

References

- [1] Samoylenko V. H., Samoylenko Yu. I. Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg–de Vries equation with variable coefficients. *Ukr. Math. J.* 2005. 57, No. 1. P. 132–148. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-005-0176-9>.
- [2] Samoylenko V. H., Samoylenko Yu. I. Asymptotic m -phase soliton-type solutions of a singularly perturbed Korteweg–de Vries equation with variable coefficients. I, II. *Ukr. Math. J.* 2012. 64, No. 7. P. 1109–1127. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0702-5>; 2013. 64, No. 8. P. 1241–1259. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0713-x>.
- [3] Samoilenko V., Samoilenko Yu. Asymptotic soliton like solutions to the singularly perturbed Benjamin-Bona-Mahony equation with variable coefficients. *J. Math. Phys.* 2019. 60, No. 1. P. 011501–0115013. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5085291>.
- [4] Samoilenko V., Samoilenko Yu., Zappale E. Asymptotic step-like solutions of the singularly perturbed Burgers equation. *Phys. Fluids*. 2023. 35, No. 6. 067106. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0150685>.
- [5] Samoilenko Yu., Brandolese L., Samoilenko V. Soliton-like solutions of the modified Camassa-Holm equation with variable coefficients. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2025. 192. 115944. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115944>.

- [6] Samoilenko Yu., Samoilenko V. Soliton-like solutions of the Camassa–Holm equation with variable coefficients and a small dispersion. arXiv:2604.17348. 2026. 47 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2604.17348>.
- [7] Miura R. M., Kruskal M. D. Application of nonlinear WKB-method to the Korteweg–de Vries equation. SIAM Appl. Math. 1974. 26, No. 2. P. 376–395. DOI: <https://doi.org/10.1137/0126036>.

Qualitative properties of solutions to parabolic anisotropic equations

Mariia SAVCHENKO^{1,*}, Igor SKRYPNIK¹

¹*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine*

*shan_maria@ukr.net

We will study local regularity properties of the non-negative solutions to the equation

$$u_t - \sum_{i=1}^N (a_i(x, t, u, Du))_{x_i} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

where the functions $a_i(x, t, u, Du)$, $i = 1, \dots, N$, satisfy the Caratheodory conditions and the following structure conditions for almost every $(x, t) \in \Omega_T$,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N a_i(x, t, u, Du) (u^{m^-})_{x_i} \geq K_1 \sum_{i=1}^N u^{(m_i - m^-)(p_i - 1)} |(u^{m^-})_{x_i}|^{p_i}, & m^- := \min(m_1, \dots, m_N), \\ |a_i(x, t, u, Du)| \leq K_2 u^{\frac{(m_i - m^-)(p_i - 1)}{p_i}} \left(\sum_{j=1}^N u^{(m_j - m^-)(p_j - 1)} |(u^{m^-})_{x_j}|^{p_j} \right)^{1 - \frac{1}{p_i}} \end{cases} \quad (2)$$

being K_1, K_2 fixed positive constants, $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_N})$ the weak gradient, and all the (anisotropic) exponents satisfy $p_i > 1, m_i > 0$.

The prototype equation related to this double anisotropic setting is given by

$$u_t - \sum_{i=1}^N \left(u^{(m_i - 1)(p_i - 1)} |u_{x_i}|^{p_i - 2} u_{x_i} \right)_{x_i} = 0, \quad \forall m_i > 0, \quad p_i > 1$$

and defined over the space-time domain $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$, where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ and T a real positive number.

We consider (1)-(2) under the following definition of a local weak solution.

Definition. We say that a non-negative function u satisfying

$$u \in C_{loc}(0, T; L_{loc}^{1+m^-}(\Omega)), \quad u^{m^-} \in L_{loc}^{\vec{p}}(0, T; W_{loc}^{1, \vec{p}}(\Omega)),$$

and for $i = 1, \dots, N$,

$$u^{\frac{m_i(p_i - 1) + m^-}{p_i}}, \left(u^{\frac{m_i(p_i - 1) + m^-}{p_i}} \right)_{x_i} \in L_{loc}^{p_i}(0, T; L_{loc}^{p_i}(\Omega)),$$

is a local weak sub(super)-solution to (1) if the following integral inequalities hold

$$\int_K u \varphi dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_K \left[-u \varphi_t + \sum_{i=1}^N a_i(x, t, u, Du) \varphi_{x_i} \right] dx dt \leq (\geq) 0, \quad (3)$$

for any compact $K \subset \Omega$, any interval $[t_1, t_2] \subset (0, T)$ and any non-negative φ , such that

$$\varphi \in W_{loc}^{1,1+m^-}(0, T; L^{1+m^-}(K)) \cap L^{\vec{p}}(0, T, W_0^{1,\vec{p}}(K)), \quad \vec{p} = (p_1, \dots, p_N).$$

We say that u is a non-negative, local weak solution to equation (1) if u is both a non-negative, local weak sub- and super-solution.

Let $p_+ = \max_{1 \leq i \leq N} p_i$, $p_- = \min_{1 \leq i \leq N} p_i$ and

$$\lambda_- := \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i, \quad \lambda_+ := \max_{1 \leq i \leq N} \lambda_i, \quad \lambda_i := m_i(p_i - 1), \quad i = 1, \dots, N.$$

Assume that

$$\lambda_+ - \lambda_- \leq \epsilon_*, \quad (4)$$

for some $\epsilon_* \in (0, 1)$, and $\lambda_+ > 1$, so we are considering the doubly nonlinear anisotropic PDE (1) to be degenerate. In this setting, the main result concerning the spreading of positivity of u is the following

Theorem 1. [1] *Let $k, r > 0$ and $\alpha_0 \in (0, 1)$ and assume that*

$$|K_r^k(y) \cap [u(\cdot, s) \geq k]| \geq \alpha_0 |K_r^k(y)|.$$

Then there exist constants $C_ > 1$, $B_1 > 1$ and $\epsilon_* = \frac{p_- \ln 4}{N \ln C_*}$, depending only on the data and α_0 , such that*

$$u(x, t) \geq \frac{k}{C_*}, \quad x \in K_{2r}^{k/C_*}(y),$$

and for all t

$$s + B_1 r^{p_+} k^{1-\lambda_+} \leq t \leq s + \tilde{B}_1 r^{p_+} k^{1-\lambda_+}.$$

We assume, as before, that (4) holds for some sufficiently small positive number ϵ_* to be chosen; but now we will be considering (1) to be singular, meaning that $\lambda_+ < 1$. In this singular setting, the result on the expansion of positivity reads like

Theorem 2. [1] *Let k and r be two positive numbers and $\alpha_0 \in (0, 1)$. If*

$$|K_r^k(y) \cap \{u(\cdot, s) \geq k\}| \geq \alpha_0 |K_r^k(y)|,$$

then there exist constants $\delta, \varepsilon \in (0, 1)$, $C_ > 1$ and $\epsilon_* = \frac{p_- \ln 2}{N \ln C_*}$, depending only on the data and α_0 , such that*

$$u(x, t) \geq \frac{k}{C_*}, \quad x \in K_r^{k/C_*}(y),$$

and for all t

$$s + (1 - \varepsilon)\delta r^{p_+} k^{1-\lambda_+} \leq t \leq s + \delta r^{p_+} k^{1-\lambda_+}.$$

This work was supported by the National Research Foundation of Ukraine, project No. 2025.07/0369 "Qualitative methods of nonlinear analysis of heterogeneous structures".

References

- [1] Ciani S., Henriques E., Savchenko M., Skrypnik I. Qualitative properties of solutions to parabolic anisotropic equations: Part I—Expansion of positivity. *Journal of Evolution Equations*. 2026. Vol. 26, Article 84. <https://doi.org/10.1007/s00028-026-01232-8>

Web application for visualizing the action of metasymmetric and metaalternating groups on rooted trees

Vira SIKORA, Oleh YURCHENKO

Yurij Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

v.sikora@chnu.edu.ua, yurchenko.oleh@chnu.edu.ua

The main objective of this study is a comprehensive (theoretical and computational) investigation of the structure of infinitely iterated wreath products of finite symmetric and alternating groups of infinite rank [1]—[3]. To study the infinitely iterated wreath products of finite symmetric and alternating groups, it was decided to use their natural geometric representation. From an algebraic point of view, it is most convenient to realize such groups as subgroups of the group of all automorphisms of regular rooted trees.

Description of the Mathematical Model. Let T_d be a regular d -ary rooted tree, the vertex set of which is naturally identified with the set of all finite words over the alphabet $X = \{0, 1, \dots, d-1\}$. A vertex $w = x_1x_2\dots x_n$ is located at level $n = |w|$, and the root of the tree corresponds to the empty word. Two words $u, v \in X^*$ are connected by an edge if and only if $v = ux$ for some $x \in X$. Every automorphism $g \in \text{Aut}(T_d)$ preserves the tree structure (the root is mapped to the root, and vertex adjacency is maintained). Thus, the action of an automorphism g on an arbitrary word $wx \in X^*$ (where $w \in X^*$, $x \in X$) can be recursively described by the following equation: $g(wx) = g(w)\pi_{g,w}(x)$, where $\pi_{g,w} \in S_d$ is a local permutation (also known as a state or section) acting on the alphabet X and depending on the automorphism g and the vertex w . This infinite set of local permutations $\{\pi_{g,w}\}_{w \in X^*}$ completely and uniquely defines the automorphism g (the so-called “portrait of an automorphism”). Since direct computation in infinite (profinite) groups by software means is impossible due to limited computational resources, the developed software product is conceptually oriented towards modeling finite approximations of these groups. The software model operates with tree truncations to a specified finite depth k . The automorphism group of the k -th level is isomorphic to the k -fold iterated wreath product of the base group S_d : $W_k \cong \underbrace{S_d \wr S_d \wr \dots \wr S_d}_k$.

Algebraically, this construction can be defined recursively as $W_k = W_{k-1} \wr S_d$. The global action of such an automorphism at level k manifests itself in a permutation of the set of d^k leaves of the tree. The full automorphism group $\text{Aut}(T_d)$ (which is a metasymmetric group) is endowed with the topology of a profinite group and is mathematically defined as the inverse limit of the finite groups W_k with natural projection homomorphisms $\varphi_k : W_k \rightarrow W_{k-1}$: $\mathcal{M}(S_d) = \text{Aut}(T_d) = \lim_{k \rightarrow \infty} W_k$.

Accordingly, the meta-alternating group $\mathcal{M}(A_d)$ is approximated by strictly restricting the local permutations exclusively to even ones ($\pi_{g,w} \in A_d$) for all nodes of the tree: $\mathcal{M}(A_d) = \{g \in \text{Aut}(T_d) \mid \forall w \in X^* : \pi_{g,w} \in A_d\}$.

Thanks to this approach, the inverse limit of these finite groups forms a profinite group, the properties of which (for example, subgroup indices, the structure of normalizers or commutators) we can extrapolate by analyzing the behavior of the visualized system at levels $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Architecture of the Technology Stack and Calculation. To ensure cross-platform compatibility, a high level of interactivity, and the convenience of disseminating research results among the scientific community, the software tool was implemented as a client-side web application (Single Page Application). The choice of specific technologies was based on the requirements for the performance of graph computations and the convenience of declarative interface description (JavaScript, React.js, Scalable Vector Graphics, Tailwind CSS styling). The basis of the visualization is a recursive algorithm for constructing a tree on a plane. Unlike classical static tree drawing algorithms (for example, the Reingold-Tilford algorithm), the coordinates of the nodes in the developed system are dynamic and depend directly on the currently active automorphism in the group. Thanks to this mathematical approach, when the local state of any node changes, the child branches of the tree smoothly "intertwine" on the screen due to CSS transitions. This allows visualizing not only the statics of the group but also the mathematical essence of the process of applying an automorphism itself. To verify deep algebraic properties of group elements, the program automatically analyzes the action of the current automorphism on the boundary of the tree. The algorithm performs symbolic path tracing, constructs a bijection dictionary of mappings, uses a Set data structure to track visited elements, and extracts an array of independent cycles into the classical string mathematical format.

Analysis of the Results. The created software product is an instrument of experimental mathematics in the field of geometric group theory. Thanks to the modeling of the action of automaton generators on rooted trees ($d = 3, d = 4$), the stabilization of the quotient groups $W_k(A_d)/W_{k'}(A_d)$ with increasing tree depth k was empirically proven. These computations agree with the theoretically derived condition for the perfectness of the profinite meta-alternating group: it was established that for the corresponding d , the group indeed coincides with its commutator subgroup (perfectness condition).

In this work, a path to the software solution of an urgent problem in geometric and combinatorial group theory was proposed: a comprehensive analysis of the structure of infinitely iterated wreath products of finite symmetric and alternating groups of infinite rank was carried out; the structure of metasymmetric and meta-alternating groups as profinite algebraic systems was characterized; a general method for constructing finite generating sets for meta-alternating groups was described.

Specialized web-based software was created for visualizing the actions of automorphisms on regular trees, allowing for the automatic modeling of finite automata operations, calculating the cycle decomposition of elements, and confirming theoretical hypotheses by conducting rapid computer experiments.

References

- [1] Заводя М.В., Сікора В.С., Суцанський В.І. Двохелементні системи твірних метазнакозмісних груп скінченного рангу. Математичні студії. 2010. 34, № 1. С. 3–12. https://matstud.org.ua/texts/2010/34_1/3-12.html
- [2] Сікора В.С. Мінімальні системи твірних скінченних гіпероктаедральних, мономіальних, метасиметричних та автоматних груп підстановок. Монографія. Чернівці: Технодрук, 2018. 168 с.
- [3] Sikora V.S., Yurchenko O.I. Software Implementation for Visualizing the Action of Metasymmetric and Metaalternating Groups on Rooted Trees. ScientificWorld Journal. 2026. Iss. 37, Part 2. P. 3–15. DOI: 10.30888/2663-5712.2026-37-02-016. <https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj37-02-016>

Subwreath product as structure of normal subgroups of permutational wreath products

Ruslan Skuratovskii

Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv

skuratovskii.ruslan@imath.kiev.ua

Normal subgroups and their properties for finite and infinite iterated wreath products $W_m = S_{n_1} \wr \dots \wr S_{n_m}$, $n, m \in \mathbb{N}$ are found. We prove that W_m is a monolithic group.

Definition 1. The permutational subwreath product $G \wr H$ is the semi-direct product $G \ltimes \tilde{H}^X$, where G acts on the subdirect product $\tilde{H}^X$ by the respective permutations of the subdirect factors. Provided the specification of $\tilde{H}^X$ is established separately.

Subwreath product also appears in the research of pronormality [1] and in [2].

The first normal subgroup in $W = S_n \wr S_n$ turned out to be subwreath product.

Definition 2. The set of elements from $S_n \wr S_n$, $n \geq 3$ which is presented by the Kaloujnine tableaux [3] of the form: $[e]_0, [a_1, a_2, \dots, a_n]_1$, satisfying the following condition

$$\prod_{i=1}^n \text{sgn}([a_i]_1) = 1, k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

be denoted by $\tilde{A}_n^{(1)}$.

Proposition 1. The set of elements $\tilde{A}_n^{(1)}$ forms a normal subgroup in $S_n \wr S_n$, $n \geq 3$.

Proposition 2. The subgroup $E \wr E \wr A_n$ is the monolith in $S_n \wr S_n \wr S_n$.

Definition 3. The set of elements from $\bigwrangle_{i=0}^k S_{n_i}$, $n_i \geq 3$ with depth k satisfying the following condition

$$\prod_{i=1}^{n^k} \text{sgn}([a_i]_k) = 1, \quad (2)$$

be denoted by $\tilde{A}_{n^k}^{(k)}$. By $\tilde{A}_{n^0}^{(0)}$ we mean the usual A_n .

Now we can recursively construct the easiest and elegant subgroup $E \wr \tilde{A}_n^{(1)}$ of $S_n \wr S_n \wr S_n$.

Definition 4. The subgroup with the structure $E \wr \tilde{A}_n^{(1)}$ be denoted by $\tilde{A}_n^{(2)}$.

Proposition 3. The subgroup $\tilde{A}_n^{(2)}$ is normal in $S_n \wr S_n \wr S_n$.

Definition 5. The set of elements from $S_n \wr S_n \wr S_n$, $n \geq 3$ presented by tables [3] forms: $[e]_0, [e, e, \dots, e]_1, [a_1, a_2, \dots, a_{n^2}]_2$, satisfying the following condition

$$\prod_{i=1}^n \text{sgn}([a_i]_2) = 1, \prod_{i=n+1}^{2n} \text{sgn}([a_i]_2) = 1, \dots, \prod_{i=n^2-n}^{n^2} \text{sgn}([a_i]_2) = 1, \quad (3)$$

be denoted by $\tilde{A}_n^{(2)}$.

Proposition 4. *The definitions (5) and (4) are equivalent.*

Theorem 1. *The following normal series holds $E \triangleleft \widetilde{A}_n^{(2)} \triangleleft \widetilde{A}_{n^2}^{(2)} \triangleleft \wr_{i=0}^k S_{n_i}$, which admits generalization on case of $\widetilde{A}_{n^k}^{(k)}$ from W_k .*

Definition 6. *A subgroup in $S_n \wr S_n \wr S_n$ is denoted by $\widetilde{T}_{n^2}^{(2)}$ if it consists of:*

1. *elements of the form $E \wr E \wr A_n$,*
2. *elements with the tableau [3] presentation $[e]_0, [e, \dots, e]_1, [\pi_1, \dots, \pi_n, \pi_{n+1}, \dots, \pi_{n^2}]_2$, wherein $\forall i = 1, \dots, n: \pi_i \in S_n \setminus A_n$.*

Theorem 2. *The set of elements of type $\widetilde{A}_{n^k}^{(k)}$ forms the subgroup in W_k , furthermore $\widetilde{A}_{n^k}^{(k)} \triangleleft W_k$.*

Definition 7. *The subgroup of $S_n \wr S_n \wr S_n$ having structure $E \wr \widetilde{T}_n$ be denoted by $\widetilde{T}_n^{(2)}$.*

We emphasize that $\widetilde{T}_n^{(2)}$ admits generalization to $\widetilde{T}_n^{(k)}$ which is normal in W_k .

Proposition 5. *The subgroups $\widetilde{T}_n^{(2)}$ and $\widetilde{T}_{n^2}^{(2)}$ are normal in $S_n \wr S_n \wr S_n$.*

Remark 1. If $G = S_n \wr S_m$ then the subgroup of type $\widetilde{T}_m$ has the structure $T_{n,m} \simeq \underbrace{(A_m \times A_m \times \dots \times A_m)}_n \rtimes C_2$.

Theorem 3. *Proper normal subgroups in $S_n \wr S_m$, where $n, m \geq 3$ with $n, m \neq 4$ are of the following types:*

1. *subgroups that act only on the second level (stabilizing the first level) are*

$$E \wr \widetilde{A}_m, \widetilde{T}_m, E \wr S_m, E \wr A_m,$$

2. *subgroups that act on both levels are $A_n \wr \widetilde{A}_m, S_n \wr \widetilde{A}_m, S_n \wr \widetilde{B}_m, A_n \wr S_m$,*

wherein the subgroup $S_n \wr \widetilde{A}_m \simeq S_n \ltimes \underbrace{(S_m \boxtimes S_m \boxtimes S_m \boxtimes \dots \boxtimes S_m)}_n$ endowed with the subdirect product satisfying condition (1). In case $n = 4$ there are 3 additional subgroups: $E \wr K_4, K_4 \wr \widetilde{A}_4, K_4 \wr S_4$.

References

- [1] *N. V. Maslova, D. O. Revin, On the Pronormality of Subgroups of Odd Index in Some Direct Products of Finite Groups, Journal of Algebra and Its Applications, 22:04 (2023), 2350083, doi: <https://doi.org/10.1142/S0219498823500834>*
- [2] *Ruslan Skuratovskii. Normal subgroups of iterated wreath products of symmetric groups and alternating with symmetric groups. Source: <https://arxiv.org/abs/2108.03752>*
- [3] *Kaloujnine L. A. Sur les p -group de Sylow. C. R. Acad. S. Paris. 1945. 221. P. 222–224.*

Minimal involutive generating sets in extended special linear groups $ESL_n(\mathbb{F}_p)$, $ESL_n[\mathbb{Z}]$ and square roots in these groups

Ruslan Skuratovskii

Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv

skuratovskii.ruslan@imath.kiev.ua

We recall concept of $ESL_2(\mathbb{F}_p)$ studied in our previous work [1].

Let $SL_3(\mathbb{F}_p)$ denotes the special linear group of degree n over the finite field $\mathbb{F}_p$.

Definition 1. *The set of matrices over the integer ring or over a field*

$$\{M_i : \det(M_i) = \pm 1, M_i \in GL_n[\mathbb{Z}], \text{ or } M_i \in SL_n(\mathbb{F}_p)\}$$

*forms **extended special linear group** over $\mathbb{Z}$ or over $\mathbb{F}_p$ respectively and is denoted by $ESL_n[\mathbb{Z}]$ or by $ESL_3(\mathbb{F}_p)$, respectively.*

To construct split extension of $SL_3(\mathbb{F}_p)$ we consider the following class of matrices with determinant -1 , but do not centralizing the group $SL_3(\mathbb{F}_p)$.

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

The structure of group generated as extension of $SL_3(\mathbb{F}_p)$ by $\langle D_i \rangle$ $1 \leq i \leq 3$ is semidirect product

$$\langle D_1 \rangle \ltimes SL_3(\mathbb{F}_p) \simeq ESL_3(\mathbb{F}_p)$$

with kernel $SL_3(\mathbb{F}_p)$.

Proposition 1. *If the complement subgroup to kernel $SL_3(\mathbb{F}_p)$ of semidirect product is $\langle D_i \rangle$, then D_i is **TI – subgroup** [3] but not antinormal subgroup. The subgroup D_{123} is not **TI – subgroup**.*

Denote a permutation matrix of order 3 by P_3 and the transvection [1] by tr_{12} of group $SL_3(\mathbb{F}_p)$. Suppose $D_{123} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ be additional generator extending $SL_3(\mathbb{F}_p)$ to $ESL_3(\mathbb{F}_p)$.

Theorem 1. *The minimal set of involutive generators $F_L, D_0, I_{23,43}$ as for $ESL_5[\mathbb{Z}]$ as well as for $ESL_5[\mathbb{F}_p]$ is Mazurov triple*

$$I_{23,43} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Thus, we obtain triple with **two commuting involutions** $D_0, I_{23,43} = e$.

Recall that a group is called a *string group generated by involutions* $\{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}\}$ (sggi) if there exists such ordering of the involutions wherein $\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i$ for every $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ such that $|i - j| > 1$ [4].

Definition 2. By the extended group of (upper) unitriangular matrices $EUT_n(\mathbb{F})$ (over a field $\mathbb{F}$) we mean the unitriangular group $UT_n(\mathbb{F})$ that admits not only 1 but also -1 on the diagonal.

We prove that $EUT_3[\mathbb{Z}] \simeq \langle \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \rangle$ is sggi group [4] with following involutive generating set:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

where $[\rho_1, \rho_3] = e$, $[\rho_0, \rho_3] = e$, $[\rho_0, \rho_2] = e$, this defines the type of involution generating set $(2 \times 2, 2 \times 2)$.

The formula of matrix equation $X^2 - A = 0$ roots is $GL_2(\mathbb{R})$ was found by D. Sullivan [8], we extend this formula and research conditions of existence on $SL_3[\mathbb{Z}]$ and $ESL_3[\mathbb{Z}]$.

Let $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ be e.v. of $A \in SL_3[\mathbb{Z}]$ provided $\text{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a$, $b = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$. Let $\chi_A(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ denotes characteristic polynomial for A . According to Lemma 1 [1] if $B^2 = A$, then $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\mu_2 = \sqrt{\lambda_2}$, $\mu_3 = \sqrt{\lambda_3}$, where μ_1, μ_2, μ_3 are e.v. of B . We introduce the following notations $q = \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3$, $\text{tr} B = p = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$. Let $\chi_B(x) = x^3 - px^2 + qx - 1$ be characteristic polynomial of B .

$$\text{Let } a = \text{tr} A \text{ and } b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3.$$

The number $N(E, m)$ of roots of equation $X^2 - I = 0$ over non-singular square matrix of degree m was found in [9]. We found an analytical formula of root in $SL[3, \mathbb{Z}]$.

Theorem 2. The square root $\sqrt{A}$ belongs to $SL_3[\mathbb{Z}]$ iff

$$p^4 - 2ap^2 - 8p + a^2 - 4b = 0. \quad (1)$$

is solvable over $p \in \mathbb{Z}$.

In addition, equivalent condition

$$\left. \begin{aligned} q^2 - 2p &= b \in \mathbb{Z} \\ p^2 - 2q &= a \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\}$$

holds.

Theorem 3. Consider the matrix equation in $SL_3[\mathbb{Z}]$

$$X^2 = A.$$

If its solution lays in $SL_3[\mathbb{Z}]$ then this solution is a matrix B defined by the formula:

$$B = \frac{A^2 - \frac{\text{tr}^2(B) + \text{tr}(A)}{2} A - \text{tr}(B)}{\left(1 - \frac{\text{tr}^2(B) - \text{tr}(A)}{2} \text{tr} B\right)}. \quad (2)$$

References

- [1] Skuratovskii Ruslan, Lysenko S. O. *Extended Special Linear group $ESL_2(F)$ and matrix equations in $SL_2(F)$, $ESL_2(Z)$ and $GL_2(F_p)$* . WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS DOI: 10.37394/23206.2024.23.68
- [2] Skuratovskii Ruslan *Involutive minimal generating sets with two commuting involutions of Extended Special Linear group $ESL_3(\mathbb{Z})$, $ESL_2(\mathbb{Z})$ and analytical and recursive formulas of roots in $SL_3(\mathbb{F}_p)$* [source: <https://arxiv.org/pdf/2508.15399>]
- [3] H. A. Janabi, L. Hethelyi and E. Horvath. (2020) *Journal of Group Theory*. TI subgroups and depth 3-subgroups in simple Suzuki groups. <https://doi.org/10.1515/jgth-2020-0044>
- [4] Dimitri Leemans. *String C-group representations of almost simple groups: A survey Contemporary Mathematics* Volume 764, 2021 <https://doi.org/10.1090/conm/764/15335>.
- [5] Ya. N. Nuzhin, *Generating triples of involutions of groups of Lie type over a finite field of odd characteristic. II*, *Algebra and Logic*, 36:4(1997), 422-440.
- [6] STEPHEN P. HUMPHRIES. *Generation of Special Linear Groups by Transvections*. *JOURNAL OF ALGEBRA* 9, (1986), 480-495.
- [7] W. Holubowski, *Subgroups of unitriangular matrices*, *J. Math. Sci.* 145 (2007), no. 1, 477-478.
- [8] D. Sullivan. *The Square Roots of 2×2 Matrices*. *Mathematics Magazine*: (1993). Vol. 66, No. 5, pp. 314-316.
- [9] John H. Hodges. *The Matrix Equation $X^2 - I = 0$ over a Finite Field*. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 65, No. 7 (Aug. - Sep., 1958), pp. 518-521.

Convolution equations for the Euler function and the Euler copolynomial

Roman SKURIKHIN¹, Serhii GEFTER²

¹*Department of Mathematics & Computer Sciences, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine*

²*B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine*

roman.skurikhin@karazin.ua, gefter@karazin.ua

We call the classical Laplace transform of the function $t \mapsto (1+t)^{-1}$ the *Euler function*:

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Theorem 1. *The Euler function satisfies the convolution equation*

$$(F * F)(z) = 1 - zF(z), \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Here the convolution of functions holomorphic in the right half-plane is defined by

$$(F_1 * F_2)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F_1(w)F_2(z-w) dw, \quad \text{where } b > 0,$$

provided the integral exists. The Euler function has the asymptotic expansion

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{-n-1}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

This expansion motivates the linear functional E_{-1} on the space of polynomials $\mathbb{R}[x]$ defined by

$$(E_{-1}, x^n) = (-1)^n n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

which we call the *Euler copolynomial* with the parameter -1 .

Copolynomials, studied in [1, 2, 3, 4], are linear functionals on $\mathbb{R}[x]$. They form an algebraic analogue of distributions, providing a natural language for the differential and convolution equations in algebraic settings. In the talk we consider one-variable copolynomials and characterize the Euler copolynomial by convolution equations.

The space of copolynomials is denoted by $\mathbb{R}[x]'$. For the value of $T \in \mathbb{R}[x]'$ on $p \in \mathbb{R}[x]$ we write (T, p) . Let $\delta \in \mathbb{R}[x]'$ be the delta-function, $(\delta, p) = p(0)$. For a polynomial $q \in \mathbb{R}[x]$ and a copolynomial $T \in \mathbb{R}[x]'$ we put $(qT, p) = (T, qp)$. We also use the derivative of a copolynomial, $(T', p) = -(T, p')$, $p \in \mathbb{R}[x]$.

We consider $\mathbb{R}[x]'$ with the topology of pointwise stabilization: $T_j \rightarrow T$ if, for every $p \in \mathbb{R}[x]$, the values (T_j, p) are eventually equal to (T, p) . A series of copolynomials converges if its partial

sums converge in this topology. If $T \in \mathbb{R}[x]'$, its Cauchy–Stieltjes transform is an element of the formal Laurent series space $s^{-1}\mathbb{R}[[s^{-1}]]$, and the transform and its inverse are given by

$$C(T)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (T, x^k) s^{-k-1}, \quad C^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k s^{-k-1}\right) = T, \quad (T, x^k) = b_k.$$

The multiplication of copolynomials is defined by $T_1 T_2 = C^{-1}(C(T_1)C(T_2))$, and the convolution is defined by

$$(T_1 * T_2, p) = \sum_{k=0}^{\deg p} \left(T_1, \frac{p^{(k)}}{k!}\right) (T_2, x^k), \quad p \in \mathbb{R}[x].$$

For $a \in \mathbb{R}$ we define the Euler copolynomial E_a by

$$(E_a, p) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n p^{(n)}(0), \quad \text{or equivalently} \quad E_a = \sum_{n=0}^{\infty} a^n n! \delta^{n+1},$$

$$\text{or} \quad (E_a, x^n) = a^n n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

The powers refer to the copolynomial product, and $a = -1$ recovers the functional introduced above. The series converges in the topology described above. If $a > 0$, then

$$(E_a, p) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} p(x) e^{-x/a} dx, \quad p \in \mathbb{R}[x].$$

This representation connects E_a with the classical Laplace transform of polynomials. The following result gives convolution and differential characterizations of this copolynomial.

Theorem 2. *Let $T \in \mathbb{R}[x]'$ and let $a \in \mathbb{R}$. The following conditions are equivalent:*

- (i) $T = E_a$; (ii) $aT' + T = \delta$; (iii) $a\delta(T * T) + \delta = T$;
- (iv) $(T, 1) = 1$ and $a(T * T) = xT$.

In particular, for $a = -1$ the Euler copolynomial $E = E_{-1}$ is characterized by either of the convolution equations

$$\delta - \delta(E * E) = E, \quad \begin{cases} E * E + xE = 0, \\ (E, 1) = 1. \end{cases}$$

Acknowledgement. Roman Skurikhin was supported by the National Research Foundation of Ukraine, project No. 2025.07/0369 “Qualitative methods of nonlinear analysis of heterogeneous structures”.

References

- [1] Geftter S. L., Piven’ A. L. Partial differential equations in module of copolynomials over a commutative ring. J. Math. Phys. Anal. Geom. 2025. 21, No. 1. P. 56–83.
- [2] Geftter S. L., Piven’ A. L. Nonlinear partial differential equations in module of copolynomials over a commutative ring. J. Math. Phys. Anal. Geom. 2025. 21, No. 3. P. 319–345.

- [3] Gefter S. L., Piven' A. L. Formal functional calculus for copolynomials over a commutative ring. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2025. 39, No. 2. P. 207–224.
- [4] Goncharuk A., Skurikhin R., Gefter S., Piven' A. The ring of copolynomials over the commutative ring and some of its applications. In: *Rings and Polynomials – Algebraic, Number Theoretic, and Topological Topics in Ring Theory*. Special volume. Springer. 2026. (to appear).

Construction of Lyapunov functions for systems with nonsmooth right-hand sides using genetic programming and sparse optimization

Valentyn SOBCHUK, Roman PYKHNIVSKYI, Anton RYZHOV

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine; Kruty Heroes Military Institute of Telecommunications and Information Technology, Kyiv, Ukraine
sobchuk@knu.ua, roman.pykhnivskyi@knu.ua, ryzhov@knu.ua

Consider the nonlinear dynamical system

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - |y|x, \\ \dot{y} = -y - |x|y. \end{cases} \quad (1)$$

Its vector field is locally Lipschitz but not continuously differentiable in any neighborhood of the origin due to the absolute-value terms. Indeed,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \begin{cases} -x, & y > 0, \\ x, & y < 0. \end{cases}$$

For $x_0 \neq 0$, the one-sided limits at $(x_0, 0)$ differ, hence the vector field is not C^1 in any neighborhood of the origin.

We construct a Lyapunov function on

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_2 \leq 1\}$$

using the genetic programming and sparse optimization method proposed in [1]. Let $z = (x, y)$. Candidate functions are sought in the polynomial class

$$V(z; c) = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} c_\alpha z^\alpha.$$

Genetic programming determines the polynomial structure, while sparse optimization estimates the coefficients and eliminates redundant monomials.

For each candidate, the coefficients are optimized on a finite sample $X_N \subset D$ by minimizing the violations

$$\begin{aligned} \phi_1(z; c) &= k_1 \|z\|^2 - V(z; c), \\ \phi_2(z; c) &= V(z; c) - k_2 \|z\|^2, \\ \phi_3(z; c) &= k_3 \|z\|^2 + \langle \nabla V(z; c), f(z) \rangle. \end{aligned}$$

The coefficient optimization problem is

$$\min_c \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^3 \rho(\phi_l(z^{(i)}; c)) + \gamma R(c) \right\},$$

where ρ penalizes positive constraint violations and $R(c)$ is a sparsity-promoting regularizer.

In the numerical experiment, we used $N = 10\,000$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 1.5$, $k_3 = 1$, and $\gamma = 0.01$. After two generations, the algorithm identified

$$V(x, y) = x^2 + y^2.$$

Its derivative along the trajectories of system (1) satisfies

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -2x^2 - 2y^2 - 2|y|x^2 - 2|x|y^2 \\ &\leq -2(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Thus,

$$V(x, y) = \|(x, y)\|_2^2, \quad \dot{V}(x, y) \leq -2\|(x, y)\|_2^2,$$

which confirms exponential stability of the origin and shows that the identified function satisfies stronger bounds than those imposed during optimization.

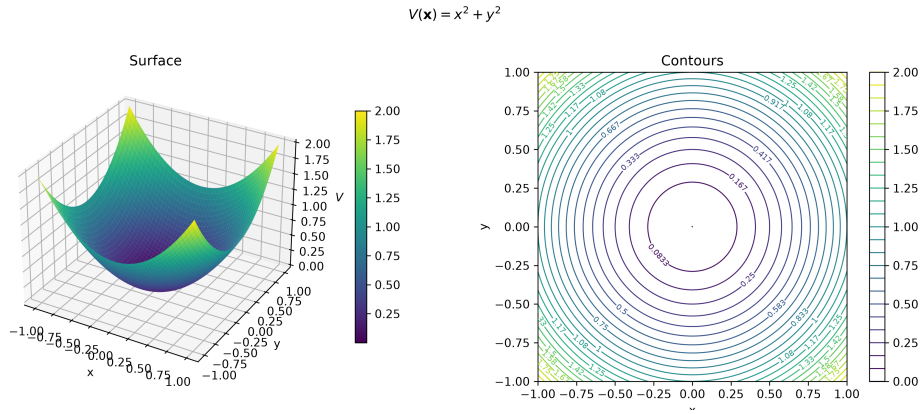


Figure 1: Surface and level curves of the identified Lyapunov function

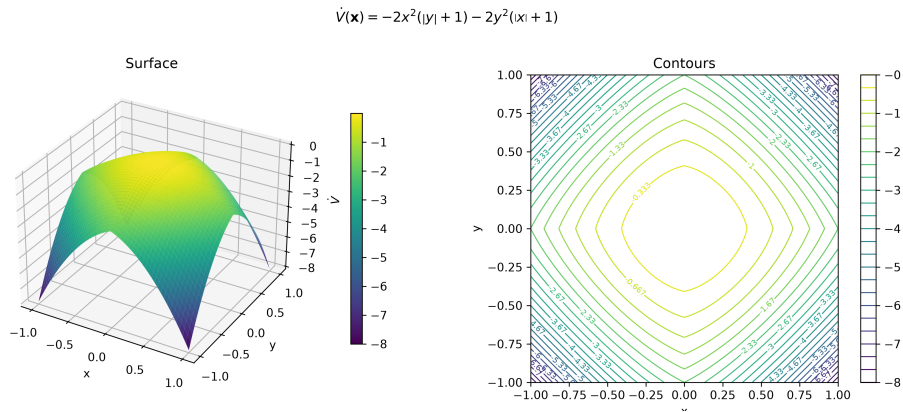


Figure 2: Surface and level curves of its derivative along system trajectories

References

- [1] Sobchuk V.V., Pykhnivskiy R.O. Construction of polynomial Lyapunov functions using genetic programming and sparse optimization. J. Optim. Differ. Equ. Appl. 2026, 34 (1), 111–133. doi:10.15421/142607

Finite speed of propagation and long-time properties of strong solutions to a nonlocal thin film equation

R.M. TARANETS ¹

¹ *Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine,
Sloviansk, Ukraine*

`taranets_r@yahoo.com`

We study a nonlocal thin film model in a multidimensional bounded domain, where the nonlocal diffusion is described by a spectral fractional Laplacian subject to homogeneous Neumann boundary conditions. The main goal is to investigate qualitative properties of weak solutions and, in particular, their spatial localization and behaviour at large times.

A key ingredient of the analysis is an α -entropy inequality adapted to the nonlocal structure of the equation. This estimate provides uniform bounds that are instrumental in obtaining regularity properties and controlling the evolution of weak solutions over extended time intervals. We further establish a localized form of the entropy inequality, which allows us to analyze the propagation of the support of nonnegative solutions.

As a consequence, we obtain a finite speed of propagation property: compactly supported nonnegative initial data generate solutions whose support remains spatially bounded at every positive time. In addition, we derive a criterion guaranteeing the occurrence of a waiting-time effect. Under this condition, a portion of the domain can remain in the zero state during a positive time interval before the solution becomes nontrivial there.

The obtained results demonstrate how the nonlocal diffusion mechanism modifies characteristic qualitative properties of thin film equations and provide new tools for studying the interplay between nonlocality, degeneracy, and free-boundary-type phenomena.

This is joint work with Antonio Segatti (Universita di Pavia, Pavia, Italy).

This research was supported by NRFU project No. 2023.03/0074 “Infinite-dimensional evolutionary equations with multivalued and stochastic dynamics”.

Application of the Dzhumabaev method in solving boundary value problems for evolutionary systems

Nazgul TAVANOVA, Altynshash BEKBAUOVA

K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

nazgultavanova@gmail.com

A significant contribution to the study of periodic and almost periodic oscillations, as well as nonlinear systems of partial differential equations, has been made in [1]–[4]. Of particular interest are boundary value problems for evolutionary systems arising in the mathematical modeling of dynamical processes.

An important method for studying such boundary value problems is the parametrization method proposed by D. S. Dzhumabaev.

Initial-boundary value problems for evolutionary systems are considered in the domain $\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_j(t, x, y) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^m b_j(t, x, y) \frac{\partial u}{\partial y_j} = A(t, x, y)u + f(t, x, y), \quad (1)$$

$$u(0, x, y) = \mu(x, y), \quad (2)$$

$$B(x, y)u(0, x, y) + C(x, y)u(T, x, y) = d(x, y), \quad (3)$$

where $t \in [0, T]$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $a_j(t, x, y)$, $b_j(t, x, y)$ are continuous vector-valued functions of dimensions n and m respectively, possessing periodicity, smoothness, and boundedness properties, with the norm defined as the supremum of the Euclidean norm of the vector-valued function:

$$\begin{aligned} a(t + \theta, x + \widehat{q\omega}, y) &= a(t, x, y), \\ b(t + \theta, x + \widehat{q\omega}, y) &= b(t, x, y), \\ \|a\| \leq \alpha_0, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} a \right\| &\leq \alpha_1, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial y} a \right\| \leq \alpha_2 \\ \|b\| \leq \beta_0, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} b \right\| &\leq \beta_1, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial y} b \right\| \leq \beta_2 \end{aligned} \quad (4)$$

for all $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{Z}^m$, where $\mathbb{Z}$ is the set of integers. The periods $\omega_1, \dots, \omega_m$ - positive incommensurable constants, $\widehat{q\omega} = (q_1\omega_1, q_2\omega_2, \dots, q_m\omega_m)$ the vector of multiple periods, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - some positive constants. $u(t, x, y) = (u_1(t, x, y), \dots, u_n(t, x, y))$ - is the sought vector function, with periodicity properties

$$u(t + \theta, x + \widehat{q\omega}, y) = u(t, x, y), \quad (5)$$

$A(t, x, y)$ - $n \times n$ - matrix, that satisfies the following condition:

$$\|A(t, x, y)\| \leq A_0 = \text{const} > 0, \quad (6)$$

$$A(t + \theta, x + \widehat{q\omega}, y) = A(t, x, y) \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m), \quad q \in \mathbb{Z}^m$$

$f(t, x, y)$ - n - vector function that satisfies the following condition:

$$f(t + \theta, x + \widehat{q\omega}, y) = f(t, x, y) \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m), \quad q \in \mathbb{Z}^m \quad (7)$$

$$\|f(t, x, y)\| \leq F_0 = \text{const} > 0,$$

$B(x, y)$, $C(x, y)$ ($n \times n$) - are matrices having periodicity properties by part of variables, $d \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

$$B(x + \widehat{q\omega}, y) = B(x, y), \quad (8)$$

$$C(x + \widehat{q\omega}, y) = B(x, y),$$

$$\|B\| \leq B_0 = \text{const} > 0, \quad \|C\| \leq C_0 = \text{const} > 0, \quad (9)$$

$$d(x + q\omega, y) = d(x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

Construction of a solution in the broad sense for system (1).

Definition. The continuous function $u(t, x, y)$ in $\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ is called a periodic solution in part of variables in the broad sense of the problem (1) – (3), if it satisfies the boundary condition (2) – (3) and is also periodic in (t, x) with a vector period (θ, ω) bounded in all variables and along the characteristic $\{\lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)\}$ satisfies the system of ordinary differential equations:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \tilde{A}(t, \lambda, \xi)\tilde{u} + \tilde{f}$$

where

$$\tilde{u} = u(t, \lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)),$$

$$\tilde{A} = A(t, \lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)),$$

$$\tilde{f} = f(t, \lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)).$$

Then the initial-boundary value problem (1) – (3) goes over to the initial-boundary value problem for systems of ordinary differential equations:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \tilde{A}(t, \lambda, \xi)\tilde{u} + \tilde{f}, \quad (10)$$

$$\tilde{u}(0, \lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)) = \mu(\lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{B}((\lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0))\tilde{u}(0, \lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)) + \\ & + \tilde{C}((\lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0))\tilde{u}(0, \lambda(T, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)) = \\ & = \tilde{d}(\lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)). \end{aligned} \quad (12)$$

To solve the initial-boundary value problem for ODE (10) – (12), we use D. Dzhumabaev's method, the parameterization method.

Let us take a step $h > 0$, which fits exactly $N(N = 0, 1, 2, \dots)$ times on the segment $[0, T]$ and perform a partition along it

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^N [(r-1)h, rh].$$

Two-point boundary value problems can be equivalent to multipoint boundary value problems [5].

Based on the homogeneous initial condition, a representation of the solution to the parametric problem is successively constructed. Substitution of this representation into the boundary condition, followed by passage to the limit, yields a system of equations for the functional parameter.

The solution of the resulting system determines the required functional parameter. Subsequently, solving the corresponding Cauchy problem enables us to reconstruct the solution of the original boundary value problem.

References

- [1] Bochner S. Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I. Teil. Funktionen einer Variablen. Mathematische Annalen. 1927. 96. P. 119–147.
- [2] Cesari L. Existence in the Large of Periodic Solutions of Hyperbolic Partial Differential Equations. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1965. 20, No. 2. P. 170–190.
- [3] Kiguradze T. On Periodic in the Plane Solutions of Second-Order Linear Hyperbolic Systems. Archivum Mathematicum. 1997. 33, No. 4. P. 253–272.
- [4] Kovalchuk T. V., Mohylova V. V., Stanzhytskyi O. M., Shovkoplyas T. V. Application of the Averaging Method to the Problems of Optimal Control of the Impulse Systems. Carpathian Mathematical Publications. 2020. 12, No. 2. P. 504–521.
- [5] Bekbauova A. Solutions in a Broad Sense to the Boundary Value Problem for First-Order Partial Differential Systems. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2025. 48, No. 6. P. 6263–6268.

Tinkercad circuits as a virtual design tool in robotics education

Halyna UNHURIAN, Bohdan YASHAN

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

`g.unhurian@chnu.edu.ua`, `b.yashan@chnu.edu.ua`

Problem Statement. Robotics education involves transitioning from a theoretical introduction to electronic components and algorithms to the independent creation of functional systems. An essential component of this process is project-based learning, in which students are required not only to write program code but also to determine the device structure, select components, establish connections between them, and verify the overall functionality of the system. Implementing such tasks using physical equipment can be hindered by a limited number of kits, the need for additional technical support, and the risk of component damage due to assembly errors. Therefore, there is a clear need to utilize virtual design tools that allow students to execute the core stages of robotics system development within a digital environment.

Main Results. Tinkercad Circuits is presented as a tool enabling the step-by-step implementation of the main stages in a robotics project: from constructing an electronic circuit to writing code and testing system operations. The platform supports Arduino along with a wide range of electronic components, allowing students to simulate various interaction scenarios between microcontrollers, sensors, and actuators.

A crucial aspect in education is the ability to rapidly modify the project structure. During the process, students can add or remove components, adjust connections, modify code, and immediately observe the results. This creates ideal conditions for experimental learning, where an error is viewed not merely as a failure, but as an opportunity to analyze system operations and discover alternative implementation strategies. Within the course "STEM Education in Computer Science Classes," students at Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University use Tinkercad Circuits to complete practical robotics assignments. These assignments include working with LEDs, servomotors, flex sensors, vibration sensors, and LED strips. Such tasks enable a gradual increase in system complexity, moving from individual electronic components to their comprehensive integration.

The platform allows for the integration of several activities within a single practical task. While building a model, students simultaneously work with the electronic schematic and code, establishing cause-and-effect relationships between sensor signals and actuator responses. Consequently, students develop a holistic understanding of a robotics system as an interconnected set of components rather than isolated elements. Another key advantage is using Tinkercad Circuits for both individual and collaborative work. Created projects can be shared with instructors or peers for review and further refinement. Project-sharing capabilities foster an environment for presenting results, comparing different approaches to a single problem, and collectively improving

robotic models.

The practical outcome of this approach is the development of essential skills for independent project implementation: task analysis, component selection, circuit design, algorithm development, programming, and testing. Beyond technical skills, project work enhances independence, creative problem-solving, and the ability to refine solutions based on test results. These capabilities directly align with STEM goals, where knowledge of programming, electronics, and engineering design are integrated to solve practical problems.

Conclusions. Tinkercad Circuits serves as an effective virtual design environment in robotics education. Its primary benefits include establishing conditions for independent construction and programming, repeated model testing, and safe experimentation. The platform seamlessly integrates electronics and programming within a unified educational task, fostering a systemic understanding of robotic device operations. A promising area for future development is designing a progressively complex set of project tasks tailored for students with varying levels of initial training.

References

- [1] Balyk N. R., Shmyher H. P. Approaches and features of modern STEM education. *Physical and Mathematical Education*. 2017. 2, No. 12. P. 26–30.
- [2] Melnychuk L., Yashan B., Kondur O. Advanced study of robotics at school through the implementation of elective courses. *Educational Horizons*. 2022. 55, No. 2. P. 59–64. DOI: <https://doi.org/10.15330/obrii.55.2.59-64>.
- [3] Morze N. V., Hladun M. A., Dziuba S. M. Formation of key and subject competences of students by robotic kits of STEM-education. *Information Technologies and Learning Tools*. 2018. 65, No. 3. P. 37–52. DOI: <https://doi.org/10.33407/itlt.v65i3.2041>.
- [4] Shevchenko L. S., Umanets V. O., Rozputnia B. M. Using the Arduino platform in the training of computer science teachers on the principles of STEM learning. *Open Educational E-environment of Modern University*. 2023. 15. P. 130–138. DOI: <https://doi.org/10.28925/2414-0325.2023.1510>.

Nonlinear parabolic equations on graphs

Dariia YATSENIAC^{1,2}, Oleh BUHRII¹

¹*Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine*

²*Ternopil Volodymyr Hnatiuk National Pedagogical University, Ternopil, Ukraine*

dariia.yatseniak@lnu.edu.ua, oleg.buhrii@lnu.edu.ua

Let $T > 0$ and $M, n \in \mathbb{N}$ be some numbers, $G := (V, E)$ be a simple connected directed graph with the vertices $P_j \in V$ and edges $\Omega_i \in E$, $i = \overline{1, n}$. Each edge is parameterized by the interval $\Omega_i := (0, \ell_i)$, $\ell_i > 0$. Let V_{int} be the set of all internal vertices. Let V_{ext} be the set of the boundary vertices, which is divided into two disjoint subsets V_D and V_N such that $V_D \neq \emptyset$.

We seek a weak solution $u = (u^1, \dots, u^n)$ of the following initial-boundary value problem on the graph G

$$u_t^i - \left(a^i(x, t) |u_x^i|^{p-2} u_x^i \right)_x + g^i(x, t) |u^i|^{q-2} u^i = f^i(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_i \times (0, T), \quad (1)$$

$$u^i(P, t) = u^k(P, t) \quad \text{for all } \Omega_i, \Omega_k \succ P \in V_{int}, \quad (2)$$

$$\sum_{\Omega_i \succ P} \left| u_x^i(P, t) \right|^{p-2} u_x^i(P, t) = 0, \quad P \in V_{int}, \quad (3)$$

$$u^i(P, t) = 0, \quad \Omega_i \succ P \in V_D, \quad (4)$$

$$u_x^i(P, t) = 0, \quad \Omega_i \succ P \in V_N, \quad (5)$$

$$u^i(x, 0) = u_0^i(x), \quad x \in [0, \ell_i], \quad (6)$$

where $p, q > 1$ are some given numbers, a^i, g^i, f^i, u_0^i are given functions, and the notation $\Omega_i \succ P$ indicates the incidence relation, meaning that the edge Ω_i is connected to the vertex P .

Similarly as in [1]-[2], under appropriate conditions on the input data, we prove that problem (1)–(6) has a unique weak solution.

References

- [1] Buhrii O. M. Stochastic parabolic equations on graphs. *Matematychni Studii*. 2026. 65, No. 1. P. 58–73.
- [2] Buhrii O., Yatseniak D. Semilinear parabolic equations on graphs. *Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education*. 2026. 3, No. 1. P. 22–40.

On plasticity of the unit spheres of some Banach spaces

Olesia ZAVARZINA and Maksym LEVCHENKO

V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

olesia.zavarzina@yahoo.com, lemax2233@gmail.com

Definition 1. A metric space (M, d) is called *plastic* if every bijective non-expansive map $F: M \rightarrow M$ is an isometry.

There are a number of results concerning the plasticity of the unit balls of Banach spaces as metric spaces with the metric generated by the norm (see, for example, [1, 4]). Most of the results for the unit balls are based on properties of bijective non-expansive maps between unit balls of normed spaces, which do not work for the unit spheres. The talk is devoted to properties of the non-expansive maps between unit spheres and the plasticity of the unit spheres of some Banach spaces. Namely, the following theorems are proved.

Theorem 1. *The unit sphere of any Hilbert space is plastic.*

Theorem 2. *The unit sphere of the space ℓ_1 is plastic.*

Theorem 3. *The unit sphere of the space ℓ_∞ is plastic.*

Definition 2. A metric space (M, d) is said to be *strongly plastic* if every non-contractive mapping $F: M \rightarrow M$ is an isometric embedding.

This definition was introduced in [2], however, this property was studied before (for example in [5] for totally bounded spaces). We show that the strong plasticity of the unit spheres of Hilbert spaces is an easy consequence of the parallelogram equality.

Acknowledgments. Olesia Zavarzina was supported by the National Research Foundation of Ukraine, project No. 2025.07/0369 “Qualitative methods of nonlinear analysis of heterogeneous structures”.

References

- [1] V. Kadets, O. Zavarzina, Nonexpansive bijections to the unit ball of the ℓ_1 -sum of strictly convex Banach spaces. Bull. Aust. Math. Soc., 2018, 97(2), 285–292.
- [2] V. Kadets, O. Zavarzina, Plastic pairs of metric spaces. J. Math. Anal. Appl., 2024, 529(2), 127435.
- [3] M. Levchenko, O. Zavarzina, On expand-contract plasticity of the unit spheres of some normed spaces, arXiv:2605.06622.

- [4] N. Leo, Plasticity of the unit ball of c and c_0 . J. Math. Anal. Appl., 2022, 507(1), 125718.
- [5] S. A. Naimpally, Z. Piotrowski, E. J. Wingler, Plasticity in metric spaces. J. Math. Anal. Appl., 2006, 313(1), 38–48.

Майже періодичні розв'язки в рівнянні неокласичної моделі зростання з нефіксованими моментами імпульсної дії

Абдивалі АКБЕРГЕНОВ, Анатолій ДВОРНИК, Віктор ТКАЧЕНКО

Інститут математики, Київ, Україна

abdivali.akbergenov@gmail.com, a.dvornyk@gmail.com, vitk@imath.kiev.ua

Розглянемо рівняння неокласичної моделі зростання з майже періодичними коефіцієнтами та нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t) + \sum_{j=1}^m \beta_j(t)x^p(t - h_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-h_j(t))}, \quad t \neq \tau_k(x(t)), \quad (1)$$

$$\Delta x(t) = x(t+0) - x(t) = a_k x(t) + b_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

де $x \in \mathbb{R}$, $p \in (0, 1)$ — стала, неперервні функції $\alpha(t)$, $\beta_j(t)$, $\gamma_j(t)$ та $h_j(t)$ додатнозначні та майже періодичні, послідовності $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$ майже періодичні й $a_k > -1$, $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t, x) : t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Функції $\tau_k(x)$ задовольняють умову Ліпшиця і рівномірно відділені одна від іншої. Послідовність функцій $\{\tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць $\{\tau_k^j(x)\}$, де $\tau_k^j(x) = \tau_{k+j}(x) - \tau_k(x)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Рівняння (1) зі сталими коефіцієнтами з $m = 1$ було запропоноване у 2011 р. А. Matsumoto і F. Szidarovszky як неокласична економічна модель зростання, де x позначає капіталомісткість на одиницю праці, α , β , γ , δ — додатні параметри, h — затримка у виробничому процесі, параметр p можна розглядати як показник для вимірювання віддачі від масштабу виробничої функції, γ відображає силу «негативного ефекту», спричиненого зростанням концентрації капіталу, та визначається ступенем пошкодження природного середовища або енергетичних ресурсів. Імпульсні дії (2) характеризують короточасні зовнішні впливи в моменти часу $\tau_k(x(t))$. Відмітимо, що при $p = 1$ рівняння (1) є знаменитим рівнянням Ніколсона з математичної біології.

Метою нашої роботи є знаходження умов існування і стійкості кусково-неперервного додатного майже періодичного розв'язку рівняння з імпульсною дією (1), (2). Ми використовуємо означення кусково-неперервних майже періодичних функцій (w -майже періодичних функцій) у сенсі [1]. Точки розривів цих розв'язків збігаються з точками імпульсної дії $\{\tau_k(x)\}$.

Оскільки моменти імпульсної дії рівняння (1), (2) з нефіксованими моментами імпульсної дії залежать від розв'язків, то різні розв'язки можуть мати різні моменти розривів. Також у системи може бути так званий феномен биття, коли розв'язки перетинають поверхню $t = \tau_k(x)$ кілька разів чи навіть нескінченну кількість разів. Ми припускаємо виконання умов, за яких ефект биття відсутній.

Спочатку доводимо, що розв'язки рівняння (1), (2) з початковими значеннями з деякої обмеженої множини залишаються рівномірно обмеженими і рівномірно відділеними від нуля на додатній півосі та набувають граничних значень при $t \rightarrow \infty$ в обмеженому відрізку $[m_0, M_0]$, $0 < m_0 < M_0 < \infty$. Далі, як і у [2], будуємо деяке відображення у просторі майже періодичних послідовностей зі значеннями в $[m_0, M_0]$. Нерухома точка цього відображення відповідає майже періодичному розв'язку рівняння з імпульсною дією (1), (2). Цей майже періодичний розв'язок притягує всі розв'язки з обмеженої множини. В означенні притягування враховуємо відмінність точок розриву різних розв'язків рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії.



This work is a part of the project that has received funding from the EU Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement Number 873071, SOMPATY.

Література

- [1] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations, World Scientific Publishing, Singapore, 1995. 462 p.
- [2] Hakl R., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S. Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments. J. Math. Anal. Appl. 2017. 446, № 1. P. 1030–1045.
- [3] Акбергенов А., Дворник А., Ткаченко В. Майже періодичні розв'язки в рівнянні неокласичної моделі зростання з нефіксованими моментами імпульсної дії. Нелін. колив. 2025. 28, № 3. С. 319–338.

Інтегральні множини нелінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

Фарход АСРОРОВ¹, Катерина МАМСА²

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

²Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

asrorovfa@knu.ua, ekaterinamamsa@gmail.com

Розглядаються динамічні системи, стан яких змінюється безперервно між фіксованими моментами імпульсної дії та стрибкоподібно в самі ці моменти. Метою є встановлення достатніх умов існування інтегральної множини нелінійної неоднорідної системи та дослідження стійкості розв'язків поблизу неї.

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= a(t, \varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P(t, \varphi)x + f(t, \varphi, x), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi)x + I_i(\varphi, x).\end{aligned}$$

Векторні та матричні функції вважаються обмеженими, періодичними за відповідними змінними та такими, що задовольняють умови Ліпшиця. Моменти імпульсної дії фіксовані. Потрібно встановити умови існування інтегральної множини та її стійкості.

Спочатку розглянемо неавтономну систему, задану на торі, та позначимо через $\varphi_t(\tau, \varphi)$ її розв'язок. Компактність фазового простору і прийняті обмеження забезпечують існування розв'язків на всій дійсній осі. Для лінеаризованої системи вводиться матрицант і функція Гріна–Самойленка, властивості якої дають експоненціальні оцінки обмежених розв'язків.

Інтегральною множиною називається множина $x = u(t, \varphi)$, періодична за параметром, кусково-неперервна за часом і така, що має розриви першого роду в моменти імпульсної дії. Функція $u(t, \varphi)$ визначає інтегральну множину, якщо для кожного розв'язку $\varphi_t(\tau, \varphi)$, $\varphi_\tau(\tau, \varphi) = \varphi$, першої з систем виконується співвідношення

$$\begin{aligned}\frac{dx_t(\tau, \varphi)}{dt} &= \frac{d}{dt}u(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = \\ &= P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))u(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) + f(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = \\ &= P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x_t(\tau, \varphi) + f(t, \varphi_t(\tau, \varphi))\end{aligned}$$

для будь-якого $\tau \in R$, $\varphi \in \mathfrak{T}_m$. А при $t = \tau_j$ маємо

$$x_{\tau_j+0}(\tau, \varphi) - x_{\tau_j}(\tau, \varphi) = B_j(\varphi_{\tau_j}(\tau, \varphi))x_{\tau_j}(\tau, \varphi) + I_j(\varphi_{\tau_j}(\tau, \varphi))$$

для будь-якого $\tau \in R$, $\varphi \in \mathfrak{T}_m$.

Інтегральна множина відшуковується ітераційно, як межа послідовності множин

$$u^{(0)}(t, \varphi), u^{(1)}(t, \varphi), \dots, u^{(j)}(t, \varphi), \dots,$$

кожне з яких є інтегральною множиною системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t, \varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P(t, \varphi)x + f(t, \varphi, u^{(j-1)}(t, \varphi)), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi)x + I_i(\varphi, u^{(j-1)}(\tau_i, \varphi)). \end{aligned}$$

За допомогою функції Гріна–Самойленка отримується інтегральне представлення чергового наближення. За умови достатньо малої константи Ліпшиця нелінійної частини це представлення забезпечує єдину оцінку для всіх елементів послідовності.

Основний результат. Якщо нелінійна система задовольняє умови Ліпшиця та обмеженості, а відповідна лінійна система має функцію Гріна–Самойленка з необхідними експоненціальними оцінками, то за достатньо малої константи Ліпшиця нелінійної частини система має інтегральну множину. Вона будується як рівномірна границя послідовності інтегральних множин допоміжних систем.

Отримано достатні умови існування інтегральної множини нелінійної системи з імпульсною дією. Її побудова здійснюється ітераційним методом, а збіжність забезпечується оцінками на основі функції Гріна–Самойленка. За додаткових спектральних умов інтегральна множина є асимптотично стійкою. Результати можуть бути використані для дослідження періодичних і багаточастотних режимів динамічних систем з імпульсними збуреннями.

Про апроксимаційні властивості багатоточкових крайових задач

Олена АТЛАСЮК^{1,2}, Володимир МИХАЙЛЕЦЬ^{2,3}

¹ Гельсінський університет, Гельсінкі, Фінляндія

² Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна,

³ Королівський коледж Лондона, Лондон, Велика Британія

hatlasiuk@gmail.com, vladimir.mikhailets@gmail.com

Нехай $(a, b) \subset \mathbb{R}$ — скінченний інтервал, а параметри $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{m, r, k\} \subset \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ — довільні. Позначимо звичайний комплексний простір Соболева як

$$W_p^{n+r}([a, b]; \mathbb{C}) := \{y \in C^{n+r-1}([a, b]; \mathbb{C}) : y^{(n+r-1)} \in AC[a, b], y^{(n+r)} \in L_p[a, b]\}.$$

Розглядаємо коректно визначену крайову задачу з неоднорідними крайовими умовами

$$(L_0 y_0)(t) := y_0^{(r)}(t) + \sum_{\ell=1}^r A_{r-\ell,0}(t) y_0^{(r-\ell)}(t) = f_0(t), \quad t \in (a, b), \quad (1)$$

$$B_0 y_0 := \sum_{s=0}^{n+r-1} \alpha_{s,0} y_0^{(s)}(t_0) + \int_a^b \Phi_0(t) y_0^{(n+r)}(t) dt = c_0, \quad (2)$$

де задано матрицю-функцію $A_{r-\ell}(\cdot) \in (W_p^n)^{m \times m}$, вектор-функцію $f_0(\cdot) \in (W_p^n)^m$, вектор $c_0 \in \mathbb{C}^{rm}$, числові матриці $\alpha_{s,0} \in \mathbb{C}^{rm \times rm}$ та матрицю-функцію $\Phi_0(\cdot) \in L_{p'}([a, b]; \mathbb{C}^{rm \times rm})$, $p \in [1, \infty)$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. Як було доведено в [1, теорема 3.2], кожна довільна неоднорідна крайова умова для рівняння (1) допускає єдине канонічне представлення виду (2), де t_0 — довільна фіксована точка інтервалу $[a, b]$.

Розв'язок задачі (1), (2) розуміється як вектор-функція $y \in (W_p^{n+r})^m$, яка задовольняє як рівняння (1) (скрізь, якщо $n \geq 1$, та майже скрізь, якщо $n = 0$) на (a, b) , так і рівність (2). Крайова умова (2) з довільним неперервним оператором $B_0: (W_p^{n+r})^m \rightarrow \mathbb{C}^{rm}$ є *найбільш загальною* для диференціальної системи (1). Вона охоплює всі класичні типи крайових умов, такі як початкові умови в задачі Коші, різні багатоточкові умови, інтегральні умови, змішані крайові умови, а також неklasичні умови, що містять дробові похідні, де порядок похідних може перевищувати порядок диференціального рівняння [2].

Розглянемо послідовність багатоточкових крайових задач

$$(L_k y_k)(t) := y_k^{(r)}(t) + \sum_{\ell=1}^r A_{r-\ell,k}(t) y_k^{(r-\ell)}(t) = f_k(t), \quad t \in (a, b), \quad (3)$$

$$B_k y_k := \sum_{s=0}^{n+r-1} \alpha_{s,k} y_k^{(s)}(t_0) + \sum_{j=0}^{N(k)} \beta_{j,k} y_k^{(n+r-1)}(t_{j,k}) = c_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Тут елементи матриці-функції $A_{r-\ell,k}$ належать деякій щільній множині $\mathcal{F} \subset (W_p^n)^{m \times m}$, а G — щільна множина у просторі $(W_p^n)^m$ та $f_k \in G$ для всіх k . Більше того, для всіх індексів

$\alpha_{s,k}, \beta_{j,k} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ та точки $t_{j,k}$ належать деякій щільній множині $\mathcal{P}$ на інтервалі $[a, b]$, та виконуються граничні співвідношення $f_k \rightarrow f_0, c_k \rightarrow c_0$ при $k \rightarrow \infty$.

Ми вивчаємо задачу існування послідовності крайових задач (3), (4), розв'язки яких задовольняють асимптотичну формулу $y_k \rightarrow y_0$, в $(W_p^{n+r})^m$ при $k \rightarrow \infty$. Отримано позитивну відповідь на це питання, спираючись на [1, теорема 2.2], яка встановлює неперервність розв'язків крайових задач за параметром, що належить абстрактному метричному простору $\mathcal{M}$.

Теорема 1. *Припустимо, що однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок. Тоді існує така послідовність коректно визначених крайових задач виду (3), (4) з поліноміальними коефіцієнтами та правими частинами, що*

- (i) якщо $1 < p < \infty$, то $\| (L_k, B_k)^{-1} - (L_0, B_0)^{-1} \| \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$;
- (ii) якщо $p = 1$, то $(L_k, B_k)^{-1} \xrightarrow{s} (L_0, B_0)^{-1}$ і $y_k \rightarrow y_0$ у $(W_1^{n+r})^m$ при $k \rightarrow \infty$.

Тут $\xrightarrow{s}$ позначає сильну збіжність операторів.

У випадку $p = 1$ виникає природне питання: які додаткові умови треба накласти на оператор (L_0, B_0) , щоб збіжність $(L_k, B_k)^{-1} \rightarrow (L_0, B_0)^{-1}$ була не лише у сильній, а й у рівномірній операторній топології? Згідно з теоремою 1 це завжди так, якщо $p \in (1, \infty)$. Відповідь на нього дає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 та $p = 1$. Тоді виконується*

$$\| (L_k, B_k)^{-1} - (L_0, B_0)^{-1} \| \rightarrow 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

тоді і тільки тоді, коли кожен елемент матриці-функції Φ_0 дорівнює регульованій функції майже скрізь.

Нагадаємо, що функція на інтервалі $[a, b]$ називається регульованою, якщо вона має скінченні ліву та праву границі в кожній точці інтервалу.

Подяки

Робота першого автора була профінансована постдокторською стипендією EU-MSCA4Ukraine (номер: 1244691, номер WBS: 4100609). Цей проект отримав фінансування через проект MSCA4Ukraine, який фінансується Європейським Союзом. Однак висловлені погляди та думки є лише думками автора та не обов'язково відображають погляди Європейського Союзу, Європейського виконавчого агентства з досліджень або Консорціуму MSCA4Ukraine. Ні Європейський Союз, ні Європейське виконавче агентство з досліджень, ні Консорціум MSCA4Ukraine в цілому, ні будь-яка окрема установа-член Консорціуму MSCA4Ukraine не несуть відповідальності за них.

Другий автор хотів би подякувати Інституту математичних наук імені Ісаака Ньютона в Кембриджі за підтримку та гостинність під час «Програми солідарності», де проводилася робота над цими результатами. Ця робота була підтримана грантом EPSRC № EP/R014604/1. Автор хотів би подякувати кафедрі математики Королівського коледжу Лондона за гостинність.

Література

- [1] Atlasiuk O., Mikhailets V., Taskinen J. Parameter-dependent inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev spaces. 2025. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2512.21361>
- [2] Mikhailets V., Atlasiuk O., The solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev spaces. Banach J. Math. Anal. 2024. 18(2), № 12.

Багатоточкова задача з параметрами для нелінійної багаточастотної системи з імпульсною дією

Ярослав БІГУН, Роман ПЕТРИШИН

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

y.bihun@chnu.edu.ua, r.petryshyn@chnu.edu.ua

Основи диференціальних рівнянь з імпульсною дією закладені у монографії А.М. Самойленка і М.О. Перестюка [1]. У доповіді розглядається багаточастотна система вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon a(x, \varphi, \varepsilon t, s), & \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(x, \varepsilon t) + \varepsilon b(x, \varphi, \varepsilon t, s), & t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} &= \varepsilon p(x, \varphi, s), & \Delta \varphi|_{t=t_k} &= \varepsilon q(x, \varphi, s), \end{aligned} \quad (1)$$

де $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, L/\varepsilon]$, $s \in G = \mathbb{R}^\ell$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $t_{k+1} - t_k = 2\pi$, $t_0 = 0$. Праві частини рівнянь (1) належать певним класам гладких і 2π -періодичних по φ функцій.

Задамо для (1) багатоточкові умови

$$\begin{aligned} A(x|_{t=d_1}, \dots, x|_{t=d_r}, s) &= 0, \\ \sum_{j=1}^r B_j(x|_{t=d_1}, \dots, x|_{t=d_r}, s) \varphi|_{t=d_j} &= C(x|_{t=d_1}, \dots, x|_{t=d_r}, s), \end{aligned} \quad (2)$$

де A — $(n + \ell)$ -вимірний вектор, B і C — m -вимірні вектори, $0 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_r \leq L/\varepsilon$.

Для знаходження розв'язку $\{x(t, \varepsilon), \varphi(t, \varepsilon)\}$ системи рівнянь (1) з імпульсною дією, який задовольняє умови (2), застосовано метод усереднення за швидкими змінними, обґрунтований у монографії А.М. Самойленка і Р.І. Петришина [2]. Усереднена система будується без імпульсної дії, зокрема, компоненти $\{\bar{x}(t, \varepsilon), \bar{s}\}$ розв'язку $\{\bar{x}(t, \varepsilon), \bar{\varphi}(t, \varepsilon), \bar{s}\}$ усередненої задачі є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \varepsilon \bar{a}(\bar{x}, \varepsilon t, \bar{s}) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \bar{p}(\bar{x}, \varepsilon t, \bar{s}), \\ A(\bar{x}|_{t=d_1}, \dots, \bar{x}|_{t=d_r}, \bar{s}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо існує розв'язок задачі (3) і матриця

$$\sum_{j=1}^r B_j(\bar{x}|_{t=d_1}, \dots, \bar{x}|_{t=d_r}, \bar{s})$$

невироджена, то знайдемо достатні умови існування єдиного розв'язку $\{x(\varepsilon t), \varphi(\varepsilon t), s\}$, причому похибки $\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t, \varepsilon)\|$ і $\|s - \bar{s}\|$ методу усереднення асимптотично малі для $t \in [0, L/\varepsilon]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для досить малого $\varepsilon_0 > 0$.

Запропонований вище метод дослідження розвинуто для систем диференціальних рівнянь із майже періодичними по φ функціями a , b , p , q та моментами імпульсної дії, які задовольняють умову

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (t_{k+1} - t_k) = \theta > 0.$$

Метод усереднення за швидкими змінними для багаточастотних систем із запізненням і початковими, багатоточковими та інтегральними умовами обґрунтований у працях Я.Й. Бігуна і Р.І. Петришина та їх учнів. Новий клас узагальнених багаточастотних систем із лінійно перетвореними аргументами і різною асимптотикою для повільних і швидких змінних досліджено у праці [3]. Розглянуто багаточастотну систему вигляду

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= \varepsilon^{\varkappa_1} X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^\varkappa} + \varepsilon^{\varkappa_2} Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta),\end{aligned}\tag{4}$$

де $\varkappa_1 \geq 0$, $\varkappa_2 \geq 0$, $\varkappa > 0$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \geq 0$, $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, D — обмежена опукла область, $\varphi \in \mathbb{R}^m$; $a_\Lambda(\tau) = (a(\lambda_1\tau), \dots, a(\lambda_p\tau))$, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq 1$, $\varphi_\Theta(\tau) = (\varphi(\theta_1\tau), \dots, \varphi(\theta_q\tau))$, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_q \leq 1$.

Побудована відповідна усереднена система за швидкими змінними

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{a}}{d\tau} &= \varepsilon^{\varkappa_1} X_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^\varkappa} + \varepsilon^{\varkappa_2} Y_0(\tau, \bar{a}_\Lambda)\end{aligned}$$

й отримана оцінка похибки методу усереднення для повільних і швидких змінних вигляду

$$\varepsilon^{\varkappa_2} \|a(\tau, \varepsilon) - \bar{a}(\tau)\| + \varepsilon^{\varkappa_1} \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{\alpha + \varkappa_1 + \varkappa_2},\tag{5}$$

де $\alpha = \varkappa/(mq)$, $a|_{\tau=0} = \bar{a}|_{\tau=0}$, $\varphi|_{\tau=0} = \bar{\varphi}|_{\tau=0}$, $c_1 > 0$ і не залежить від ε .

У кожному з наведених випадків побудовано приклади, які ілюструють одержані результати.

Література

- [1] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Singapore; New Jersey; London; Hong-Kong: World Scientific, 1995. 468 p.
- [2] Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 2004. 475 с.
- [3] Bihun Ya., Petryshyn R., Skutar I. Averaging in a generalized multifrequency system with a delay. Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems. Springer Nature Switzerland AG, 2025. P. 281–294.

Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з експоненціальною нелінійністю

Марія БІЛОЗЕРОВА¹, Ольга ЧЕПОК²

¹Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Інститут
математики НАН України, Київ, Україна

²Державний заклад "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені
К. Д. Ушинського", Одеса, Україна

¹ marbel@ukr.net, ² olachepok@ukr.net

Розглядається диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = \alpha_0 p(t) \exp\left(R_0(y, y') + \exp(R_1(y, y'))\right), \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p: [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty)$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$), а неперервно диференційовні функції $R_k: \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow (0, +\infty)$ ($k \in \{0, 1\}$) у певному сенсі близькі до правильно змінних функцій. Тут $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, а Δ_{Y_i} позначає $[y_i^0, Y_i]^*$ або $(Y_i, y_i^0]$. Також припускаємо, що функції R_k задовольняють умови

$$\lim_{\substack{(y_0, y_1) \rightarrow (Y_0, Y_1) \\ (y_0, y_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}}} R_k(y_0, y_1) = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{y_i \rightarrow Y_i \\ y_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{y_i \frac{\partial R_k(y_0, y_1)}{\partial y_i}}{R_k(y_0, y_1)} = \gamma_{ki}, \text{ рівномірно за } y_j \neq y_i \quad (k, i, j \in \{0, 1\}).$$

Для рівнянь типу (1) розглядається наступний клас розв'язків:

Означення 1 ([2]). Розв'язок y , визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, якщо

$$y^{(i)}: [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Метою роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків рівняння (1) та асимптотичного зображення при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків і їхніх похідних першого порядку у випадках $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Для подання результатів введемо такі допоміжні позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases}$$

*Якщо $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$), вважаємо, що $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$).

$$I(t) = \alpha_0(\lambda_0 - 1) \int_{B_\omega^0}^t \pi_\omega(\tau) p(\tau) d\tau, \quad B_\omega^0 = \begin{cases} a, & \text{при } \int_a^\omega \pi_\omega(\tau) p(\tau) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{при } \int_a^\omega \pi_\omega(\tau) p(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$I_1(t) = \int_{B_\omega^1}^t \frac{\lambda_0 I(\tau)}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(\tau)} d\tau, \quad B_\omega^1 = \begin{cases} a, & \text{при } \int_a^\omega \frac{\lambda_0 I(\tau)}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(\tau)} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{при } \int_a^\omega \frac{\lambda_0 |I(\tau)|}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(\tau)} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$\phi(y_0, y_1) = \frac{-\lambda_0}{(\lambda_0 \gamma_{00} + \gamma_{01}) R_0(y_0, y_1) + (\lambda_0 \gamma_{10} + \gamma_{11}) R_1(y_0, y_1) \exp(R_1(y_0, y_1))},$$

$$\phi_0(y_0, y_1) = \phi(y_0, y_1) y_0 \exp(R_0(y_0, y_1) + \exp(R_1(y_0, y_1))),$$

$$F_1(y_0, y_1) = \phi(y_0, y_1)^2 \exp(R_0(y_0, y_1) + \exp(R_1(y_0, y_1))),$$

$$F(y_0, y_1) = \begin{pmatrix} F_1(y_0, y_1) \\ \frac{y_1}{y_0} \end{pmatrix}.$$

За властивостями функцій R_1 та R_2 (див., наприклад, [1]) можна обрати y_0^0 та y_1^0 так, щоб на $\Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}$ існувала єдина обернена функція $F^{-1} = (F_0^{-1}, F_1^{-1})^T$.

Отримано наступну теорему.

Теорема. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Тоді умови

$$\pi_\omega(t) y_1^0 y_0^0 \lambda_0 (\lambda_0 - 1) > 0, \quad \pi_\omega(t) y_1^0 \alpha_0 (\lambda_0 - 1) > 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega),$$

$$y_1^0 \cdot \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} I_1(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{I(t)}{\phi_0 \left(F^{-1} \left(I_1(t), \frac{\lambda_0 \pi_\omega(t)}{\lambda_0 - 1} \right) \right)} = 1$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_1'(t) \pi_\omega(t)}{I_1(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_1'(t)}{I_1(t) \phi \left(F^{-1} \left(I_1(t), \frac{\lambda_0 \pi_\omega(t)}{\lambda_0 - 1} \right) \right)} = \infty$$

є необхідними та достатніми для існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків рівняння (1).

Крім того, рівняння (1) має однопараметричне сімейство розв'язків у випадку $(\lambda_0 - 1)\beta < 0$ та двопараметричне сімейство розв'язків, якщо $(\lambda_0 - 1)\beta > 0$ та $(\lambda_0 - 3)(\lambda_0 - 1) < 0$. Для кожного такого розв'язку при $t \uparrow \omega$ мають місце такі асимптотичні зображення:

$$\frac{\lambda_0^2 \exp(R_0(y(t), y'(t)) + \exp(R_1(y(t), y'(t))))}{((\lambda_0 \gamma_{00} + \gamma_{01}) R_0(y(t), y'(t)) + (\lambda_0 \gamma_{10} + \gamma_{11}) R_1(y(t), y'(t)) \exp(R_1(y(t), y'(t))))^2} \sim I_1(t),$$

$$\frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} \sim \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}.$$

Література

- [1] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 512 p.
- [2] Evtukhov V., Samoilenko A. Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. Ukrainian Math. J. 2010. 62. P. 56–86.

Чисельне оцінювання регулярності фрактальних функцій на скінченних масштабах

Дмитро БОБИЛЄВ

Криворізький державний педагогічний університет, Кривий Ріг, Україна

dmytrobobyliiev@gmail.com

Показник регулярності фрактальної функції є асимптотичною характеристикою, тоді як його чисельна оцінка ґрунтується на скінченній апроксимації та обмеженому наборі масштабів. Унаслідок цього спостережуваний показник може систематично відрізнятися від асимптотичного навіть за відсутності випадкових похибок. У роботі досліджено два джерела такого відхилення – обмеження фрактального ряду скінченною кількістю членів та скінченність масштабного інтервалу – і встановлено їх взаємозв'язок у критичному режимі.

Розглянемо сімейство

$$F_{\lambda,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi(b^n x), \quad 0 < \lambda < 1, \quad b \geq 2, \quad (1)$$

де φ – обмежена періодична L -ліпшицева функція. До цього класу належать класичні фрактальні функції Вейерштраса і Такагі [1, 2]. У чисельних обчисленнях ряд (1) замінюється частковою сумою

$$F_{\lambda,b}^{(N)}(x) = \sum_{n=0}^N \lambda^n \varphi(b^n x).$$

Для неї

$$\|F_{\lambda,b} - F_{\lambda,b}^{(N)}\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty} \frac{\lambda^{N+1}}{1 - \lambda}.$$

Нехай

$$\omega(x, r) = \sup_{|h| \leq r} |F(x+h) - F(x)|, \quad \omega_N(x, r) = \sup_{|h| \leq r} |F^{(N)}(x+h) - F^{(N)}(x)|.$$

Тоді

$$|\omega(x, r) - \omega_N(x, r)| \leq \delta_N, \quad \delta_N = 2\|\varphi\|_{\infty} \frac{\lambda^{N+1}}{1 - \lambda}. \quad (2)$$

Отже, величина δ_N задає природний поріг роздільної здатності: якщо $\omega_N(x, r)$ порівнянна з δ_N , поведінка функції на цьому масштабі вже не може надійно відтворювати асимптотичну регулярність.

Особливий характер має критичне співвідношення $\lambda b = 1$. Стандартне розбиття ряду за частотами, меншими і більшими за r^{-1} , дає

$$\omega(x, r) = O\left(r \log \frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow 0.$$

Логарифмічний множник порушує чистий степеневий закон і спричинює систематичне зміщення показника, визначеного за скінченним інтервалом.

Теорема 1. Нехай $\lambda b = 1$ і в точці x виконується

$$\omega(x, r) = C(x)r \log \frac{1}{r} (1 + o(1)), \quad r \rightarrow 0, \quad C(x) > 0.$$

Для масштабів $r_j = b^{-j}$ ефективний показник, визначений секантним нахилом між r_{j_0} та r_{j_1} , задовольняє

$$\alpha_{\text{eff}} = 1 - \frac{\log(j_1/j_0)}{(j_1 - j_0) \log b} + o\left(\frac{1}{j_1 - j_0}\right). \quad (3)$$

Дійсно,

$$\log \omega(x, b^{-j}) = -j \log b + \log j + \log(C(x) \log b) + o(1),$$

тому доданок $\log j$ зменшує скінченний нахил. Таким чином, у критичному режимі виникає детерміноване від'ємне зміщення оцінки регулярності, яке не усувається підвищенням точності обчислення самої функції.

Поєднання (2) і (3) визначає область масштабів, придатних для чисельного оцінювання. З одного боку, перехід до менших r зменшує скінченно-масштабне зміщення; з іншого – осциляція наближається до порога δ_N , породженого усіченням ряду. Тому нижню межу допустимого масштабного інтервалу доцільно визначати умовою

$$\omega_N(x, r) \geq \kappa \delta_N, \quad \kappa > 1. \quad (4)$$

Якщо в критичному режимі $\omega(x, r) \asymp C(x)r \log(1/r)$, то граничний масштаб має задовольняти

$$r_{\min} \log \frac{1}{r_{\min}} \asymp \frac{\lambda^{N+1}}{1 - \lambda}.$$

Отже, глибина обмеження фрактального ряду скінченною кількістю членів N визначає не лише точність апроксимації функції, а й найменший масштаб, на якому її регулярність може бути достовірно оцінена. Встановлений зв'язок між похибкою обмеження фрактального ряду скінченною кількістю членів та скінченно-масштабним зміщенням дає кількісний критерій вибору масштабного інтервалу і пояснює повільну стабілізацію чисельних оцінок у критичному режимі.

Література

- [1] Hardy G.H. Weierstrass's non-differentiable function. Transactions of the American Mathematical Society. 1916. 17, No. 3. P. 301–325.
- [2] Allaart P.C., Kawamura K. The Takagi function: a survey. Real Analysis Exchange. 2012. 37, No. 1. P. 1–54.
- [3] Baranski K., Barany B., Romanowska J. On the dimension of the graph of the classical Weierstrass function. Advances in Mathematics. 2014. 265. P. 32–59.

Обернена задача з невідомим джерелом у просторах беселевих потенціалів

Петро БОЙКО, Галина ЛОПУШАНСЬКА, Петро ПУКАЧ

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

boyko.petro@gmail.com, lhp@ukr.net, Petro.Y.Pukach@lpnu.ua

Для рівняння

$${}^c D_t^\beta u + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = F_0(t)g(x) + F(x, t), \quad (x, t) \in Q := \mathbb{R}^n \times (0, T] \quad (1)$$

з дробовою похідною Капуто порядку $\beta \in (0, 1)$ і дробовим лапласіаном $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$, визначеним за допомогою перетворення Фур'є: $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} v(x)] = |\xi|^\alpha \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[v]$, вивчаємо обернену задачу

$$u(x, 0) = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

$$\frac{1}{T} \int_{\Omega} u(x, t) dt = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

про визначення пари функцій (u, g) при заданих F, F_0, F_1, Φ .

При $s \in \mathbb{R}, p > 1$ позначаємо:

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S'(\mathbb{R}^n) : \|v\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}v]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$$

– простір беселевих потенціалів,

$$C([0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)) = \{v(x, t) : \|v\|_{C([0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} = \max_{t \in [0, T]} \|v(\cdot, t)\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < +\infty\},$$

$$C_b((0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)) = \{v(x, t) : \|v\|_{C_b((0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} = \sup_{t \in (0, T]} \|v(\cdot, t)\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < +\infty\},$$

$$C_{\alpha,\beta}([0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)) = \{v \in C([0, T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)) : {}^c D_t^\beta v, (-\Delta)^{\alpha/2} v \in C_b((0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))\},$$

$$\|v\|_{C_{\alpha,\beta}([0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} = \max \left\{ \|v\|_{C([0, T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))}, \right. \\ \left. \|(-\Delta)^{\alpha/2} v\|_{C_b((0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}, \|{}^c D_t^\beta v\|_{C_b((0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} \right\}.$$

Використовуємо [1] існування вектор-функції Гріна $(G_0(x, t), G_1(x, t))$ задачі Коші і вирази її компонент через H -функцію Фокса, також, що

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[G_0(x, t)] := \widehat{G}_0(\xi, t) = t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-b^2 t^\beta) = t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-a^2(1 + |\xi|^2)^{\gamma/2} |\xi|^\alpha t^\beta), \\ \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[G_1(x, t)] := \mathcal{F}[G_1(x, t)] = \widehat{G}_1(\xi, t) = E_{\beta,1}(-a^2(1 + |\xi|^2)^{\gamma/2} |\xi|^\alpha t^\beta),$$

де $E_{\beta,\mu}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\beta + \mu)}$ – функція Міттаг-Леффлера.

Пара $(u, g) \in C_{\alpha,\beta}([0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)) \times H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ називається розв'язком задачі (1)–(3), якщо неперервна функція $u: [0, T] \ni t \mapsto u(\cdot, t) \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ (яка має неперервні

$D_t^\beta u(\cdot, t), (-\Delta)^{\alpha/2} u(\cdot, t) \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$) задовольняє рівняння (1) у просторі $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ при кожному $t \in (0, T]$, а початкову умову (2) і умову (3) у просторі $H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$.

Використовуючи результат [2] про однозначну розв'язність задачі Коші (1), (2), яка є аналогом теорем Да Прато і Грісварда про максимальну регулярність розв'язку, знаходимо достатні умови однозначної розв'язності задачі (1)–(3) у всій шкалі просторів беселевих потенціалів.

Теорема 1. Нехай $\beta \in [\frac{1}{2}, 1)$, $\alpha > \beta$, $1 < p < \frac{1}{\beta}$, $s \in \mathbb{R}$, $F \in C_b((0, T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$, $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, $\Phi \in H^{s+2\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, $F_0 \in C[0, T]$, $\int_0^T F_0(t) dt \neq 0$. Тоді існує єдиний розв'язок $(u, g) \in C_{\alpha,\beta}([0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)) \times H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ задачі (1)–(3).

Функція g визначається через u :

$$g(x) = \frac{1}{\int_0^T F_0(t) dt} \left[T(-\Delta)^{\alpha/2} \Phi(x) - u_0(x) f_{2-\beta}(T) + \int_0^T u(x, \tau) f_{1-\beta}(T - \tau) d\tau - \int_0^T F(x, \tau) d\tau \right], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

u є розв'язком лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x, t) - \frac{1}{\int_0^T F_0(s) ds} \int_0^T \left[u(x, \eta) * \int_0^t F_0(\tau) G_0(x, t - \tau) d\tau \right] f_{1-\beta}(T - \eta) d\eta = v_0(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

у просторі $C([0, T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$, де

$$v_0(x, t) = \frac{1}{\int_0^T F_0(s) ds} \int_0^t F_0(\tau) \left[T(-\Delta)^{\alpha/2} \Phi(x) - u_0(x) f_{2-\beta}(T) + \int_0^T F(x, \eta) d\eta \right] * G_0(x, t - \tau) d\tau + u_0(x) * G_1(x, t), \quad (x, t) \in Q$$

і тут операція згортки є за просторовими змінними.

Література

- [1] Duan Jun Sheng. Time- and space-fractional partial differential equations. J. Math. Phys. 2005. 46, 013504.
- [2] Lopushansky A. The Cauchy problem for an equation with fractional derivatives in Bessel potential spaces. Sib. Math. J. 2014. 55, № 6. P. 1089-1097. DOI: 10.1134/S0037446614060111

Моделювання процесу інфекційного захворювання з урахуванням стану організму в умовах імунологічної і фармакологічної терапії

Андрій БОМБА, Сергій БАРАНОВСЬКИЙ

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

abomba@ukr.net, svbaranovsky@gmail.com

Переважна більшість існуючих моделей інфекційних захворювань фокусуються на динаміці обмеженої кількості компонентів процесу в межах гострого періоду захворювання, залишаючи поза увагою характеристики, що визначають загальну життєздатність організму у довгостроковій перспективі. Як наслідок, такі моделі не дозволяють оцінити сумарний вплив усієї сукупності патологічних процесів та терапевтичних втручань, що виникають протягом усього періоду існування біологічного об'єкта.

У роботах [1]-[3] представлено різні модифікації базової моделі, розроблені для прогнозування динаміки концентрації антигенів, антитіл, плазматичних клітин та відносної характеристики ураження органа-мішені з урахуванням дифузійних збурень, температури в умовах імунологічної та фармакологічної терапії. Окрім зазначених чинників, пропонується ввести функцію стану $U = U(x, t)$, що характеризує життєздатність (або енергетичний потенціал, ресурс, біомасу тощо) біологічного об'єкта в точці x у момент часу t , закон еволюції якої задано у вигляді:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu_U f(x, t, U) - \nu_1 m - \nu_2 U \cdot V - \nu_3 (\theta - \theta^*) + \varepsilon^2 D^U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

де $f(x, t, U)$ – функція, що описує саморозвиток об'єкта; другий, третій та четвертий члени правої частини відображають деструктивний вплив міри ураження органу-мішені, патогенних елементів та температури відповідно, а останній член описує дифузійне розсіювання ресурсу.

Потрапляння до організму в момент часу t_0 дози вірусів V_0 зумовлює відхилення кривої стану $U(x, t)$ від її природної (фізіологічної) траєкторії. Опис динаміки зниження показників життєздатності (зокрема до деякого критичного рівня U_{kr} , що визначає початок процесу природної незворотної деградації об'єкта) на інтервалі $[t_0, t^0]$ здійснюється на основі розв'язку системи типу «природний стан – хвороба». Для запобігання передчасній деградації організму та наближення прогнозованої кривої стану до природної на відрізок $[t^0, t^*]$ розглядається система «природний стан – хвороба – лікування». Це дає змогу оптимізувати параметри терапії та ухвалювати обґрунтовані медичні рішення з урахуванням індивідуального адаптаційного потенціалу конкретного організму. Математичну модель системи «природний

стан – хвороба – лікування» сформульовано у вигляді такої задачі:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= \omega^V + (\beta(\theta) - \gamma F)V - \gamma_0 VW + \varepsilon D^V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \xi(m)\alpha(\theta)F(t - \tau)V(t - \tau) - \mu(U)(C - C^*) - \varepsilon^2 \gamma_1 CW + \varepsilon^2 D^C \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= u^F + \rho(U)C - (\mu_f + \eta\gamma V)F - \varepsilon^2 \gamma_2 FW + \varepsilon D^F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= u^W - \beta_2 W - \gamma_0 VW + \varepsilon D^W \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= \sigma V - \mu_m(\theta)m + \varepsilon^2 \gamma_3 mW + \varepsilon^2 D^m \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \alpha_\theta^F VF + \alpha_\theta^W VW - \mu_\theta(\theta - \theta^*) - \lambda_\theta u^\theta + \varepsilon D^\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \nu_U f(x, t, U) - \nu_1 m - \nu_2 UV - \nu_3(\theta - \theta^*) + \varepsilon^2 D^U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C(x, t_0) &= C^0(x), m(x, t_0) = m^0(x), W(x, t_0) = W^0(x), \theta(x, t_0) = \theta^0(x), \\ U(x, t_0) &= U^0(x), V(x, \tilde{t}) = V^0(x, \tilde{t}), F(x, \tilde{t}) = F^0(x, \tilde{t}), t_0 - \tau \leq \tilde{t} \leq t_0,\end{aligned}$$

де малий параметр ε відображає відносно слабкий вплив дифузійних збурень порівняно з домінуючими механізмами інфекційного процесу.

Для розв'язування відповідних сингулярно збурених задач із запізненням розроблено комплексну обчислювальну процедуру, яку реалізовано на основі синтезу покрокових, асимптотичних і чисельних методів.

Література

- [1] Бомба А. Я., Барановський С. В. Моделювання малих просторово розподілених впливів на динаміку інфекційного захворювання в умовах типу фармакотерапії. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2020. № 1 (133). С. 5-17.
- [2] Барановський С. В., Бомба А. Я., Ляшко С. І. Прийняття рішень при моделюванні динаміки інфекційного захворювання з урахуванням дифузійних збурень та зосереджених впливів. Проблеми керування та інформатики : Міжнародний науково-технічний журнал. 2021. Том 66. № 3. С. 115-129.
- [3] Bomba A., Baranovsky S., Blavatska O., Bachyshyna L. Infectious disease model generalization based on diffuse perturbations under conditions of body's temperature reaction. Computers in Biology and Medicine. Volume 146, 2022, 105561.

Наближений розв'язок задачі оптимального керування для рівняння з похідною Хукухари зі швидкоколивними коефіцієнтами на півосі

Кирило БОНДАРЕНКО, Ольга КІЧМАРЕНКО, Сергій ДАШКОВСЬКИЙ

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,

Військова академія (м. Одеса),

University of Würzburg, Würzburg, Germany

kirill.bondarenko@onu.edu.ua, olga.kichmarenko@gmail.com

В доповіді розглядається нелінійна задача оптимального керування системою, що описується диференціальним рівнянням з похідною Хукухари на півосі з малим параметром і швидкоколивними коефіцієнтами, нелінійну за керуванням

$$D_h \chi = F\left(\frac{t}{\varepsilon}, \chi(t), u(t)\right), \quad \chi(0, u(0)) = \chi_0 \quad (1)$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $\chi : [t_0, \infty] \rightarrow \text{conv}(\mathbf{R}^n)$, $\chi_0 \in \text{conv}(\mathbf{R}^n)$, $F : [t_0, \infty] \times \text{conv}(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^m \rightarrow \text{conv}(\mathbf{R}^n)$, $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, $u : [t_0, \infty] \rightarrow \mathbf{R}^m$, $u(t) \in U \subset \text{comp}(\mathbf{R}^n)$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T e^{-jt} L(t, \chi_\varepsilon(t), u(t)) dt \longrightarrow \inf \quad (2)$$

тут $L : [0, +\infty] \times \text{conv}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $j > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт.

Застосуємо для її розв'язання метод усереднення.

Нехай існує рівномірно за $\chi \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ та $u \in \mathbb{R}^m$ середнє

$$\lim_{s \rightarrow \infty} h\left(\frac{1}{s} \int_0^s F(\tau, \chi, u) d\tau, F_0(\chi, u)\right) = 0, \quad (3)$$

тут інтеграл від множиннозначного відображення розуміємо в сенсі Лебега-Хукухари.

Тоді задача оптимального керування на півосі (1)-(2) зі швидкоколивними коефіцієнтами ставиться у відповідність усереднена задача керування:

$$D_h \eta = F_0(\eta, u(t)), \quad \eta(0, u(0)) = \chi_0. \quad (4)$$

з критеріями якості

$$J_0[u] = \int_0^T e^{-jt} L(t, \eta(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (5)$$

Визначено умови, за яких розв'язки початкової задачі (1) збігаються до розв'язку усередненої задачі (4).

Також встановлено умови, за яких існують розв'язки задач оптимального керування (1), (2) та (4), (5). А також оптимальні значення критерія якості задач (1), (2) збігаються до

оптимального значення критерія якості задачі (4), (5) та збіжність розв'язків задачі (1), (2) до розв'язків задачі (4), (5) і збіжність оптимальних керувань задачі (1), (2) до оптимального керування задачі (4), (5).

Встановлено зв'язок між задачами оптимального керування на скінченному інтервалі та відповідною задачею на півосі.

Твердження 1. Допустимим керуванням є m -вимірні вектор-функції $u(\cdot)$ такі, що $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$, де $\mathfrak{U}$ — компактна множина в $L_2([0, T])$.

Твердження 2. Відображення $F(t, \chi, u)$ визначене і неперервне за сукупністю аргументів в області $Q_0 = \{t \geq 0, \chi \in \text{conv}(\mathbf{R}^n), u \in U \subset \mathbf{R}^m\}$, і:

1) $F(t, \chi, u)$ задовольняє в Q умову лінійного росту зі сталою M , тобто

$$|F(t, \chi, u)| \leq M(1 + |\chi|)$$

для будь-яких $(t, \chi, u) \in Q_0$;

2) $F(t, \chi, u)$ задовольняє в Q_0 умову Ліпшиця за $\chi \in \text{conv}(\mathbf{R}^n)$ і $u \in \mathbf{R}^m$ зі сталою λ , тобто

$$h(F(t, \chi, u), F(t, \chi_1, u_1)) \leq \lambda(h(\chi, \chi_1) + |u - u_1|)$$

для довільних (t, χ, u) і (t, χ_1, u_1) із Q_0 .

Твердження 3. Функція $L(t, \chi, u)$ визначена і неперервна за сукупністю аргументів в області $Q_1 = \{t \in [0, T], \chi \in \text{conv}(\mathbf{R}^n), u \in \mathbf{R}^m\}$, причому

1) $L(t, \chi, u)$ рівномірно відносно $t \in [0, T]$ і $u \in \mathbf{R}^m$ неперервна за $\chi \in \text{conv}(\mathbf{R}^n)$;

2) $L(t, \chi, u)$ задовольняє за змінною u в області Q_1 умову Ліпшиця з константою $\lambda > 0$;

3) функція $\Phi : \text{conv}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ неперервна за χ .

Відзначимо, що з умови 2 за теоремою Каратеодорі випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі (1) $\chi(t, u)$ існує, єдиний на всьому відрізку $[0, T]$.

Література

- [1] A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, L. I. Plotnikova. Averaging of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative, Journal Uncertain Systems, 13, No 1, 2019. P. 3–13.
- [2] Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-Hand Sides with Discontinuities. De Gruyter Studies in Mathematics. Berlin–Boston: Walter de Gruyter. 2011. 40. 309 p.
- [3] Кічмаренко О. Д. Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для звичайних диференціальних рівнянь на півосі. Укр. мат. журн., 2018, 70, №5. С. 642–654.

Один клас самоафінних функцій, асоційованих з мультисновним зображенням чисел одиничного проміжка

Ольга БОНДАРЕНКО, Микола ПРАЦЬОВИТИЙ, Софія РАТУШНЯК

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

o.i.bondarenko@udu.edu.ua, prats4444@gmail.com, ratush404@gmail.com

Більшість неперервних функцій у просторі $C[0; 1]$ мають складну локальну структуру і фрактальні властивості. Серед них більшість є функціями ніде не монотонними і мають необмежену варіацію. Такі функції є актуальним об'єктом сучасних наукових досліджень. Вивчаються їх структура, тополого-метричні, інтегро-диференціальні властивості. Одному з класів таких функцій присвячена доповідь.

Нехай $\bar{q} = (q_0, q_1, \dots, q_n, \dots)$, $q_i > 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$; $\bar{g} = (g_0, g_1, \dots, g_n, \dots)$, $|g_i| < 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} g_i = 1$; $\beta_0 = 0$, $\beta_{i+1} = \beta_i + q_i$, $\delta_0 = 0$, $\delta_{i+1} = \delta_i + g_i > 0$, $i \in N_0 \equiv \{0\} \cup N$.

Теорема 1. *Нескінченна система функціональних рівнянь $f(\beta_i + q_i x) = \delta_i + g_i f(x)$, $i \in N$ у класі неперервних функцій на $[0; 1]$ має єдиний розв'язок, який аналітично виражається*

$$f(x) = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots},$$

де

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^Q.$$

Теорема 2. *Якщо $g_i > 0$ для будь-якого $i \in N$, то функція f є строго монотонною функцією розподілу, яка має N -самоафінний графік Γ_f з наступною структурою*

$$\Gamma_f = \bigcup_{i=0}^{\infty} \phi_i(\Gamma_f), \text{ де}$$

$$\begin{cases} x' = \beta_i + q_i x, \\ y' = \delta_i + g_i y, \end{cases} i \in N_0.$$

Теорема 3. *Якщо існує $g_i = 0$, то функція f є сингулярною функцією канторівського типу, множина несталості якої є самоподібною, а її самоподібна розмірність є розв'язком рівняння $\sum_{i: g_i \neq 0} q_i^x = 1$.*

Теорема 4. *Якщо $g_i \neq 0$ для будь-якого $i \in N$ і існує $g_j < 0$, то функція f є ніде не монотонною і має необмежену варіацію.*

Якщо існує $g_j < 0$, то функція f не має проміжків монотонності, окрім проміжків сталості, і має фрактальні множини рівнів.

Теорема 5. *Має місце рівність*

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i q_i}{\sum_{i=0}^{\infty} g_i q_i}.$$

Теорема 6. *Якщо $f(x)$ – функція канторівського типу, а X – випадкова величина, рівномірно розподілена на $[0; 1]$, то випадкова величина $Y = f(X)$ має чисто дискретний розподіл.*

Теорема 7. *Якщо серед членів послідовності (p_n) існують від’ємні числа і нулі, то f є функцією необмеженої варіації, яка не має проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості.*

У доповіді пропонується результати досліджень і інших властивостей функцій означеного класу.

Література

- [1] Mykola Pratsiovytyi, Olha Bondarenko, Iryna Lysenko, Sophia Ratushniak. Continuous Functions with Locally Complicated and Fractal Properties Related to Infinite-Symbol B -Representationю Journal of Mathematical Sciences (United States). 2024. 282, №6. P. 1008–1027.
- [2] Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Василенко Н.М., Лисенко І.М. Нескінченносимвольне B -зображення дійсних чисел і деякі його застосування. Буковинський математичний журнал. 2023. 11, №1. С. 94–105.
- [3] Pratsiovytyi M. V., Baranovskyi O. M., Bondarenko O.I., Ratushniak S.P. One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol B -representation of numbers. Matematychni Studii. 2023. 59, №2. P. 123–131.
- [4] Працьовитий М.В., Лещинський О.Л. Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_{\infty}$. Теорія ймовірностей та математична статистика. 1997. Вип. 57. С. 134–139.
- [5] Baranovskyi O., Pratsiovytyi M. One class of continuous functions with complicated local properties related to Engel series. Funct. Approx. Comment. Math. 2023. 68, No. 2. P. 143–162.
- [6] Pratsiovytyi M.V., Kalashnikov A.V. Self-Affine Singular and Nowhere Monotone Functions Related to the Q -Representation of Real Numbers. Ukrainian Mathematical Journal 2013. 65(3). P. 405–417.

Системи інерційного переносу

Іван БУРТНЯК, Ганна МАЛИЦЬКА

*Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ,
Україна*

ivan.burtniak@cnu.edu.ua

Ми досліджуємо вироджені параболічні системи, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією з чотирма групами просторових змінних, де в трьох групах є виродження параболічності, для систем із змінними коефіцієнтами будуюмо фундаментальний розв'язок задачі Коші.

Нехай

$$\partial_t u(t, x) - \sum_{j=1}^3 \sum_{\mu=1}^{n_{j+1}} x_{j\mu} \partial_{x_{j+1,\mu}} u(t, x) = \sum_{|k| \leq 2} A_k(t, x) D_{x_1}^k u(t, x), \quad (1)$$

$$t \in (t_0, T], \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad x_j \in \mathbb{R}^{n_j},$$

$$n_0 = \sum_{j=1}^4 n_j, \quad n_j \geq n_{j+1} \quad (j = 1, 2, 3), \quad n_j \in \mathbb{N} \quad (j = 1, \dots, 4).$$

$$u(t, x) \big|_{t=t_0} = u_0(x). \quad (2)$$

I_1) Система

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{|k| \leq 2} A_k(t, x) D_{x_1}^k u(t, x), \quad (3)$$

рівномірно параболічна в смузї $\Pi_{[t_0, T]} = \{(t, x), x \in \mathbb{R}^{n_0}, t \in [t_0, T]\}$.

I_2) Коефіцієнти $A_k(t, x)$ обмежені та неперервні в $\Pi_{[t_0, T]}$, при $|k| = 2$ неперервність по t рівномірно по $x, x \in \mathbb{R}^{n_0}$.

I_3) Коефіцієнти $A_k(t, x), |k| = 2$ задовольняють умову Гельдера по x з показником $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

I_4)

$$\sum_{|k|=2} A_k(t, x) \sigma_1^k = \sum_{|k|=2} \gamma_k(t, x) \sigma_1^k B_0,$$

де B_0 – матричний множник, а $\sum_{|k|=2} \gamma_k(t, x) \sigma_1^k$ – однорідна функція другого порядку для всіх σ_1^k .

Основний результат. Якщо виконуються умови I_1)– I_4), то система (1) має фундаментальну матрицю розв'язків

$$\Gamma(t, x; \tau, \xi) = G_0(t, x; \tau, \xi, \tau, \xi) + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}^{n_0}} G_0(t, x; \beta, \gamma, t, \gamma) \varphi(\beta, \gamma, \tau, \xi) d\gamma d\beta.$$

де $\varphi(t, x, \tau, \xi)$ – шукана функція. Матриця $G_0(t, x; \tau, \xi, \tau, \xi)$ є фундаментальною матрицею розв'язків задачі Коші для системи

$$\partial_t u(t, x) - \sum_{j=1}^3 x_j \partial_{x_{j+1}} u(t, x) = \sum_{|k| \leq 2} A_k(t, x) D_{x_1}^k u(t, x), \quad t > \tau > 0.$$

Література

- [1] Burtnyak, I.V., Malytska, A. Application of the spectral theory and perturbation theory to the study of Ornstein–Uhlenbeck processes. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018, Vol. 10, No. 2, pp. 273–287. DOI: 10.15330/cmp.10.2.273-287.
- [2] Malytska, A., Burtnyak, I.V. On the Fundamental Solution of the Cauchy Problem for Kolmogorov Systems of the Second Order. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2019, Vol. 70, No. 8, pp. 1275–1287. DOI: 10.1007/s11253-018-1568-y.

Метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова у аналізі задачі Діріхле для тривимірного нелінійного рівняння теплопровідності

Костянтин ВАСИЛИШИН

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

`kostiantyn.vasylyshyn@nure.ua`

Розглянемо просторову задачу нелінійної теплопровідності

$$-\operatorname{div}(\kappa(T) \operatorname{grad} T) = F(\mathbf{x}, T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де T — температура, $\kappa(T)$ — коефіцієнт теплопровідності, що залежить від температури T , $F(\mathbf{x}, T)$ — функція, що характеризує об'ємне джерело тепла, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — обмежене просторове тіло, межею $\partial\Omega$ якого є кусково-гладка поверхня, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Нехай $T(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\kappa(T)$ — неперервна і додатна (загалом кажучи, нелінійна) функція температури T , $F(\mathbf{x}, T)$ — неперервна і додатна функція для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $T > 0$.

Якщо $\kappa(T) = G'(T)$, то задача (1), (2) запишеться у вигляді

$$-\Delta(G(T)) = F(\mathbf{x}, T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

де Δ — тривимірний оператор Лапласа.

Заміною $v = G(T)$ задачу (3), (4) зведемо до задачі

$$-\Delta v = F(\mathbf{x}, G^{-1}(v)), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5)$$

$$v|_{\partial\Omega} = G(0), \quad (6)$$

де $T = G^{-1}(v)$ — обернена до $v = G(T)$ функція.

Якщо $G(0) \neq 0$, то в задачі (5), (6) ще додатково зробимо заміну $v = u + G(0)$. Тоді для функції u отримаємо задачу з однорідною крайовою умовою

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

де позначено $f(\mathbf{x}, u) = F(\mathbf{x}, G^{-1}(u + G(0)))$.

Для відшукування додатного розв'язку задачі (7), (8) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова [1]. Відповідно до цього методу задача (7), (8) еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (9)$$

де $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})} - r}{r\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}$ — квазіфункція Гріна–Рвачова першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у області Ω , $K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\Delta_s \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|$, а $\omega(\mathbf{x})$ — елементарна функція, що відповідно до методу R -функцій описує геометрію області Ω [2].

Рівняння (9) розглядатимемо у просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних в $\bar{\Omega}$, що напівупорядковано конусом невід’ємних неперервних функцій K_+ . Узагальненим розв’язком u^* задачі (7), (8) назовемо розв’язок рівняння (9), що належить K_+ . Нехай функція $f(\mathbf{x}, u)$ має діагональне подання $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$, де невід’ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}, v, w$, монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Тоді для розв’язання рівняння (9) можна запропонувати наступний ітераційний процес [1], що двобічно збігається до u^* :

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (10)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (11)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), \quad (12)$$

де $K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$, $K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$, а за початкове наближення $v^{(0)}(\mathbf{x})$, $w^{(0)}(\mathbf{x})$ обрано кінці конусного відрізка $< v_0, w_0 >$, який є сильно інваріантним для гетеротонного оператора, що визначається правою частиною рівняння (9).

Якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітерації (10)–(12) слід проводити до виконання нерівності $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$. Тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$, а отже, для вихідної задачі (1), (2) розв’язок $T^*(\mathbf{x}) \approx G^{-1}(u^{(k)}(\mathbf{x}) + G(0))$.

Література

- [1] Sidorov M. V. *Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems*. Carpathian Mathematical Publications. 2018. Vol. 10, № 2. P. 360–375. DOI: 10.15330/cmp.10.2.360-375.
- [2] Rvachev V. L., Sheiko T. I. *R-Functions in boundary value problems in mechanics*. Applied Mechanics Reviews. Vol. 48, № 4. P. 151–188. DOI: 10.1115/1.3005099.

Застосування апарату нечіткої логіки Мамдані для моделювання ризику банкрутства виробничих підприємств в умовах воєнного стану

Олена ВІННИЧУК, Тетяна ГОТИНЧАН, Галина ІВАСЮК,
Тоня ФРАТАВЧАН

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна
o.vinnychuk@chnu.edu.ua, t.hotynchan@chnu.edu.ua, h.ivasjuk@chnu.edu.ua,
t.fratavchan@chnu.edu.ua

Оцінювання ризику банкрутства підприємств є важливим завданням економіко-математичного моделювання. Традиційні підходи до прогнозування фінансової неспроможності, зокрема дискримінантні моделі, переважно ґрунтуються на кількісних фінансових показниках [1]. Водночас сучасні умови функціонування виробничих підприємств характеризуються значною невизначеністю, зумовленою нестабільністю ринків, порушенням логістичних зв'язків, енергетичними обмеженнями, кадровими проблемами та воєнними ризиками. За таких умов використання лише фінансових показників не забезпечує повного відображення чинників, що визначають стійкість підприємства. Одним із математичних інструментів формалізації інформації, що характеризується неповнотою та невизначеністю, є апарат нечітких множин, запропонований Л. Заде [2]. Нечіткий підхід дає змогу використовувати як кількісні, так і лінгвістичні характеристики показників, а також враховувати взаємозв'язки між ними за допомогою експертних правил. Застосування нечітких моделей до оцінювання ризику банкрутства підприємств досліджувалося, зокрема, у роботах [3, 4].

Метою дослідження є розроблення економіко-математичної моделі оцінювання ризику банкрутства виробничих підприємств на основі апарату нечіткої логіки Мамдані з урахуванням специфіки їх функціонування в умовах воєнного стану.

Запропонована модель передбачає комплексне врахування фінансових, виробничих, маркетингових, логістичних, енергетичних, кадрових та воєнно-економічних чинників. Для зменшення розмірності задачі та забезпечення структурованого представлення інформації первинні показники об'єднано в дев'ять інтегральних характеристик: фінансова стійкість, кредитне навантаження, прибутковість діяльності, виробнича ефективність, ефективність реалізації продукції, логістична стійкість, енергетична безпека, кадрова стійкість, воєнно-економічний ризик.

Значення інтегральних показників формуються на основі нормованих первинних характеристик із використанням вагових коефіцієнтів. У загальному вигляді агрегування показників можна подати як

$$X_j = \sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} x_{ij},$$

де X_j – j -й інтегральний показник; n_j – кількість складових j -го інтегрального показника; x_{ij} – i -та складова j -го інтегрального показника; p_{ij} – ваговий коефіцієнт впливу цієї складової, причому $p_{ij} > 0$, $\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} = 1$. Показники p_{ij} інтерпретуються як вагові коефіцієнти (частки впливу), а у випадку ймовірнісних оцінок як ймовірність впливу.

Наступним етапом моделювання є фазифікація інтегральних показників, тобто визначення ступенів їх належності відповідним лінгвістичним термам. Для характеристики стану факторів використовуються терми «низький», «середній» та «високий». Вихідною змінною нечіткої системи є ризик банкрутства, який також описується відповідними лінгвістичними рівнями.

Для встановлення залежності між станом інтегральних факторів та рівнем ризику банкрутства сформовано експертну базу знань із семи нечітких правил, що відображають характерні сценарії функціонування підприємства: мінімальний ризик банкрутства, фінансову кризу, виробничо-маркетингову кризу, критичний воєнно-операційний вплив, стійке функціонування в умовах війни, типовий стан підприємства та комбінований негативний сценарій. У загальному вигляді правило нечіткого виведення має вигляд

$$A_{r1}(X_{j1}) \wedge A_{r2}(X_{j2}) \wedge \dots \wedge A_{rm_r}(X_{jm_r}) \Rightarrow B_r(Y), \quad r \in \{1, \dots, 7\},$$

де $X_{j1}, \dots, X_{jm_r}$ – інтегральні показники, що використовуються в r -му правилі; A_{rk} – відповідні лінгвістичні терми; Y – вихідна змінна «ризик банкрутства»; B_r – вихідний лінгвістичний терм r -го правила; m_r – кількість умов у r -му правилі.

На основі сформованої бази знань реалізується алгоритм нечіткого логічного виведення Мамдані, який передбачає фазифікацію вхідних даних, визначення ступенів активації правил, агрегування їх результатів та дефазифікацію вихідної нечіткої множини. У результаті визначається інтегральне значення ризику банкрутства, а також ступені належності підприємства до відповідних лінгвістичних рівнів ризику.

Особливістю запропонованої моделі є можливість врахування одночасного впливу різномірних чинників. Зокрема, високий воєнно-економічний ризик не трактується як безумовна ознака високого ризику банкрутства. За наявності достатнього рівня фінансової, логістичної, енергетичної та кадрової стійкості підприємство може зберігати прийнятний рівень функціонування. Це дає змогу більш адекватно відображати складні сценарії діяльності підприємств в умовах воєнного стану.

Таким чином, застосування апарату нечіткої логіки Мамдані дає змогу поєднати кількісну та якісну інформацію, зменшити розмірність моделі шляхом агрегування первинних показників та врахувати комплексний вплив внутрішніх і зовнішніх чинників на ризик банкрутства виробничого підприємства.

Література

- [1] Altman E. I. Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy. *The Journal of Finance*. 1968. 23, No. 4. P. 589–609. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1968.tb00843.x>.
- [2] Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. 8, No. 3. P. 338–353. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).
- [3] Бідюк П. І., Вертелецький В. В., Жирова А. О. Аналіз ризику банкрутства підприємств з використанням чітких та нечітких моделей. *Економічний вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. 2015. № 12. С. 477–490.
- [4] Roy T., Bhuiyan R. A., Ahmed S. U., Abdullah M. Geopolitical conflict and firm bankruptcy risk. *Finance Research Letters*. 2024. 68. Article 106005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2024.106005>.

Дослідження крайових задач стаціонарної дифузії із лінійним розпадом методом двобічних наближень

Микита ВОРОНЕНКО, Надія ГИБКІНА

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

mykyta.voronenko@nure.ua

Задачі стаціонарної дифузії з одночасним розпадом речовини та хімічною реакцією виникають при описі окиснення пористих матеріалів, дифузії кисню всередину вугільної частинки та роботи пористих каталізаторів. Швидкість реакції залежить від концентрації нелінійно, а для реакцій дробового порядку — за степеневим законом з показником, меншим за одиницю. Точні розв'язки таких задач відомі лише в поодиноких випадках, тому актуальною є розробка конструктивних методів їх наближеного розв'язання з оцінкою похибки.

Розглянемо плоский пористий шар завтовшки L , у якому перенесення реагенту описує закон Фіка. Баланс речовини в елементарному об'ємі в стаціонарному режимі дає рівність нулю суми дифузійного члена, члена лінійного розпаду зі сталою κ та швидкості реакції. Для реакції дробового порядку p у безрозмірних змінних маємо рівняння

$$-u'' + k^2 u = u^p, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

де $k^2 = \frac{\kappa L^2}{D}$ — квадрат модуля Тіле, D — коефіцієнт дифузії, $p \in (0, 1)$ — ступінь нелінійної залежності швидкості реакції від концентрації.

Крайові умови визначаються тим, що відбувається на межах шару. Якщо обидві частини межі омиваються чистим розчинником, який одразу виносить залишки реагенту, то концентрація на них нульова; якщо ж одна з частин межі непроникна, то нульовим є потік речовини крізь неї. Отже, маємо два типи крайових умов:

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad \text{та} \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (2)$$

Шукається додатний на $(0, 1)$ розв'язок кожної з відповідних крайових задач.

Обидві задачі досліджуються методами нелінійного функціонального аналізу в напівпорядкованих просторах [1]: крайова задача зводиться до рівносильного інтегрального рівняння, а до його розв'язку будуються дві послідовності, що збігаються зверху і знизу та дають апостеріорну оцінку похибки.

Функції Гріна оператора $Lu = -u'' + k^2 u$ на $[0, 1]$ для цих задач мають вигляд

$$G_1(x, s) = \frac{1}{k \sinh k} \begin{cases} \sinh(kx) \sinh(k(1-s)), & 0 \leq x \leq s, \\ \sinh(ks) \sinh(k(1-x)), & s < x \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$G_2(x, s) = \frac{1}{k \cosh k} \begin{cases} \sinh(kx) \cosh(k(1-s)), & 0 \leq x \leq s, \\ \sinh(ks) \cosh(k(1-x)), & s < x \leq 1. \end{cases}$$

При $k > 0$ обидві функції невід'ємні у квадраті $[0, 1]^2$.

На конусі K^+ невід'ємних у $C[0, 1]$ функцій кожна з крайових задач еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) u^p(s) ds \equiv (Tu)(x), \quad (4)$$

де $G(x, s)$ — відповідна функція Гріна (3). Оператор T на конусі K^+ є додатним, цілком неперервним, монотонним та u_0 -увігнутим, де

$$u_0(x) = \int_0^1 G(x, s) ds.$$

Умова u_0 -увігнутості виконується тому, що $T(\tau u) = \tau^p Tu$, а $\tau^p > \tau$ при $\tau \in (0, 1)$, і не залежить ані від типу крайових умов, ані від k . Звідси кожна із задач має не більше одного додатного розв'язку.

Для монотонного оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, де $v_0 = \alpha u_0$, $w_0 = \beta u_0$, а сталі α і β ($0 < \alpha < \beta$) вибираються з умов $Tv_0 \geq v_0$, $Tw_0 \leq w_0$. Оскільки $T(\gamma u_0) = \gamma^p Tu_0$, ці умови рівносильні нерівностям $\alpha^{1-p} \leq m$ та $\beta^{1-p} \geq M$, де m і M — найменше та найбільше значення функції

$$\Phi(x) = \frac{(Tu_0)(x)}{u_0(x)}$$

на $(0, 1)$, звідки $\alpha \leq m^{\frac{1}{1-p}}$, $\beta \geq M^{\frac{1}{1-p}}$.

Далі розглянемо схему послідовних наближень

$$v_{n+1}(x) = \int_0^1 G(x, s) v_n^p(s) ds, \quad w_{n+1}(x) = \int_0^1 G(x, s) w_n^p(s) ds, \quad (5)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. Послідовність $\{v_n(x)\}$ не спадає за конусом K^+ , а послідовність $\{w_n(x)\}$ не зростає, тобто мають місце нерівності

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0,$$

де u^* — точний розв'язок відповідної крайової задачі. Наближеним розв'язком на n -й ітерації буде функція

$$u_n = \frac{v_n + w_n}{2},$$

при цьому похибка оцінюється нерівністю

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, 1]} (w_n(x) - v_n(x)).$$

Оператор T однорідний степеня p , що дозволяє сказати про збіжність більше. Позначивши $\theta = \frac{\beta}{\alpha}$, індукцією за n отримуємо точне співвідношення

$$w_n(x) = \theta^{p^n} v_n(x),$$

правильне при всіх n і x . Отже, відносна ширина двобічної смуги однакова в усіх точках відрізка, відносна похибка оцінюється як

$$\frac{\|u_n - u^*\|}{\|u^*\|} \leq \frac{1}{2} (\theta^{p^n} - 1),$$

а потрібну кількість ітерацій для відносної точності ε можна вказати наперед, ще до запуску процесу:

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{\ln p} \ln \frac{\ln(1 + 2\varepsilon)}{\ln \theta} \right\rceil. \quad (6)$$

На відміну від апостеріорної, оцінка (6) є апіорною і не залежить ані від вигляду функції Гріна, ані від типу крайових умов.

Наближені розв'язки знаходились при $k = 1$ з відносною точністю $\varepsilon = 10^{-5}$. У таблиці наведено норму наближеного розв'язку та кількість ітерацій залежно від p ; фактична кількість ітерацій у всіх випадках співпадає з апіорною оцінкою (6).

p	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
<i>Задача з $u(0) = 0, u(1) = 0$</i>					
α	0,7442	0,3242	0,0741	$2,11 \cdot 10^{-3}$	$6,29 \cdot 10^{-11}$
β	0,7663	0,3598	0,0928	$4,00 \cdot 10^{-3}$	$5,99 \cdot 10^{-10}$
$\ u_n\ $	0,0867	0,0405	0,0103	$4,28 \cdot 10^{-4}$	$5,28 \cdot 10^{-11}$
n	4	8	15	32	117
<i>Задача з $u(0) = 0, u'(1) = 0$</i>					
α	0,837	0,5110	0,216	0,0300	$1,26 \cdot 10^{-6}$
β	0,8711	0,5895	0,2937	0,0583	$1,85 \cdot 10^{-5}$
$\ u_n\ $	0,3064	0,2062	0,1012	0,0192	$4,83 \cdot 10^{-6}$
n	4	9	16	32	119

Література

- [1] Вороненко М.Д., Сидоров М.В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Радіоелектроніка і інформатика. 2018. № 1. С. 48–54.

Чисельний аналіз однієї математичної моделі мікроелектромеханічної системи методом двобічних наближень з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова

Микита ГВОЗДЄВ

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

mykyta.hvozdev@nure.ua

Типова мікроелектромеханічна структура складається з тонкої пружної пластини (верхній електрод) та жорсткої провідної підкладки (нижній електрод). Між електродами є повітряний зазор і до електродів прикладена напруга, що створює електростатичне поле. За деяких додаткових припущень математичною моделлю такої мікроелектромеханічної системи буде наступна задача Нав'є для напівплінного рівняння четвертого порядку еліптичного типу [1]:

$$\Delta^2 u - \gamma^2 \Delta u = \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де u — прогин мембрани, $0 < u(\mathbf{x}) < 1$, $\mathbf{x} \in \Omega$; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, яка задає форму пластини; γ^2 — відношення натягу до жорсткості; λ — параметр електростатичної дії.

Зауважимо, що задача (1), (2) записана у безрозмірних змінних.

Поклавши $u_1 = u$, $u_2 = -\Delta u$, задачу (1), (2) замінимо першою крайовою задачею для системи еліптичних рівнянь другого порядку:

$$-\Delta u_1 = u_2, \quad -\Delta u_2 + \gamma^2 u_2 = \frac{\lambda}{(1-u_1)^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Вважатимемо, що геометрію області Ω можна описати методом R -функцій і побудувати цим методом елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$ таку, що $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω , $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$ і $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$. Використовуючи метод квазіфункцій Гріна-Рвачова [2] від задачі (3), (4) перейдемо до еквівалентної системи інтегральних рівнянь Урисона

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_1(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (5)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1-u_1(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad (6)$$

де

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}}$$

— квазіфункція Гріна–Рвачова для оператора Лапласа $-\Delta u$ у просторі $\mathbb{R}^2$;

$$Q^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left(K_0(\gamma r) - K_0 \left(\gamma \sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})} \right) \right)$$

— квазіфункція Гріна–Рвачова для оператора Гельмгольца $-\Delta u + \gamma^2 u$ у просторі $\mathbb{R}^2$;

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

$$K^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + \gamma^2 \tilde{g}^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2}$, $K_0(z)$ — модифікована функція Бесселя другого роду,

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}, \quad \tilde{g}^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(\gamma \sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})} \right).$$

На основі системи (5), (6) можна запропонувати означення узагальненого розв'язку задачі (1), (2), а також побудувати ітераційний процес двобічного характеру збіжності, який дозволить апроксимувати і шуканий розв'язок, і його лапласіан. Цей процес має вигляд

$$\begin{aligned} v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \\ v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\left(1 - v_1^{(k)}(\mathbf{s})\right)^2} d\mathbf{s}, \\ w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \\ w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\left(1 - w_1^{(k)}(\mathbf{s})\right)^2} d\mathbf{s}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = v_1^0(\mathbf{x}), \quad v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = v_2^0(\mathbf{x}), \quad w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = w_1^0(\mathbf{x}), \quad w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = w_2^0(\mathbf{x}),$$

де

$$\begin{aligned} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \\ K_+^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \max\{0, K^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K_-^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}. \end{aligned}$$

Початковим наближенням для запропонованого ітераційного процесу обираються кінці сильно інваріантного конусного відрізка для гетеротонного оператора, що визначається правою частиною системи (5), (6).

Література

- [1] Laurencot P., Walker C. A fourth-order model for MEMS with clamped boundary conditions. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 2014. Vol. 109. № 6. P. 1435–1464.
- [2] Sidorov M. V. Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function. *Journal of Numerical & Applied Mathematics*. 2018. № 2 (128). P. 96–113.

Найкращі наближення класів типу Нікольського –Бесова періодичних функцій багатьох змінних у підпросторах Лебега

Світлана ГЕМБАРСЬКА

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

gembarskaya72@gmail.com

Досліджуються наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних, де $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, а функція $\omega(\tau)$ – задана функція однієї змінної τ типу модуля неперервності порядку l . Вважаємо, що ця функція задовольняє умови (S^α) та (S_l) , які називаються умовами Барі –Стєчкана.

Означимо апроксимаційну характеристику, яка нами досліджується. Поставимо у відповідність кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ множину вигляду

$$\rho(s) := \{k \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\}$$

і для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$Q_n := \bigcup_{\|s\|_1 < n} \rho(s), \text{ де } \|s\|_1 := s_1 + s_2 + \dots + s_d.$$

Множина Q_n називається східчастим гіперболічним хрестом.

Далі у відповідність множині Q_n поставимо сукупність тригонометричних поліномів вигляду

$$T(Q_n) := \{t : t(x) = \sum_{k \in Q_n} c_k e^{i(k,x)}, x \in \mathbb{R}^d, c_k \in \mathbb{C}\}.$$

Нехай $\mathcal{X} \subset L_1(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^d [0; 2\pi)$, – підпростір сумовних функцій із нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$.

Для функції $f \in \mathcal{X}$ означимо величину

$$E_{Q_n}(f)_{\mathcal{X}} := \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_{\mathcal{X}},$$

і для функціонального класу $F \subset \mathcal{X}$ покладемо

$$E_{Q_n}(F)_{\mathcal{X}} := \sup_{f \in F} E_{Q_n}(f)_{\mathcal{X}}.$$

Означена величина називається найкращим наближенням класу F тригонометричними поліномами з множини $T(Q_n)$.

Нами одержані точні за порядком оцінки величини $E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{q,1}}$, для деяких співвідношень між параметрами p і q . Зауважимо, що норма у просторі $B_{q,1}$ (див., наприклад, [1]) є ”сильнішою”, ніж L_q -норма.

Сформулюємо одержані результати.

Теорема 1. Нехай $d \geq 2$, $1 < p \leq q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ і умову (S_l) . Тоді справедлива порядкова оцінка

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{q,1}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Теорема 2. Нехай $d \geq 2$, $1 < q < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l) . Тоді виконується порядкове співвідношення

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{q,1}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

На підставі одержаних результатів зробимо наступний коментар.

Порівнявши оцінки в теоремах 1, 2 з відповідними оцінками величин $E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_q := E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{L_q(\mathbb{T}^d)}$, виявляємо, що крім випадку $\theta = 1$, розглянута апроксимаційна характеристика у просторах $B_{q,1}$ і L_q є різною за порядком.

Література

- [1] Pozharska K.V., Romanyuk A.S. Estimates for the approximation characteristics of the Nikol'skii –Besov classes of functions with mixed smoothness in the space $B_{q,1}$. Math. Nachr., 2025., 298, № 9, P. 3114–3134.

Застосування колокаційно-ітеративного методу для відшукування розв'язку інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю та обмеженнями

Катерина ГЕСЕЛЕВА

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,

Кам'янець-Подільський, Україна

heselewa@kpnpu.edu.ua

У просторі $L_2(a; b)$ розглядаються інтегро-функціональні рівняння з малою нелінійністю

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x; t)y(t)dt + \int_a^b H(x; t)h(y(t))dt + \varepsilon \int_a^b G(x; t)F(t; y(t))dt, \quad x \in [a; b] \quad (1)$$

з умовою

$$y(x) = \psi(x), \quad x \notin [a; b] \quad (2)$$

та обмеженнями

$$\int_a^b \Phi_i(t)y(t)dt = \gamma_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

де $f(x), \psi(x)$ – задані на $[a; b]$ та за його межами функції, а $y(x)$ – шукана функція. Лінійно-незалежна система функцій $\{\Phi_i(x)\}$ та числова множина $\{\gamma_i\}, i = \overline{1, m}$ – відомі. До рівняння (1) з умовами (2), (3) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням, у частковому випадку сталого запізнення Δ , $h(x) = x - \Delta$, $\Delta > 0$. У працях [1, 2] досліджено питання побудови наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь із малою нелінійністю без накладання додаткових обмежень.

Задачу (1)-(3) вважатимемо сумісною, якщо існує така функція $y(x)$ яка є розв'язком рівняння (1), задовольняє умову (2) та обмеження (3).

Функції $K(x; t)$, $H(x; t)$, $G(x; t)$ у квадраті $[a; b]^2$ задовольняють умови

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b K^2(x; t)dxdt &= K^2 < \infty, \\ \int_a^b \int_a^b H^2(x; t)dxdt &= H^2 < \infty, \\ \int_a^b \int_a^b G^2(x; t)dxdt &= G^2 < \infty; \end{aligned} \quad (4)$$

функція $F(t; y)$ в області $D = \{a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$ вимірна за t при всіх y , неперервна при всіх t (умова Каратеодорі) і задовольняє умову Ліпшиця

$$|F(t; y) - F(t; \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|,$$

де L – деяка додатна стала; функція $h(x)$ є неперервною разом із своєю похідною на $[a; b]$ і справджуються нерівності

$$x - h(x) \geq \Delta > 0, \quad (5)$$

$$h'(x) \geq l > 0. \quad (6)$$

Послідовні наближення до шуканого розв'язку задачі (1)-(3) відповідно до колокаційно-ітеративного методу знаходимо наступним чином:

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x; t)y_{k-1}(t)dt + \int_a^b H(x; t)y_{k-1}(h(t))dt + \\ + \varepsilon \int_a^b G(x; t)F(t; y_{k-1}(t))dt, \quad x \in [a; b], \quad (7)$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x), \quad x \notin [a; b], \quad (8)$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x; t)u_k(t)dt + \int_a^b H(x; t)u_k(h(t))dt, \quad x \in [a; b], \quad (9)$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \xi_j, \quad x \in [a; b], \quad u_k(x) = 0, \quad x \notin [a; b], \quad (10)$$

$$w_k(x) = \sum_{s=1}^n a_s^k \varphi_s(x), \quad (11)$$

де $y_{k-1}(x)$ – попереднє наближення $\{\varphi_s(x)\}_{s=1}^n$ та $\{\xi_j(x)\}$, $j = \overline{1, m}$ – деякі лінійно-незалежні системи функцій, причому $\xi_j(x) = 0$, коли $x \notin [a; b]$.

Для визначення невідомих параметрів λ_j^k отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, а невідомі коефіцієнти a_s^k у формулі (11) знаходимо з умови

$$w_k(x_i) = z_k(x_i) - z_{k-1}(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

У випадку сумісності задачі (1)-(3) послідовні наближення $\{\tilde{y}_k(x)\}$, побудовані за допомогою методу (6)-(12), будуть при деякому n збігатися до точного розв'язку цієї задачі, причому швидкість збіжності зростатиме із збільшенням n .

Література

- [1] Геселева К. Г. Дослідження колокаційного та колокаційно-ітеративного методів розв'язування одного типу інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2024. Вип. 25. С. 27–36.
- [2] Геселева К.Г. Побудова методом колокації наближеного розв'язку інтегро-функціонального рівняння з малою нелінійністю. Збірник матеріалів міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності», 20-22 червня 2024 р. Вінниця : ВНТУ, 2024. С. 104–105.

Множини стійкості до збурень модифікованих регулярних C -дробів

Володимир ГЛАДУН

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

volodymyr.r.hladun@lpnu.ua

Неперервні дробі, зокрема модифіковані регулярні C -дробі, є ефективним і широко застосовуваним апаратом апроксимації спеціальних функцій [1, 2]. На практиці коефіцієнти неперервного дробу відомі лише наближено – внаслідок похибок вимірювання або заокруглення при обчисленнях. Тому стійкість неперервних дробів до збурень їх коефіцієнтів є умовою коректності й надійності відповідних чисельних алгоритмів. Знаходження явних множин комплексної площини, на яких гарантується стійкість до збурень неперервного дробу, дає змогу контролювати точність обчислень і є актуальною задачею сучасної аналітичної теорії неперервних дробів [3].

Розглянемо модифікований регулярний C -дріб

$$\frac{a_0}{z + \frac{a_1}{z + \frac{a_2}{z + \dots}}}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad a_k \neq 0, \quad k \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

та його збурення

$$\frac{\hat{a}_0}{z + \frac{\hat{a}_1}{z + \frac{\hat{a}_2}{z + \dots}}}, \quad \hat{a}_k \in \mathbb{R}, \quad \hat{a}_k \neq 0, \quad k \geq 0. \quad (2)$$

Позначимо через $f_n(z)$, $\hat{f}_n(z)$ n -ті апроксиманти неперервних дробів (1), (2), а через $Q_k^{(n)}(z)$, $\hat{Q}_k^{(n)}(z)$, $0 \leq k \leq n$, – хвости апроксимант $f_n(z)$, $\hat{f}_n(z)$ відповідно, причому

$$Q_n^{(n)}(z) = \hat{Q}_n^{(n)}(z) = z, \quad Q_k^{(n)}(z) = z + \frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^{(n)}(z)}, \quad \hat{Q}_k^{(n)}(z) = z + \frac{\hat{a}_{k+1}}{\hat{Q}_{k+1}^{(n)}(z)}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Скрізь надалі вважаємо, що $f_n(z) \neq 0$, $Q_k^{(n)}(z) \neq 0$, $\hat{Q}_k^{(n)}(z) \neq 0$ на розглядуваній множині. Покладемо

$$\varepsilon_n^{(a)} = \sup_{k \geq 0} \left| \frac{\hat{a}_k - a_k}{a_k} \right|, \quad \varepsilon_n^{(f)} = \frac{\hat{f}_n(z) - f_n(z)}{f_n(z)}, \quad n \geq 1.$$

Модифікований регулярний C -дріб (1) називають стійким до збурень у точці $z_0 \in \mathbb{C}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta_\varepsilon(z_0) > 0$ таке, що з нерівності $\varepsilon^{(a)} < \delta_\varepsilon(z_0)$ випливає $|\varepsilon_n^{(f)}| < \varepsilon$ для всіх $n \geq 1$. Множину $\Omega \subset \mathbb{C}$ називають множиною поточної стійкості до

збурень, якщо модифікований регулярний C -дріб (1) є стійким до збурень в кожній точці Ω , і множиною рівномірної стійкості до збурень, якщо, крім того, число δ_ε можна вибрати одним і тим самим для всіх $z \in \Omega$.

Лема 1. Нехай $f_n(z) \neq 0$ для всіх $z \in \Omega$, і нехай $Q_k^{(n)}(z) \neq 0$, $\widehat{Q}_k^{(n)}(z) \neq 0$ для всіх $0 \leq k \leq n$, $z \in \Omega$. Тоді відносна похибка $\varepsilon_n^{(f)} = (\widehat{f}_n(z) - f_n(z))/f_n(z)$ n -ї апроксиманти збуреного модифікованого регулярного C -дріб (2) визначається формулою

$$\varepsilon_n^{(f)} = \varepsilon_0^{(a,1)} + (1 + \varepsilon_0^{(a,1)}) \sum_{p=1}^n \widetilde{G}_p^{(n,(-1)^p)}(z) \varepsilon_p^{(a,(-1)^p)} \prod_{m=1}^{p-1} G_m^{(n,(-1)^m)}(z),$$

де

$$\varepsilon_k^{(a,-1)} = \frac{a_k - \widehat{a}_k}{\widehat{a}_k}, \quad \varepsilon_k^{(a,1)} = \frac{\widehat{a}_k - a_k}{a_k}, \quad k \geq 0,$$

$$G_k^{(n,\sigma)}(z) = \begin{cases} \frac{\widehat{a}_k}{\widehat{Q}_{k-1}^{(n)}(z)\widehat{Q}_k^{(n)}(z)}, & \sigma = -1, \\ \frac{a_k}{Q_{k-1}^{(n)}(z)Q_k^{(n)}(z)}, & \sigma = 1, \end{cases} \quad \widetilde{G}_k^{(n,\sigma)}(z) = \begin{cases} \frac{\widehat{a}_k}{\widehat{Q}_{k-1}^{(n)}(z)Q_k^{(n)}(z)}, & \sigma = -1, \\ \frac{a_k}{Q_{k-1}^{(n)}(z)\widehat{Q}_k^{(n)}(z)}, & \sigma = 1, \end{cases}$$

$$1 \leq k \leq n.$$

Наступна лема зводить оцінку відносної похибки $\varepsilon_n^{(f)}$ до оцінки хвостів $Q_k^{(n)}(z)$, $\widehat{Q}_k^{(n)}(z)$.

Лема 2. Нехай існують сталі $A > 0$, $\rho > 0$ такі, що $|a_k| \leq A$, $|\widehat{a}_k| \leq A$, $k \geq 0$, $|Q_k^{(n)}(z)| \geq \rho$, $|\widehat{Q}_k^{(n)}(z)| \geq \rho$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, і нехай $g = A/\rho^2 < 1$, $\varepsilon^{(a)} < 1$. Тоді для всіх $n \geq 1$

$$|\varepsilon_n^{(f)}| \leq \varepsilon^{(a)} + \frac{\varepsilon^{(a)}(1 + \varepsilon^{(a)})}{1 - \varepsilon^{(a)}} \cdot \frac{g(1 - g^n)}{1 - g}. \quad (3)$$

Застосувавши Лему 2 до множини, яка є зовнішністю круга з центром у початку координат, отримуємо множини рівномірної стійкості до збурень.

Теорема 1. Нехай існує стала $A > 0$ така, що $|a_k| \leq A$, $|\widehat{a}_k| \leq A$, $k \geq 0$, і $\varepsilon^{(a)} < 1$. Тоді множина $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$, $R > 2\sqrt{A}$, є множиною рівномірної стійкості до збурень модифікованого регулярного C -дріб (1), і для відносної похибки n -ї апроксиманти для всіх $n \geq 1$ справджується оцінка (3) з $g = 4A/(R + \sqrt{R^2 - 4A})^2$.

Об'єднавши множини рівномірної стійкості з Теорема 1 за всіма допустимими радіусами $R > 2\sqrt{A}$, отримуємо множини поточної стійкості до збурень.

Теорема 2. За умов Теорема 1 множина $\Omega_A = \bigcup_{R > 2\sqrt{A}} \Omega_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\sqrt{A}\}$ є множиною поточної стійкості до збурень модифікованого регулярного C -дріб (1), і для кожної точки $z_0 \in \Omega_A$ та всіх $n \geq 1$ справджується оцінка (3) з $g = 4A/(|z_0| + \sqrt{|z_0|^2 - 4A})^2$.

Література

- [1] Cuyt A., Petersen V. B., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B. Handbook of Continued Fractions for Special Functions, Springer, 2008.
- [2] Jones W. B., Thron W. J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications, Addison-Wesley, 1980.
- [3] Dmytryshyn M., Hladun V. On the Sets of Stability to Perturbations of Some Continued Fraction with Applications. Symmetry. 2025, 17, No 9, Article 1442.

Про обмежені розв'язки різницевого рівняння з необмеженими операторними коефіцієнтами

Михайло ГОРОДНІЙ, Єлизавета ТИХА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

horodnii@knu.ua, goncharova2001@ukr.net

Нехай X – комплексний банахів простір, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ – замкнені оператори. Розглянемо двостороннє різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, & n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, & n \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Наша мета – визначити умови на оператори A та B , за яких рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n\}$ для довільної обмеженої послідовності $\{y_n\}$.

Відомо, що якщо спектр $\sigma(A)$ замкненого оператора A не перетинається з одиничним колом $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\sigma_-(A)$, $\sigma_+(A)$ – частини спектра $\sigma(A)$, що лежать відповідно всередині і зовні кола S , то простір X розкладається в пряму суму $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$ інваріантних відносно A підпросторів $X_{\pm}(A)$ таким чином, що $X_-(A) \subset D(A)$, звуження $A_- : X_-(A) \rightarrow X_-(A)$ оператора A на $X_-(A)$ є лінійним обмеженим оператором зі спектром $\sigma_-(A)$, а звуження $A_+ : D(A_+) \subset X_+(A) \rightarrow X_+(A)$ є замкненим оператором з областю визначення $D(A_+) = X_+(A) \cap D(A)$ і спектром $\sigma_+(A)$.

Основний результат містить така теорема.

Теорема 1. Для того щоб рівняння (1) мало єдиний обмежений розв'язок $\{x_n\}$ для довільної обмеженої послідовності $\{y_n\}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:

- (i1) $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset$;
- (i2) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$.

Також встановлено, що при виконанні умов теореми 1 координати відповідного до $\{y_n\}$ єдиного обмеженого розв'язку $\{x_n\}$ різницевого рівняння (1) визначаються таким чином.

Нехай P_- , P_+ та $P_-(A)$, $P_+(A)$ – пари проєкторів, що відповідають зображенням

$$X = X_-(A) \dot{+} X_+(B) \text{ та } X = X_-(A) \dot{+} X_+(A), \quad x_A = \sum_{k=1}^{\infty} A_+^{-k} P_+(A) y_k, \quad x_B = \sum_{k=-\infty}^0 B_-^{-k} P_-(B) y_k.$$

Тоді

$$x_1 = P_- x_B - P_+ x_A;$$

для кожного $n \geq 2$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_-^{n-1-k} P_-(A) y_k - \sum_{k=n}^{\infty} A_+^{n-1-k} P_+(A) y_k + A_-^{n-1} P_-(x_B + x_A);$$

для кожного $n \leq 0$

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} B_-^{n-1-k} P_-(B) y_k - \sum_{k=n}^0 B_+^{n-1-k} P_+(B) y_k - B_+^{n-1} P_+(x_B + x_A).$$

Мультистабільність та оптимізація енергії в градієнтній моделі типу Курамото

Анастасія ГРАБОВЕЦЬ¹, Олександр БУРИЛКО^{1,2}

¹*Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна*

²*Інститут математики Гумбольдтського університету Берліна, Берлін, Німеччина*

nastiahrabovets@gmail.com, burylko@yahoo.co.uk

Дослідження присвячене вивченню градієнтної моделі фазових осциляторів, яка описує колективну динаміку та енергетичний ландшафт систем фрустрованих спінів. Модель належить до класу Курамото і задана на кільці з ідентичних осциляторів, у якому взаємодія найближчих сусідів конкурує зі взаємодією наступних сусідів. Симетрія кільця відображається в циркулянтній структурі матриці зв'язку, що надає зручний аналітичний інструмент для дослідження колективних режимів та їхньої стійкості. Значну увагу приділено високому рівню мультистабільності системи: через фрустрований характер зв'язку одночасно співіснують численні рівноваги — від станів синхронізації, обертових хвиль (rotating waves) та протифазних станів до асиметричних нерухомих точок і цілих многовидів рівноваг. Отримано повну класифікацію їхньої стійкості залежно від параметрів зв'язку; зокрема, окремо встановлено умови стійкості стану повної синхронізації як одного з найважливіших, з фізичної точки зору, колективних режимів. Аналогічний результат отримано і для випадку взаємодії з трьома сусідами. Зі зміною параметрів зв'язку мультистабільність системи суттєво трансформується внаслідок регулярних та вироджених біфуркацій.

Окремо досліджено, як сила зв'язку між осциляторами впливає на енергетичний ландшафт фрустрованої системи. Особливу увагу приділено множинам Максвелла — критичним значенням параметрів, при яких глобальний мінімум енергії переходить від одного стану до іншого. Виявлення таких множин дає змогу окреслити межі енергетичного ландшафту та визначити, який фазовий стан є енергетично вигідним у заданому режимі зв'язку. Показано, що в термодинамічній границі поведінка системи узгоджується з відомими результатами для спінових ланцюжків за певних крайових умов [1], що свідчить про можливість застосування розвинуеного підходу до задач оптимізації енергії в системах із загальнішою або складнішою структурою.

Отримані результати окреслюють природні напрямки подальшого розвитку роботи. Оскільки модель належить до ширшого класу систем типу Курамото з довільною циркулянтною структурою зв'язку, доцільним є поширення повної класифікації рівноваг та енергетичного ландшафту на випадок взаємодії з трьома і більше сусідами. Іншим перспективним напрямком є перехід від кільцевої геометрії до двовимірної ґратки, що ближче відповідає вихідній фізичній постановці задачі про фрустровані спінові системи.

Література

- [1] Cicalese M., Solombrino F. Frustrated Ferromagnetic Spin Chains: A Variational Approach to Chirality Transitions. J. Nonlinear Sci. 2015. 25. P. 291–313.

Про межі застосовності апарату обмеженого L -індексу до регуляризації нейронних мереж: спектральна константа Ліпшиця для безпеки soft-sensor'ів

Любомир ГРИГОРЧУК, Галина ГРИГОРЧУК

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ,
Україна

grygorchuk1@gmail.com

Задача забезпечення безпеки нейромережевих soft-sensor'ів для промислового сушіння (барабанні сушарки) вимагає гарантованого обмеження чутливості прогнозу до збурень вхідних даних — зокрема до аварійного показання несправного датчика. Природним видається намагання скористатися апаратом теорії обмеженого L -індексу (школа О. Б. Скасківа, А. І. Бандури [1]), переозначивши класичну нерівність

$$\frac{|u^{(k)}(z)|}{k! L^k(z)} \leq \max_{0 \leq j \leq p} \frac{|u^{(j)}(z)|}{j! L^j(z)}$$

як зовнішній штраф на зростання похідних виходу мережі відносно фізично обґрунтованої вагової функції L .

У цій роботі показано, що таке пряме перенесення позбавлене математичного обґрунтування. Сила наведеної нерівності для цілих (голоморфних) функцій полягає не в самій формі запису, а в тому, що скінченна перевірка похідних до порядку p *гарантує*, через аналітичність (інтеграл Коші, принцип максимуму модуля), виконання нерівності для всіх вищих порядків. Нейронна мережа з дійсними фізичними входами й, як правило, кусково-лінійними активаціями (ReLU) такої властивості не має і не потребує: перенесення форми нерівності без цієї аналітичної основи не дає жодної додаткової гарантії понад ту, що вкладається безпосередньо у визначення штрафу.

Теорема (Спектральна межа безпеки). *Нехай $f_\theta = W_L \circ \sigma_{L-1} \circ W_{L-1} \circ \dots \circ \sigma_1 \circ W_1$ — мережа прямого поширення з 1-Ліпшицевими активаціями, що діє на входи, нормовані власними фізичними масштабами задачі. Тоді константа Ліпшиця мережі обмежена добутком спектральних норм матриць ваг:*

$$\text{Lip}(f_\theta) \leq \prod_{i=1}^L \|W_i\|_2. \quad (1)$$

Нерівність (1) — стандартний, доведений результат (субмультіплікативність операторної норми), що лежить в основі методів спектральної нормалізації та штрафної регуляризації Ліпшиця [2]. Якщо фізично обґрунтований поріг $\Delta T_{\text{margin}}(W)$ (виведений з ефекту «мокрого термометра» та часу теплової релаксації кристала) перевищує ліву частину (1), то прогноз мережі гарантовано не порушує умов безпеки за просторовим і часовим напрямками одночасно.

Лема. *Апарат обмеженого L -індексу та контроль константи Ліпшиця через спектральні норми — це різні за природою інструменти: перший спирається на аналітичну структуру функції, другий — на алгебраїчну структуру композиції лінійних відображень і не потребує аналітичності.*

Відкритим лишається питання іншого штибу, яке, на нашу думку, становить самостійний інтерес для теорії функцій: чи має *сам розв'язок* $T(r, z, t)$ системи параболічних рівнянь тепломасообміну (а не навчена нейромережа, що його апроксимує) обмежений (дійсний) L -індекс, вагова функція якого виводиться безпосередньо з коефіцієнтів рівняння? Згладжувальна властивість теплового ядра робить такий розв'язок аналітичним при $t > 0$, що дає підстави для постановки цього питання коректно.

Література

- [1] Bandura A. I., Skaskiv O. B. Entire functions of several variables of bounded index. Lviv: Vyd-vo I. Ye. Chyzhykova, 2016. 128 p.
- [2] Gouk H., Frank E., Pfahringer B., Cree M. J. Regularisation of neural networks by enforcing Lipschitz continuity. Machine Learning. 2021. Vol. 110, No. 2. P. 393–416.

Знакозмінні функції Ляпунова для розширень динамічних систем на многовидах

Іван ГРОД, Інна ГРОД

Тернопільський національний педагогічний університет ім.ВолодимираГнатюка,

м.Тернопіль, Україна

igrod@ukr.net

Досліджується питання про взаємозв'язок між властивостями матрицанта лінійних розширень динамічних систем на торі для експоненціально дихотомічних і слабо регулярних лінійних систем.

Розглянемо системи диференціальних рівнянь виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \quad (1)$$

де вектор-функція $a(\varphi)$ і математична функція $A(\varphi)$ є неперервними за всією сукупністю змінних $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ і 2π – періодичними за кожною змінною φ_j , $j = \overline{1, m}$, тобто задані на m -вимірному торі $\mathcal{T}_m$; $x \in R^n$ ($a(\varphi) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, $A(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$). Додатково відносно вектор-функції $a(\varphi)$ припускаємо, що задача Коші $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$ при кожному фіксованому значенні $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ має єдиний розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$. Є очевидним, що цей розв'язок визначений при всіх $t \in R$ і неперервно залежить від φ_0 . Нагадаємо, що система (1) регулярна, якщо вона має єдину функцію Гріна задачі про інваріантні многовиди.

Теорема. *Припустимо, що існує скалярна функція $T = T(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$, для якої виконується нерівність*

$$\left\| \Omega_0^{T(\varphi)} \right\|_0^2 \left| 1 + \dot{T}(\varphi) \right|_0 < 1, \quad (2)$$

де $\Omega_0^t(\varphi; A)$ -матрицант лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x$.

Тоді система (1) буде регулярною і обов'язково $T(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m$. Більше того, якщо $T(\varphi) > 0$, то тривіальний тор $x = 0$ системи (1) є експоненціально стійким на $-\infty$.

Література

- [1] Samoilenko A. M. Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. Dordrecht: Springer, 1991. 313 с.
- [2] Mitropolsky Yu.A., Samoilenko A.M., Kulik V. L. Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems. Taylor & Francis Inc, London, 2003. 369 с.
- [3] Грод І.М., Кулик В.Л., Інваріантні множини розширень динамічних систем на многовидах Буковинський математичний журнал, 2017, № 2, С. 71–79

Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі

Тетяна ПИЛИПЮК

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,

Кам'янець-Подільський, Україна

`pylypyuk.tetiana@kpmu.edu.ua`

У доповіді розглядаються задачі побудови обмежених на множині

$D = \{(t, r, \varphi, z) | t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j); R_0 > 0; R_{n+1} \equiv R < +\infty;$
 $\varphi \in (0; \varphi_0); 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (-l_1; l_2) l_j \geq 0, l_1 + l_2 \neq 0\}$ класичних розв'язків лінійних дифе-
 ренціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку зі змінними
 коефіцієнтами [3]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j +$$

$$+ \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h_1 \right) u_j \Big|_{z=-l_1} = w_j^1(t, r, \varphi); \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) u_j \Big|_{z=l_2} = w_j^2(t, r, \varphi); h_j \geq 0; h_1 + h_2 \neq 0; j = \overline{1, n+1},$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z), \quad (4)$$

одними з крайових умов на гранях клина [1]

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \left. \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \left. \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1} \quad (8)$$

та умовами спряження [2]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де a_{rj} , $a_{\varphi j}$, a_{zj} , χ_j , α_{js}^k , β_{js}^k – деякі сталі;

$$\alpha_{11}^0 \leq 0, \beta_{11}^0 \geq 0; |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0;$$

$$\alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \beta_{22}^{n+1} \geq 0; \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0;$$

$$c_{jk} \equiv \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f_j(t, r, \varphi, z), g_j^s(r, \varphi, z), w_j^s(t, r, \varphi), g_0(t, \varphi, z); g(t, \varphi, z); g_{pj}(t, r, z); w_{pj}(t, r, z);$$

$$(s = 1, 2; p = \overline{1, 4}; j = \overline{1, n+1}),$$

– задані дійсні обмежені неперервні функції; $u_j(t, r, \varphi, z)$ – шукані дійсні двічі неперервно диференційовні функції.

Одержані інтегральні зображення розв’язків гіперболічних початково-крайових задач спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і вихідних даних задач й можуть бути використані як у подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей коливних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

Література

- [1] Громик А.П., Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних циліндричних середовищах. Кам’янець-Подільський: ПП «Видавництво Абетка світ», 2020. 200 с.
- [2] Конет І.М., Пилипюк Т.М. Крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. Чернівці: Технодрук, 2019. 200 с.
- [3] Самойленко В.Г., Конет І.М. Рівняння математичної фізики. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. 283 с.

Посилений варіант теореми про неповернення

Ярослав ГРУШКА

Інститут Математики НАН України, Київ, Україна

grushka@imath.kiev.ua

Хоча тахіонну гіпотезу повсюдно пов'язують із часовими парадоксами, нещодавні дослідження Andr ka, Madar sz, N meti, Stannett, Sz kely вказують на те, що рух швидше за світло не обов'язково передбачає ретропричинні подорожі в часі. Однак існуючі тахіонні кінематики, що базуються на перетвореннях Рекамі–Ольховського–Гольдоні та Хассані, не можуть бути адекватно оцінені на предмет часової незворотності за допомогою аксіоматичних структур Andr ka та ін. У попередніх результатах цю проблему було розв'язано шляхом доведення абстрактних теорем про неповернення в межах теорії кінематичних мінливих множин. У цій доповіді представлені узагальнення теорем про неповернення, розроблених у попередніх роботах. Виявляється, що умови цих теорем дозволяють зробити значно сильніші висновки щодо часової незворотності вихідної кінематики. Як наслідок, можна встановити більш потужні формулювання цих теорем.

Надалі буде використовуватись стандартна система понять і позначень теорії мінливих множин та абстрактної кінематики, розроблена у роботах [1, 2]. Зауважимо, що з коротким вступом до теорії мінливих множин та абстрактної кінематики можна ознайомитися в [1, розділи 2,3].

Означення 1. Нехай $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика*. Ланцюговий шлях

$$\mathcal{L} = (A, (A_1, f_1), \dots, (A_n, f_n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

називається **нетривіальним** в $\mathcal{F}$, якщо

$$\text{card}(A) \geq 2,$$

де $\text{card}(A)$ позначає потужність множини A . В іншому випадку шлях $\mathcal{L}$ називатиметься тривіальним.

Означення 2. Універсальна кінематика $\mathcal{F}$ називається **позитивно часонезворотною** тоді і тільки тоді, коли для кожної системи відліку $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ та для кожного нетривіального ланцюгового шляху $\mathcal{L}$, геометрично циклічного в системі відліку f та кусково геометрично стаціонарного в $\mathcal{F}$, виконується нерівність

$$t(\text{esl}(\text{po}(\mathcal{L}))) <_f t(\text{esl}(\text{ki}(\mathcal{L}))).$$

Теорема 1. *Будь-яка слабко часопозитивна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є позитивно часонезворотною.*

*Означення універсальної кінематики можна знайти в [3, стор. 156] або [1, Definition 6].

Означення 3. Називатимемо універсальну кінематику $\mathcal{F}$ **абсолютно часонезворотною**, якщо будь-яка універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$, еквівалентна до кінематики $\mathcal{F}$ відносно перетворень координат (тобто така, що $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}$), є позитивно часонезворотною.

Теорема 2. *Будь-яка слабо часопозитивна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є абсолютно часонезворотною.*

Строге математичне означення слабо часопозитивної універсальної кінематики див. у [2, Definition 9, пункт 5]. З інтуїтивної точки зору, слабо часопозитивна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ представляє собою певний абстрактний “світ”, який містить таку систему відліку $f_0 \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, відносно якої годинники в усіх інших системах відліку обертаються в додатному напрямку.



Ця робота є частиною проєкту, який отримав фінансування за Програмою досліджень та інновацій Європейського Союзу «Горизонт 2020» в рамках грантової угоди Марії Склодовської-Кюрі № 873071, SOMPATY.

Література

- [1] Ya. I. Grushka. On Time Irreversibility of Generalized Hassani Kinematics. *Prykl. Probl. Mekh. Mat*, 20:88–108, 2022.
- [2] Ya.I. Grushka. Theorem of Non-Returning and Time Irreversibility of Tachyon Kinematics. *Progress in Physics*, 13(4):218–228, 09 2017.
- [3] Ya.I. Grushka. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). page 1–208. Preprint: ResearchGate, 2017.

Спектральні апроксимації для наборів еліптичних диференціальних операторів на компактних многовидах

Мар'ян ДМИТРИШИН¹, Сергій ШАРИН²

*Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ,
Україна*

¹marian.dmytryshyn@cnu.edu.ua, ²serhii.sharyn@cnu.edu.ua

Нехай $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита обмежена область з нескінченно гладкою компактною границею $\partial\Omega_j$ для всіх $j = 1, \dots, J$ [1, означення 3.2.1/2]. Розглядаємо $\partial\Omega_j$ як гладкий многовид, U_{jl} ($l = 1, \dots, N$) – локальні карти, що покривають $\partial\Omega_j$. Позначимо через $C^\infty(U_{jl})$ простір нескінченно диференційованих комплекснозначних функцій на U_{jl} . Нехай

$$y^l = (y_1^l, \dots, y_{n-1}^l)$$

– локальні координати на $\partial\Omega_j$, визначені дифеоморфізмами

$$y^l: U_{jl} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1},$$

з оберненими відображеннями y^{-l} . Нехай $C^\infty(\partial\Omega_j)$ – простір комплекснозначних функцій на $\partial\Omega_j$, таких, що

$$u(y^l) = u \circ y^{-l} \in C^\infty(y^l(U_{jl}))$$

для всіх $l = 1, \dots, N$.

Лінійний диференціальний оператор

$$D: C^\infty(U_{jl}) \rightarrow C^\infty(U_{jl})$$

порядку $m \in \mathbb{N}$ на U_{jl} має вигляд

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha,$$

де $a_\alpha \in C^\infty(U_{jl})$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial y_i^l}.$$

Використовуючи відображення

$$\delta_{y^l}: C^\infty(y^l(U_{jl})) \rightarrow C^\infty(U_{jl}),$$

де

$$\delta_{y^l}(v) := v \circ y^l$$

для всіх $v \in C^\infty(y^l(U_{jl}))$, кожному індексу $l = 1, \dots, N$ співставимо оператор

$$D_{y^l}: C^\infty(y^l(U_{jl})) \rightarrow C^\infty(y^l(U_{jl})),$$

де

$$D_{y^l} := \delta_{y^l}^{-1} \circ D \circ \delta_{y^l}.$$

Тоді дія оператора Du на функції $u \in C^\infty(\partial\Omega_j)$ в локальних координатах $y^l = (y_1^l, \dots, y_{n-1}^l)$ визначається як

$$Du(y^l) = D_{y^l}(u \circ y^{-l})$$

для всіх $l = 1, \dots, N$.

На $\partial\Omega_j$ розглядаємо еліптичний диференціальний оператор L_j ($j = 1, \dots, J$) порядку $2m \in \mathbb{N}$, який в локальних координатах $y^l = (y_1^l, \dots, y_{n-1}^l)$ ($l = 1, \dots, N$) має вигляд

$$L_j u(y^l) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{j,\alpha}(y^l) \partial^\alpha (u \circ y^{-l}), \quad a_{j,\alpha}(y^l) \in C^\infty(y^l(U_{jl})),$$

де $a_{j,\alpha}(y^l) \in \mathbb{R}$ для $|\alpha| = 2m$. Припускаємо, що існує таке число $c > 0$, що

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_{j,\alpha}(y^l) \xi^\alpha \geq c |\xi|^{2m}$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Нехай L_j з областю визначення

$$\mathfrak{D}(L_j) = C^\infty(\partial\Omega_j)$$

є симетричний в $L_2(\partial\Omega_j)$. Тоді його замикання A_j має точковий спектр і область визначення $\mathfrak{D}(A_j^k)$ його k -го степеня співпадає з простором Соболева $W_2^{2mk}(\partial\Omega_j)$.

Для будь-якого $\nu > 0$ визначимо підпростір

$$\mathcal{E}^\nu(A_j) = \left\{ u \in L_2(\partial\Omega_j) : \|u\|_{\mathcal{E}^\nu(A_j)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \|(A_j/\nu)^k u\|_{L_2(\partial\Omega_j)} < \infty \right\}.$$

Об'єднання

$$\mathcal{E}(A_j) = \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{E}^\nu(A_j)$$

наділимо квазінормою

$$\|u\|_{\mathcal{E}(A_j)} = \|u\|_{L_2(\partial\Omega_j)} + \inf \{ \nu > 0 : u \in \mathcal{E}^\nu(A_j) \}.$$

Оператор A_j самоспряжений в $L_2(\partial\Omega_j)$, а тому $\mathcal{E}(A_j)$ щільний в $L_2(\partial\Omega_j)$. Припустимо, що $0 \in \rho(A_j)$ для всіх $j = 1, \dots, J$, де $\rho(A_j)$ є резольвентна множина A_j .

Нехай $\mathcal{E}$ – поповнення тензорного добутку

$$\mathcal{E}(A_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}(A_J)$$

у проективній квазінормі

$$\|w\|_{\mathcal{E}} = \inf \sum_n \|u_n^1\|_{\mathcal{E}(A_1)} \cdots \|u_n^J\|_{\mathcal{E}(A_J)},$$

де $\inf$ береться за всіма представленнями

$$w = \sum_{n=1}^N \bigotimes_j u_n^j$$

зі скінченним N , такими, що

$$\bigotimes_j u_n^j \in \mathcal{E}(A_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}(A_J).$$

Через $\mathcal{L}_2$ позначимо поповнення тензорного добутку

$$L_2(\partial\Omega_1) \otimes \cdots \otimes L_2(\partial\Omega_J)$$

у проективній нормі

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2} = \inf \sum_n \|u_n^1\|_{L_2(\partial\Omega_1)} \cdots \|u_n^J\|_{L_2(\partial\Omega_J)}.$$

Для пари індексів $0 < s < \infty$, $0 < \tau \leq \infty$ визначимо апроксимаційний простір

$$\mathcal{B}_\tau^s(\mathcal{E}, \mathcal{L}_2) = \{w \in \mathcal{L}_2 : \|w\|_{\mathcal{B}_\tau^s(\mathcal{E}, \mathcal{L}_2)} < \infty\}$$

з квазінормою

$$\|w\|_{\mathcal{B}_\tau^s(\mathcal{E}, \mathcal{L}_2)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^s E(t, w; \mathcal{E}, \mathcal{L}_2)]^\tau \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E(t, w; \mathcal{E}, \mathcal{L}_2), & \tau = \infty. \end{cases}$$

Тут

$$E(t, w; \mathcal{E}, \mathcal{L}_2) = \inf \{ \|w - w^0\|_{\mathcal{L}_2} : w^0 \in \mathcal{E}, \|w^0\|_{\mathcal{E}} \leq t \}, \quad w \in \mathcal{L}_2, \quad t > 0.$$

Доводимо прямі та обернені апроксимаційні теореми у формі нерівностей типу Джексона і Бернштейна, в яких константи виражаються через параметри апроксимаційних просторів $\mathcal{B}_\tau^s(\mathcal{E}, \mathcal{L}_2)$ [2].

Література

- [1] Н. Triebel. *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam–New York–Oxford, 1978.
- [2] М. Dmytryshyn. Tensor products of approximation spaces associated with regular elliptic operators on compact manifolds. *Mat. Stud.* 2025. 64, No. 2. P. 170–178.

Обґрунтування методу усереднення для багаточастотних систем диференціальних рівнянь із сталим запізненням

Максим Домніцак

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці, Україна

domnitsak.maksym@chnu.edu.ua

Розглядається нелінійна багаточастотна система диференціальних рівнянь із сталим запізненням вигляду:

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Delta, \varphi_\Theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Delta, \varphi_\Theta), \quad (1)$$

де a і φ – вектори повільних і швидких змінних відповідно, τ – повільний час, ε – малий додатний параметр, а $\omega(\tau)$ – вектор-функція частот. Вплив післядії враховується через вектори із запізненнями $a_\Delta(\tau) = (a_1(\tau - \varepsilon\Delta_1), \dots, a_n(\tau - \varepsilon\Delta_n))$ та $\varphi_\Theta(\tau) = (\varphi_1(\tau - \varepsilon\theta_1), \dots, \varphi_m(\tau - \varepsilon\theta_m))$, де $0 \leq \Delta_1 \leq \dots \leq \Delta_n$ та $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_m$ – сталі запізнення (зокрема, досліджується випадок для $m = 3$). Початкові умови для відповідних змінних задаються на відрізках $[-\varepsilon\Delta_n, 0]$ та $[-\varepsilon\Theta_m, 0]$.

Відповідна усереднена система будується усередненням за швидкими змінними і набуває вигляду:

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \bar{a}_\Delta), \quad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \bar{a}_\Delta). \quad (2)$$

Основною задачею обґрунтування методу усереднення є встановлення ефективних оцінок близькості розв'язків вихідної та усередненої систем. Для багаточастотних систем без запізнення метод усереднення обґрунтований у монографії [1], для системи з одним сталим запізненням – у праці [2]. Узагальнені багаточастотні системи з лінійними запізненнями методом усереднення досліджені в [3].

У даній доповіді знайдено достатні умови існування і єдності розв'язку початкової задачі для системи рівнянь (1) на відрізку $[0, L]$, побудовано оцінку для похибки методу усереднення, порядок якої $\mathcal{O}(\sqrt[m]{\varepsilon})$.

Одержані результати проілюстровано для одночастотної системи

$$\frac{da}{dt} = \cos(2\varphi_{\Delta 1} - \varphi_{\Delta 2} - \varphi_{\Delta 3}) + \cos(2\varphi_{\Delta 1} + \varphi_{\Delta 2} + \varphi_{\Delta 3}). \quad (3)$$

й отримано оцінку $|a(\tau, \varepsilon) - \bar{a}(\tau)| \leq C\sqrt{\varepsilon}$ для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Література

- [1] Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 2004. 475 с.

- [2] Бігун Я.Й. Метод усереднення в багаточастотних системах з запізненням. Укр. мат. журн., 1998. 50, № 3. С. 299–303.
- [3] Bihun Ya., Petryshyn R., Skutar I. Averaging in a generalized multifrequency system with a delay. *Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems*. Springer Nature Switzerland AG, 2025. P. 281-294.

Апроксимація розв'язків лінійних крайових задач із запізненням методом сплайн-функцій

Андрій Дорош, Олексій Жолтовський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

a.dorosh@chnu.edu.ua, zholtovskyi.oleksii@chnu.edu.ua

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y(x - \tau(x)) = f(x), \quad x \in [a; b], \quad (1)$$

$$y(x) = \varphi(x), \quad x \in [a^*; a], \quad y(a) = \varphi(a), \quad y(b) = \gamma, \quad (2)$$

де $p(x), q_1(x), q_2(x), f(x), \tau(x) \geq 0$ – неперервні функції на $[a; b]$, $\varphi(x)$ – неперервна функція на $[a^*; a]$, $\gamma \in R$, $a^* = \max_{x \in [a; b]} \{x - \tau(x)\}$.

Питання існування та єдиності розв'язків крайових задач для різних класів диференціально-різницевих рівнянь розглядалися в [1]. Будемо допускати, що існує єдиний двічі неперервно-диференційований розв'язок крайової задачі (1)-(2).

Застосування методу сплайн-функцій виявилось ефективним підходом для наближеного знаходження розв'язків крайових задач із запізненням. У роботі розглядаються дві схеми застосування методу сплайн функцій:

- використання базисних кубічних сплайнів;
- ітераційна схема за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2.

Будемо шукати наближений розв'язок крайової задачі (1)-(2) у вигляді кубічного В-сплайна [2]

$$S(x, y) = \sum_{i=-1}^{n+1} b_i B_i(x) \quad (3)$$

Підставляючи сплайн (3) у рівняння (1) і крайові умови (2), у вузлах сітки одержимо рівності

$$\frac{b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1}}{h^2} + p_k \frac{b_{k+1} - b_{k-1}}{2h} + q_{1k} \frac{b_{k-1} + 4b_k + b_{k+1}}{6} + \quad (4)$$

$$+ q_{2k} \sum_{i=-1}^{n+1} b_i B_i(x_k - \tau(x_k)) = f(x_k), \quad k = \overline{0, n},$$

$$\frac{b_{-1} + 4b_0 + b_1}{6} = \varphi(a), \quad \frac{b_{n-1} + 4b_n + b_{n+1}}{6} = \gamma. \quad (5)$$

Співвідношення (4)-(5) – це система лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів b_k , $k = \overline{-1, n+1}$ [3].

У роботі [4] запропоновано схему знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)-(2) у вигляді кубічного сплайну $S(x, y)$ дефекту 2:

$$\begin{aligned}
S(x, y) &= M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j^- \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \\
&+ \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}^+ h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j^- h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}; x_j], \quad j = \overline{1, m}, \\
M_j^+ &= S''(x_j + 0, y), \quad j = \overline{0, m-1}, \quad M_j^- = S''(x_j - 0, y), \quad j = \overline{1, m}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для знаходження величин M_j^+ , M_j^- у [4] запропоновано ітераційну схему та встановлено коефіцієнтні умови її збіжності.

Розглянемо тестову крайову задачу із запізненням

$$\begin{aligned}
y''(x) + y(x) + y\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= 0, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\
y(x) &= 2, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right], \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.
\end{aligned}$$

У таблиці 1 наведено наближені значення розв'язку згідно розглянутих схем апроксимацій. y_T – точний розв'язок, S_b – наближене значення кубічного В-сплайна, S_d^k – наближене значення кубічного сплайна дефекту 2 на k -й ітерації.

Таблиця 1

x	y_T	S_b	S_d^4	S_d^6	S_d^{10}
0.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000
0.314159	3.658328	3.657946	3.653093	3.657643	3.657945
0.628319	4.762779	4.762178	4.754326	4.761688	4.762176
0.942478	5.205243	5.204631	5.196778	5.204141	5.204629
1.256637	4.942407	4.942005	4.937151	4.941702	4.942003
1.570796	4.000000	4.000000	4.000000	4.000000	4.000000

Числові експерименти показують, що однакова точність наближення кубічними В-сплайнами та сплайнами дефекту 2 досягається орієнтовно на десятій ітерації.

Література

- [1] Dorosh A., Cherevko I. Boundary value problem solution existence for linear integro-differential equations with many delays. Carpathian Mathematical Publications. 2018. 10, No 1. P. 65–70.
- [2] Alberg J., Nilson E., Walsh J. The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967. 296 p.
- [3] Жолтовський О.О., Черевко І.М. Застосування методу сплайн-функцій до моделювання лінійних крайових задач із запізненням. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2026. Вип. 30. С. 63–71.

- [4] Дорош А.Б., Черевко І.М. Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків лінійних крайових задач із запізненням. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2014. Вип. 10. С. 80–88.

Асимптотичний аналіз та усереднення для стохастичних диференціально-функціональних систем із малим параметром за наявності зовнішніх випадкових збурень

Ірина ДОРОШЕНКО

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

i.doroshenko@chnu.edu.ua

У багатьох математичних моделях технічних і фізичних систем малі збурення параметрів суттєво впливають на динаміку, змінюючи стан рівноваги від асимптотично стійкого до нестійкого [1]. Для дослідження детермінованих систем ефективно застосовується метод усереднення Боголюбова–Митропольського–Крилова–Самойленка [1]. Його розвиток для стохастичних систем без післядії та зі скінченною чи нескінченною післядією висвітлено у працях І.І. Гіхмана, Р.З. Хасминського, Є.Ф. Царкова та В.К. Ясинського.

Метою даної роботи є обґрунтування алгоритму побудови спрощених (усереднених) рівнянь для квазілінійних стохастичних диференціальних та диференціально-функціональних систем із малим параметром $\varepsilon > 0$ за наявності зовнішніх випадкових збурень.

Розглядається стохастичне диференціальне рівняння з малим параметром під дією зовнішніх випадкових величин (СДРВВ) на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$:

$$dx_t = \varepsilon [\varphi_\omega a(t, x_t)dt + \psi_\omega b(t, x_t)dw_t], \quad x_{t_0} = x_0(\omega), \quad (1)$$

де w_t — скалярний стандартний вінерівський процес; $\varphi_\omega, \psi_\omega$ — зовнішні випадкові величини, незалежні від w_t , зі скінченними другими моментами ($\mathbb{E}\varphi_\omega^2 \leq K_1, \mathbb{E}\psi_\omega^2 \leq K_2$).

Припускається вимірність та виконання модифікованої глобальної умови Ліпшиця для коефіцієнтів $a(t, x)$ та $b(t, x)$ з константою $K^* = \max\{K_1, K_2\}$, а також існування з ймовірністю 1 границі:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_S^{S+T} \varphi_\omega a(t, x)dt = \bar{a}(x, \omega). \quad (2)$$

Рівняння випадкового усередненого руху задисується у вигляді:

$$dx(t, \omega) = \varphi_\omega \bar{a}(x(t, \omega))dt. \quad (3)$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови регулярності коефіцієнтів та граничного співвідношення (2). Тоді при $\varepsilon \rightarrow 0$ нормована різниця $\eta_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\varphi_\omega(x_t^\varepsilon - x(t, \omega))$ слабо збігається до розв'язку лінійного неоднорідного стохастичного рівняння:*

$$d\eta_t = \varphi_\omega g(t, \omega)\eta_t dt + \psi_\omega f(t, \omega)dw_t. \quad (4)$$

Теорема 2. *За виконання умов модифікованої умови Ліпшиця існує така функція $g_1(\varepsilon, T)$, що для довільних $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ та $T > 0$ має місце оцінка:*

$$\mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T/\varepsilon} |x_t^\varepsilon - x(\varepsilon t)|^2 \right\} \leq g_1(\varepsilon, T) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5)$$

Далі розглянемо систему зі скінченною післядією $r > 0$:

$$dx_t = \varepsilon [\varphi_\omega a(t, x_t)dt + \psi_\omega b(t, x_t)dw_t], \quad x_{t+\theta} = \beta(\theta), \quad \theta \in [-r, 0], \quad (6)$$

де $x_t \equiv \{x(t + \theta), \theta \in [-r, 0]\}$, а коефіцієнти задовольняють умови Ліпшиця в рівномірній метриці $\|\alpha\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\alpha(\theta)|$.

Поряд із СДФР (6) розглянемо допоміжне рівняння без післядії:

$$dy_t = \varepsilon [\varphi_\omega a(t, y_t(0))dt + \psi_\omega b(t, y_t(0))dw_t]. \quad (7)$$

Теорема 3. Для різниці розв'язків систем (6) та (7) має місце нерівність:

$$\mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T/\varepsilon} |x_s - y_s|^2 \right\} \leq g(\varepsilon, T, K^*) \varepsilon^2 (\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2), \quad (8)$$

де $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon, T/\varepsilon, K^*) = c_T < \infty$.

Отримані результати дають змогу обґрунтувати процедуру усереднення для квазілінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із малим параметром за наявності зовнішніх випадкових збурень на великих проміжках часу порядку $O(1/\varepsilon)$.

Література

- [1] Yasinsky V. K., Doroshenko I. V. Asymptotics of solutions of diffusion stochastic differential-functional systems with a small parameter under the action of external random variables. SWorld Journal. 2022. 11, No 2. P. 62–71.
- [2] Gikhman I. I., Skorokhod A. V. Stochastic Differential Equations. New York, Heidelberg: Springer-Verlag. 1972. 534 p.
- [3] Ясинський В. К., Царьков Є. Ф. Стохастичні функціонально-диференціальні рівняння з урахуванням усього минулого. Чернівці: Золоті литаври. 2006. 328 с.

Асимптотична поведінка розв'язків циклічних систем зі швидко змінними нелінійностями

В'ячеслав ЄВТУХОВ, Олександр МАКСИМОВ

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

evtukhov@onu.edu.ua, 2162237@gmail.com

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$y'_i = \alpha_i p_i(t) \varphi_{i+1}(y_{i+1}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де для всіх функцій і параметрів з індексом $n + 1$ будемо вважати їх взаємно однозначно відповідними величинам з індексом 1.

У системі (1) $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ ($i = \overline{1, n}$), $p_i : [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty)$ ($i = \overline{1, n}$) — неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \rightarrow (0, +\infty)$ ($i = \overline{1, n}$), де $\Delta(Y_i^0)$ — деякий односторонній окіл точки Y_i^0 , $|Y_i^0| \leq +\infty$.

Функція φ_1 є двічі неперервно диференційовною і задовольняє умови

$$\begin{aligned} \varphi'_1(z) &\neq 0 \quad \text{при } z \in \Delta(Y_1^0), \\ \lim_{\substack{z \rightarrow Y_1^0 \\ z \in \Delta(Y_1^0)}} \varphi_1(z) &= \Phi_1^0, \quad \Phi_1^0 \in \{0, +\infty\}, \\ \lim_{\substack{z \rightarrow Y_1^0 \\ z \in \Delta(Y_1^0)}} \frac{\varphi''_1(z) \varphi_1(z)}{[\varphi'_1(z)]^2} &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Решта функцій $\varphi_i(z)$ ($i = 2, \dots, n$) є неперервними і правильно змінними при $z \rightarrow Y_i^0$ функціями порядків σ_i ($i = 2, \dots, n$).

У частинному випадку, коли

$$\alpha_i p_i(t) \varphi_{i+1}(y_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

ця система еквівалентна двочленному диференціальному рівнянню n -го порядку зі швидко змінною нелінійністю φ_1 .

Такі рівняння раніше досліджувались при $n = 2$ і при $n = 4$ у роботах [1, 2].

Розв'язок $(y_i)_{i=1}^n$ системи (1), визначений на проміжку $[t_0, \omega) \subset [a, \omega)$, називається $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ -розв'язком, якщо він задовольняє умови

$$\begin{aligned} y_i(t) &\in \Delta(Y_i^0) \quad \text{при } t \in [t_0, \omega), \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_i(t) = Y_i^0, \\ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_i(t) y'_{i+1}(t)}{y'_i(t) y_{i+1}(t)} &= \Lambda_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Метою роботи є встановлення умов існування і асимптотичних зображень таких розв'язків у випадку, коли $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Результати такого типу раніше було отримано в [3] для системи, в якій усі функції $\varphi_i(z)$ ($i = 1, \dots, n$) є правильно змінними при $z \rightarrow Y_i^0$ ($i = 1, \dots, n$).

Література

- [1] Чернікова А. Г. Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь з швидко змінними нелінійностями: дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Одеса, 2019.
- [2] Євтухов В. М., Голубєв С. В. Про асимптотику розв'язків одного класу істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь. Нелінійні коливання. 2024. 27, № 3. С. 322–345.
- [3] Evtukhov V. M., Vladova O. S. On the asymptotics of solutions of nonlinear cyclic systems of ordinary differential equations in special cases. Mem. Differential Equations Math. Phys. 2011. 54. P. 1–25.

Стійкість щодо граничних і зовнішніх збурень для атракторів параболічних багатокомпонентних систем

Тетяна ЖУК, Анна КРАСНЄЄВА, Андрій ПАНЬКОВ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

zhuktetiana6@gmail.com, krasnyeyeva@gmail.com, andrii.pankov@imath.kiev.ua

Фундаментальним аспектом якісного аналізу дисипативних автономних систем у математичній фізиці є вивчення глобальних атракторів: компактних інваріантних підмножин нескінченновимірних фазових просторів, які рівномірно притягують траєкторії системи відносно обмежених множин початкових даних [1]. Для систем реакції-дифузії, включаючи систему FitzHugh–Nagumo, що розглядається в роботі, існування та властивості розв'язків та глобальних атракторів були досліджені в [1, 2, 3]. Коли в системі присутні неавтономні збурення, важливою є задача про оцінку відхилення її траєкторій від атрактора незбуреної системи. У випадку глобально асимптотично стійкого положення рівноваги такі оцінки забезпечуються теорією стійкості від входу до стану (ISS) [4]. Для систем з нетривіальним глобальним атрактором нещодавно були отримані оцінки типу ISS для неавтономних збурень правої частини в [5]. Збурення граничних умов були розглянуті для скалярних напівлінійних параболічних рівнянь у [6]. У цій роботі ми застосовуємо метод, розроблений у [6], до системи рівнянь FitzHugh–Nagumo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + h(u(t, x)) - v(t, x) + D_1(t, x), \quad (t, x) \in Q, \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} + \delta_1 u(t, x) - \delta_2 v(t, x) + D_2(t, x), \quad (t, x) \in Q, \\ u|_{x=0} = d_1(t), \quad u|_{x=l} = d_2(t), \\ v|_{x=0} = \bar{d}_1(t), \quad v|_{x=l} = \bar{d}_2(t), \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x). \end{array} \right. \quad (1)$$

де $Q = (0, +\infty) \times (0, l)$, $h(s) = -s(s - b_1)(s - b_2)$, $a_1, a_2, b_1, b_2, \delta_1, \delta_2$ — додатні константи, $d_i, \bar{d}_i \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $D_i \in L^\infty(Q)$, $i = \overline{1, 2}$, визначають збурення, $\{u_0, v_0\} \in H = (L^2(0, l))^2$.

Відомо [1], що за відсутності збурень ($d_i \equiv \bar{d}_i \equiv 0$, $D_i \equiv 0$) слабкі розв'язки (1) породжують в фазовому просторі H напівгрупу $\{S(t) : H \rightarrow H\}_{t \geq 0}$, яка має нетривіальний компактний глобальний атрактор Θ , тобто

$$S(t) \Theta = \Theta \quad \forall t \geq 0,$$

і для будь-якої обмеженої $B \subset H$

$$\|S(t)B\|_\Theta := \text{dist}(S(t)B, \Theta) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

де

$$\text{dist}(A_1, A_2) = \sup_{\xi_1 \in A_1} \inf_{\xi_2 \in A_2} \|\xi_1 - \xi_2\|_H,$$

$\|\cdot\|_H$ — норма у просторі H , $B_r(A) = \{\xi \mid \text{dist}(\xi, A) < r\}$. Позначимо $\varphi_0 = \{u_0, v_0\} \in H$, $d = \{d_1, d_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2\} \in (L^\infty(\mathbb{R}_+))^4$, $\{D_1, D_2\} \in (L^\infty(Q))^2$. Загальну функцію збурень будемо позначати

$$D := \{d, D_1, D_2\}$$

Покладемо

$$S_D(t, \varphi_0) = \varphi(t), \quad \text{де } \varphi = \{u, v\} \text{ — розв'язок (1)} \quad (2)$$

В роботі було показано, що задача (1) є глобально розв'язною в H для абсолютно неперервних граничних збурень d та обмежених зовнішніх збурень D_1, D_2 , тобто відображення (2) для такого класу збурень означене коректно.

Основним результатом роботи є доведення робастної оцінки типу ISS для розв'язків (1) відносно атрактора Θ в термінах абсолютної величини збурень.

Теорема. Для зазначеного класу збурень існують $r > 0$ та $R_0 > 0$ такі, що для всіх $R \geq R_0$ існують функції $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}$ такі, що

$$\forall \varphi_0 \in B_r(\Theta), \quad \|\varphi_0\|_\infty \leq R, \quad \forall D, \quad \|D\|_\infty \leq r$$

виконується оцінка:

$$\forall t \geq 0 \quad \|S_D(t, \varphi_0)\|_\Theta \leq \beta(\|\varphi_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|D\|_\infty). \quad (3)$$

Тут $\mathcal{K}$, $\mathcal{KL}$ — стандартні класи функцій порівняння [7],

$$\|D\|_\infty = \max\{\|d_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}, \|\bar{d}_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}, \|D_i\|_{L^\infty(Q)}\}.$$

Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект 2023.03/0074 «Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою»

Література

- [1] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer. 1997. 648 p.
- [2] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer. 1994. 632 p.
- [3] Kapustyan O., Kasyanov P., Valero J. Regular solutions and global attractors for reaction–diffusion systems without uniqueness. Communications on Pure and Applied Analysis. 2014. 13(5). P. 1891–1906.

- [4] Sontag E. Input-to-state stability: basic concepts and results. *Nonlinear and Optimal Control Theory*. 2008, P. 163–220.
- [5] Schmid J., Dashkovskiy S., Kapustyan O. A local input-to-state stability result with attractors of nonlinear reaction–diffusion systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*. 2020. 2. P. 309–326.
- [6] Kapustyan O., Krasnieieva A. Stability of global attractor for the reaction–diffusion equation with respect to disturbances at the boundary of the domain. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024. 281(2). P. 111–120.
- [7] Khalil H. *Nonlinear Systems*. New York: Prentice Hall. 2002. 750 p.

Критерій керованості лінійних інтегральних рівнянь з невинродженим ядром у гільбертових просторах

Валерій ЖУРАВЛІОВ

Поліський національний університет, Житомир, Україна

`vfz2008@ukr.net`

Інтегральні рівняння Фредгольма з невинродженим ядром виникають у задачах математичної фізики, теорії керування, екологічного та економічного моделювання та інших. У багатьох прикладних моделях права частина рівняння не є довільною: вона може містити зовнішній вплив або керування, за допомогою якого потрібно забезпечити розв'язність задачі. Тому актуальною є задача побудови критерію керованості такого рівняння та явного опису всіх керувань, за яких розв'язок існує.

Нехай $\mathbf{H}$ — дійсний гільбертовий простір, $\mathcal{I} = [a, b]$, а $z(t), f(t), u(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма з керуванням

$$(Lz)(t) := z(t) - \int_a^b K(t, s)z(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t, s)u(s)ds, \quad (1)$$

де $K(t, s)$ та $K_1(t, s)$ — невинроджені ядра, сумовні з квадратом на $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^\infty$ — ортонормований базис простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$, а

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots).$$

Тоді для функцій $z(t)$, $f(t)$, $u(t)$ та ядер $K(t, s)$ та $K_1(t, s)$ утворимо їх коефіцієнти Фур'є

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \int_a^b \Phi^*(t)z(t)dt, \quad \bar{f} = \int_a^b \Phi^*(t)f(t)dt, \quad \bar{u} = \int_a^b \Phi^*(t)u(t)dt, \\ K &= \int_a^b \int_a^b \Phi^*(s)K(t, s)\Phi(t)dsdt, \quad K_1 = \int_a^b \int_a^b \Phi^*(s)K_1(t, s)\Phi(t)dsdt. \end{aligned}$$

Нехай $D = I - K$ — нормально розв'язний оператор, а D^+ , $P_{N(D)}$, $P_{N(D^*)}$ — відповідно псевдообернений оператор та ортопроектори на нуль-простори $N(D)$ і $N(D^*)$.

Для рівняння (1) без керування умова розв'язності має вигляд [1, 2]

$$P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = 0. \quad (2)$$

Якщо умова (2) не виконується, то рівняння (1) без керування ($u(s) = 0$) не має розв'язків і керування має компенсувати саме дефектну компоненту правої частини, що належить простору $N(D^*)$.

Після підстановки правої частини рівняння (1) в умову (2) одержуємо рівняння відносно керування. Позначивши

$$V(s) = P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(\tau)K_1(\tau, s)d\tau, \quad B = \int_a^b V(s)\Phi(s)ds,$$

приходимо до операторного рівняння

$$B\bar{u} = -P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds. \quad (3)$$

Нехай оператор B також нормально розв'язний. Тоді рівняння (3) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли

$$P_{N(B^*)}P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = 0. \quad (4)$$

Умова (4) є критерієм керованості інтегрального рівняння (1). Вона означає, що дефектна компонента правої частини має належати області значень оператора керування B .

При виконанні умови (4) множина всіх керувань, які забезпечують розв'язність рівняння (1), має вигляд

$$u(s) = \Phi(s)P_{N(B)}\hat{u} - \Phi(s)B^+P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds, \quad (5)$$

де $\hat{u} \in \mathbf{H}$ — довільний елемент, а B^+ — псевдообернений оператор до B . Відповідна множина розв'язків задається формулою

$$\begin{aligned} z(t) = & \Phi(t) \begin{bmatrix} P_{N(D)} & D^+K_1P_{N(B)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \end{pmatrix} \\ & + \Phi(t)D^+ \left[I - K_1B^+P_{N(D^*)} \right] \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\hat{z} \in \mathbf{H}$ — довільний елемент. Формули (4), (5), (6) дають не лише критерій існування керування, а й аналітичний опис усіх допустимих керувань та всіх розв'язків.

У ортонормованому базисі $\varphi_n(t) = \sin \frac{\pi n t}{2}$, $n = 1, 2, \dots$ простору $\mathbf{L}_2([0, 2], \mathbf{l}_2)$ розглянуто приклад

$$z(t) - \int_0^2 K(t, s)z(s)ds = f(t) + \int_0^2 K_1(t, s)u(s)ds, \quad t \in [0, 2],$$

де

$$\begin{aligned} K(t, s) = & \Phi_0(t)M_0\Phi_0^*(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t)M_k\Phi_k^*(s), \quad K_1(t, s) = \Phi_0(t)N_0\Phi_0^*(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t)N_k\Phi_k^*(s), \\ M_0 = & I_3, \quad M_k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \frac{1}{k+2}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_k = \begin{pmatrix} \beta_k & 0 & 0 \\ 0 & \beta_k & \beta_k \\ 0 & \beta_k & \beta_k \end{pmatrix}, \\ \alpha_k = & \frac{1}{k+2}, \quad \beta_k = \frac{1}{k+2}, \quad k \geq 1, \\ \Phi_k(t) = & \begin{bmatrix} \varphi_{3k+1}(t) & \varphi_{3k+2}(t) & \varphi_{3k+3}(t) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

У цьому прикладі оператор $D = I - K$ має дефектність, зосереджену в першому тривимірному блоці, а умова керованості зводиться до одного лінійного співвідношення між першими трьома коефіцієнтами Фур'є правої частини:

$$\int_0^2 f(t)\varphi_1(t)dt + \int_0^2 f(t)\varphi_2(t)dt - \int_0^2 f(t)\varphi_3(t)dt = 0. \quad (7)$$

При виконанні (7) множина всіх керувань і множина всіх розв'язків явно визначаються формулами (5), (6).

Отже, отриманий критерій дозволяє класифікувати праві частини рівняння на керовані та некеровані, а також відокремити випадки, коли керування не потрібне, коли воно існує, коли воно не єдине і коли заданий оператор керування не може усунути перешкоду розв'язності. Практичне значення результату полягає в тому, що він дає конструктивний спосіб перевірки керованості та побудови керування для лінійних інтегральних рівнянь з невідродженим ядром у гільбертових просторах.

Література

- [1] Журавльов В. П., Журавльов А. В., Слюсаренко І. П. Критерій розв'язності лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь з невідродженим ядром у гільбертових просторах. Нелінійні коливання. 2025. Т. 28, № 1. С. 79–96.
- [2] Журавльов В. П. *Нормально розв'язні крайові задачі та задачі з керуванням*. Житомир : ТОВ “Бук-друк”, 2025. 546 с.

Сингулярно збурена математична модель MEMS-діафрагми з ротаційно податливим краєм

Андрій ЗАВОРОТИНСЬКИЙ, Олександр МУРАЧ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

zavorotynskiy@knu.ua, murach@imath.kiev.ua

Тонкі пружні діафрагми є чутливими елементами багатьох мікроелектромеханічних систем, зокрема ємнісних MEMS-мікрофонів. Їхня механічна поведінка визначається спільною дією згинної жорсткості та натягу в площині діафрагми. У лінійному наближенні статична рівновага попередньо натягнутої пластини описується рівнянням

$$D\Delta_X^2 w - N\Delta_X w = P,$$

де $w = w(X)$ — поперечний прогин, X — розмірні координати в площині діафрагми, P — задане поперечне навантаження, $D = Eh^3/[12(1 - \nu_p^2)]$ — коефіцієнт згинної жорсткості, $N = \sigma_0 h$ — коефіцієнт натягу, E — модуль Юнга, ν_p — коефіцієнт Пуассона, h — товщина плівки, а $\sigma_0 > 0$ — залишкове розтягувальне напруження [1, с. 221, 235–236].

Нехай L — характерний лінійний розмір діафрагми, $W > 0$ — характерний масштаб прогину. Після введення безрозмірних величин $x = X/L$, $u(x) = w(X)/W$ та $f(x) = L^2 P(X)/(NW)$ рівняння набуває вигляду

$$(\varepsilon^2 \Delta^2 - \Delta)u = f, \quad \varepsilon^2 = \frac{D}{NL^2} = \left(\frac{h}{L}\right)^2 \frac{E}{12(1 - \nu_p^2)\sigma_0}.$$

При $\varepsilon = 0$ порядок диференціального рівняння знижується з четвертого до другого, що відповідає граничному мембранному режиму, коли внесок згинної жорсткості стає малим порівняно з внеском натягу [1, с. 236, 258–259]. Для полікремнієвих плівок характерні значення $E \approx 155\text{--}165$ ГПа та $\nu_p \approx 0.22$ [2, с. 37, 44], тоді як залишкове напруження істотно залежить від технології формування та подальшої термообробки плівки [3, с. 1, 28, 38–39]. Наприклад, при $E = 160$ ГПа, $\nu_p = 0.22$, $\sigma_0 = 50$ МПа, $h = 1\text{ }\mu\text{m}$ та $L = 0.5$ мм маємо $\varepsilon \approx 0.0335 \ll 1$.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — безрозмірна обмежена область діафрагми з межею $\Gamma \in C^\infty$, ν — зовнішня нормаль до Γ , а Δ_τ — оператор Лапласа–Бельтрамі на Γ . Для опису ротаційно податливого закріплення вводиться додаткова невідома функція ϱ на межі Γ . Тому виникає така крайова задача

$$\begin{aligned} (\varepsilon^2 \Delta^2 - \Delta)u &= f, & x \in \Omega, \\ u &= g_1, & x \in \Gamma, \\ \partial_\nu u + \varrho &= g_2, & x \in \Gamma, \\ (\partial_\nu^2 + \varepsilon \partial_\nu^3)u + \varepsilon(\kappa_0 \varrho + \kappa_b(-\Delta_\tau)\varrho) &= g_3, & x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут безрозмірні параметри $\kappa_0 > 0$ та $\kappa_b > 0$ характеризують відповідно локальну ротаційну жорсткість краю та жорсткість, пов'язану з неоднорідністю ротації вздовж контуру; остання враховується членом $\kappa_b(-\Delta_\tau)\varrho$. Множник ε в останній крайовій умові відповідає сингулярному масштабуванню крайової реакції. При $g_2 = 0$ з другої крайової умови випливає рівність $\varrho = -\partial_\nu u$; отже, з точністю до знака, ϱ — крайова ротація діафрагми. Третя крайова умова описує ротаційну реакцію податливого краю.

Задача (1) належить до класу лінійних крайових задач з малим параметром і додатковими невідомими функціями на межі [4]. Такі задачі мають вигляд

$$\begin{aligned} A(x, D_x; \varepsilon)u &= f, \quad x \in \Omega, \\ B_j(x, D_x; \varepsilon)u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}(x, D_\tau; \varepsilon)\varrho_k &= g_j, \quad x \in \Gamma, \quad j = 1, \dots, m + \varkappa. \end{aligned} \quad (2)$$

де диференціальні оператори A і B_j та дотичні диференціальні оператори $C_{j,k}$ поліноміально залежать від ε . При $\varepsilon > 0$ оператор $A(x, D_x; \varepsilon)$ має порядок $2m$, а при $\varepsilon = 0$ — порядок 2μ , де $\mu < m$. Зниження порядку еліптичного оператора при $\varepsilon = 0$ є характерною ознакою крайових задач з малим параметром, а поєднання такої структури з додатковими невідомими функціями на межі розглядалося в [5]. Задача (1) задовольняє модифіковані умови доповнюваності типу Шапіро–Лопатинського, тобто є еліптичною з малим параметром у сенсі [4].

Для таких задач побудовано формальний асимптотичний розв'язок. Запропонована в [5] методика дослідження еліптичних крайових задач з малим параметром дає змогу одержувати апріорні оцінки у вагових просторах Соболева та оцінки нев'язки наближених розв'язків задачі (1).

Література

- [1] Senturia S. D. *Microsystem Design*. Boston: Kluwer Academic Publishers. 2001. 672 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/b117574>.
- [2] Cho S. W., Chasiotis I. Elastic properties and representative volume element of polycrystalline silicon for MEMS. *Experimental Mechanics*. 2007. 47, No. 1. P. 37–49. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11340-006-0405-7>.
- [3] Huff M. Review Paper: Residual Stresses in Deposited Thin-Film Material Layers for Micro- and Nano-Systems Manufacturing. *Micromachines*. 2022. 13, No. 12. Article 2084. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi13122084>.
- [4] Заворотинський А., Мурач О. Про новий клас еліптичних крайових задач з малим параметром. Міжнародна конференція, присвячена 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка (25–27 вересня 2025 р.): тези доповідей. Чернівці. 2025. С. 46.

- [5] Zavorotinskii A. V. On elliptic boundary-value problems with small parameter and additional functions on the boundary of a domain. *Ukrainian Math. J.* 2015. 66, No. 9. P. 1423–1430. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-015-1021-4>.

Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків з нелінійностями близькими до правильно змінних

Володимир ЗАХАРЕНКО

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, Україна

vladimir.s.zakharenko@gmail.com

Розглядається рівняння:

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) f(y, y', \dots, y^{(n-1)}) \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i(y^{(i)}), \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ - неперервна функція, $a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$, $i = \overline{0, n-1}$ - неперервні та правильно змінні функції порядку σ_i при $y^{(i)} \rightarrow Y_i$, $i = 0, \dots, n-1$, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$, причому $\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i \neq 1$, Δ_{Y_i} має вид або $[y_i^0, Y_i[$, або $]Y_i, y_i^0]$, $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow]0, +\infty[$ - неперервно диференційовна функція, причому для всіх $j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $j \neq k$, справедливо:

$$\lim_{\substack{v_k \rightarrow Y_k \\ v_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k}(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})}{f(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})} = 0 \text{ рівномірно по } v_j \in \Delta_{Y_j}. \quad (2)$$

З умови (2) випливає, що функція $f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ є близькою до правильно змінної функції [1]. Як приклади таких функцій можна розглядати $|y_0|^{\gamma_0} \dots |y_n|^{\gamma_n} \times \exp(\ln^\mu |y_0 y_1 \dots y_n|)$, $|y_0|^{\gamma_0} |y_1|^{\gamma_1} \dots |y_n|^{\gamma_n} \ln^\mu |y_0 y_1 \dots y_n| \ln |y_0 y_1 \dots y_n|$ тощо. Таким чином, клас диференціальних рівнянь (1) охоплює клас істотно нелінійних рівнянь високого порядку. Частинні випадки таких рівнянь використовуються для дослідження диференціальних рівнянь високого порядку, які застосовуються для моделювання складних фізичних процесів.

Означення. Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \lambda_0)$ -розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє умови:

$$y^{(n)}(t) \neq 0 \text{ при } t \in [t_0, \omega[; \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = Y_k \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

У невідроджених випадках при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \dots, n-2, 1\}$ було встановлено необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язків. Крім того, з використанням [2] були отримані асимптотичні зображення таких розв'язків та їхніх похідних до порядку $n-1$ включно при $t \uparrow \omega$, а також розв'язано питання щодо кількості розв'язків з одержаними асимптотичними зображеннями.

Попередньо позначимо:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases} \quad I(t) = \int_{A_\omega}^t p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{1-\sigma} d\tau,$$

$$A_\omega = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{1-\sigma} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{1-\sigma} d\tau < +\infty, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ -1 & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$\nu_i = \text{sign } Y_i, \quad a_{0i} = (n-i)\lambda_0 - (n-i-1), \quad C = \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{(\lambda_0 - 1)^{n-i-1}}{\prod_{j=i+1}^{n-1} a_{0j}} \right|^{\sigma_i}, \quad (i = \overline{0, n-1}).$$

Теорема 1. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\}$ і $1 - \sigma \neq 0$. Тоді для існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язків диференціального рівняння (1) необхідно, а якщо алгебраїчне рівняння відносно μ

$$\frac{\beta}{\lambda_0 - 1} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1} \prod_{k=i}^{n-1} \beta \frac{a_{0k}}{\lambda_0 - 1} \prod_{k=1}^{i-1} \left(\beta \frac{a_{0k}}{\lambda_0 - 1} + \mu \right) = \left(\mu + \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\beta \frac{a_{0k}}{\lambda_0 - 1} + \mu \right) \quad (3)$$

немає коренів з нульовою дійсною частиною, то й достатньо, щоб виконувалися умови

$$\nu_{j-1}\nu_j < 0 \quad \text{якщо } Y_{j-1} = 0, \quad \nu_{j-1}\nu_j > 0 \quad \text{якщо } Y_{j-1} = \pm\infty, \quad (4)$$

$$\alpha_0\nu_{n-1} < 0 \quad \text{якщо } Y_{n-1} = 0, \quad \alpha_0\nu_{n-1} > 0 \quad \text{якщо } Y_{n-1} = \pm\infty, \quad (5)$$

$$\nu_{j-1}\sigma_j a_{0j}(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad \alpha_0\nu_{n-1}(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \quad (6)$$

$$\alpha_0\nu_{n-1}^{\sigma-1} I(t) > 0 \quad \text{для } t \in [a, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} = \frac{1 - \sigma}{\lambda_0 - 1}. \quad (7)$$

Більш того, для будь-якого такого розв'язку справедливі наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$:

$$y^{(i)}(t) = \frac{[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-i-1}}{\prod_{j=i+1}^{n-1} a_{0j}} y^{(n-1)}(t) [1 + o(1)], \quad (i = \overline{0, n-1}), \quad (8)$$

де $y^{(n-1)}(t)$ визначена асимптотичним зображенням

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{1-\sigma}}{f(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \prod_{i=0}^{n-1} \Theta_i(y^{(i)}(t))} = \nu_{n-1} \alpha_0 C (1 - \sigma) I(t) [1 + o(1)],$$

у якому $\Theta_i(y^{(i)}(t))$ - повільно змінна складова функції φ_i ($i = 0, \dots, n-1$).

Причому існує m -параметрична сім'я розв'язків з даними зображеннями у випадку, коли серед коренів алгебраїчного рівняння (3) існує m коренів (з урахуванням кратних коренів) таких, що їхні дійсні частини мають протилежний від $\frac{\beta}{\lambda_0 - 1}$ знак.

Література

- [1] Seneta E. Regularly Varying Functions. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag. 1976. 508. 164 p.

- [2] Evtukhov V. M., Samoilenko A. M. Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities. *Differential Equations*. 2011. 47, No. 5. P. 627–649. DOI: [\[https://doi.org/10.1134/S001226611105003X\]](https://doi.org/10.1134/S001226611105003X)(<https://doi.org/10.1134/S001226611105003X>).

Самовідтворювальні степені кристалографічних груп

Давид ЗАШКОЛЬНИЙ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

davendiy@knu.ua

Кристалографічними групами називаються дискретні кокомпактні підгрупи групи ізометрій евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Ми досліджуємо кристалографічні групи з точки зору самоподібної геометрії. Кожна скінченно породжена віртуально абелева група має точну самоподібну дію на просторі слів над певним алфавітом, але тільки кристалографічні групи в цьому класі допускають самовідтворювальну дію. Ми розглядаємо питання: які степені (тобто розміри алфавіту) можуть виникати для самовідтворювальних дій заданої кристалографічної групи? Для цього ми використовуємо інструментарій, розвинений Некрашевичем у монографії [1], а саме – віртуальні ендоморфізми.

Віртуальним ендоморфізмом групи G називається гомоморфізм $\phi : H \rightarrow G$, де H – підгрупа скінченного індексу в G . Серцевиною віртуального ендоморфізма ϕ називається максимальна ϕ -інваріантна нормальна підгрупа G . Тоді натуральне число $d \geq 2$ є самовідтворювальним степенем групи G , якщо існує підгрупа $H \leq G$ індексу $d = [G : H]$ і сюр'єктивний гомоморфізм $\phi : H \rightarrow G$ з тривіальною серцевиною. Ми визначаємо і розглядаємо паралельно дві множини: $SCD(G)$ як множину степенів самонакриття (тобто індексами можливих ізоморфних підгруп), і $SRD(G)$ як множину самовідтворювальних степенів групи G відповідно.

Кожен сюр'єктивний віртуальний ендоморфізм, згідно теорем Бієбербаха, задається афінним спряженням на елемент (A, t) . Для довільної кристалографічної групи G розмірності n виконується $SCD(G) = \{|\det(A)| : A \in \mathcal{Y}, \det(A) \neq 0\}$, та $SRD(G) = \{|\det(A)| : A \in \mathcal{Y}, A^{-1} \text{ проста}\}$. Тут $\mathcal{Y}$ – це множина матриць A , що належать нормалізатору точкової групи P групи G , а матриця A^{-1} зветься простою, якщо серед її власних чисел нема алгебраїчно цілих.

Ми показуємо, що опис SCD і SRD є алгоритмічно розв'язним для розмірностей $n = 2, 3$ і знаходимо явний вигляд цих множин для 17 планарних груп. Для розмірності $n = 3$ явний вигляд множин $\mathcal{Y}$ дозволяє спростити задачу і звести її до розмірності $n = 2$. Зокрема, довільна матриця $A \in \mathcal{Y}$ є або блочно-трикутною, або характеристичний многочлен A^{-1} має вигляд $x^3 - \frac{1}{\det(A)}$, який не матиме алгебраїчно цілих коренів для $|\det(A)| \geq 1$. В першому випадку значення SRD залежать від трьох многочленів p, q і g (головні мінори і слід загальної матриці); в другому лише від $f(x_1, \dots, x_s) = \det(A)$. Ми порахували всі визначальні многочлени для всіх 230 просторових груп. Весь Python код розміщений на платформі Github [2].

Література

- [1] Nekrashevych V. Self-similar Groups. Mathematical Surveys and Monographs. 117. Providence, RI: American Mathematical Society. 2005. 310 p.
- [2] Zashkolnyi D. Source Code for Computations of Self-Covering Degrees of Crystallographic Groups. 2026. <https://github.com/davendiy/cryst-automata/>

Особливості асимптотичного інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь 3-го порядку з точкою звороту для конкретних матричних коефіцієнтів

Ірина ЗЕЛЕНСЬКА, Ірина ЛЕБЕДЄВА

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

korchuk@gmail.com, lebedyevaiv@knu.ua

Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту є актуальною проблемою сучасної якісної теорії диференціальних рівнянь. Особливості цих розв'язків суттєво залежать від аналітичних властивостей і числових значень коефіцієнтів матриці системи при малому параметрі. Глибоке розуміння цих механізмів має фундаментальне значення для розвитку як математичного апарату асимптотичного інтегрування, так і для моделювання складних процесів у прикладних науках.

Розглянемо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь у вигляді

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = 4x + 2, \quad (1)$$

де $A(x, \varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(4x+4) & 4x & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \in [-1, 0]$, $Y(x, \varepsilon) \equiv Y_k(x, \varepsilon) = \text{colomn}(y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon), y_3(x, \varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $H(x) = \text{colomn}(0, 0, h(x))$ - задана вектор-функція.

Тоді дана система відповідає сингулярно збуреному диференціальному рівнянню третього порядку вигляду:

$$\varepsilon y'''(x, \varepsilon) - 4x \cdot y'(x, \varepsilon) + (4x + 4) \cdot y(x, \varepsilon) = 4x + 2,$$

Дослідимо систему (1) за умов:

1) $\tilde{a}(x)$, $b(x) \in C^\infty[-1; 0]$,

2) $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) = -4$, $b(x) = 4x + 4$, $h(x) = 4x + 2$.

Функцію $\varphi(x)$ визначимо як розв'язок задачі

$$\varphi^2(x)\varphi'^4(x) - 8x\varphi(x)\varphi'^2(x) + 16x^2 = 0,$$

При такому визначенні функції $\varphi(x)$ розв'язок однорідної задачі (1) запишеться як

$$Z_{k0}(x) = \text{colomn} \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\beta_{i30}(x), -\sqrt[3]{16x}\beta_{i20}(x), 0, \beta_{i20}(x), \beta_{i30}(x) \right),$$

де $\beta_{0ik}(x), i = 1; 2, i = \overline{1; 3}$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x \in [-1; 0]$.

Третій формальний розв'язок

$$\equiv \text{colomn} \left(\omega_{01}^0 \cdot \exp \left\{ \int \frac{4x+4}{-4x} dx \right\}, \omega_{01}^0 \cdot \frac{4x+4}{-4x} \cdot \exp \left\{ \int \frac{4x+4}{-4x} dx \right\}, 0 \right),$$

Частинний розв'язок визначається через функції $g_{2(-2)}(x)$, $g_{3(-2)}(x)$ та $\omega_k(x)$ з рівнянь

$$g_{2(-2)}(x) = g_{2(-2)}^0 \cdot x^{-b2(x)}, \quad (2)$$

де $b2(x) = \frac{2+x}{-2x}$ та

$$g_{3(-2)}(x) = g_{3(-2)}^0 \cdot x^{-b3(x)}, \quad (3)$$

де $b3(x) = \frac{-x-1}{2x}$.

Асимптотика загального розв'язку системи при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4x}$ (1) запишеться у вигляді ряду

$$\begin{aligned} Y(x, \varepsilon) \cong \tilde{Y}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4x}, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[\sum_{r=0}^q \varepsilon^0 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}} \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}} \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \end{pmatrix} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}} \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1}) \right] U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4x}) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left[\sum_{r=0}^q \varepsilon^0 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4x})}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4x})} \right\} + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^0 \begin{pmatrix} \omega_{10}^0 \cdot x \\ \frac{4x+4}{4x} \omega_{10}^0 \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^1 \begin{pmatrix} \omega_{11}^0 \cdot x \\ \frac{4x+4}{4x} \omega_{11}^0 \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \omega_{12}^0 \cdot x \\ \frac{4x+4}{4x} \omega_{12}^0 \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} \omega_{13}^0 \cdot x \\ \frac{4x+4}{4x} \omega_{13}^0 \cdot x \\ \frac{(x+1)^2}{x^2} - \omega_{13}^0 \cdot x \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Література

- [1] Бобочко В. М., Перестюк М. О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. Київ: Наукова думка. 2002. 310 с.
- [2] Sobchuk V., Zelenska I., Bobochko V. Asymptotic Integration of System of Singularly Perturbed Differential Equations with Unstable Stable Turning Point. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*. 2026. 97. P. 159–168.

Класифікація високоенергетичних хаотичних та ергодичних траєкторій системи Генона–Гейліса з використанням нейронних мереж

Григорій ЗРАЖЕВСЬКИЙ, Віра ЗРАЖЕВСЬКА

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
Національний технічний університет України імені Ігоря Сікорського “Київський
політехнічний інститут”, Київ, Україна*

greg.zrazhevsky@knu.ua

Система Генона–Гейліса [1] є класичною моделлю для дослідження переходу від регулярної до хаотичної динаміки в гамільтонових системах. Спочатку запропонована для моделювання руху зірок у галактичному потенціалі, вона перетворилася на еталонний об’єкт нелінійної динаміки та теорії хаосу. Функція Лагранжа системи має вигляд

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2} - x^2y + \frac{y^3}{3}. \quad (1)$$

У координатному просторі існують чотири критичні точки: стійкий полюс (локальний мінімум потенціальної енергії) та три сідлові точки. У трикутній області з вершинами в сідлових точках потенціальна енергія строго монотонна, а на сторонах трикутника приймає сталі значення $1/6$.

Поведінка фазових траєкторій суттєво залежить від значення повної механічної енергії E . Для малих E траєкторії є регулярними (детермінованими), для середніх — демонструють перехідну поведінку, для великих — стають хаотичними. Це підтверджується як координатними траєкторіями, так і перерізами Пуанкаре: при малих енергіях спостерігаються зв’язні криві, при середніх з’являються розмиті області, при великих перерізи повністю розмиваються. Такий візуальний аналіз є певною мірою суб’єктивним, тому для об’єктивної класифікації необхідно використовувати кількісні характеристики.

Найпоширенішим критерієм хаотичності залишається найбільший показник Ляпунова (Largest Lyapunov Exponent, LLE). Його ідея полягає в оцінці експоненціального розбігання сусідніх траєкторій. Для гамільтонової системи сума показників Ляпунова дорівнює нулю, а самі показники утворюють пари з протилежними знаками, тому LLE слугує надійним індикатором хаотичності [2].

На основі 733 випадкових початкових точок, обраних з рівномірним розподілом у фазовому просторі (з умовою обмеженості рухів $E \leq 1/6$), побудовано залежність LLE від E . Спостерігається монотонна тенденція зростання LLE з енергією, проте при високих значеннях E існують як хаотичні, так і ергодичні траєкторії. За квантилями розподілу LLE виділено три класи: ергодичні K_1 ($\text{LLE} < \lambda_1$), слабо хаотичні K_2 ($\lambda_1 \leq \text{LLE} < \lambda_2$) та хаотичні K_3 ($\text{LLE} \geq \lambda_2$), де $\lambda_1 = 0,004$, $\lambda_2 = 0,119$. Гістограма значень LLE показує, що переважна частина випадково обраних траєкторій є ергодичними.

Аналіз просторового розташування початкових точок на гіперплощині $p_x = 0$ (та на інших гіперплощинах $p_x = \text{const}$, $p_y = \text{const}$) свідчить, що області класів мають регулярну та достатньо симетричну структуру. Ергодичні траєкторії спостерігаються як при малих, так і при граничних значеннях енергії, тоді як хаотичні — переважно при високих E . Це вказує на просторову неперервність залежності LLE від початкових умов і підтверджує можливість класифікації за ознаками початкової точки.

Для об'єктивного підтвердження можливості розділення проведено спектральну кластеризацію SCNNA (Spectral Clustering with Nearest Neighbors Affinity) у 6-вимірному просторі $(x_0, y_0, p_{x0}, p_{y0}, E, \text{LLE})$ [3]. Метод формує матрицю афінності на основі графа k -найближчих сусідів, обчислює лапласіан і застосовує k -means до власних векторів. Візуалізація за допомогою багатовимірного масштабування (MDS) показує чітке розділення на два основні кластери, що відповідають ергодичній та хаотичній поведінці, з невеликою перехідною зоною. Оскільки кластеризація використовує значення LLE, для практичного застосування необхідно перейти до задачі класифікації за незалежними від LLE ознаками.

Побудовано кілька моделей на основі нейронних мереж прямого зв'язку (FNN). Модель 1 приймає 5 ознак (початкові умови та E), містить два приховані шари (16 і 8 нейронів, активація ReLU) та вихідний шар з softmax. Навчання проводилося оптимізатором Adam з ранньою зупинкою. На тестовій вибірці отримано $\text{AUC} = 0,965$, $\text{precision}/\text{recall}/\text{F1}$ для класів 0 і 1 становлять відповідно 0,86/0,89/0,87 та 0,93/0,91/0,92. Модель 2, навчена після відсікання перехідної зони (за квантилями всередині кожного класу), покращує показники: $\text{AUC} = 0,982$, F1-міри 0,91 та 0,95. Однак застосування моделі до перехідної зони дає майже рівномірний розподіл ймовірностей, що вказує на принципову складність трикласової класифікації.

Найефективнішою виявилася дворівнева модель 3, побудована для часткової трикутної області на гіперплощині $p_x = 0$ з вершинами $(0, 0)$, $(0, \sqrt{1/3})$, $(\sqrt{1/6}, -\sqrt{1/12})$. У цій підобласті енергія близька до максимальної ($1/6$) і повільно змінюється, тому класифікацію доцільно проводити лише за координатами початкової точки (x_0, y_0) . Модель 3.1 (FNN з трьома прихованими шарами: 50, 30, 20 нейронів) розділяє класи K_1 та K_3 : $\text{AUC} = 0,97$, F1-міри 0,98 та 0,86. Модель 3.2 тієї ж архітектури розділяє K_2 та K_3 : $\text{AUC} = 0,68$. Послідовне застосування моделей дозволяє класифікувати траєкторію як ергодичну, перехідну чи хаотичну або відмовитися від класифікації в зоні невизначеності.

Таким чином, запропонована методологія дає змогу швидко визначати клас поведінки траєкторії системи Генона–Хейліса за початковими умовами без обчислення LLE. Підхід може бути поширений на інші практично важливі нелінійні динамічні системи [4].

Література

- [1] Hénon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. The Astronomical Journal. 1964. 69. P. 73–79.

- [2] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems. *Meccanica*. 1980. 15, No. 1. P. 9–30.
- [3] Wang Y., Jiang Y., Wu Y., Zhou Z.-H. Spectral Clustering on Multiple Manifolds. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2011. 22, No. 7. P. 1149–1161.
- [4] Zotos E. E. Basins of escape in the Hénon–Heiles Hamiltonian system. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2017. 98. P. 16–29.

Змішане оптимальне керування виродженим параболічним рівнянням

Ніна КАСІМОВА, Валентина ГОРБАЧ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

kasimova@knu.ua, valyshka10.01@knu.ua

Нехай $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — обмежена ліпшицева область, $T > 0$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$. Нехай $\rho > 0$ майже скрізь — фіксована вага Макенгаупта така, що $\rho \in A_{1+2/N}$, $\rho \in L^1(\Omega)$ та $\rho^{-N/2} \in L^1(\Omega)$. Для $f \in L^2(Q_T)$ і $y_0 \in L^2(\Omega)$ розглянемо задачу стану

$$\begin{cases} y_t - \operatorname{div}(\rho A \nabla y) + y = f + u & \text{у } Q_T, \\ y = 0 & \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0) = y_0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Тут $A = [a_1, \dots, a_N] \in L^\infty(\Omega; \mathbb{S}^N)$ — симетрична матриця коефіцієнтного керування, де $\mathbb{S}^N$ позначає простір симетричних матриць розміру $N \times N$, а $u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ — незалежне розподілене керування. Допустимі матриці задовольняють для деяких фіксованих $0 < \underline{a} \leq \bar{a}$ та $\gamma_j > 0$

$$\underline{a}|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq \bar{a}|\xi|^2, \quad \|\operatorname{div}(\rho a_j)\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

а множина допустимих розподілених керувань $\mathcal{U}_{\text{ad}} \subset L^2(Q_T)$ є непорожньою, опуклою, замкненою та обмеженою.

Для заданих $y_d \in L^2(Q_T)$, $A_d \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$, та сталих $\alpha_u > 0$, $\eta_A > 0$ мінімізуємо функціонал

$$J(A, u, y) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{\alpha_u}{2} \|u\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{\eta_A T}{2} \|A - A_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2)$$

на множині допустимих трійок (A, u, y) , для яких y є слабким розв'язком (1).

Теорема 1. *За наведених умов задача оптимального керування має принаймні одну оптимальну трійку (A^*, u^*, y^*) .*

Непорожність множини допустимих трійок встановлюється через розв'язність задачі стану методом Фаєдо–Гальоркіна. Для гальоркінських наближень одержуються рівномірні енергетичні оцінки станів та їх часових похідних; компактність дозволяє виділити збіжну підпоследовність і перейти до границі, отримавши слабкий розв'язок вихідної задачі.

Основною складністю при доведенні Теорема 1 є замкненість множини допустимих трійок, коли коефіцієнтні та розподілені керування збігаються лише у відповідних слабких топологіях. Для ідентифікації граничного потоку використовується модифікація вагової параболічної леми про компенсовану компактність, пристосована до випадку слабо змінної правої частини. Це дозволяє коректно перейти до границі в головній частині рівняння та

довести допустимість граничної трійки. Після цього існування оптимального розв'язку випливає з прямого методу варіаційного числення та слабкої нижньої напівнеперервності функціонала.

Отримані апріорні оцінки й апроксимаційна схема створюють також основу для чисельного експерименту у випадку $p = 2$. Він може бути використаний для дослідження поведінки оптимального стану, обох керувань та стабілізації оптимального значення функціонала при уточненні апроксимації.

Рівняння рівноваги Ламе для середовища з функціонально-градієнтного матеріалу

Тарас КЛІМЧУК

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

tarasklimchuk@knu.ua

Використання функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) у сучасній аерокосмічній галузі, машинобудуванні та триботехніці дає змогу суттєво зменшити концентрацію напружень на межах розділу різних матеріалів та підвищити зносостійкість контактуючих елементів. Аналіз механічних характеристик елементів конструкцій з ФГМ потребує розробки ефективних математичних моделей контактної взаємодії штампів та неоднорідних основ різних геометрій.

Наближені розв'язки задач гладкого контакту з відривом для пружної смуги, модуль зсуву якої змінюється з товщиною за експоненціальним законом (ФГМ), отримано в роботах El-Borgi S., Abdelmoula R. та Keer L. [1], Comez I. [2], Yan J. та Li X. [3], Adiyaman G., Birinci A., Oner E. та Yaylaci M. [4], Comez I., El-Borgi S., Kahya V. та Erdol R. [5]. У роботах Choi H. J. [6], Comez I. та Guler M. A. [7] отримано наближені розв'язки задач фрикційного контакту для плоского та параболічного штампів відповідно.

Метою даної задачі є 1) побудова математичної моделі гладкого контакту між пружною смугою з функціонально-градієнтного матеріалу, яка має жорстко закріплену нижню грань, та півнескінченним штампом із прямолінійною основою, 2) виведення рівнянь рівноваги Ламе для середовища з функціонально-градієнтного матеріалу, 3) аналітична побудова загального розв'язку рівнянь рівноваги Ламе.

У даній задачі розглядається плоска деформація пружної смуги товщиною h ($-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h$). Матеріал смуги є функціонально-градієнтним із експоненціальним законом зміни модуля зсуву по товщині:

$$G(y) = G_0 e^{\gamma y},$$

де $G_0 = G(0)$ — модуль зсуву на верхній грані смуги ($y = 0$), $G_h = G(h)$ — модуль зсуву на нижній грані смуги ($y = h$), а γ — параметр градієнтності матеріалу, що визначається співвідношенням

$$\gamma = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{G_h}{G_0} \right).$$

Коефіцієнт Пуассона ν вважається сталою величиною вздовж всієї товщини смуги.

У верхню грань смуги ($y = 0$) вдавлюється півнескінченний жорсткий штамп ($0 < x < \infty$) із горизонтальною основою під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження інтенсивності P , спричиняючи просідання смуги на величину δ . Контакт між штампом

та смугою вважається гладким (сили тертя відсутні). Нижня грань смуги ($y = h$) є жорстко закріпленою.

Сформулюємо крайові умови контактної задачі. На верхній грані смуги ($y = 0$):

$$\begin{cases} u_y(x, 0) = \delta, & \tau_{xy}(x, 0) = 0, & 0 < x < \infty, \\ \sigma_y(x, 0) = 0, & \tau_{xy}(x, 0) = 0, & -\infty < x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

На нижній грані смуги ($y = h$):

$$u_x(x, h) = 0, \quad u_y(x, h) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

тут $u_x(x, y), u_y(x, y)$ — компоненти вектора переміщень; $\sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ — нормальні та дотичні напруження відповідно.

Рівняння рівноваги Ламе в переміщеннях для середовища з функціонально-градієнтного матеріалу отримано у наступному вигляді:

$$\begin{cases} 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + (1 - 2\nu) \gamma \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] = 0, \\ (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + 2\gamma \left[\nu \frac{\partial u_x}{\partial x} + (1 - \nu) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Отже, сформульовано математичну постановку контактної задачі про взаємодію півнескінченного жорсткого штампа з пружною смугою з ФГМ при плоскій деформації. Виведено рівняння рівноваги Ламе в переміщеннях для середовища з експоненціально змінним за товщиною модулем зсуву $G(y) = G_0 e^{\gamma y}$.

За допомогою інтегрального перетворення Фур'є отримано загальний розв'язок рівнянь рівноваги Ламе. Отримані результати є теоретичною основою для побудови аналітичних і чисельних алгоритмів обчислення розподілу контактних напружень та дослідження впливу параметра градієнтності γ на концентрацію напружень поблизу кутової точки штампа ($x = 0$).

Література

- [1] El-Borgi S., Abdelmoula R., Keer L. A receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. 46, No. 3–4. P. 658–674.
- [2] Comez I. Contact problem of a functionally graded layer resting on a Winkler foundation. *Acta Mechanica*. 2013. 224, No. 11. P. 2833–2843.
- [3] Yan J., Li X. Double receding contact plane problem between a functionally graded layer and an elastic layer. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2015. 53. P. 143–150.

- [4] Adiyaman G., Birinci A., Oner E., Yaylaci M. A receding contact problem between a functionally graded layer and two homogeneous quarter planes. *Acta Mechanica*. 2016. 227, No. 6. P. 1753–1766.
- [5] Comez I., El-Borgi S., Kahya V., Erdol R. Receding contact problem for two-layer functionally graded media indented by a rigid punch. *Acta Mechanica*. 2016. 227, No. 9. P. 2493–2504.
- [6] Choi H. J. On the plane contact problem of a functionally graded elastic layer loaded by a frictional sliding flat punch. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2009. 23. P. 2703–2713.
- [7] Comez I., Guler M. A. The contact problem of a rigid punch sliding over a functionally graded bilayer. *Acta Mechanica*. 2017. 228, No. 6. P. 2237–2249.

Про розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для такого рівняння з початковою узагальненою функцією, яка є елементом простору типу W'

Руслана КОЛІСНИК, Ольга МАРТИНЮК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

r.kolisnyk@chnu.edu.ua, o.martynyuk@chnu.edu.ua

Досліджується рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \varphi\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1)$$

де φ – функція, яка задовольняє певні умови.

Дослідження рівняння (1) здійснюється у просторах типу W , у яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності використовуються не степеневі, а довільні опуклі функції. Виявляється, що якщо функція $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – мультиплікатор у певному просторі X типу W , то звуження оператора $\varphi\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ на простір, який є Фур'є-образом знайденого простору типу W збігається із псевдодиференціальним оператором у просторі $F[X]$, для якого функція φ є символом, тобто

$$\varphi\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Big|_{F[X]} = F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} [\varphi(\sigma)F_{x \rightarrow \sigma}]$$

(тут F , F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є). Отже, рівняння (1) можна розуміти як еволюційне псевдодиференціальне рівняння у просторах типу W .

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f, \quad (2)$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Умова (2) трактується у звичайному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція, тобто як граничне співвідношення

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k \lim_{t \rightarrow t_k} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

для довільної функції φ з основного простору (тут $\langle f, \cdot \rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію). Нелокальна за часом задача відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними.

Встановлюється розв'язність задачі (1), (2) з початковою функцією f в умові (2), яка є елементом простору узагальнених функцій типу W' (W' – простір, топологічно спряжений з простором W). Знайдено аналітичний вигляд розв'язку у вигляді згортки узагальненої функції f з фундаментальним розв'язком задачі (1), (2).

Про склеювання дифузійних процесів на прямій із заданими у рухомих точках нелокальними умовами спряження типу Феллера–Вентцеля

Богдан КОПИТКО, Роман ШЕВЧУК

Академія наук вищої школи України, Київ, Україна

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

bohdan.kopytko@gmail.com, roman.v.shevchuk@lpnu.ua

Доповідь присвячено проблемі побудови та дослідження властивостей двопараметричної напівгрупи операторів, якій відповідає неоднорідний марковський процес на прямій такий, що всередині інтервалів, розділених між собою точками, положення яких на прямій залежить від часової змінної, збігається із заданими там звичайними дифузійними процесами, а його поведінка в межових точках цих інтервалів визначається заданими умовами спряження типу Феллера–Вентцеля [1, 2, 3]. У розглядуваному випадку ці умови є нелокальними. Кожна з них містить лише члени, що відповідають частковому відбиттю, а також можливим стрибкам процесу з межі у внутрішні точки областей, для яких ця межа є спільною.

Центральним об'єктом дослідження є параболічна задача спряження, до якої редукується вихідна проблема. Особливість цієї задачі полягає в тому, що рівняння, які розглядаються, є оберненими рівняннями Колмогорова; області на площині, в яких задано ці рівняння, є криволінійними; функції часової змінної, які визначають межі цих областей, задовольняють лише умову Гельдера з показником, більшим за $\frac{1}{2}$; а умови спряження типу Феллера–Вентцеля містять інтегральні члени і є нелокальними.

Література

- [1] Портенко М.І. Процеси дифузії в середовищах з мембранами. К.: Інститут математики НАН України, 1999.
- [2] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. One-dimensional diffusion processes with moving membrane: partial reflection in combination with jump-like exit of process from membrane. Electron. J. Probab. 2020, **25** (41), 1–21. doi:10.1214/20-EJP443
- [3] Kopytko B.I., Osypchuk M.M., Shevchuk R.V. Diffusion in media with membranes and some nonlocal parabolic problems. Ukrainian Mathematical Journal 2024, **75** (11), 1641–1665. doi:10.1007/s11253-024-02285-z

Імітаційне моделювання SIR моделей методом клітинних автоматів

Ігор КОСОВИЧ, Василь КОСОВАН, Дмитро ШКІЛЬНЮК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

i.kosovych@chnu.edu.ua, v.kosovan@chnu.edu.ua, d.skilnjuk@chnu.edu.ua

Моделювання епідемії зазвичай виконується за допомогою компартментних моделей, які часто називають SIR моделями (Susceptible-Infected-Recovered), розпочалося з робіт А. Г. Маккендріка та В. О. Кермака [1, 2] та багаточисельними їх узагальненнями. В основі цих моделей є система диференціальних рівнянь, яка описує поведінку динаміки захворювання на макрорівні зберігаючи високий рівень абстрагування від реальності. При цьому не враховуються індивідуальні властивості об'єктів, оскільки процес поширення інфекції дискретний та неможливо передбачити наслідки системи обмежувальних заходів, які активно впроваджуються.

Інший підхід для моделювання процесів в епідеміології – це імітаційне моделювання з використанням мультиагентного методу. Він дозволяє, задавши початкові параметрами для кожного типу об'єктів і системою правил їхньої взаємодії, виявити динамічні закономірності розвитку інфекції і найбільш суттєві властивості агентів, що сприяють зміні темпів поширення. Перевагою цього підходу є те, що враховуються індивідуальні властивості кожного об'єкту складної системи, можливість експериментувати з параметрами моделі та отримати різні сценарії розвитку подій, розширюючи наші уявлення про те, що може відбутися в майбутньому [3, 4].

Для моделювання необхідно ініціалізувати параметри моделі [5]:

- загальна кількість агентів (N);
- відстань при якій є ймовірність заразитися (d);
- тривалість моделювання (t);
- інфіковані агенти на першій ітерації (n_inf);
- позиція агента (x, y);
- швидкість агента (v) та вектор руху (k);
- радіус зараження (r);
- інфікованість агента (inf);
- вакцинованість агента (vac);
- чи носить агент маску ($mask$);
- чи агент знаходиться на самоізоляції ($isol$).

Симуляція триває до моменту, поки всі інфіковані агенти не вилікуються або не помирають.

На рис. 1 показано п'ять різних симуляцій основної моделі для демонстрації її стійкості. Результати моделювання показують, що найкращий результат досягається за умови

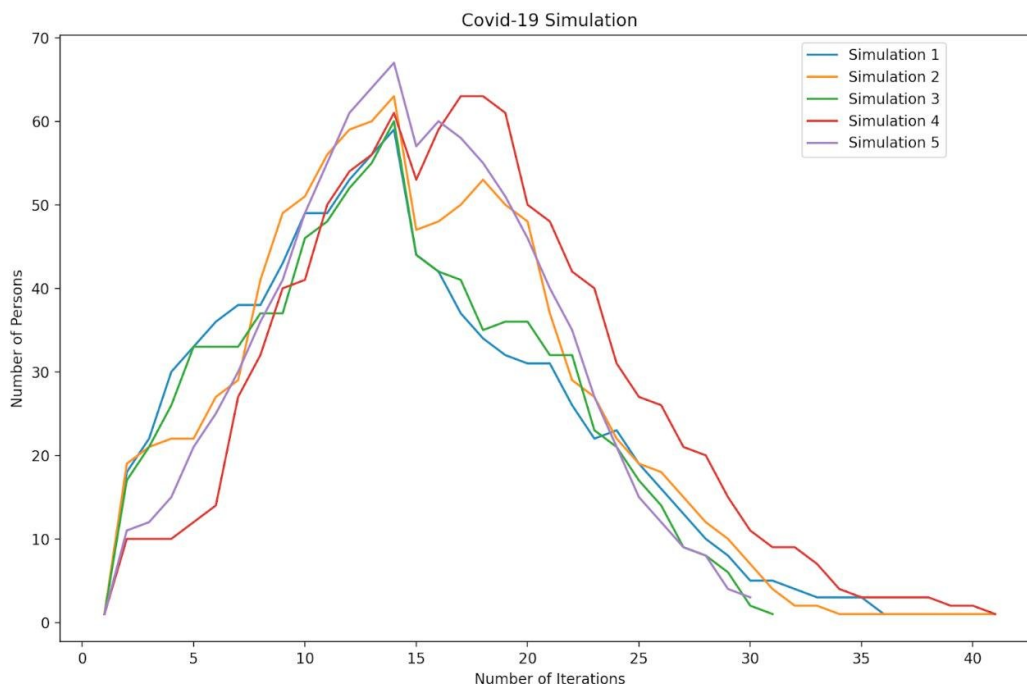


Рис. 1: Різні симуляції кількості інфікованих агентів основної моделі

застосування комбінації маскового режиму, вакцинації та самоізоляції. Це дозволяє розтягнути епідемічний процес у часі, уникнути критичного навантаження на медичну систему та забезпечити ефективне стримування пандемії.

Література

- [1] N. Bacaër. McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926–1927). *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Springer, London, 2011. 89-96.
- [2] J. Satsuma, R. Willox, A. Ramani, B. Grammaticos, A. Carstea. Extending the SIR epidemic model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2004. Vol. 336, No 3. 369-375.
- [3] Чумаченко Д.І., Чумаченко Т.О. Математичні моделі та методи прогнозування епідемічних процесів : монографія. Харків : ТОВ "Планета-Прінт", 2020. 180 с.
- [4] Currie C.M., Fowler J.W., Kotiadis K., Monks T., Onggo B.S., Robertson D.A., Tako A.A. How simulation modelling can help reduce the impact of COVID-19. *Journal of Simulation*. 2020. 14(2). 83–97.
- [5] Черевко І.М., Косович І.Т. Імітаційне моделювання SIR моделей методом клітинних автоматів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія "Математика і інформатика"*. Т. 45, № 2. Ужгород : Видавництво УжНУ "Товерла". 2024. 276-285.

Комбінування ансамблевих методів машинного навчання з аналізом текстових даних для прогнозування медичних станів

Кирило КРАВЦОВ, Галина МЕЛЬНИК, Василь МЕЛЬНИК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

kravtsov.kyryl@chnu.edu.ua, g.melnik@chnu.edu.ua, va.melnyk@chnu.edu.ua

Цифровізація сфери охорони здоров'я призводить до швидкого зростання обсягів як структурованих клінічних даних, так і неструктурованої інформації, що міститься в електронних медичних записах. Структуровані показники, зокрема вік, стать, частота серцевих скорочень, температура тіла, артеріальний тиск та рівень насичення крові киснем, забезпечують кількісну характеристику стану пацієнта. Водночас важлива діагностична інформація може міститися в текстових описах симптомів та клінічних нотатках. Ефективне поєднання цих двох типів інформації є актуальною задачею інтелектуального аналізу медичних даних [1, 4].

Метою роботи є дослідження мультимодального підходу до прогнозування тяжкості медичного стану шляхом поєднання структурованих клінічних показників із текстовими описами симптомів. Для цього розглянуто ансамблеві методи машинного навчання, сучасні методи обробки природної мови та декілька стратегій об'єднання отриманих ознак і прогнозів.

У дослідженні використано медичний набір даних, у якому кожному пацієнту відповідають числові та категоріальні характеристики, а також текстовий опис симптомів. Цільова змінна містить три класи тяжкості стану: *mild*, *moderate* та *severe*. На етапі попередньої обробки числові ознаки стандартизувалися за допомогою *StandardScaler*, а категоріальна ознака статі кодувалася методом *one-hot encoding*.

Для роботи зі структурованими даними було використано *XGBoost*, який дає змогу моделювати складні нелінійні залежності між фізіологічними показниками та класом стану пацієнта. Для підвищення ефективності моделі застосовано *Bayesian Hyperparameter Optimization*. Оптимізувалися, зокрема, параметри *max_depth*, *min_samples_split* та *n_estimators*. Найкращою конфігурацією в експерименті виявилася комбінація значень 10, 5 та 600 відповідно.

Текстові описи симптомів перетворювалися на векторні представлення за допомогою трансформерної моделі *Sentence-BERT all-MiniLM-L6-v2*. Кожен текст подавався у вигляді щільного вектора розмірності 384. На відміну від традиційного *TF-IDF*, семантичні *embedding*-представлення дають змогу враховувати близькість за змістом між клінічними описами навіть за відсутності однакових ключових слів. Додатково для ідентифікації медично значущих понять застосовувався *Named Entity Recognition* на основі *SciSpacy* [5].

Для об'єднання інформації з двох модальностей досліджено декілька підходів. У stacking-архітектурі незалежно навчалися XGBoost для структурованих даних та Logistic Regression для текстових embedding-векторів. Отримані вектори ймовірностей об'єднувалися та передавалися до метакласифікатора. Такий підхід дає змогу кожній моделі спеціалізуватися на власному типі інформації, а метакласифікатору – використовувати їхні взаємодоповнюючі прогностичні властивості.

Окремо досліджено fuzzy logic-based meta-learner, призначений для підвищення інтерпретованості прийняття рішень. У цьому випадку впевненість моделей представлялася лінгвістичними змінними, такими як “low”, “medium” та “high”, а кінцеве рішення формувалося за допомогою правил нечіткого виведення. Наприклад, висока впевненість числової та текстової моделей може відповідати правилу:

Приклад. IF numerical confidence is High AND textual confidence is High THEN severity is Severe.

Крім того, розроблено гібридну нейронну мережу з двома паралельними гілками. Перша гілка обробляє 384-вимірні текстові embedding-вектори, друга – структуровані клінічні ознаки. Після незалежного перетворення ознак їхні латентні представлення об'єднуються та передаються до спільного класифікатора. Така архітектура дає змогу моделі навчати нелінійні взаємозв'язки між числовою та семантичною інформацією.

Для оцінювання моделей використовувалися Precision, Recall та F1-score. Результати порівняння наведено в таблиці.

Таблиця 1

Model	Precision	Recall	F1-score
Random Forest	0.65	0.69	0.61
Combined model (XGBoost + NLP)	0.95	0.94	0.94
FL-based meta-learner	0.82	0.82	0.81
Hybrid Neural Network	0.97	0.97	0.97

Експериментальні результати демонструють суттєву перевагу мультимодальних моделей над підходами, що використовують лише структуровані клінічні характеристики. Комбінування прогнозів XGBoost та NLP-моделі забезпечило F1-score 0.94, тоді як гібридна нейронна мережа досягла найкращого результату – F1-score 0.97. Це свідчить про те, що текстові описи симптомів містять додаткову інформацію, яка не повністю представлена числовими фізіологічними показниками.

Нечіткий метакласифікатор продемонстрував нижчу прогностичну ефективність (F1-score 0.81), однак його перевагою є більша інтерпретованість процесу прийняття рішення. Таким чином, результати демонструють типовий компроміс між точністю та пояснюваністю моделі, що має особливе значення для систем підтримки прийняття клінічних рішень.

Основним обмеженням дослідження є необхідність роботи з дисбалансом класів та обчислювальна складність трансформерних моделей. Крім того, застосування моделей на реальних медичних даних потребує додаткової зовнішньої валідації, аналізу упередженості та забезпечення конфіденційності пацієнтів.

Отже, проведене дослідження показує, що інтеграція структурованих клінічних показників із семантичною інформацією з текстових медичних записів може істотно підвищити якість прогнозування тяжкості стану пацієнта. Найкращий результат отримано за допомогою гібридної нейронної мережі, яка досягла F1-score 0.97. Запропонований підхід може бути використаний як основа для інтелектуальних систем підтримки прийняття клінічних рішень. Подальші дослідження доцільно спрямувати на використання більших клінічних наборів даних, спеціалізованих biomedical language models, механізмів attention-based multimodal fusion та методів explainable artificial intelligence.

Література

- [1] Hossain E., Rana R., Higgins N., Soar J., Barua P., Pisani A., Turner K. Natural Language Processing in Electronic Health Records in relation to healthcare decision-making: A systematic review. *Computers in Biology and Medicine*. 2023. 155. P. 106649. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2023.106649>.
- [2] Omoregbe N., Ndaman I., Misra S., Abayomi-Alli O. Text Messaging-Based Medical Diagnosis Using Natural Language Processing and Fuzzy Logic. *Journal of Healthcare Engineering*. 2020. P. 8839524. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/8839524>.
- [3] Al-Qarni S., Algarni A. Disease Prediction from Symptom Descriptions Using Deep Learning and NLP Technique. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2025. DOI: <https://doi.org/10.14569/ijacsa.2025.0160541>.
- [4] Spasic I., Nenadic G. Clinical Text Data in Machine Learning: Systematic Review. *JMIR Medical Informatics*. 2020. Vol. 8. DOI: <https://doi.org/10.2196/17984>.
- [5] Navarro D.F., Ijaz K., Rezazadegan D., Rahimi-Ardabili H., Dras M., Coiera E., Berkovsky S. Clinical named entity recognition and relation extraction using natural language processing of medical free text: A systematic review. *International Journal of Medical Informatics*. 2023. Vol. 177. P. 105122. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmedinf.2023.105122>.

Оцінка впливу запізнення на стійкість розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь

Олександр КРАСНОКУТСЬКИЙ, Ігор ЧЕРЕВКО

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

krasnokutskyi.oleksandr@chnu.edu.ua, i.cherevko@chnu.edu.ua

Однією із найважливіших задач в теорії диференціальних рівнянь із запізненням є дослідження стійкості їх розв'язків. Загальновідомо, що навіть мале запізнення може призвести до втрати стійкості. В інженерній практиці системи із запізненням часто замінюють системами без запізнення. У роботі аналізуються способи знаходження верхніх меж запізнення, для яких стійкість системи із запізненням є аналогічною стійкості відповідних систем без запізнення.

Розглянемо лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^k B_i x(t - \tau_i), \quad (1)$$

де $A, B_i, i = \overline{1, k}$ — сталі $n \times n$ матриці, $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_k = \tau$, та відповідну їй систему без запізнення

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(A + \sum_{i=1}^k B_i \right) x(t). \quad (2)$$

Теорема. [1] Якщо нульовий розв'язок системи (2) асимптотично стійкий, тоді існує стала $\Delta > 0$, така, що при умові $0 \leq \tau \leq \Delta$ нульовий розв'язок системи із запізненням (1) також асимптотично стійкий.

Перші оцінки величини Δ , встановлені в роботі [1], виявились дуже грубими.

Розглянемо застосування схем апроксимації лінійних систем із запізненням для знаходження оцінки величини Δ .

Поставимо у відповідність системі (1) апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь [2]

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + \sum_{i=1}^k B_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau} \right], \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \quad (3)$$

В роботі [2] встановлено, що існує число m_0 таке, що при $m > m_0$ стійкість (нестійкість) нульового розв'язку системи із запізненням (1) еквівалентна асимптотичній стійкості (нестійкості) нульового розв'язку апроксимуючої системи (3). Це дозволяє запропонувати

алгоритм дослідження на стійкість лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням та знаходження верхньої межі запізнення для якого зберігається стійкість.

1. Для лінійних диференціально-різницевих рівнянь будуємо відповідну апроксимуючу систему лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

2. Знаходимо характеристичне рівняння апроксимуючої системи лінійних диференціальних рівнянь, яке приведемо до вигляду, зручного для знаходження його коренів на комп'ютері.

3. За допомогою спеціалізованого програмного забезпечення знаходимо корені характеристичного рівняння апроксимуючої системи, а їх розташування визначає, чи є вона стійкою.

4. Робимо висновок, що вихідне диференціальне рівняння із запізненням є стійким або нестійким.

У роботі [3] розроблено прикладний застосунок знаходження верхньої межі Δ та проведено числові експерименти для модельної системи із запізненням третього порядку.

Розглянемо, наприклад, систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B(t - \tau), \quad (4)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 13.5 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5.9 & 7.1 & -70.3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для проведення числових експериментів використано мову Python, бібліотеку NumPy. Знайдено два інтервали для запізнення τ , а саме

$$\tau \in [0; 0,16271) \cup (0,18545; 0,22295),$$

в межах яких нульовий розв'язок системи із запізненням є експоненціально стійким. Розмірність апроксимуючої системи $m = 1000$.

Література

- [1] Qin Yuan-xun, Liu Yong-qing, Wang Lian. Effect of time lags on stability of dynamical systems. Scientia Sinica. 1960. 10, №6. P. 26–42.
- [2] Матвій О.В., Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість. Нелінійні коливання. 2004. 7, №2. С. 208–216.
- [3] Ilika S., Cherevko I., Krasnokutskyi O., Matviy O. Approximation of systems with delay and their application. Моделювання динамічних систем та дослідження стійкості: колективна монографія. Харків: Видавничка Тетяна Супун, 2025. С. 149–156.

Динамічна двокритеріальна модель оптимізації вартості портфеля активів

Василь КУШНІРЧУК, Володимир КУШНІРЧУК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

v.kushnirchuk@chnu.edu.ua, kushnirchuk.volodymyr@chnu.edu.ua

Розглянуто динамічне узагальнення класичної двокритеріальної моделі Марковіца, у якій одночасно враховуються максимізація очікуваної дохідності та мінімізація ризику інвестиційного портфеля. На відміну від статичної постановки [1], запропоновано описувати зміну вартості портфеля в часі за допомогою диференціального рівняння. Побудовано модель динаміки вартості портфеля залежно від структури інвестицій та дохідностей активів. Для формування компромісного розв'язку двокритеріальної задачі використано метод зважених сум. Такий підхід дає змогу перейти від статичної оптимізації до задачі динамічної оптимізації та створює основу для подальшого використання методів оптимального керування.

Класична модель Марковіца ґрунтується на компромісі між двома основними характеристиками інвестиційного портфеля: очікуваною дохідністю та ризиком. Перші два критерії цієї моделі мають класичний зміст: максимізація очікуваної дохідності та мінімізація дисперсії дохідності портфеля. У даній роботі пропонується перейти від статичної моделі до її динамічного представлення.

Нехай n активів формують інвестиційний портфель, а $w_i(t)$ – частка вартості портфеля, інвестована в i -й актив у момент часу t . Тоді

$$\sum_{i=1}^n w_i(t) = 1, \quad w_i(t) \geq 0, \quad (1)$$

де $t \in [0, T]$ – інвестиційний горизонт.

На відміну від статичної моделі, ваги портфеля можуть змінюватися з часом. Позначимо через $X(t)$ очікувану вартість портфеля в момент часу t , а через $r_i(t)$ – миттєву дохідність i -го активу. Нехай $\mu_i(t) = E[r_i(t)]$ – очікувана миттєва дохідність i -го активу. Одержуємо диференціальне рівняння для вартості портфеля:

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t) \sum_{i=1}^n w_i(t) \mu_i(t), \quad X(0) = X_0. \quad (2)$$

Таким чином, динаміка вартості портфеля безпосередньо описується диференціальним рівнянням першого порядку. За заданих $w_i(t)$ та $\mu_i(t)$ його розв'язок має вигляд

$$X(t) = X_0 \exp \left(\int_0^t \sum_{i=1}^n w_i(s) \mu_i(s) ds \right).$$

Збережемо два критерії класичної моделі Марковіца:

$$\max \mu_p(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t)w_i(t), \quad \min \sigma_p^2(t) = w^T(t)\Sigma(t)w(t),$$

де $\Sigma(t)$ – коваріаційна матриця дохідностей активів. У статичній моделі характеристики $\mu_i(t)$ та $\Sigma(t)$ визначаються для фіксованого набору ваг. У динамічному випадку вони стають функціями часу:

$$\mu_p(t) = \mu^T(t)w(t), \quad \sigma_p^2(t) = w^T(t)\Sigma(t)w(t).$$

Для оцінювання результату інвестування протягом усього періоду $[0, T]$ можна використати інтегральні критерії

$$J_1(w) = \int_0^T \mu_p(t) dt \longrightarrow \max, \quad J_2(w) = \int_0^T \sigma_p^2(t) dt \longrightarrow \min.$$

Таким чином, динамічна двокритеріальна задача набуває вигляду

$$\begin{cases} J_1(w) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \mu_i(t)w_i(t) dt \rightarrow \max, \\ J_2(w) = \int_0^T w^T(t)\Sigma(t)w(t) dt \rightarrow \min. \end{cases}$$

за умов (1), (2).

За необхідності можуть бути введені додаткові обмеження на частки активів $w_i(t) \geq w_i^{\min}$, аналогічно до обмежень, використаних у статичній моделі для підтримання диверсифікації портфеля.

Для одержання конкретного компромісного розв'язку використаємо метод зважених сум, де максимізаційні критерії входять до функції мінімізації зі знаком «мінус».

Введемо функціонал

$$J(w) = \int_0^T [-\alpha\mu_p(t) + \beta\sigma_p^2(t)] dt,$$

де $\alpha > 0, \beta > 0$ – вагові коефіцієнти, що характеризують відносну важливість дохідності та ризику. Тоді задача набуває вигляду задачі динамічної оптимізації:

$$\min_{w(t)} \int_0^T [-\alpha\mu^T(t)w(t) + \beta w^T(t)\Sigma(t)w(t)] dt$$

за диференціального рівняння (2) та обмежень (1).

Зміна коефіцієнтів α і β дозволяє отримувати різні компромісні портфелі. При збільшенні α перевага надається очікуваній дохідності, тоді як збільшення β посилює значущість мінімізації ризику. Отримані розв'язки формують множину компромісних, а за відповідних умов – Парето-оптимальних стратегій. Запропонована постановка поєднує класичну модель Марковіца з диференціальним рівнянням динаміки вартості портфеля. Це дозволяє розглядати не лише оптимальну структуру портфеля в окремий момент часу, а й траєкторію зміни його вартості на заданому інтервалі.

Література

- [1] Кушнірчук В.Й., Кушнірчук В.В. Метод можливих напрямків для двокритеріальної моделі Марковіца. : Матеріали V міжн. конф., присвяч. 145-річчю від дня народж. Ганса Гана, (Чернівці, 23-27 вересня 2024 р.). Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2024. С. 52–53.

Асимптотика в *l.i.m.* розв'язку стохастичного диференціально-різницевого рівняння з fBm для

$$H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Володимир КУШНІРЧУК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

kushnirchuk.volodymyr@chnu.edu.ua, i.malyk@chnu.edu.ua

Розглянемо випадковий процес $x(t), t \in [-T, \infty]$, $T > 0$, що визначений стохастичним диференціально-різницеvim рівнянням нейтрального типу

$$dDx_t = Lx_t dt + Gx_t dB^{(H)}(t), t \geq 0 \quad (1)$$

та початковою умовою

$$x_0 = \varphi, \quad (2)$$

де $x_t = \{x(t+s), s \in [-T, 0]\}$ – відрізок траєкторії випадкового процесу, $D, L, G : C([-T, 0]) \rightarrow \mathbb{R}^1$ – лінійні функціонали, визначені наступними співвідношеннями для $\phi \in C([-T, 0])$:

$$D\phi = \sum_{i=0}^N d_i \phi(-\tau_i), L\phi = \sum_{i=0}^N l_i \phi(-\tau_i), G\phi = \sum_{i=0}^N g_i \phi(-\tau_i),$$

причому $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$; $B^{(H)}(t), t \geq 0$ – дробовий вінерівський процес, для якого в даному дослідженні будемо припускати представлення Рімана – Ліувілля [1]

$$B^{(h)}(t) = \frac{1}{\Gamma(H + 0.5)} \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW(u),$$

де $W(t), t \geq 0$ – стандартний вінерівський процес $H \in (0, 1)$ – показник Херста.

Основне твердження буде присвячене експоненціальній стійкості в *l.i.m.* тривіального розв'язку диференціального рівняння (1). Розглянемо поняття експоненціальної стійкості в *l.i.m.* тривіального розв'язку диференціального рівняння (1).

Означення 1. Тривіальний розв'язок стохастичного диференціального рівняння (1) називається експоненціально стійким, якщо для довільної початкової умови ϕ (2) з $\|\varphi\| =$

$\sup_{t \in [-T, 0]} |\varphi(t)| < \infty$, існують додатні константи $M, \gamma > 0$ такі, що

$$Ex^2(t) \leq M \|\varphi\|^2 e^{-\gamma t}, t \geq 0.$$

Надалі для існування та єдиності розв'язку задачі Коші (1), (2) будемо припускати, що функціонал D задовольняє наступну умову $\sum_{i=0}^N |d_i| < 1$ та $d_0 = 1$. Позначимо через $y(t), t \geq 0$ – розв'язок відповідного диференціального рівняння до рівняння (1), через $X(t), t \geq 0$ – фундаментальний розв'язок відповідного детермінованого рівняння [2].

Лема. Нехай $G \neq 0$ та фундаментальний розв'язок експоненціально стійкий. Тоді для $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ із експоненціальної стійкості в л.і.т. $x(t), t \geq 0$ випливає експоненціальна стійкість в л.і.т. л.і.т. $Gx_t, t \geq 0$ і навпаки.

Із даної лема на основі властивостей функціоналів D та $G \neq 0$ можна зробити висновки про однаковий характер асимптотики $x(t), t \geq 0$, $Dx_t, t \geq 0$, $Gx_t, t \geq 0$ за умови експоненціальної стійкості тривіального розв'язку (1).

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови:

- Розв'язок детермінованого рівняння $y(t), t \geq 0$ експоненціально стійкий ;
- $H \in (\frac{1}{2}, 1)$;
- Справедлива нерівність

$$B = \frac{1}{\Gamma^2(H + \frac{1}{2})} \int_0^\infty |GX_s|^2 ds < 1. \quad (3)$$

Тоді тривіальний розв'язок диференціального рівняння (1) експоненціально стійкий.

Використовуючи перетворення Фур'є та теорему Парсеваля, можна показати, що інтеграл в (3) можна переписати на основі функціоналів D, K, G та перетворення Фур'є від $X(t), t \geq 0$, тобто

$$B = \frac{1}{\Gamma^2(H + \frac{1}{2})} \int_0^\infty |G_1(is)|^2 |V^{-1}(is)|^{-2} ds < 1,$$

де

$$G_1(z) := \sum_0^N g_i e^{-\tau_i z}, V(z) := z \left(\sum_0^N d_i e^{-\tau_i z} \right) - \sum_0^N l_i e^{-\tau_i z}.$$

Література

- [1] Mishura Y. S. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. Berlin: Springer. 2008. 393 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-75873-0>.
- [2] Малик І. В. Характерний показник для розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу з інтегралом за пуассоновою мірою. Доповіді Національної академії наук України. 2010. No. 10. С. 26–31.

Пряме інтегрування диференціальних рівнянь теорії пружності з використанням функцій Вігака

Роман КУШНІР, Юрій ТОКОВИЙ, Микола ЮЗВ'ЯК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН

України, Львів, Україна

tokovyy@iapmm.lviv.ua

Широке використання композитних матеріалів з вираженою анізотропією теплофізичних та механічних властивостей у сучасних інженерних конструкціях вимагає розвитку адекватних та точних методів аналізу їхнього напружено-деформованого стану. Класичні аналітичні підходи теорії пружності, розроблені переважно для ізотропних тіл, стикаються зі значними математичними труднощами при узагальненні на неоднорідні анізотропні матеріали. Використання традиційних функцій напружень часто призводить до рівнянь високих порядків зі змінними коефіцієнтами, розв'язання яких пов'язане із втратою фізичної наочності. Водночас застосування суто числових підходів, зокрема методу скінченних елементів, має суттєві обмеження при аналізі локальних крайових ефектів. Відповідно, для верифікації числових алгоритмів та точної оцінки самозрівноважених напружень критично необхідною є наявність еталонних аналітичних розв'язків.

У цьому контексті ефективним є застосування методу прямого інтегрування рівнянь рівноваги, що дає змогу уникнути диференціювання полів переміщень. Введення ключових функцій, що мають фізичний зміст, дає змогу апіорі задовольнити рівняння рівноваги та звести задачу до системи інтегро-диференціальних рівнянь, зручних для точного задоволення граничних умов на всіх поверхнях тіла.

У роботах [1, 2, 3] запроваджено визначальні функції, застосування яких забезпечує задоволення не лише рівнянь рівноваги, але й заданих крайових умов. Ці функції, названі функціями Вігака, були побудовані для окремих випадків дво- та тривимірних задач теорії пружності та термопружності. У цій доповіді наведено узагальнення використання функцій Вігака при реалізації методу прямого інтегрування.

При цьому використано наступний підхід. За відсутності масових сил пружна рівновага деформівного твердого тіла в ортогональній криволінійній системі координат $(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)$ описується рівняннями

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} = \vec{0}, \quad (1)$$

де $\operatorname{div} \hat{\sigma} = \vec{e}^i \cdot (\nabla_i (\sigma_{ij} \vec{e}^j))$ – дивергенція тензора напружень $\hat{\sigma} = \sigma_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j$, ∇_i – компоненти оператора Гамільтона $\vec{\nabla} = \nabla_i \vec{e}^i$, $i, j = 1, 2, 3$.

З рівняння (1) нескладно отримати таке:

$$\nabla_i (\operatorname{div} \hat{\sigma} \cdot \vec{e}^i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

З використанням трьох скалярних рівнянь (2) можна визначити три скалярні функції, які задовольняють ці рівняння і, як наслідок, – рівняння (1), тотожно та визначаються диференціальними співвідношення через поокремі компоненти тензора напружень. Ці функції називатимемо функціями Вігака.

Зокрема, у випадку декартової системи (x, y, z) рівняння (2) задовольняють функції $\mathcal{V}_\xi$, $\xi = \{x, y, z\}$, введені у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} &= \mathcal{V}_y + \mathcal{V}_z, & \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} &= \mathcal{V}_x + \mathcal{V}_z, & \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} &= \mathcal{V}_x + \mathcal{V}_y, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\mathcal{V}_z, & \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} &= -\mathcal{V}_y, & \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} &= -\mathcal{V}_x. \end{aligned} \quad (3)$$

У випадку плоскої задачі, коли знехтувано залежністю від координати z , розв'язок рівнянь (2) можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial y} = \mathcal{V}. \quad (4)$$

Таким чином, рівняння рівноваги (1) задовольняються тотожно у тривимірному випадку, якщо напруження та три незалежні функції Вігака пов'язано співвідношеннями (3). Аналогічно у двовимірному випадку задоволення рівнянь (1) забезпечується виконанням співвідношень (4).

Для циліндричної системи координат (r, φ, z) , наприклад, у випадку осьової симетрії (тобто при нехтуванні залежністю від окружної координати φ), визначену із рівняння (2) функцію Вігака пов'язано із напруженнями такими співвідношеннями

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_{rr}) - \sigma \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\rho \sigma_{zz}) = -\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} (\rho \sigma_{rz}) = \rho \mathcal{V}. \quad (5)$$

У плоскому випадку (не враховуємо залежності від z) аналогічні співвідношення мають вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial \varphi^2} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathcal{V}) + r \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} = \mathcal{V}, \quad -\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = r \mathcal{V}. \quad (6)$$

Аналогічно можна використати рівняння (2) для подання функцій Вігака через напруження для довільної ортогональної криволінійної системи координат. Для визначення напружень через функції Вігака здійснюється відповідне інтегрування співвідношень (3) – (6) із урахуванням умов на межі досліджуваної області. Самі ж функції Вігака знаходять на основі розв'язування рівнянь суцільності.

Оскільки співвідношення між компонентами тензора напружень та функціями Вігака отримано лише на основі інтегрування рівнянь рівноваги (1), то вони є справедливими для довільної фізичної моделі механіки деформівного твердого тіла, зокрема для пружнопластичної. А це відкриває в подальшому можливість розвитку цього методу і щодо розв'язування задач механіки для складніших фізичних співвідношень між деформаціями і напруженнями, ніж лінійні.

Література

- [1] Кушнір Р.М., Токовий Ю.В., Юзв'як М.Й., Ясінський А.В. Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегро-диференціальних рівнянь. Укр. мат. журн. 2021. 73, № 10. С. 1355–1367.
- [2] Токовий Ю., Юзв'як. М. Температурні напруження в прямокутному брусі. Укр. мат. журн. 2026. 78, № 3-4. С. 274–287.
- [3] Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В. Визначення статичних термонапружень у пружному просторі з використанням функцій Вігака. Прикл. проблеми механіки і математики. 2024. 22. С. 37–45.

Асимптотичний аналіз нелінійних за керуванням інтегро-диференціальних систем зі швидкими осциляціями

Роксолана ЛАХВА, Вікторія МОГИЛЬОВА, Василь КРАВЕЦЬ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

Національний технічний університет України "Київ. політехн. ін-т

ім.І.Сікорського Київ, Україна, Таврійський державний агротехнологічний університет

імені Дмитра Моторного, Україна

roksolanalakhva@knu.ua, mogylova.viktoria@gmail.com, vasy1.kravets@tsatu.edu.ua

У роботі досліджується задача оптимального керування для систем інтегро/диференціальних рівнянь типу Вольтерри, що містять малий параметр $\varepsilon > 0$ та швидкоосцилюючі коефіцієнти. Метою дослідження є строге математичне обґрунтування застосування методу усереднення для вихідної задачі до істотно простішої задачі оптимального керування системою звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядається система з малим параметром $\varepsilon > 0$, нелінійна відносно керування на інтервалі $[0, T]$

$$\dot{x}_\varepsilon = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_\varepsilon(s))ds, u(t)\right), \quad x_\varepsilon(0) = x_0, \quad (1)$$

із критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T L(t, x_\varepsilon(t), u(t))dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \rightarrow \inf, \quad (2)$$

де $x \in \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $u(t) \in W \subset \mathbb{R}^m$, а допустимі керування $u(\cdot) \in U$, де U — компакт у просторі $L^2((0, T))$.

Припущення:

- (1) Функція $X(t, x, y, u)$ неперервна в області визначення, задовольняє умову лінійного росту $|X(t, x, y, u)| \leq M(1 + |x| + |y|)$ та умову Ліпшица зі сталою $\lambda > 0$:

$$|X(t, x, y, u) - X(t, x_1, y_1, u_1)| \leq \lambda(|x - x_1| + |y - y_1| + |u - u_1|).$$

- (2) $\varphi(t, s, x)$ є неперервною та ліпшицевою за x : $|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x_1)| \leq L_\varphi|x - x_1|$, $|\varphi(t, s, x)| \leq L_\varphi(1 + |x|)$.

- (3) Для $\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x)ds$ рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}^d$ та $u \in W$ існує границя:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left[X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(\tau, x), u\right) - X_0(x, u) \right] d\tau = 0. \quad (3)$$

- (4) Функція $L(t, x, u)$ рівномірно неперервна за x рівномірно відносно $t \in [0, T]$ та $u \in W$, є ліпшицевою за u , а $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція.

Системі (1)–(2) зіставляється задача для ЗДР:

$$\dot{\xi}(t) = X_0(\xi(t), u(t)), \quad \xi(0) = x_0, \quad (4)$$

з критерієм якості

$$J_0[u] = \int_0^T L(t, \xi(t), u(t)) dt + \Phi(\xi(T)) \rightarrow \inf. \quad (5)$$

Ключовим апаратом для аналізу є оцінка близькості траєкторій, яка є рівномірною на всій множині допустимих керувань U .

Лема 1. *За виконання умов (1)–(3) для будь-якого $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$ таке, що для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ розв’язки задач (1) та (4) задовольняють нерівність*

$$\sup_{t \in [0, T]} |x(t, u) - \xi(t, u)| \leq \eta \quad \text{для всіх } u \in U.$$

Основний результат є теорема, що встановлює зв’язок між оптимальними керуванням та критерієм якості точної задачі і відповідної їй усередненої задачі.

Теорема 1. *Нехай виконано умови (1)–(4). Тоді задачі (1)–(2) та (4)–(5) мають оптимальні розв’язки $(x_\varepsilon^*, u_\varepsilon^*)$ та (ξ^*, u^*) відповідно, і:*

- (i) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^* = J_0^*$, де $J_\varepsilon^* = \inf_{u \in U} J_\varepsilon[u]$, $J_0^* = \inf_{u \in U} J_0[u]$;
- (ii) для будь-якого $\eta > 0$ існує ε_0 таке, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ виконується нерівність $|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(u^*)| < \eta$ (оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальним для вихідної);
- (iii) існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0$ така, що при $n \rightarrow \infty$:

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightrightarrows \xi^*(t) \quad \text{рівномірно на } [0, T], \quad u_{\varepsilon_n}^*(\cdot) \rightarrow u^*(\cdot) \quad \text{в } L^2((0, T)).$$

Якщо розв’язок усередненої задачі (4) єдиний, то збіжність у пункті (iii) має місце для будь-якого прямування $\varepsilon \rightarrow 0$.

Література

- [1] V. Mogylova, R. Lakhva, V. Kravets, Optimal control problem for systems of integro-differential equations, *J. Math. Sci.*, 282(6), 2024, 983–1007.
- [2] R. Lakhva, R. Uteshova, O. Stanzhytskyi, V. Mogylova, *The averaging method in optimal control problems for integro-differential equations*, Open Mathematics, June 2024, DOI: <https://doi.org/10.1515/math-2025-0167>.

Моделювання фізичних процесів методом гібридних інтегральних перетворень Ейлера-Фур'є-Ейлера на сегменті

Олег Ленюк¹, Ольга Нікітіна², Микола Шинкарик³

^{1,2} Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

³ Західноукраїнський національний університет, Тернопіль, Україна

O.Lenyuk@chnu.edu.ua

На сучасному етапі розвитку науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з досить широким використанням композитних матеріалів, виникає нагальна потреба у вивченні фізико-технічних характеристик таких матеріалів, що знаходяться в різних умовах експлуатації. Математично це призводить до задачі розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку на кусково-однорідному сегменті з відповідними початковими та крайовими умовами.

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків таких задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень.

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області

$$D_2 = \{(t, r) : t > 0, r \in I_2\}, \quad I_2 = (R_0; R_1) \cup (R_1; R_2) \cup (R_2; R_3)$$

розв'язку сепаратної системи трьох диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{aligned} L_t[u_1] + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\alpha_1}^*[u_1] &= f_1(t, r), \quad r \in (R_0; R_1), \\ L_t[u_2] + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}[u_2] &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1; R_2), \\ L_t[u_3] + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\alpha_3}^*[u_3] &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2; R_3), \end{aligned} \quad (1)$$

з відповідними початковими умовами, умовами спряження та крайовими умовами [1-2].

При $R_0 = 0$ в цій точці виконується умова обмеження, при $R_0 > 0$ – стандартна крайова умова [1-2]. У кожному із наведених випадків побудоване відповідне пряме та обернене гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера, породжене на множині I_2 гібридним диференціальним оператором, доведені теореми про основну тотожність гібридного диференціального оператора [1].

Якщо $L_t = \frac{d}{dt}$, то ми маємо задачу теплопровідності або дифузії, якщо ж $L_t = \frac{d^2}{dt^2}$, то одержуємо задачу динаміки.

Усі оператори та параметри, які беруть участь у постановці крайових задач для системи (1), описані у відповідних працях [1-2].

Пряме інтегральне перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера на полярній осі з двома точками спряження записується у вигляді операторної матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до заданої задачі за правилом множення матриць.

В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого або другого порядку в залежності від оператора L_t .

Обернене перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі Коші. Після здійснення деяких перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі.

Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Література

- [1] Нікітіна О. М. Інтегральне перетворення, породжене на сегменті $[0; R_3]$ гібридним диференціальним оператором Ейлера-Фур'є-Ейлера. Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. Чернівці: Прут. 2012. No. 21. С. 233–239.
- [2] Ленюк О. М., Нікітіна О. М., Шинкарик М. І. Моделювання динамічних процесів методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Фур'є-Ейлера на сегменті. Прикладні питання математичного моделювання. 2022. 5, No. 2. С. 27–32.

Канторівська двоосновна система числення в задачах теорії локально складних функцій

Ірина ЛИСЕНКО, Віктор ПЛАКИДА, Олександр ПРАЦЬОВИТИЙ

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ

i.m.lysenko@npu.edu.ua, plakyda1@gmail.com, alexandr.pratsiovytyi@gmail.com

Нагадаємо, що канторівська система числення (або система кодування чисел відрізка $[0; 1]$) визначається послідовністю (s_n) натуральних основ, більших 1, і послідовністю алфавітів (A_n) , де $A_n = \{0, 1, \dots, s_n - 1\}$, а саме

$$[0; 1] \ni x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{(s_n)}, \alpha_n \in A_n. \quad (1)$$

Символічний запис $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{(s_n)}$ розкладу (1) ми називаємо $\Delta^{(s_n)}$ -зображенням числа x , α_n – n -ою цифрою цього зображення.

Якщо $s_n = s$, то $\Delta^{(s_n)}$ -зображення чисел є класичним s -ковим зображенням.

Існують числа, що мають два $\Delta^{(s_n)}$ -зображення:

$$\Delta_{a_1 \dots a_{m-1} a_m [s_{m+1}-1] [s_{m+2}-1] \dots}^{(s_n)} = \Delta_{a_1 \dots a_{m-1} [a_m+1] (0) \dots}^{(s_n)}.$$

Вони називаються $\Delta^{(s_n)}$ -бінарними і утворюють зліченну всюди щільну в $[0; 1]$ множину. Решта чисел мають єдине зображення. Вони називаються $\Delta^{(s_n)}$ -унарними. Отже, дана система кодування чисел має нульову надлишковість.

Узагальненням зображення чисел у канторівській системі числення є поліосновне $\tilde{Q}$ -зображення чисел, визначене нескінченною “матрицею” $\|q_{in}\|$ з додатними елементами q_{in} , такими, що $q_{0n} + q_{1n} + \dots + q_{[s_n-1]n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$[0; 1] \ni x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} [\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}] = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\tilde{Q}}, \quad \beta_{\alpha_k k} = \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} q_{ij}.$$

Розглядається фіксоване число $c \in [0; 1]$ і його класичне двійкове зображення $c = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^2$ і канторівська система числення, визначена послідовністю основ

$$s_n = \tau(c) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } c_n = 0, \\ 3, & \text{якщо } c_n = 1. \end{cases}$$

Нехай $r = (r_0, r_1)$, $s = (s_1, s_2, s_3)$, $0 < r_0 < 1$, $r_1 = 1 - r_0$, $0 < g_i < 1$, $g_1 + g_2 + g_3 = 1$. Розглядається $\tilde{Q}$ -зображення чисел, визначене матрицею q_{in} , кожен стопчик якої збігається з $\bar{r}$ або $\bar{g}$.

Основними об'єктами розгляду є дві функції:

$$y = \varphi(c, x) = \frac{\alpha_1(x)}{2} + \frac{\alpha_2(x)}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n(x)}{2^n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) \dots}$$

$$z = f(c, x) = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{\tilde{Q}}$$

де $c = \Delta_{c_1c_2\dots c_n\dots}^2$, $s_n = \tau(c)$, $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{(s_n)}$.

$$q_{in} = \begin{cases} r_i, & \text{якщо } c_n = 0, \\ g_i, & \text{якщо } c_n = 1, \end{cases} \quad \beta_{\alpha_n(x)n} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\alpha_n-1} r_i, & \text{якщо } c_n = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_n-1} g_i, & \text{якщо } c_n = 1. \end{cases}$$

Обидві функції визначені на одиничному квадраті і мають множиною значень відрізок $[0; 1]$. Друга функція є коректно означеною при будь-якому c , а перша – лише при $c = 0$ і $c = 1$, але стає такою, після домовленості використовувати лише одне з двох існуючих зображень бінарної точки (нехай з періодом (0)).

Теорема 1. Якщо c – фіксоване число, то функція φ є лінійною, якщо одночасно виконуються умови $r_0 = \frac{1}{2}$, $g_0 = \frac{1}{3} = g_1$, і сингулярною (неперервною функцією, відмінною від константи, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега) в решті випадків.

Теорема 2. При фіксованому c функція f є неперервною в кожній (s_n) -унарній точці і розривною (s_n) -бінарній точці.

Теорема 3. При фіксованому c , зображення якого має нескінченну кількість нулів та одиниць, функція f має континуальні множини рівнів, які володіють фрактальними властивостями.

Література

- [1] Бондаренко О. І., Працьовитий М. В. Канторівська система числення, пов'язана з двійковим рядом і послідовністю Фібоначчі. Збірник праць Інституту математики НАН України. 2017. 14, No. 4. С. 178–187.
- [2] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 1998. 296 с.
- [3] Працьовитий М. В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. Київ: Наукова думка. 2022. 316 с.
- [4] Pratsiovytyi M., Vynnyshyn O. Sets of distinct representations of numbers in numeral systems with a natural base and a redundant alphabet. Proceedings of the International Geometry Center. 2026. 19, No. 1. Article 6. 14 p. DOI: <https://doi.org/10.15673/pigc.v19i1.3307>.
- [5] Лисенко І. М., Працьовитий О. М., Плакида В. І. Неперервні функції, означені в термінах двосимвольного G_2 -зображення з двома різнознаковими основами. Буковинський математичний журнал. 2024. 12, No. 2. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2024.02.08>.

Про спряжену задачу Коші для рівнянь з дисипативною параболічністю, змінними коефіцієнтами та від'ємним родом

Владислав ЛІТОВЧЕНКО, Максим ЛЕКА

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича

Чернівці, Україна

v.litochenko@chnu.edu.ua, leka.maksym@chnu.edu.ua

Зафіксуємо довільно $\tau > 0$ і розглянемо рівняння

$$\partial_t v(t; \xi) = -\{A_0^*(t; i\partial_\xi) + A_1^*(t, \xi; i\partial_\xi)\}v(t; \xi), \quad (t; \xi) \in \Pi_{[0; \tau]}, \quad (1)$$

в якому v – невідома функція, $\Pi_Q = \{(t; x) : t \in Q, x \in \mathbb{R}^n\}$, а

$$A_0^*(t; i\partial_\xi) \cdot = \sum_{|k| \leq p} \overline{a_{0,k}(t)} i^{|k|} \partial_\xi^k \cdot, \quad A_1^*(t, \xi; i\partial_\xi) \cdot = \sum_{|k| \leq p_1} \partial_\xi^k (i^{|k|} \overline{a_{1,k}(t; \xi)} \cdot)$$

(тут зверху рисою $\overline{(\cdot)}$ позначено комплексну спряженість). Вважатимемо, що диференціальний вираз $A_0^*(t; i\partial_\xi)$ на $\Pi_{[0; \tau]}$ є обернено $\{p; h\}$ -параболічним з родом $\mu < 0$, а порядок p_1 виразу A_1^* менший за h . Для рівняння (2) задамо початкову умову

$$v(t; \cdot)|_{t=\tau} = \varphi. \quad (2)$$

Задача Коші (2), (3) є спряженою за Лагранжем до основної задачі, сформульованої в [1].

Теорема. Нехай на множині $\Pi_{[0; \tau]}$ коефіцієнти рівняння (2) нескінченно диференційовні за змінною ξ , неперервні за t рівномірно стосовно ξ , обмежені разом з усіма своїми похідними комплексно значні функції, а $\varphi \in S_{1-\mu/h}$. Тоді функція

$$v(t; \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z^*(t, \xi; \tau, x) \varphi(x) dx, \quad (t; \xi) \in \Pi_{[0; \tau]},$$

є класичним розв'язком рівняння (2), при цьому $v(t; \cdot) \in S_{1-\mu/h}$, $t \in [0; \tau)$. У випадку, коли $\varphi \in S_{1-\mu/h}^{1/h}$, виконується граничне співвідношення

$$v(t; \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow \tau-0} \varphi(\cdot)$$

у сенсі збіжності в просторі $S_{1-\mu/h}$. Тут Z^* – функція Гріна задачі Коші (2), (3), а S_α, S_α^β – відповідні простори основних функцій Гельфанда і Шилова [1].

Література

- [1] Litovchenko V., Kharyna D. Green's Function of the Cauchy Problem for Equations with Dissipative Parabolicity, Negative Genus, and Variable Coefficients. *International Journal of Differential Equations*. 2024, V. 2024. 18 p.
- [2] Gelfand I.M., Shilov G.E. *Generalized Functions*. V. 1: Properties and Operations. Translated by Eugene Saletan. New York: Academic Press, 1964. 423 p.

Математичне моделювання процесів переносу забруднень в атмосфері за допомогою сучасних статистичних методів та алгоритмів машинного навчання

Ілля МАЙКО, Наталія КІЗИЛОВА

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна

illia.maiko@karazin.ua, kizilova@karazin.ua

У роботі порівнюються можливості різних алгоритмів аналізу «великих даних» для аналізу часових рядів концентрацій $\{C_j\}_{j=1}^n$ забруднювачів (завислі речовини, NO , NO_2 , C , CO , SO_2 , NH_3 (аміак), C_6H_5OH (фенол), CH_2O (формальдегід), $j = 1 - 9$) на території України. Ця тема є актуальною для математичного моделювання і прогнозування переносу і накопичення викидів промисловості, сільського господарства, енергетичного сектору та транспорту. Дані знаходяться у відкритому доступі на сайті Міністерства захисту довкілля та природних ресурсів України (mer.gov.ua) і містять часові ряди середньодобових значень C_j на території кожної з областей України. Зміна у часі значень C_j відбувається за рахунок викидів на урбанізованих і сільських місцевостях, турбулентного переносу в атмосфері та приграничному турбулентному шарі в залежності від профілю місцевості (шорсткості інтерфейсу повітря-тверда поверхня), седиментації та накопиченню у поверхневих водах і ґрунтах. Для розробки відповідних математичних моделей у вигляді систем диференціальних рівнянь використовується data-driven підхід, коли залежності між концентраціями у часі отримуються за допомогою статистичних методів (мультикомпонентна регресія (МЛР), регресивне дерево (РД)) та алгоритми машинного навчання (random forest (RF) [1], XGBoost [2], нейронні мережі (НМ) [3]), які використовуються у даній роботі. Приклад часових рядів після згладження ковзним середнім наведений на Рис. 1.

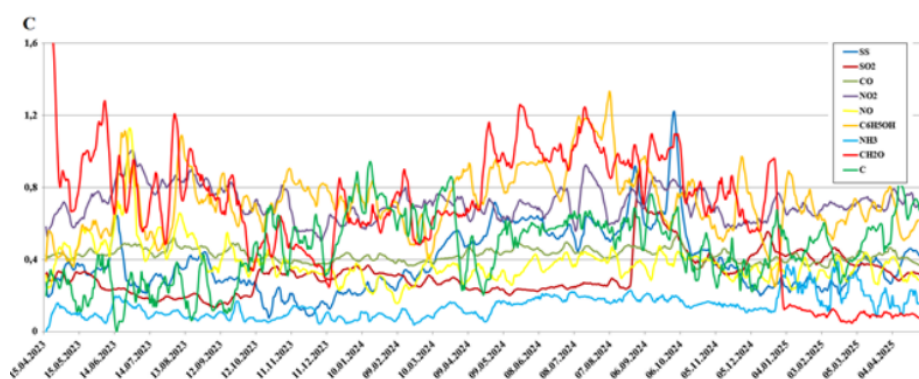


Рис. 1: Коливання концентрацій обраних забруднювачів в атмосфері м. Харків протягом 2023–2025 рр.

В процесі тренування датасети псевдовипадковим чином розбивалися на тренувальні й тестові у співвідношенні 80:20. Усі алгоритми навчалися на 1000 тренувально-тестових на-

борах, з поміж яких обирався найкращий результат. Ефективність алгоритму визначалася за відхиленням передбачення від цільового показника на тестових групах. Такий підхід дозволяє мінімізувати ефект перенавчання, коли отримані моделі знаходять в тренувальних даних закономірність, яка не описує усі спостереження. Таким чином мінімізувався вплив початкових даних та розбіжності динаміки концентрацій забруднювачів у часі.

В результаті методом найменших квадратів знайдена МЛР між індексом забруднення повітря IAP , який є у базах даних, з концентраціями забруднювачів у вигляді $IAP = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j C_j$, де β_j – коефіцієнти регресії.

Методом РД був отриманий прогноз кожного наступного за часом значення C_j у вигляді шматково-постійної функції $F(C_j) = \sum_{q=1}^Q A_q(R_q)I[C_j \in R_q]$, де R_q – q -й листок у просторі значень, Q – кількість листків, A_q – прогнозне значення (середнє за навчальним датасетом) для листка R_q , I – індикаторна функція.

НМ складалися з m шарів з числом нейронів $\{k_i\}_{i=1}^m$ в i -му шарі, де вихідний параметр кожного нейрона має вигляд $F_{i+1}(C_j) = f\left(\sum_{i=1}^{k_i}(w_i C_{j_i}) + b\right)$, де $f(z)$ – функція активації, w_i – вагові коефіцієнти, b – похибка (bias).

Під час тренування використовувалися як сталі структури (СС), так і випадково згенеровані структури (ВЗС) НМ $m, k_i, w_i, f(z)$, причому розглядалося 100 різних значень w_i для кожної ітерації алгоритму. Для сталих мереж було обрано $m = 12$ шарів і $\forall i, k_i = 40$ нейронів в кожному, а для випадково сгенерованих НМ – $m = \{11, 12, 13\}$ і $\forall i, k_i \leq 600$.

В результаті математичного моделювання прогнозу динаміки кривих $C_j(t)$ середня точність алгоритмів склала: 0.712 для МЛР, 0.896 для РД, 0.941 для RF, 0.936 для XGBoost, 0.891 для НМ зі сталою структурою, і 0.925 для НМ з (ВЗС). При цьому найкращим для 6 з 9 досліджуваних забруднювачів виявився алгоритм НМ з ВЗС, але й він, а також алгоритм з СС, не знайшли закономірності в решті (3 з 9) забруднювачів. Серед інших алгоритмів найкращим виявився алгоритм RF, який продемонстрував високу ефективність при значно меншому часі тренування (< 5 хвилин) у порівнянні з НМ (~ 2 години). В той же час НМ демонструють більшу адаптивність і можливість зміни структури під різні типи динаміки кривих $C_j(t)$. Таким чином, для швидкого математично обґрунтованого прогнозу концентрацій забруднень повітря у кожній області країни добре працює алгоритм RF, а для більшої точності краще використовувати НМ, які, однак, потребують значно більшого часу навчання.

Література

- [1] Brunswick P., Cuthbertson D., Yan J. et al. A practical study of CITES wood species identification by untargeted DART/QTOF, GC/QTOF and LC/QTOF together with machine learning processes and statistical analysis. Environmental Advances. 2021. 5. Article 100089. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.envadv.2021.100089>.

- [2] Dhieb N., Ghazzai H., Besbes H. et al. Extreme gradient boosting machine learning algorithm for safe auto insurance operations. 2019 IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety (ICVES). IEEE. 2019. P. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICVES.2019.8906396>.
- [3] Sezer A. Prediction of shear development in clean sands by use of particle shape information and artificial neural networks. Expert Systems with Applications. 2011. 38. P. 5603–5613. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.10.075>.

Про стаціонарні розподіли ієрархічних прихованих напівмарковських моделей

Ігор МАЛИК, Роман ІВАСЮК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

i.malyk@chnu.edu.ua, ivasiuk.roman@chnu.edu.ua

Ієрархічні приховані марковські моделі є узагальненням класичних прихованих марковських моделей, у яких прихований процес складається з декількох взаємопов'язаних рівнів [1, 2, 3]. Розширенням цього підходу є ієрархічні приховані напівмарковські моделі, що дозволяють враховувати довільний розподіл часу перебування прихованого процесу у станах [4].

Нехай модель містить K прихованих рівнів. Позначимо через $x^{(k)}(t)$, $k = 1, \dots, K$, приховані процеси зі станами $\mathbb{X}^{(k)}$, а через $y(t) \in \mathbb{Y}$ – процес спостережень. Для кожного рівня введемо вкладений ланцюг Маркова $x_n^{(k)}$ та час перебування $\theta_n^{(k)}$. Моменти переключення:

$$\tau_0^{(k)} = 0, \quad \tau_{n+1}^{(k)} = \tau_n^{(k)} + \theta_{n+1}^{(k)}, \quad n \geq 0.$$

На першому рівні переходи визначаються матрицею

$$A^{(1)} = \left(a_{ij}^{(1)} \right), \quad a_{ij}^{(1)} = P \left(x_n^{(1)} = j \mid x_{n-1}^{(1)} = i \right), \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

Взаємозв'язок сусідніх рівнів задається матрицями

$$B^{(k-1)} = \left(b_{ij}^{(k-1)} \right), \quad b_{ij}^{(k-1)} = P \left(x_n^{(k)} = j \mid x_{n-1}^{(k-1)} = i \right), \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

Параметри $p_k \in [0, 1]$ характеризують ступінь залежності k -го рівня від попереднього. При $p_k = 1$ формується повністю залежна структура, а при $p_k = 0$ незалежна.

Основною задачею є знаходження стаціонарного розподілу π^y процесу спостережень. Позначимо через $m^{x^{(k)}}$ вектор середніх часів перебування у станах $x^{(k)}(t)$, m^y – відповідний вектор для процесу спостережень, $\odot$ позначемо як поелементне множення, а через v^x – стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова x_n , $n \geq 0$. Припускаємо, що всі ці математичні сподівання є скінченними.

Для першого рівня стаціонарний розподіл має вигляд

$$\pi^{x^{(1)}} = \frac{1}{|v^x \odot m^{x^{(1)}}|_{l_1}} v^x \odot m^{x^{(1)}}.$$

Нехай $r_k = 0$ відповідає незалежному режиму переключення, а $r_k = 1$ – режиму, за якого враховується додаткове переключення, зумовлене попереднім рівнем.

Теорема 1. *Нехай вкладений ланцюг Маркова $x_n^{(1)}$, $n \geq 0$, є незвідним та аперіодичним, математичні сподівання часу перебування у станах прихованих і видимого процесів скінченні, а $p_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, K - 1$.*

Тоді стаціонарні розподіли прихованих процесів визначаються рекурентно. Для $k = 2, \dots, K$:

$$\begin{aligned} \pi^{x^{(k)}} = p_k & \left(1_{\{r_k=0\}} \frac{((B^{(k-1)})^T \pi^{x^{(k-1)}}) \odot m^{x^{(k)}}}{|((B^{(k-1)})^T \pi^{x^{(k-1)}}) \odot m^{x^{(k)}}|_{l_1}} \right. \\ & + 1_{\{r_k=1\}} \frac{((B^{(k-1)})^T \pi^{x^{(k-1)}}) \odot (m^{x^{(k)}} + e_M)}{|((B^{(k-1)})^T \pi^{x^{(k-1)}}) \odot (m^{x^{(k)}} + e_M)|_{l_1}} \\ & \left. + (1 - p_k) \frac{v^{x^{(k)}} \odot m^{x^{(k)}}}{|v^{x^{(k)}} \odot m^{x^{(k)}}|_{l_1}} \right) \end{aligned}$$

Стаціонарний розподіл процесу спостережень визначається за останнім прихованим рівнем:

$$\begin{aligned} \pi^y = 1_{\{r_K=0\}} & \frac{((B^{(K)})^T \pi^{x^{(K)}}) \odot m^y}{|((B^{(K)})^T \pi^{x^{(K)}}) \odot m^y|_{l_1}} \\ & + 1_{\{r_K=1\}} \frac{((B^{(K)})^T \pi^{x^{(K)}}) \odot (m^y + e_M)}{|((B^{(K)})^T \pi^{x^{(K)}}) \odot (m^y + e_M)|_{l_1}}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримано рекурентний спосіб визначення стаціонарних розподілів усіх прихованих рівнів та процесу спостережень. Параметри p_k дозволяють регулювати залежність між сусідніми рівнями ієрархії. Отримані співвідношення можуть бути використані для подальшого дослідження моделі та розробки методів оцінювання її параметрів.

Література

- [1] Fine S., Singer Y., Tishby N. The Hierarchical Hidden Markov Model: Analysis and Applications. Machine Learning. 1998. 32, No. 1. P. 41–62.
- [2] Murphy K. P., Paskin M. A. Linear-Time Inference in Hierarchical HMMs. Advances in Neural Information Processing Systems. 2001. 14. P. 833–840.
- [3] Bui H. H., Phung D. Q., Venkatesh S. Hierarchical Hidden Markov Models with General State Hierarchy. Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2004. 19. P. 324–329.
- [4] Johnson M. J., Willsky A. S. The Hierarchical Dirichlet Process Hidden Semi-Markov Model. Proceedings of the 26th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. 2010. P. 252–259.

Уніфіковане середовище для відтворюваного порівняння динамічних нейронних мереж

Ігор МАЛИК, Володимир НЕСТЕРЕНКО

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

i.malyk@chnu.edu.ua, nesterenko.volodymyr@chnu.edu.ua

Постановка задачі. Методи динамічної адаптації нейронних мереж передбачають зміну кількості нейронів, шарів, каналів або зв'язків у ході навчання, а також вибір шляху обчислення залежно від вхідних даних [1]. Структурні зміни можуть використовуватися для нарощування або стиснення архітектури, а також для зменшення обчислювальних витрат [2, 3]. Оскільки кожен метод реалізує адаптацію за власною процедурою, коректне порівняння таких методів потребує єдиного способу опису умов їх застосування, послідовності структурних перетворень і їхнього впливу на ресурсоемність моделі.

Мета роботи — розробити уніфіковане середовище для відтворюваного порівняння динамічних нейронних мереж, у якому структурні зміни подаються як типізовані перетворення графа, а для кожної події фіксується перехід між станами моделі, придатний для перевірки й відтворення.

Математична модель. Архітектуру мережі на кроці t подамо типізованим орієнтованим графом

$$G_t = (V_t, E_t, \varphi_t),$$

де V_t — множина обчислювальних вузлів, E_t — множина зв'язків, а φ_t задає тип і параметри кожного обчислювального вузла та, за потреби, атрибути зв'язків. Позначимо через $\mathcal{G}_{\text{adm}}$ множину допустимих графів із узгодженими розмірностями тензорів, фіксованими просторами входів і виходів та коректною топологією обчислювального графа.

Подію адаптації визначимо кортежем $e = (\kappa, \tau, \pi, \mu)$, де κ — тип події, τ — ідентифікатор або опис цільового вузла, ребра чи підграфа, π — параметри перетворення, а μ — метадані. Кожній події відповідає частковий оператор

$$T_e: \text{dom}(T_e) \subseteq \mathcal{G}_{\text{adm}} \longrightarrow \mathcal{G}_{\text{adm}}, \quad G_{t+1} = T_e(G_t).$$

Область визначення $\text{dom}(T_e)$ охоплює ті стани моделі, для яких цільовий фрагмент існує, розмірності узгоджені, а задане перетворення може бути коректно виконане. Перед застосуванням події експериментальне середовище перевіряє, чи є відповідне перетворення допустимим для поточного стану моделі. Після перевірки подія або застосовується, або відхиляється із зазначенням причини.

Зміни, спричинені подією, описує вектор

$$\Delta(e, G_t) = (\Delta N, \Delta \hat{F}, \Delta S),$$

де ΔN — зміна кількості параметрів, $\Delta \hat{F}$ — зміна наближеної оцінки обчислювальних витрат, а ΔS — зміна частки замаскованих або нульових ваг. Якщо початковий граф і параметри подій зафіксовано, послідовність

$$\mathcal{H} = (G_0, e_0, G_1, e_1, \dots, e_{T-1}, G_T)$$

дає змогу відтворити послідовність структурних станів мережі.

Подієве подання та експериментальна перевірка. У запропонованому подієвому поданні окремо зберігаються опис події та результат її застосування. Результат містить момент виконання в термінах епохи або кроку навчання, метадані про стани архітектури до і після перетворення, ознаку успішного виконання, причину відхилення та вектор $\Delta(e, G_t)$. У середовищі реалізовано події розширення мережі, злиття шарів, маскування ваг і проріджування каналів.

Подієве подання використано в уніфікованих експериментальних протоколах для синтетичної задачі класифікації, MNIST та CIFAR-10. Для кожного методу проведено п'ять запусків із різними початковими значеннями генератора випадкових чисел. Для кожного запуску зберігається конфігурація, описи графів архітектури, історія подій, показники якості та ресурсні характеристики.

У повному дослідженні подієве подання проілюстровано на прикладі каналного проріджування згорткової нейронної мережі (CNN) для MNIST. На другій епісоді одна подія змінила конфігурацію каналів з (24, 48) на (21, 48), унаслідок чого кількість параметрів зменшилася на 1332, а наближена оцінка FLOPs — на 558 012.

Середовище також підтримує умовні обчислення. Для моделей з динамічною маршрутизацією зберігаються маршрути обчислень для окремих зразків, частка ранніх виходів, середня активна ширина мережі та відношення обчислювальних витрат вибраного маршруту до витрат повного проходу мережі. Це дає змогу в межах спільного формату звітності аналізувати як постійні структурні зміни, так і динамічний вибір маршруту обчислень залежно від вхідних даних.

Висновки. Розроблено уніфіковане середовище для відтворюваного порівняння динамічних нейронних мереж, формальною основою якого є подієве подання структурної адаптації у вигляді послідовності допустимих перетворень типізованого графа. Воно поєднує формальний опис події, перевірку можливості її застосування, фіксацію структурних і ресурсних характеристик, а також порівняльне оцінювання методів динамічної адаптації. Запропоноване подання дозволило уніфікувати фіксацію структурних змін і ресурсних характеристик, а також причин відхилення недопустимих перетворень для різних класів динамічних моделей.

Література

- [1] Han Y., Huang G., Song S., Yang L., Wang H., Wang Y. Dynamic Neural Networks: A Survey. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2022. 44, No. 11. P. 7436–7456. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2021.3117837>.

- [2] Chen T., Goodfellow I., Shlens J. Net2Net: Accelerating Learning via Knowledge Transfer. 4th International Conference on Learning Representations (ICLR). 2016. <https://arxiv.org/abs/1511.05641>.
- [3] Han S., Pool J., Tran J., Dally W. J. Learning both Weights and Connections for Efficient Neural Networks. Advances in Neural Information Processing Systems. 2015. 28. P. 1135–1143. <https://arxiv.org/abs/1506.02626>.

Про умови спряження для напорів в математичній моделі нелінійної фільтраційної консолідації при наявності композитного геобар'єра

Петро МАРТИНЮК, Ольга МІЧУТА, Оксана УЛЯНЬЧУК-МАРТИНЮК

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

p.m.martyniuk@nuwm.edu.ua, o.r.michuta@nuwm.edu.ua,

o.v.ulianchukmartyniuk@nuwm.edu.ua

Геобар'єри — це інженерні рішення у вигляді штучних включень, основним завданням яких є мінімізація поширення шкідливих речовин у довкілля з функціонуючих полігонів відходів, в тому числі - побутових [3, 5]. Оскільки в сховища безперервно надходять відходи, то є актуальною задача прогнозу їх ущільнення [1, 2]. Історично, починаючи з використання геобар'єрів у 1960-х роках, глини були їхніми першими будівельними матеріалами. Пізніше, з 80-х і 90-х років минулого століття, геобар'єри стали композитними і в них почали використовувати геотекстильні матеріали.

У випадку одношарового геобар'єра товщиною δ умови спряження для надлишкових напорів h в поровій рідині мають вигляд [1, 2]

$$u^{\pm}|_{x=\xi} = -\frac{[h]}{\int_0^{\delta} \frac{dx}{k_{\omega}(h)}}, \quad (1)$$

де u — швидкість фільтрації, $[h] = h^+ - h^-$ — стрибок напорів на тонкому включенні $x = \xi$, k_{ω} — коефіцієнт фільтрації матеріалу тонкого включення, який нелінійно залежить від самих напорів [2]. Якщо $k_{\omega}(h) = k_0 = \text{const}$, то з умови (1) ми отримуємо класичну умову спряження неідеального контакту [?, 4]. Модифіковані умови спряження типу (1) використані в роботах [1, 2, 6].

Розглянемо композитний геобар'єр (див. рис. 1), який складається з двох тонких шарів, ω_1 та ω_2 , з товщинами δ_1 та δ_2 відповідно. Нехай h^* — середнє значення напору на контактній межі включень ω_1 та ω_2 (фактично при $x = \xi + \delta_1$). Тоді, аналогічно умові (1), отримуємо:

$$u^- = -\frac{h^* - h^-}{\int_0^{\delta_1} \frac{dx}{k_{\omega_1}(h)}}; u^+ = -\frac{h^+ - h^*}{\int_0^{\delta_2} \frac{dx}{k_{\omega_2}(h)}}. \quad (2)$$

Тут k_{ω_1} та k_{ω_2} — коефіцієнти фільтрації пористого матеріалу включень відповідно; u — швидкість фільтрації, яка визначається згідно із законом фільтрації; u^- та u^+ — значення швидкостей фільтрації при $x = \xi - 0$ та $x = \xi + \delta_1 + \delta_2 + 0$ відповідно.

Далі, додаючи дещо перетворені умови (2), маємо:

$$u^- \int_0^{\delta_1} \frac{dx}{k_{\omega_1}(h)} + u^+ \int_0^{\delta_2} \frac{dx}{k_{\omega_2}(h)} = -[h]. \quad (3)$$

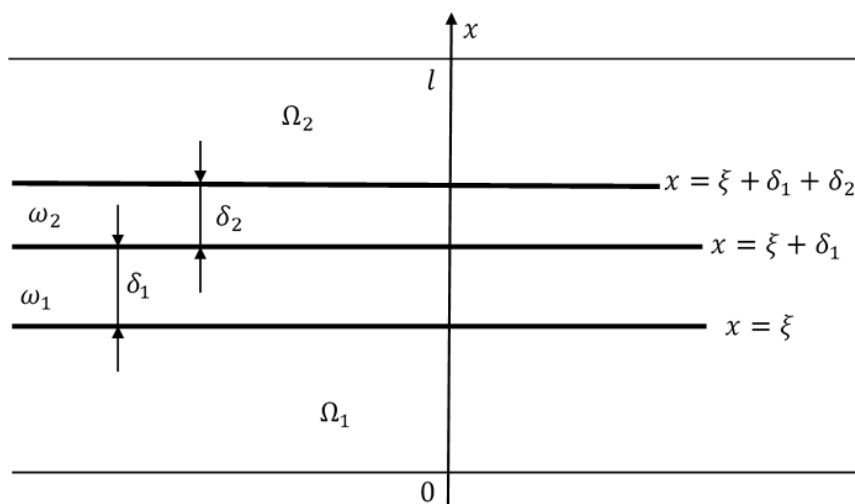


Рис. 1: Двошаровий композитний геобар'єр.

Враховуючи умову неперервності потоку $[u] = u^+ - u^- = 0$, з (3) отримуємо

$$u^\pm|_{x=\xi} = -\frac{[h]}{\int_0^{\delta_1} \frac{dx}{k_{\omega_1}(h)} + \int_0^{\delta_2} \frac{dx}{k_{\omega_2}(h)}}.$$

Виведені умови спряження використано при формуванні крайової задачі нелінійної фільтраційної консолідації сховища відходів на випадок композитності геобар'єра. Знайдено числові розв'язки відповідної крайової задачі методом скінченних елементів, деведено теореми про їх існування, єдиність та точність, аналогічно до [2]. Проведено серію числових експериментів та здійснено їх аналіз.

Література

- [1] Martyniuk P. M., Michuta O. R., Ulianchuk-Martyniuk O. V. Numerical modeling of surface subsidence due to compaction of soil with fine inclusions. *Mathematical Modeling and Computing*. 2024. 11, No. 1. P. 50–58.
- [2] Michuta O. R., Martyniuk P. M. Nonlinear evolutionary problem of filtration consolidation with the non-classical conjugation condition. *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*. 2022. 30, No. 1. P. 71–87.
- [3] Mishra A., Raviteja K. V. N. S., Das S. K., Reddy K. R. Assessing the sustainability of composite liner systems for municipal solid waste landfills. *Journal of Environmental Engineering and Science*. 2025. 20, No. 3. P. 179–186.
- [4] Sergienko I. V., Khimich O. M., Klyushin D. A., Lyashko V. I., Lyashko S. I., Semenov V. V. Formation and development of the scientific school of the mathematical theory of filtration. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. 59, No. 1. P. 61–70.

- [5] Touze-Foltz N., Xie H., Stoltz G. Performance issues of barrier systems for landfills: A review. *Geotextiles and Geomembranes*. 2021. 49, No. 2. P. 475–488.
- [6] Ulianchuk-Martyniuk O. V. Modeling of the influence of solution strength on the jumps of moisture content in a thin geochemical barrier. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. 277, No. 1. P. 173–185.

Координація рою дронів у задачі truck-and-multi-UAV доставки з гнучкими точками запуску та повернення

Сергій МАРТИНЮК, Михайло СИДОРА

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

s.martyniuk@chnu.edu.ua; sydora.mykhailo@chnu.edu.ua

У truck-and-multi-UAV системі потрібно узгоджувати не лише маршрут і призначення клієнтів, а й місії кількох БПЛА, моменти запуску/приймання, очікування та пропуску здатність спільної платформи. Просторову гнучкість додатково створюють короткі зупинки вантажівки у неклієнтських дорожніх точках.

Метою роботи є компактне формулювання такої системи та виділення її математичних властивостей. Оскільки flexible/non-customer launch and recovery sites уже досліджуються, авторський акцент переноситься на їх інтеграцію з подієвим розкладом рою та post-optimality аналізом просторової гнучкості.

Відомі моделі вже охоплюють кілька БПЛА, scheduling launch/recovery-операцій і гнучкі точки зустрічі [2, 3, 4]. Тому внесок цієї роботи формулюється через залежність оптимального makespan від множини candidate sites, маржинальні характеристики точок і критично-шляхову оцінку координаційного навантаження.

Ознака	FSTSP / вузлова модель	Відомі multi-UAV / flexible-site моделі	Акцент цієї роботи
Launch/recovery	маршрутні вершини	flexible / non-customer sites	candidate sites S + swarm schedule
Координація	один БПЛА	multi-UAV scheduling, waiting/queueing	серіалізація платформ
Теоретичний шар	routing / makespan	routing / scheduling	$T^*(S)$, Δ_s , Δ_A , Ψ_{flex}

Нехай $G^T = (V^T, A^T)$, де $V^T = \{0, n+1\} \cup C \cup S$; C — клієнти, S — кандидатні неклієнтські зупинки, $H = \{1, \dots, m\}$ — множина БПЛА. Місія $f = (i, k, j, h)$ означає запуск у i , обслуговування k і приймання у j ; множина F попередньо відсікає енергетично, вантажно або просторово нездійсненні місії.

Змінні x_{ij} описують маршрут вантажівки, y_f — активні місії, а часові змінні задають розклад руху вантажівки, запусків і приймань БПЛА. Первинною метою є мінімізація makespan, а пробіг і енерговитрати є лише вторинними критеріями. Щоб уникнути залежності від довільних «малих» ваг, критерій задається лексикографічно:

$$\text{lexmin} \left(T, \sum_{(i,j) \in A^T} d_{ij}^T x_{ij}, \sum_{f \in F} E(f) y_f \right). \quad (1)$$

Якщо $S_1 \subseteq S_2$, $F(S_1) \subseteq F(S_2)$, нові точки є опційними, а старі обмеження не змінюються, то $T^*(S_2) \leq T^*(S_1)$. Звідси для $s \notin S$:

$$\Delta_s(S) = T^*(S) - T^*(S \cup \{s\}) \geq 0, \quad s \notin S, \quad (2)$$

$$\Delta_A(S) = T^*(S) - T^*(S \cup A) \geq 0, \quad A \subseteq S^{\max}, \quad A \cap S = \emptyset. \quad (3)$$

Монотонність не гарантує субмодулярності: launch- і recovery-точки можуть бути комплементарними, тому адаптивна дискретизація має оцінювати не лише одиничні точки, а й пари або групи кандидатів.

Ψ_{flex} є post-optimality характеристикою fixed- та flexible-рішень. Щоб не рахувати паралельні операції, координаційне навантаження $C^{\text{coord}}(x)$ визначається лише через координаційні дуги критичного шляху подієвого графа:

$$C^{\text{coord}}(x) = \max_{P \in \mathcal{P}^*(x)} \sum_{e \in P \cap \mathcal{A}_{\text{coord}}(x)} c_e. \quad (4)$$

$$\Delta C^{\text{coord}} = \max \{0, C^{\text{coord}}(x^{\text{flex}}) - C^{\text{coord}}(x^{\text{fix}})\}. \quad (5)$$

Для оптимальних x^{fix} та x^{flex} величина ΔC^{coord} є інкрементальним координаційним навантаженням переходу fixed→flexible. Позначивши $\Delta T = T^{\text{fix}} - T^{\text{flex}} \geq 0$, за $\Delta C^{\text{coord}} > 0$ маємо:

$$\boxed{\Psi_{\text{flex}} = \frac{G^{\text{flex}}}{K^{\text{inc}}} = \frac{\Delta T}{\Delta C^{\text{coord}}}}, \quad \Delta C^{\text{coord}} > 0. \quad (6)$$

ΔT і ΔC^{coord} мають однакову часову розмірність, тому Ψ_{flex} є безрозмірним і не залежить від одиниць часу за узгодженого масштабування всіх часових параметрів. Поріг $\Psi_{\text{flex}} = 1$ є операційним: при $\Psi_{\text{flex}} > 1$ скорочення makespan перевищує додаткове критично-шляхове координаційне навантаження; це не грошовий break-even point.

$$\frac{\partial \Psi_{\text{flex}}}{\partial \Delta T} = \frac{1}{\Delta C^{\text{coord}}} > 0, \quad \frac{\partial \Psi_{\text{flex}}}{\partial \Delta C^{\text{coord}}} = -\frac{\Delta T}{(\Delta C^{\text{coord}})^2} \leq 0. \quad (7)$$

Індекс зростає з часовим вигравом і спадає з координаційним навантаженням. При $\Delta C^{\text{coord}} = 0$, $\Delta T > 0$ flexible-рішення операційно домінує; при $\Delta C^{\text{coord}} = \Delta T = 0$ виникає невизначеність 0/0. Практична здатність Ψ_{flex} ранжувати сценарії потребує окремої обчислювальної валідації.

Оновлена постановка не претендує на першість у non-customer launch/recovery locations. Її математичний внесок полягає у зв'язуванні candidate-site selection з багатодроновим подієвим розкладом та у дослідженні функції $T^*(S)$: встановлюється монотонність, вводяться $\Delta_s(S)$ і $\Delta_A(S)$, а комплементарність точок пояснює відсутність загальної greedy-гарантії.

Уточнений Ψ_{flex} порівнює часовий виграв з інкрементальним координаційним навантаженням критичного шляху. Наступний етап — відтворювана обчислювальна перевірка fixed/flexible baselines, sensitivity analysis індексу та single-site проти group-site refinement.

Література

- [1] Murray C. C., Chu A. G. The Flying Sidekick Traveling Salesman Problem. *Transportation Research Part C*. 2015. 54. P. 86–109. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X15000844>.
- [2] Murray C. C., Raj R. The multiple flying sidekicks traveling salesman problem: Parcel delivery with multiple drones. *Transportation Research Part C*. 2020. 110. P. 368–398. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X19302505>.
- [3] Salama M. R., Srinivas S. Collaborative truck multi-drone routing and scheduling problem: Package delivery with flexible launch and recovery sites. *Transportation Research Part E*. 2022. 164. Article 102788. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1366554522001776>.
- [4] Mahmoudi M., Eshghi K. Energy-constrained multi-visit TSP with multiple drones considering non-customer rendezvous locations. *Expert Systems with Applications*. 2022. 210. Article 118479. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417422015676>.

Схеми апроксимації початкових задач для диференціально-різницевого рівнянь та їх числове моделювання

Олександр МАР'ЯНЧУК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
marianchuksasha@gmail.com

Диференціально-різницево рівняння є математичними моделями багатьох прикладних задач у технічних, хімічних, біологічних, економічних та інших процесах, еволюція яких залежить від передісторії. Для наближеного дослідження математичних моделей, що описують процеси з післядією, ефективним виявився метод апроксимації рівнянь із запізненням послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь [1].

Розглянемо початкову задачу для диференціально-різницевого рівняння із запізненням:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (2)$$

де $x(t) \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $f(t, u, v)$ — неперервна функція, визначена для $t \in [0, T]$, $u, v \in \mathbb{R}$, що задовольняє умову Ліпшиця за u і v , $\varphi_0(t)$ — неперервна початкова функція.

Схеми апроксимації диференціально-різницевого рівнянь класичної і підвищеної точності та їх числове моделювання для тестових модельних систем із запізненням наведено в роботах [2, 3].

Будемо розглядати допоміжні функції $y_i(t) = x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right)$, $i = \overline{0, m}$. Обмежувачись в розкладі в ряд Тейлора двома членами

$$y_{i-1}(t) = y_i(t) + \frac{\tau}{m} y'_i(t) + \dots$$

початковій задачі для рівняння із запізненням (1)–(2) поставимо у відповідність задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (класичну схему апроксимації) [2]:

$$\begin{aligned} y'_0(t) &= f(t, y_0, y_m), \\ y'_i(t) &= \frac{m}{\tau} (y_{i-1}(t) - y_i(t)), \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$y_i(t_0) = \varphi\left(t_0 - \frac{i\tau}{m}\right), \quad i = \overline{0, m}. \quad (4)$$

Якщо розв'язок задачі (1)–(2) задовольняє умову Ліпшиця на $[t_0 - \tau, T]$ або диференційовний, тоді мають місце співвідношення [2]:

$$\left| x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) - y_i(t) \right| \leq \frac{K}{\sqrt{m}}, \quad j = \overline{0, m}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (5)$$

Обмежуючись трьома членами розкладу в ряд

$$y_{i-1}(t) = y_i(t) + \frac{dy_i(t)}{dt} \frac{\tau}{m} + \frac{d^2y_i(t)}{dt^2} \frac{\tau^2}{m^2} \frac{1}{2} + \dots$$

початковій задачі (1)–(2) поставимо у відповідність задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (схему апроксимації підвищеної точності):

$$\begin{cases} y'_0 = f(t, y_0, y_m), \\ y'_i = y_{m+i} \\ y'_{m+i} = 2\mu^2(y_{i-1} - y_i) - 2\mu y_{m+i}, i = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau} \end{cases} \quad (6)$$

$$y_0(0) = \varphi(0), y_j(0) = \varphi\left(-\frac{j\tau}{m}\right), y'_j(0) = \varphi'\left(-\frac{j\tau}{m}\right), j = 1, \dots, m. \quad (7)$$

При додаткових умовах на початкову задачу (1)–(2) встановлено точність апроксимації схеми підвищеної точності [3]:

$$\max_{0 \leq s \leq T} |x(s) - y_0(s)| \leq \frac{A}{m}, \quad A > 0. \quad (8)$$

Для моделювання процесу розв'язання початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь за допомогою наведених схем апроксимації, створено прикладний програмний додаток, що забезпечує автоматизацію дослідження — від алгебраїчного зведення вхідного математичного виразу до його програмної трансляції у розрахункову різницеву схему. Технічно ця автоматизація реалізована через конвеєрну архітектуру самописного C++ ядра, яка автоматично перетворює LaTeX-запис у динамічну структуру «Обчислювального дерева». Завдяки такій символній репрезентації система здатна самостійно аналізувати записання в аргументах, генерувати схеми апроксимації та гнучко налаштовувати параметри сітки як для самих обчислень, так і для зручної вибірки результатів. Наприклад, кроком автоматизації є перехід до неявної різницевої схеми Гіра 1-го порядку: структура дерева дозволяє алгоритмічно виконувати точне аналітичне диференціювання, генеруючи матрицю Якобі, що є необхідним для методів Ньютона при розв'язанні жорстких нелінійних систем.

Архітектура обчислювального C++ ядра побудована на принципах декомпозиції та модульності, що робить його легким універсальним бекендом, готовим до інтеграції в будь-які програмні екосистеми. Успішним прикладом такої інтеграції є розроблений багатоплатформений додаток на React Native, де взаємодія ізольованого рушія розкривається через графічний інтерфейс інтерактивного «нескінченного робочого полотна».

На основі аналізу числових результатів для тестових задач одержуємо, що схема підвищеної точності демонструє кращі результати. Наприклад, точність класичної схеми при $m = 100$ досягається схемою підвищеної точності при $m = 10$.

Література

- [1] Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. New York : Academic Press, 1981. P. 155–197.

- [2] Піддубна Л.А., Черевко І.М. Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь. Нелінійні коливання. 1999. № 1. С. 42–50.
- [3] Краснокутський О.С., Черевко І.М. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь та їх числове моделювання. Буковинський математичний журнал. 2026. № 1. С. 7–15.

Аналіз узагальнень моделі Скеллама

Василь МАЦЕНКО

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

v.matsenko@chnu.edu.ua

У багатьох біологічних видів послідовні покоління не перекриваються і ріст їх чисельності відбувається в дискретні моменти часу. Важливим стає питання дослідження динаміки чисельності таких популяцій [1]. У цьому випадку математичні моделі пов'язують чисельність популяції N_{t+1} у момент часу $t + 1$ з чисельністю в попередні моменти часу. Це в простішому випадку при постійності основних факторів середовища призводить до розгляду дискретних моделей вигляду

$$N_{t+1} = \mathcal{F}(N_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

де N_t – чисельність популяції в момент часу t . Функція $\mathcal{F}(\cdot)$ задовольняє такі умови: $\mathcal{F}(N) \geq 0$ при $N \geq 0$, $\mathcal{F}(0) = 0$, при малих N $\mathcal{F}(N)$ зростає, а при $N \rightarrow \infty$ $\mathcal{F}(N) \rightarrow 0$, оскільки реальний ресурс популяції обмежений. Функція $\mathcal{F}(N_t)$ часто береться у формі $\mathcal{F}(N_t) = f(N_t) \cdot N_t$. Тоді функція $f(N_t) = \frac{N_{t+1}}{N_t}$ – це єдиний показник, що виражає характер процесів виживання і народжування в дискретних моделях. Її називають коефіцієнтом розмноження або природного відтворення. У цьому випадку модель (1) набуває вигляду

$$N_{t+1} = f(N_t) \cdot N_t. \quad (2)$$

До таких популяцій можна віднести багато видів комах з однорічною генерацією. Серед таких моделей в екології, що описуються різницевиими рівняннями першого порядку, найбільш відомими є логістична дискретна модель (рівняння Ферхюльста з дискретним часом) $N_{t+1} = rN_t(1 - N_t)$ та модель Рікера $N_{t+1} = N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)\right)$.

Ці моделі, крім монотонної стабілізації чисельності популяції до деякого стаціонарного рівняння, мають періодичні розв'язки з періодом $T = 3$, а значить і періодичні розв'язки будь-якого періоду та розв'язки з хаотичною поведінкою [1].

У 1951 року Скелламом в роботі [2] була запропонована модель, в якій коефіцієнт розмноження $f(N_t) = \frac{N_{t+1}}{N_t}$ на відміну від спадної лінійної та спадної експоненціальної функції, що має місце в логістичній моделі та моделі Рікера, є спадною гіперболічною функцією вигляду

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t}, \quad a, b > 0.$$

Тут параметр a задає найбільше значення розмноження особин, а параметр b описує вплив саморегулюючих факторів на динаміку дискретної популяції.

Відомо [2, 3], що модель Скеллама допускає існування тільки стаціонарного стану з монотонною стабілізацією.

Виникає питання чи існують узагальнення моделі Скеллама з періодичними та хаотичними режимами, оскільки такі режими в природі часто зустрічаються. З'ясувалося, що такі узагальнення існують. Опишемо їх.

У праці [3] вивчається узагальнення моделі Скеллама для функцій розмноження виду

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^2} \text{ та } f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^3}.$$

Показано, що для цих двох функцій при певних співвідношеннях між параметрами a та b в моделі (2) спостерігається лише монотонна стабілізація чисельності популяції до стаціонарного стану.

Існування періодичних режимів різних періодів та їх дослідження проведено у працях [4, 5] для монотонної функції розмноження вигляду

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}.$$

та немонотонної –

$$f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^4}.$$

Тобто узагальнення моделі Скеллама вигляду $N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^3}$ та $N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^4}$ мають як стаціонарні так і періодичні розв'язки різних періодів, а також режими з хаотичною поведінкою.

Тут знайдено такі розв'язки, а також досліджено питання їх стійкості. Показано, що при зміні параметрів a та b існуючі стійкі режими стають нестійкими. Натомість виникають стійкі розв'язки інших періодів.

У працях [3, 6] проведено аналіз узагальнень моделі Скеллама зі збором урожаю. Показано, що при відповідній зміні параметрів збору врожаю стаціонарні та періодичні розв'язки втрачають свою стійкість і навіть можуть повністю зникати, при цьому популяція стає приреченою на вимирання. Тому важливо при експлуатації популяцій знати ті критичні значення параметрів збору врожаю, які спричиняють зміну поведінки чисельності популяцій.

Література

- [1] Маценко В.Г. Математичне моделювання екологічних процесів: навч. посібник. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. 376 с.
- [2] Skellam J.G. Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika*, 1951. **38**. 196–218.
- [3] Маценко В.Г. Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю. *Буковинський математичний журнал*, 2024. **12(1)**. 74–83.
- [4] Маценко В.Г. Аналіз моделей типу Скеллама з періодичними режимами. *Буковинський математичний журнал*, 2024. **12(2)**. 128–142.

- [5] Маценко В.Г. Узагальнення моделі типу Скеллама з немонотонною функцією розмноження. *Буковинський математичний журнал*, 2025. **13(1)**. 52–65.
- [6] Маценко В.Г. Комп'ютерний аналіз моделей типу Скеллама з немонотонною функцією розмноження та збором урожаю. *Буковинський математичний журнал*, 2026. **14(1)**. 124–133.

Порівняльний аналіз ефективності інструментарію Python для моделювання процесів гідродинаміки методом ґраткових рівнянь Больцмана на гетерогенних архітектурах

Кирило МИХАЛЬЦОВ, Андрій КРЕНЕВИЧ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

kyrylo.mykhaltsov@knu.ua, krenevych@knu.ua

Метод ґраткових рівнянь Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) є мезоскопічною альтернативою прямій дискретизації рівнянь Нав'є–Стокса з повністю локальним оновленням функції розподілу $f_i(\mathbf{x}, t)$ — лише через вісім найближчих сусідів. Така локальність робить LBM природним кандидатом для масивно-паралельних обчислень. Досліджено п'ять Python-реалізацій (NumPy, CuPy, JAX, Numba, Taichi) на гетерогенній платформі CPU + GPU.

Розглянуто стандартну модель D2Q9 з оператором зіткнень BGK [1]:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_{\text{eff}}} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (1)$$

доповнену замиканням Large Eddy Simulation за моделлю Смагоринського ($C_s = 0,15$), у якій тензор $Q_{\alpha\beta}$ обчислюється локально через нерівноважну частину f_i^{neq} , та граничними умовами Цоу–Хе [2] на вході і bounce-back на стінках. Тестова задача — обтікання циліндра при $\text{Re} = u_{\text{in}} D / \nu = 320$. Експерименти виконано на платформі Intel Core i9-13900K + NVIDIA RTX 3080 Ti на сітці 800×400 протягом 50 000 ітерацій; продуктивність вимірювалась у MLUPS (Million Lattice Updates Per Second).

Спостереження 1. LBM є memory-bound алгоритмом: при низькій арифметичній інтенсивності визначальним фактором продуктивності є пропускна здатність пам'яті. CuPy матеріалізує близько вісьмох проміжних масивів у глобальній VRAM на крок симуляції, що повністю нівелює перевагу 10 240 ядер CUDA: 65,34 MLUPS проти 327,91 MLUPS у багатоядерного CPU-рушія Numba.

Спостереження 2. Об'єднання усіх етапів кроку у єдине мега-ядро (kernel fusion) у Taichi [3] завантажує дев'ять значень f_i у регістри стрімінгового мультипроцесора рівно один раз і досягає 403,58 MLUPS — прискорення $\approx 107\times$ відносно базової NumPy-реалізації, що відповідає продуктивності рівня C++/CUDA.

Отже, для memory-bound задач CFD сучасний Python-стек дозволяє досягати рівня нативного коду без втрати продуктивності розробки: Taichi є оптимальним вибором для систем з дискретним GPU, тоді як Numba забезпечує найкращу продуктивність на платформах без GPU. Код усіх п'яти реалізацій: github.com/m-kyrylo/LBM_PythonProject.

Література

- [1] Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. Phys. Rev. 1954. 94. P. 511–525.
- [2] Zou Q., He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. Phys. Fluids. 1997. 9, № 6. P. 1591–1598.
- [3] Hu Y., Li T.-M., Anderson L., Ragan-Kelley J., Durand F. Taichi: a language for high-performance computation on spatially sparse data structures. ACM Trans. Graph. 2019. 38, № 6. Art. 201. P. 1–16.

Стійкий критерій відбору зразків для активного напівкерованого навчання при обмеженому маркуванні

Костянтин МІНКОВ

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

minkov.kostiantyn@chnu.edu.ua

У прикладних задачах класифікації розмічених даних мало, непозначених — багато, а кожна нова мітка коштує роботи експерта. Активне навчання (AL) обирає, *які* зразки віддати на маркування, а напівкероване навчання (SSL) використовує решту даних через псевдомітки. Поєднання цих підходів (ASSL) дозволяє зменшити вартість маркування, але породжує нову проблему: під час SSL-тренування прогнози моделі для одного й того самого зразка змінюються від кроку до кроку, тому класичні AL-критерії, засновані на невизначеності, стають ненадійними.

Нехай $p(x)$ — вектор ймовірностей класів для зразка x , а $\hat{y} = \arg \max p(x)$ — його псевдомітка, яку приймають, якщо $\max p(x) \geq \tau$. Невизначеність визначаємо як відстань між прогнозом і one-hot поданням псевдомітки:

$$u(x) = \|p(x) - \mathbf{1}_{\hat{y}}\|_2.$$

Щоб прибрати вплив темпоральної нестабільності, значення u згладжуємо експоненціальним ковзним середнім (ЕМА) і додаємо до нього верхню довірчу межу (UCB):

$$u_t = \alpha u_t(x^w) + (1 - \alpha) u_{t-1}, \quad u_t^{\text{UCB}} = u_t + c_u \sqrt{v_t^u}, \quad (1)$$

де x^w — слабо аугментований зразок, v_t^u — ЕМА-оцінка дисперсії, α і c_u — параметри згладжування та UCB.

Другий показник — неузгодженість між слабкою x^w та сильною x^s аугментаціями,

$$i(x) = \frac{1}{2} [\text{KL}(p(x^w) \| p(x^s)) + \text{KL}(p(x^s) \| p(x^w))],$$

до якого застосовуємо те саме згладжування. Підсумковий критерій відбору — добуток

$$\text{Score}(x) = u^{\text{UCB}}(x) \cdot i^{\text{UCB}}(x), \quad (2)$$

причому обидва множники обчислюються під час SSL-тренування, тому окремий прохід по непозначеному пулу не потрібен. У варіанті ASSL-Pіз критерій додатково зважається ознакою різноманітності (кластеризація ембеддингів K-means++).

Метод перевірено на CIFAR-10, CIFAR-100, SVHN та MiniImageNet (ResNet-18, 10 раундів AL, конфігурація SSL — FixMatch, $\alpha = 0,8$, $\tau = 0,95$), результати усереднено за трьома запусками (табл. 1).

Запропонований критерій дає найкращу середню точність серед порівнюваних AL-методів (приріст відносно класичних підходів у режимі випадкової ініціалізації — близько

Таблиця 1: Середня тестова точність за всіма раундами й наборами даних (%) та час відбору на CIFAR-100 (с)

Метод	Випадкова ініціалізація	Успадкування ваг	Час відбору
Entropy	$30,73 \pm 1,68$	$38,38 \pm 1,40$	25,4
CoreSet	$36,55 \pm 1,73$	$42,62 \pm 1,27$	126,1
ALFA-Mix	$37,57 \pm 1,44$	$42,43 \pm 0,92$	495,7
ASSL	$37,07 \pm 1,44$	$42,83 \pm 0,80$	0,03
ASSL-Pіз	$37,68 \pm 1,49$	$42,64 \pm 1,02$	124,2

8 %), а час відбору для ASSL практично нульовий. Отже, згладжування ЕМА/UCB і врахування неузгодженості аугментацій роблять активний відбір стійким до нестабільності псевдоміток та зменшують вартість маркування; наступний крок — перенесення критерію на детекцію й сегментацію.

Література

- [1] X. Yang, Z. Song, I. King, Z. Xu. A survey on deep semi-supervised learning. *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.* 2023. 35, No. 9. P. 8934–8954. <https://doi.org/10.1109/TKDE.2022.3220219>
- [2] K. Sohn, D. Berthelot, C.-L. Li et al. FixMatch: Simplifying semi-supervised learning with consistency and confidence. *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* 2020. 33. P. 596–608.
- [3] M. Gao, Z. Zhang, G. Yu et al. Consistency-based semi-supervised active learning: Towards minimizing labeling cost. *arXiv*. 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.07153>

Задача дифракції ударної хвилі на жорсткому напівсферичному включенні

Олег НАЗАРЕНКО, Анжела СТЕХУН, Олександр ВАСИЛЬЄВ

Одеська державна академія будівництва і архітектури, Одеса, Україна

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна

gelo.fabric@gmail.com, angela.stehun@gmail.com, av5111955@gmail.com

Сучасні тонкостінні елементи конструкцій і споруд під час експлуатації часто зазнають інтенсивних та динамічних навантажень, що загрожують їхній міцності. У цьому контексті особливу актуальність має дослідження взаємодії недеформованих оболонок різної геометрії з навколишнім пружним середовищем.

Метою даної роботи є перенесення методу розривних рішень, який базується на методі узагальнених інтегральних перетворень [1] на динамічні задачі дифракції ударних хвиль на сферичних дефектах. Для цього побудовано розривний розв'язок хвильового рівняння [1] лінійної теорії пружності в сферичній системі координат, а потім зведено задачу дифракції плоскої ударної хвилі на тонкому нерухомому напівсферичному, абсолютно твердому включенні (дефекті) завтовшки h , жорстко зчепленому з донним утворенням до інтегродиференціального рівняння. Крім того, отримано асимптотичні вирази та обґрунтована збіжність отриманого розв'язку. Під дефектом слід розуміти частину поверхні, (серединна поверхня якої з нею збігається), при перетинанні якої хвильові функції, зміщення та напруження зазнають розривів першого роду. Методи дослідження базуються на узагальненій схемі методу інтегральних перетворень. Для виключення змінних застосовано послідовно інтегральні перетворення [1, 2, 3] Лапласа (змінна t), перетворення Фур'є (кут φ), перетворення Лежандра (кут θ), а також перетворення Ханкеля (радіальна змінна r). Збурення моделюється одиничною функцією Хевісайда, що дозволяє описувати східчастий процес приходу хвильового фронту зі заданою швидкістю c .

У сферичній системі координат розглянуто тривимірне хвильове рівняння

$$\square\Psi = \Delta\Psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при початкових} \quad \Psi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

$$\text{та граничних умовах на поверхні} \quad \left. \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \right|_{\varphi=-\pi, \pi}^{r>R} = 0, \quad \left. \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right|_{\varphi=-\pi, \pi}^{r=R} = 0,$$

де $\square$ – Гамільтоніан, Δ – Лапласіан, r, θ, φ – радіальна та кутові сферичні координати, $0 < \theta < \pi$. Повний потенціал подано у вигляді суперпозиції [4, 5] падаючої $\Psi_{\text{п}}$, відбитої $\Psi_{\text{в}}$ та дифракційної $\Psi_{\text{д}}$ складових. Побудовано аналітичний розривний розв'язок рівняння в термінах трансформант інтегральних перетворень. На етапі застосування перетворення Ганкеля за змінною r формуються стрибки функцій та їх нормальних похідних при перетині межі дефекту $r \rightarrow R \pm 0$: $\langle \Phi_{pnk}(R) \rangle = \Phi_{pnk}(R-0) - \Phi_{pnk}(R+0)$, $\langle \Phi'_{pnk}(R) \rangle = \langle \Phi'_{pnk}(R-0) \rangle - \langle \Phi'_{pnk}(R+0) \rangle$.

Після застосування зворотного перетворення Ганкеля [5] розривний розв'язок одновимірної граничної задачі виражено через модифіковані функції Бесселя $I_\nu(Rq)$ та Макдональда $K_\nu(rq)$ ($\nu = k + 1/2$):

$$\Phi_{pnk}(r) = R \left[\langle \Phi'_{pnk}(R) \rangle \frac{\overline{\Psi}_k(r, R)}{\sqrt{rR}} - \langle \Phi_{pnk}(R) \rangle \frac{\partial}{\partial R} \frac{\overline{\Psi}_k(r, R)}{\sqrt{rR}} \right].$$

Для абсолютно твердого включення ($r \rightarrow R + 0$) отримано вираз для визначення невідомого стрибка: $\Psi_{pnk}(R + 0) = f_{pnk} \frac{2\nu K_\nu(Rq) - 2RqK_{\nu+1}(Rq)}{(2\nu+1)K_\nu(Rq) - 2RqK_{\nu+1}(Rq)}$. В свою чергу, функція $f_{pnk} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f_p(r, \theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot P_k^{[n]}(\cos \theta) \exp(-in\varphi) d\varphi d\theta$ є відомою і її зовнішній вигляд залежить виключно від типу обраної падаючої хвилі.

Виконавши зворотні перетворення Лежандра та Фур'є, побудовано остаточний вираз для трансформанти потенціалу дифракційного поля:

$$\Psi_p(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{R}{r}} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f_p(\psi, \vartheta) \sin \vartheta \cdot \Omega(R + 0, \theta, \vartheta, \varphi, \psi) d\psi d\vartheta,$$

де інтегральне ядро має вигляд:

$$\Omega(R + 0, \theta, \vartheta, \varphi, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=|n|}^{\infty} \sigma_{kn} P_k^{[n]}(\cos \theta) P_k^{[n]}(\cos \vartheta) \cos(n\psi) \cos(n\varphi) \cdot \Lambda_\nu(r, R, q),$$

$$\text{та } \Lambda_\nu(r, R, q) = \frac{K_\nu(rq)}{[(2\nu - 1)K_\nu(Rq) - 2RqK_{\nu+1}(Rq)]}.$$

В роботі було проведено аналітичні дослідження збіжності подвійних рядів (у складі інтегралів), а також асимптотики ядра $\Lambda_\nu(r, R, q)$ при $k \rightarrow \infty$ та фіксованому аргументі:

$\frac{K_\nu(z)}{[(2\nu-1)K_\nu(z)-2zK_{\nu+1}(z)]} \sim \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\nu)(z/2)^{-\nu}}{[(\nu-1/2)\Gamma(\nu)(z/2)^{-\nu}-2z\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu-1}]} = -\frac{1}{2k+1}$; та при $z \rightarrow \infty$ і фіксованому k : $\frac{K_\nu(z)}{[(2\nu-1)K_\nu(z)-2zK_{\nu+1}(z)]} \sim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot \exp(-z) \left\{ 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \dots \right\}}{((2\nu-1)-2z) \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot \exp(-z) \left\{ 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \dots \right\}} = -\frac{1}{2(k-z)}$. Потенціал падаючою хвилі f_p асоціюємо, як функцію Хевісайда у вигляді:

$$f_p|_{r=R} = \frac{\partial \Psi_{diff}}{\partial r} \Big|_{r=R, \varphi=\overline{-\pi, \pi}} = \Psi'_p(R + 0, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{p} (\exp_p^+ - \exp_p^-),$$

де $\exp_p^\pm = \cos(\varphi \pm \alpha) \exp[-p(R - r \sin \theta \cos(\varphi \pm \alpha))]$, а α — фронтальний кут нахилу ударної хвилі. Обґрунтовано можливість застосування побудованих розривних розв'язків для обчислення потенціалу $\Psi_p(r, \theta, \varphi)$ у будь-якій точці середовища.

В роботі доведено, що розв'язок хвильового рівняння для даної задачі з точністю до сталих збігається з розв'язками задачі теорії пружності для хвиль кручення [4, 5].

Література

- [1] Popov G.Ya. Problem of Stress concentration in the neighbourhood of spherical defect. Adv.in Mech. 1992. 15, № 1-2. P. 71–110.
- [2] Амензаде Ю. А. Теорія пружності: Підручник. 2-ге вид., перероб. та дод., Київ/Харків: Вища шк., 1971. 287 с.

- [3] Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., Marichev, O.I. Integrals and Series. Routledge. 2018. 640 p.
- [4] Nazarenko O. A., Stekhun A. O., Yarovyi A. T. The diffraction of elastic waves by spherical defects. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика».2023. 42, № 1. С. 64—72.
- [5] Nazarenko O., Stekhun A., Yarovyi A. The diffraction of elastic waves by spherical defects. Surveys in Mathematics and its Applications. 2024. 19. P. 217—232.

Характеризація многозначних відображень в термінах замикання

Василь НЕСТЕРЕНКО, Олена ФОТІЙ

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

v.nesterenko@chnu.edu.ua, o.fotij@chnu.edu.ua

Добре відомо, що відображення $f : X \rightarrow Y$ між двома топологічними просторами X та Y є неперервним тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини A простору X , де $\overline{A}$ означає замикання множини A . В [1, 2] досліджувалися характеристики різних ослаблень неперервності в термінах замикання. Зокрема там встановлено, що відображення f є B -квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної передвідкритої множини A , такої, що $\text{int}\overline{A}$ – область.

Природно виникло питання про перенесення результатів з [1, 2] на випадок многозначних відображень. Виявляється, що відповідні результати можна отримати лише для ослаблень знизу многозначних відображень, а для ослаблень зверху можна легко побудувати відповідні контрприклад.

Нехай X і Y – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \rightarrow Y$ називається:

- *неперервним зверху /знизу/ в точці $x_0 \in X$* , якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Y , такої, що $F(x_0) \subseteq W$ / $F(x_0) \cap W \neq \emptyset$ / існує окіл U точки $x_0 \in X$, такий, що $F(x) \subseteq W$ / $F(x) \cap W \neq \emptyset$ / для всіх $x \in U$;
- *майже неперервним зверху /знизу/ в точці $x_0 \in X$* , якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Y , такої, що $F(x_0) \subseteq W$ / $F(x_0) \cap W \neq \emptyset$ / і довільного околу U точки $x_0 \in X$ існує непорожня множина A в X , така, що $U \subseteq \overline{A}$ і $F(x) \subseteq W$ / $F(x) \cap W \neq \emptyset$ / для всіх $x \in A$.

Многозначне відображення $F : X \rightarrow Y$ називається *неперервним зверху /знизу/* чи *майже неперервним зверху /знизу/*, якщо воно є таким в кожній точці з X .

Теорема 1. *Нехай X і Y – топологічні простори та $F : X \rightarrow Y$ – многозначне відображення. Відображення F неперервне знизу тоді і тільки тоді, коли $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)}$ для довільної підмножини A простору X .*

Теорема 2. *Нехай X і Y – топологічні простори та $F : X \rightarrow Y$ – многозначне відображення. Відображення F майже неперервне знизу тоді і тільки тоді, коли $F(\overline{G}) \subseteq \overline{F(G)}$ для довільної відкритої підмножини G простору X .*

Література

- [1] Нестеренко В.В. Нові характеристики деяких ослаблень неперервності. Бук. мат. журн. 2013. 1, № 3-4. С. 106–113.
- [2] Нестеренко В.В. Характеризація різних ослаблень неперервності з допомогою замика-
ння. Бук. мат. журн. 2014. 2, № 2-3. С. 177–182.

Модифіковане ланцюгове A_2 -зображення чисел

Олена НІКОРАК

Інститут математики НАН України, УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

nikorak@imath.kiev.ua, prats4444@gmail.com

Нехай $A = \{e_0, e_1\}$ — алфавіт (набір дійсних чисел $0 < e_0 < e_1$), $L = A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $0 < b$ — фіксоване дійсне число.

Розглядаються нескінченні ланцюгові дроби (A_2^b -дроби) виду

$$0 + \frac{b}{a_1 + \frac{b}{a_2 + \dots}} \equiv b/a_1 + b/a_2 + \dots, \quad a_n \in A. \quad (1)$$

Збіжність A_2^b -дробів виду (1) є наслідком теореми Зейделя-Штерна, оскільки ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_n \prod_{j=1}^i b^{(-1)^{i+j+1}}$ розбіжний. Якщо $b = 1$, то ланцюгові A_2^b -дроби є A_2 -дробами, на основі яких розроблена і успішно використана у задачах фрактального аналізу система зображення чисел $[1, 2, 3]$. Ми цікавимось системою зображення чисел, що ґрунтується на розкладі числа в нескінченний ланцюговий A_2^b -дріб.

Теорема 1. Якщо $e_0 \cdot e_1 = \frac{b}{2}$, то для будь-якого числа $x \in [\frac{b}{2e_1}; \frac{b}{2e_0}]$ існує послідовність $(a_n) \in L$ така, що

$$x = b/a_1 + b/a_2 + \dots \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots}^{A_2^b}. \quad (2)$$

Розклад числа x в ланцюговий дріб (2) називається A_2^b -розкладом, а скорочений запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots}^{A_2^b}$ — його A_2^b -зображенням.

Підхідним дробом ланцюгового дроби $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2^b}$ називається значення скінченного ланцюгового дроби $[0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, де $p_0 \equiv 0$, $p_1 \equiv b$, $q_0 \equiv 1$, $q_1 \equiv a_1$, $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + bp_{n-1}$, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + bq_{n-1}$, $n \in N$, причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n(a_n)}{q_n(a_n)} = x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2^b}.$$

Для підхідних дробів ланцюгового дроби $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2^b}$ має місце рівність:

$$q_m p_{m-1} - p_m q_{m-1} = (-1b)^m, \quad m \in N.$$

Зауваження 1. Умова $e_0 \cdot e_1 = \frac{b}{2}$ для елементів алфавіту e_0 і e_1 є необхідною і достатньою умовою нульової надлишковості системи A_2^b -зображення чисел, тобто в цьому випадку існує зліченна множина чисел (A_2^b -бінарні числа), що мають два формально різні A_2^b -зображення чисел:

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} e_0 (e_0 e_1)}^{A_2^b} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} e_1 (e_1 e_0)}^{A_2^b}.$$

Решта чисел відрізка $[\frac{b}{2e_1}; \frac{b}{2e_0}]$ (A_2^b -унарні числа) мають єдине A_2^b -зображення чисел.

Циліндром $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2^b}$ рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$, де $(c_1, c_2, \dots, c_m) \in A^m$, $m \in N$, називається множина чисел виду $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots}^{A_2^b}$, $(a_n) \in L$.

Якщо $e_0 \cdot e_1 = \frac{b}{2}$, то циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2^b}$ має такі властивості:

$$1) \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2^b} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m e_0}^{A_2^b} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m e_1}^{A_2^b},$$

$$2) \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2^b} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{A_2^b},$$

$$3) \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2^b} = \begin{cases} \left[\frac{p_{m-1} + e_0 b p_{m-2}}{q_{m-1} + e_0 b q_{m-2}}, \frac{p_{m-1} + e_1 b p_{m-2}}{q_{m-1} + e_1 b q_{m-2}} \right], & \text{якщо } m - \text{ не парне,} \\ \left[\frac{p_{m-1} + e_1 b p_{m-2}}{q_{m-1} + e_1 b q_{m-2}}, \frac{p_{m-1} + e_0 b p_{m-2}}{q_{m-1} + e_0 b q_{m-2}} \right], & \text{якщо } m - \text{ парне,} \end{cases}$$

$$4) |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2^b}| = \frac{2b^m(e_1 - e_0)}{(2e_1 q_{m-1} + b q_{m-2})(2e_0 q_{m-1} + b q_{m-2})}.$$

Для заданих невід'ємних дійсних чисел b_{e_0}, b_{e_1} і параметра $b = b_{e_0} \cdot b_{e_1}$, а також пари чисел e_0 і e_1 таких, що $e_0 \cdot e_1 = \frac{1}{2}$, розглядається функція f_b , означена рівністю

$$f_b(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}) = \Delta_{[a_1 b_{a_1}][a_2 b_{a_2}] \dots [a_n b_{a_n}] \dots}^{A_2^b}, \quad (3)$$

де $a_n \in \{e_0, e_1\}$, $e_0 \cdot e_1 = \frac{1}{2}$, і $[a_n b_{a_n}] = a_n \cdot b_{a_n}$.

Означення функції f_b рівністю (3) є коректним, оскільки для довільних

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} e_0 (e_0 e_1)}^{A_2} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} e_1 (e_1 e_0)}^{A_2}$$

очевидно має місце рівність

$$\Delta_{[a_1 b_{a_1}][a_2 b_{a_2}] \dots [a_{n-1} b_{a_{n-1}}][e_0 b_0]([e_0 b_0][e_1 b_1])}^{A_2^b} = \Delta_{[a_1 b_{a_1}][a_2 b_{a_2}] \dots [a_{n-1} b_{a_{n-1}}][e_1 b_1]([e_1 b_1][e_0 b_0])}^{A_2^b}.$$

Теорема 2. Функція f_b є неперервною строго зростаючою функцією, причому, якщо $b_{e_0} = \sqrt{b}$, то $f_b(x) = \sqrt{b}x$, в решті випадків $f_b(x)$ є сингулярною (відмінною від константи, похідна яких рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

У доповіді пропонуються результати дослідження тополого-метричних властивостей A_2^b -зображення чисел, геометрії цього зображення, а також застосування його до побудови класу функцій зі складними локальними властивостями.

Література

- [1] Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Pratsiovytyi M. V. *A₂-continued fraction representation of real numbers and its geometry*. Ukrainian Math. J. 2009, **61** (4), 541–555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>

- [2] Nikorak O., Ratushniak S. A *Continuous projector from the binary representation of numbers to the continuous A_2 -representation*. Bukovynskyi Mathematical Journal. 2025, 13 DOI:<https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.05>
- [3] Pratsiovytyi M., Goncharenko Ya., Lysenko I., Ratushniak S. *Finite A_2 -continued fractions in the problems of rational approximations of real numbers* Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, vol. 75, no. 6, June 2023, pp. 849-858.

Третя початково-крайова задача для параболічного псевдодиференціального рівняння порядку $\alpha \in (1, 2)$

Михайло ОСИПЧУК

Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ,
Україна

mykhailo.osypchuk@cnu.edu.ua

Зафіксуємо деякі сталі $\alpha \in (1, 2)$, $\beta \in (0, 1)$ і $c > 0$. На множині функцій заданих на $\mathbb{R}^d$ задамо псевдодиференціальні оператори $\Delta_\alpha = -(-\Delta)^{\alpha/2}$ (дробовий Лапласіан порядку α) символом $(-|\lambda|^\alpha)_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$ та ∇_β (“псевдоградієнт” порядку β) символом $(i\lambda|\lambda|^{\beta-1})_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$. Якщо $\alpha = 2$, а $\beta = 1$ маємо $\Delta_\alpha = \Delta$ and $\nabla_\beta = \nabla$ звичайні оператор Лапласа та градієнт, відповідно.

Розглянемо псевдодиференціальне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c \Delta_\alpha u(t, \cdot)(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (1)$$

Нехай S гіперплощина або ж обмежена замкнена досить гладка поверхня. Позначимо через $\nu(x)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S в точці $x \in S$. Якщо S гіперплощина, то вважатимемо її заданою рівнянням $(x, \nu) = 0$. Очевидно, що тоді $\nu(x) = \nu$, $x \in S$.

Розглянемо наступну початково-крайову задачу. Знайти таку дійснозначну функцію $(u(t, x))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка б задовольняла рівняння (1) при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$, початкову умову

$$u(0+, x) = \varphi(x) \quad (2)$$

з деякою заданою функцією $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ та крайову умову

$$\frac{1+q(x)}{2} \nabla_\beta^{\nu(x)} u(t, \cdot)(x+) - \frac{1-q(x)}{2} \nabla_\beta^{\nu(x)} u(t, \cdot)(x-) = r(x)u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in S, \quad (3)$$

із заданими функціями $(q(x))_{x \in S}$, $(r(x))_{x \in S}$. Тут $\nabla_\beta^{\nu(x)} := (\nabla_\beta, \nu(x))$.

Припустимо, що функція φ неперервна і обмежена на $\mathbb{R}^d$, а $(\mathcal{F}^{-1}[\varphi, \lambda]|\lambda|^{-\alpha+\beta+1})_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$ абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}^d$ (символом $\mathcal{F}^{-1}[\varphi, \cdot]$ позначено обернене перетворення Фур’є функції φ); функції q і r обмежені і неперервні ($r(x) > 0$, $x \in S$).

Сформульована задача розв’язана в [1, 2] (див. також [3]) для випадку $\alpha \in (1, 2)$, $\beta = \alpha - 1$ та в [4, 5], якщо $\alpha \in (1, 2)$, $\frac{\alpha-1}{2} < \beta < \alpha - 1$. Наступні теореми відображають другий випадок.

Теорема 1 ([5]). Нехай S — гіперплощина $(x, \nu) = 0$.

Розв’язком задачі (1), (2), (3) є функція $(U(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка є розв’язком інтегрального рівняння

$$U(t, x, \varphi) = H(t, x, \varphi) - 2c \int_0^t d\tau \int_S \Delta_{\alpha-\beta-1} g(t-\tau, \cdot, z)(x) r(z) U(\tau, z, \varphi) d\sigma_z, \quad (4)$$

де функція $(H(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$ задається рівністю

$$H(t, x, \varphi) = \Delta_{\alpha-\beta-1}u(t, \cdot, \Delta_{-\alpha+\beta+1}\varphi)(x) + 2c \int_0^t d\tau \int_S \Delta_{\alpha-\beta-1}g(t-\tau, \cdot, z)(x)q(z)\nabla_{\alpha-1}^\nu u(\tau, \cdot, \Delta_{-\alpha+\beta+1}\varphi)(z)d\sigma_z.$$

Рівняння (4) має єдиний розв'язок в класі функцій, які для кожного $T > 0$ задовольняють оцінку $(t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^d) |U(t, x, \varphi)| \leq C_T t^{-1+\frac{\beta+1}{\alpha}}$, з деякими сталими $C_T > 0$.

Існує фундаментальний розв'язок задачі (1), (2), (3).

Теорема 2 ([4]). Нехай S — обмежена замкнена поверхня класу $H^{1+\gamma}$ з $\gamma > \alpha - 1 - \beta$.

Розв'язок задачі (1), (2), (3) $U(t, x, \varphi)_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$ задається рівністю

$$U(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t, x, y) \Delta_{-\alpha+\beta+1}\varphi(y) dy,$$

в якій функція $G(t, x, y)$ при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ визначається рівнянням

$$G(t, x, y) = h(t, x, y) - 2c \int_0^t d\tau \int_S h(t-\tau, x, z)r(z)G(\tau, z, y)d\sigma_z, \quad (5)$$

де функція h задається рівністю $h(t, x, y) = \Delta_{\alpha-\beta-1}g(t, \cdot, y)(x) +$

$$+ 2c \int_0^t d\tau \int_S \Delta_{\alpha-\beta-1}g(t-\tau, \cdot, z)(x)q(z)v(\tau, z, y)d\sigma_z,$$

з функцією $(v(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$, яка задовольняє рівняння

$$v(t, x, y) = \nabla_{\alpha-1}^{\nu(x)}g(t, \cdot, y)(x) + 2c \int_0^t d\tau \int_S \nabla_{\alpha-1}^{\nu(x)}g(t-\tau, \cdot, z)(x)q(z)v(\tau, z, y)d\sigma_z. \quad (6)$$

Рівняння (6) має єдиний розв'язок у класі функцій, які задовольняють нерівність $|v(t, x, y)| \leq C_T \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\alpha-1-\gamma}}$, $t \in (0, T]$, $x \in S$, $y \in \mathbb{R}^d$, для кожного $T > 0$ з деякими додатними сталими C_T .

Рівняння (5) також має єдиний розв'язок в класі функцій, для яких виконується нерівність $|G(t, x, y)| \leq C_T \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\alpha-1-\beta}}$, $t \in (0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, для кожного $T > 0$.

Література

- [1] Osypchuk M. M., Portenko M. I. On the third initial-boundary value problem for some class of pseudo-differential equations related to a symmetric α -stable process. J. Pseudo-Differ. Oper. Appl., 2018, 9, 811–835.
- [2] Осипчук М.М., Портенко М.І. Симетричний стійкий випадковий процес та третя початково-крайова задача для відповідного псевдодиференціального рівняння. Укр. мат. журн., 2017, 69, №10, 1406–1421.

- [3] Осипчук М. М., Портенко М. І. Псевдодиференціальні рівняння та α -стійкі випадкові процеси. Сучасні проблеми математики та її застосувань, І. Зб. праць Ін-ту математики НАН України, Т. 17, №2. Київ: Ін-т математики НАН України, 2020, 283–337.
- [4] Didyk S. V., Osypchuk M. M. On an initial-boundary value problem for a parabolic pseudodifferential equation. Mat. Stud., 2025, 64, 153–160.
- [5] Osypchuk M., Didyk S. Initial-boundary value problem for a parabolic pseudodifferential equation with a third boundary condition on the hyperplane. Precarpathian bulletin of the Shevchenko scientific society. Number, 2026, 22(83), 95–104.

Про достатні умови оптимальної стабілізації дискретних систем з фазовими обмеженнями

Володимир ПІЧКУР, Євгеній ГАГУРІН

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

volodymyr.pichkur@knu.ua, zhenyahahurin@gmail.com

В доповіді досліджується задача оптимальної стабілізації дискретних систем керування з урахуванням фазових обмежень. Основна мета полягає у побудові керування у формі зворотного зв'язку, яке мінімізує заданий критерій якості, забезпечує глобальну асимптотичну стійкість нульового розв'язку та гарантує виконання фазових обмежень на кожному кроці.

Розглянемо дискретну систему керування

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in \mathbb{T}_{t_0} = \{t_0, t_0 + 1, \dots\}, \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазових координат, $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ – вектор керування, $0 \in \mathcal{U}$. Вектор-функція $f(x, u, t)$ є неперервною за x і u , причому $f(0, 0, t) = 0$. Нехай $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ та $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ ($t \in \mathbb{T}_{t_0}$) – компактні множини, що містять початок координат у своїй внутрішності.

На систему накладено обмеження на початковий стан

$$x(t_0) = x_0 \in G_0,$$

та фазові обмеження на дискретну траєкторію

$$x(t, u, x_0, t_0) \in \Phi(t), \quad t \in \mathbb{T}_{t_0}. \quad (2)$$

Клас допустимих керувань Ω складається з неперервних функцій зворотного зв'язку $u = u(t, x)$ ($u(t, 0) = 0$), які забезпечують існування та єдиність розв'язку і задовольняють обмеження (2). Критерій якості задається у вигляді збіжного ряду

$$\mathcal{J}(u) = \sum_{t=t_0}^{\infty} f_0(x(t), u(t, x(t)), t) \rightarrow \inf_{u \in \Omega}, \quad (3)$$

де функція $f_0(x, u, t)$ є неперервною за x та u .

Введемо допоміжну різницеву функцію, що є дискретним аналогом рівняння Белмана

$$\mathcal{B}(\mathcal{V}, x, u, t) = \mathcal{V}(t+1, f(x, u, t)) - \mathcal{V}(t, x) + f_0(x, u, t).$$

Теорема 1. *Нехай для системи (1) існують додатно визначена, радіально необмежена функція $\mathcal{V}_*(t, x)$, що допускає нескінченно малу вищу границю, та керування $u_*(t, x)$, для яких виконуються умови:*

- 1) *функція $f_0(x, u_*(t, x), t)$ є додатно визначеною;*

2) існують сталі $0 < \alpha \leq \beta$ такі, що виконуються вкладення:

$$G_0 \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}_*(t_0, x) \leq \alpha\},$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}_*(t, x) \leq \beta\} \subseteq \Phi(t), \quad t \in \mathbb{T}_{t_0};$$

3) $\mathcal{B}(\mathcal{V}_*, x, u_*(t, x), t) = 0$ для всіх $x \in \Phi(t)$, $t \in \mathbb{T}_{t_0}$;

4) $\mathcal{B}(\mathcal{V}_*, x, u(t, x), t) \geq 0$ для всіх $x \in \Phi(t)$, $t \in \mathbb{T}_{t_0}$ та довільного $u \in \Omega$.

Тоді керування $u_*(t, x)$ розв'язує задачу оптимальної стабілізації (1)–(3), а мінімальне значення критерію якості дорівнює $\mathcal{J}(u_*) = \mathcal{V}_*(t_0, x_0)$.

На основі теореми 1 одержано оптимальний регулятор лінійної дискретної системи з квадратичним функціоналом та опуклими фазовими обмеженнями.

Метод двобічних наближень знаходження додатного аксіально-симетричного розв'язку першої крайової задачі для рівняння Гельмгольца з гетеротонною нелінійністю

Владислав ПАРХОМЕНКО, Максим СИДОРОВ

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

vladyslav.parkhomenko1@nure.ua, maxim.sidorov@nure.ua

При побудові математичних моделей дифузійних, теплових та потенціальних процесів виникає необхідність у чисельному аналізі наступної першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного диференціального рівняння

$$-\Delta u + \kappa^2 u = f(u) \text{ у } \Omega, \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де $\Delta - \kappa^2$ — оператор Гельмгольца, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, Ω — область в $\mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2$ з кусково-гладкою межею, функція $f(u)$ неперервна і додатна для всіх $u > 0$.

У випадку, коли область Ω є кругом радіуса R , ставиться задача знаходження аксіально-симетричного (залежного тільки від $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) розв'язку крайової задачі (1),(2). Шляхом переходу до полярної системи координат крайова задача (1),(2) для диференціального рівняння у частинних похідних зводиться до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння відносно функції $u = u(\rho)$:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \kappa^2 u = f(u), \quad 0 < \rho < R, \quad (3)$$

$$u(\rho) > 0, \quad 0 < \rho < R, \quad (4)$$

$$|u(0)| < +\infty, \quad u(R) = 0. \quad (5)$$

Умову обмеженості $|u(0)| < +\infty$ в крайовій задачі (3)–(5) поставлено через те, що полюс $\rho = 0$ полярної системи координат є особливою точкою диференціального рівняння (3).

Функція Гріна крайової задачі (3)–(5) матиме вигляд:

$$G(\rho, s) = \begin{cases} \frac{I_0(\kappa\rho) (I_0(R\kappa)K_0(\kappa s) - I_0(\kappa s)K_0(R\kappa))}{I_0(R\kappa)}, & 0 \leq \rho \leq s, \\ \frac{I_0(\kappa s) (I_0(R\kappa)K_0(\kappa\rho) - I_0(\kappa\rho)K_0(R\kappa))}{I_0(R\kappa)}, & s < \rho < R. \end{cases} \quad (6)$$

Використовуючи функцію Гріна (6), зведемо крайову задачу (3)–(5) до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна

$$u(\rho) = \int_0^R Q(\rho, s) f(u(s)) ds, \quad (7)$$

де $Q(\rho, s) = sG(\rho, s)$.

З рівнянням (7) пов'яжемо інтегральний оператор, який діє за наступним правилом:

$$T(u)(\rho) = \int_0^R Q(\rho, s)f(u(s)) ds. \quad (8)$$

Рівняння (7) будемо розглядати як нелінійне операторне рівняння в банаховому просторі $C[0, R]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних на $[0, R]$ неперервних функцій [1]. За узагальнений розв'язок крайової задачі (3)–(5) будемо вважати неперервний на $[0, R]$ і додатний на $(0, R)$ розв'язок інтегрального рівняння (7). Проведемо дослідження властивостей оператора (8).

Нехай для функції $f(u)$ можливе діагональне подання, тобто $f(u) = \hat{f}(u, u)$. При цьому невід'ємна функція $\hat{f}(v, w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w . Тоді оператор T — гетеротонний, тобто $T(u) = \hat{T}(u, u)$, де супутній оператор $\hat{T}(v, w)$ монотонний за v і антимонотонний за w .

Оператор $T(u)$ є додатним, тобто з $u \in K_+$ випливає $T(u) \in K_+$.

Нехай $u_0(\rho) = \int_0^R Q(\rho, s) ds = \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{I_0(\kappa\rho)}{I_0(\kappa R)}\right)$. Тоді, якщо для будь якого ненульового $u \in K_+$ існують такі $\alpha = \alpha(u) > 0$ і $\beta = \beta(u) > 0$, що $\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0$, оператор $T(u)$ є u_0 -додатним.

Нехай $\hat{f}(\tau v, \frac{1}{\tau} w) > \tau \hat{f}(v, w)$ для будь-яких додатних значень $v, w \in K_+$ для всіх $\tau \in (0, 1)$. В такому випадку оператор $T(u)$ є псевдоувігнутим і навіть u_0 -псевдоувігнутим, тобто для всіх $v, w \in K_+$ і $\tau \in (0, 1)$ існує $\eta = \eta(v, w, \tau) > 0$, для якого має місце нерівність $\hat{T}(\tau v, \frac{1}{\tau} w) \geq \tau \hat{T}(v, w)$, $\hat{T}(\tau v, \frac{1}{\tau} w) \neq \tau \hat{T}(v, w)$.

Оператори T і $\hat{T}$ цілком неперервні.

Нехай оператор T має сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, кінці якого визначаються умовами $\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0$ і $\hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0$ і можуть бути знайдені, зокрема, у вигляді $v_0 = \alpha u_0$, $w_0 = \beta u_0$.

Взявши за початкові наближення v_0 і w_0 , побудуємо ітераційний процес:

$$v^{(k+1)}(\rho) = \int_0^R Q(\rho, s) \hat{f}(v^{(k)}(s), w^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$w^{(k+1)}(\rho) = \int_0^R Q(\rho, s) \hat{f}(w^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$v^{(0)}(\rho) = v_0(\rho), \quad w^{(0)}(\rho) = w_0(\rho). \quad (11)$$

Послідовність $\{v^{(n)}\}$ не спадає за конусом K_+ , а послідовність $\{w^{(n)}\}$ не зростає за конусом K_+ . Через нормальність конуса K_+ і наведені вище властивості оператора T , ітераційний процес (9)–(11) двобічно збігається у нормі простору $C[0, R]$ до єдиного аксіально-симетричного розв'язку крайової задачі (3)–(5).

За наближений розв'язок на n -му кроці обираємо функцію

$$u^{(n)}(\rho) = \frac{1}{2} (v^{(n)}(\rho) + w^{(n)}(\rho)).$$

Апостеріорна похибка наближення оцінюється нерівністю

$$\|u^{(n)} - u^*\|_{C[0,R]} \leq \frac{1}{2} \max_{\rho \in [0,R]} (w^{(n)}(\rho) - v^{(n)}(\rho)) .$$

Ітераційний процес зупиняється, коли оцінка похибки задовольняє задану точність.

Література

- [1] Сидоров М. В. *Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна*. Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57–66.

Апроксимація оптимального керування функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу оптимальним керуванням рівнянь без запізнення у банахових просторах

Олег ПЕРЕГУДА, Світлана КУШНІРЕНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

perehudao@knu.ua, svilana_kusnirenko@knu.ua

Розглядається задача оптимального керування функціонально-диференціальним рівнянням нейтрального типу

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x(t) - g(x(t), x(t-h))) = Ax + f_1(x(t), x(t-h)) + f_2(x(t), x(t-h))u(t), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

з функціоналом якості

$$J[u] = \int_0^T F(t, x(t), u(t))dt \rightarrow \inf, \quad (2)$$

де $u(t)$ - параметр керування, $x(t)$ належить простору $C = C([-h, 0], X)$ - неперервних функцій з нормою $\|\varphi\|_C := \max_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|_X$ для всіх $t \geq 0$, де X - рефлексивний банаховий простір.

Оператор A є інфінітезимальним генератором аналітичної при $t \geq 0$ напівгрупи операторів $S(t) = e^{At}$ - обмежених в X з областю $D(A)$ яка є щільною в X . З [2] для будь якого $\alpha \in [0, 1]$ можемо визначити дробову степінь $(-A)^\alpha$ оператора $(-A)$ і з [1] маємо наступну оцінку

$$\|(-A)^\alpha S(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

Припустимо, що $S(t)$ є напівгрупою компактних операторів при $t > 0$.

Стосовно задачі (1)-(2) припускається виконання наступних умов:

A1) Допустиме керування є функцією $u(t) \in F$ м.с. $t \geq 0$, F є опуклою, замкненою множиною в X , $u(t) \in L^p(0, T; X)$, $p > 1$.

A2) Якщо $\sigma(-A)$ — спектр оператора $(-A)$, тоді маємо $\operatorname{Re} \sigma(-A) > \delta > 0$.

A3) Для всіх $x, y, x_1, y_1 \in X$ маємо $\|f_1(x, y) - f_1(x_1, y_1)\| \leq K_1(\|x - x_1\| + \|y - y_1\|)$, $\|f_2(x, y) - f_2(x_1, y_1)\| \leq K_1(\|x - x_1\| + \|y - y_1\|)$, де $K_1 > 0$.

A4) Існує $\alpha \in (\frac{1}{q}, 1)$ та існує M_g такі, що $C_\alpha M_g \leq 2^{\frac{2-3q}{q}}$ і для всіх $x, y, x_1, y_1 \in X$ функція g задовольняє нерівності

$$\|g(x, y) - g(x_1, y_1)\|_\alpha \leq M_g(\|x - x_1\| + \|y - y_1\|), \quad \text{де } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

A5) Функція $G : [0, T] \times X \times F \rightarrow [0, \infty)$ є опуклою по u при фіксованих x, t .

A6) Похідна Фреше G_u неперервна за сукупністю змінних і існують додатні константи K_2, γ такі, що

$$\|G_u(t, x, u)\|_* \leq K_2 (1 + \|x\|^\gamma + \|u\|^{p-1}),$$

де $\|\cdot\|_*$ — норма в спряженому просторі X^* .

A7) $\exists K_3 > 0 : G(t, x, u) \geq K_3 \|u\|^p$.

A8) $\exists K_4 > 0, \nu > 0$, такі, що для довільних $x, x_1 \in X, t \in [0, T]$ маємо

$$|G(t, x, u) - G(t, x_1, u)| \leq K_4 \|x - x_1\| (1 + \|x\|^\nu + \|x_1\|^\nu + \|u\|^p).$$

Розв'язок початкової задачі (1) будемо розуміти в м'якому сенсі. Задачі (1)–(2) ставиться у відповідність задача оптимального керування (3)–(4) для спеціально побудованої системи рівнянь без запізнення (3), яка називається апроксимаційною.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (z_0(t) - g(z_0(t), z_m(t))) = Az_0(t) + f_1(z_0(t), z_m(t)) + f_2(z_0(t), z_m(t))u(t), & t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt} z_j(t) = \frac{m}{h} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), & t \in [0, T], \\ z_j(0) = \varphi\left(-\frac{h}{m}j\right), & j = \overline{0, m}. \end{cases} \quad (3)$$

з відповідним функціоналом якості

$$J_m[u] = \int_0^T G(t, z_0(t), u(t)) dt \rightarrow \inf. \quad (4)$$

Позначимо через $J^* = \inf_{u \in U} J[u]$, $J_m^* = \inf_{u \in U} J_m[u]$.

Теорема. Нехай виконуються умови A1–A8. Тоді задачі оптимального керування (1)–(2) і (3)–(4) мають розв'язки $(x^*(t), u^*(t))$ і $(z_{0m}^*(t), u_m^*(t))$ відповідно. При цьому:

1. $J_m^* \rightarrow J^*, \quad m \rightarrow \infty$;
2. для будь-якого $\eta > 0$ існує m_0 таке, що для $m \geq m_0$ маємо

$$|J^* - J[u_m^*]| < \eta; \quad (5)$$

3. існує послідовність $m_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, така, що

$$z_{0m_k}^*(t) \rightrightarrows x^*(t) \quad (6)$$

рівномірно на $[0, T]$ і $u_m^* \rightharpoonup u^*$ слабо в $L^p(0, T)$.

Якщо при цьому задача (1)–(2) має єдиний розв'язок, то збіжності (5) і (6) мають місце для всіх $m \rightarrow \infty$

Литература

- [1] D. Henry Geometric theory of Semilinear Parabolic Equations, Berlin-New York: Springer-Verlag, 1981– 375p.
- [2] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Functional Differential Equations, New York : Springer-Verlag, 1983– 288p.

Дослідження диференціально-алгебраїчних систем з імпульсною дією та багатоточковими крайовими умовами

Микола ПЕРЕСТЮК, Ігор КОРОЛЬ, Юрій КОРОЛЬ

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

mykola.perestiuk@uzhnu.edu.ua, ihor.korol@uzhnu.edu.ua, yuriy.korol@uzhnu.edu.ua

У роботі розглядається диференціально-алгебраїчна система рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)y + f(t, x, y), & t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad t, \tau_i \in [a, b], \\ 0 = g(t, x, y), & y, g \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (1)$$

з імпульсною дією у визначені моменти часу

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \equiv x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i) + b_i, \quad \det(\mathbb{E}_n + B_i) \neq 0, \quad b_i \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

підпорядкована багатоточковим лінійним крайовим умовам

$$\sum_{l=1}^p A_p u(t_l) = d, \quad (3)$$

де $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j=1}^n$ – $(n \times n)$ -вимірна матриця з неперервними коефіцієнтами, $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ – відповідно n та m -вимірні вектор-функції, $f(t, x, y), g(t, x, y) \in C[a, b] \times D_1 \times D_2$, де D_1, D_2 – замкнені обмежені області, $D_1 \in \mathbb{R}^n, D_2 \in \mathbb{R}^m$; $A_p - (n \times (n + m))$ -вимірні сталі матриці, $u = \text{col}(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $a \leq \tau_1 < \dots < \tau_p \leq b$, $d - n$ -вимірний сталий вектор.

Для нелінійних алгебро-диференціальних систем (1) з імпульсною дією вигляду (2), підпорядкованих крайовим умовам (3) обґрунтовано застосування чисельно-аналітичного методу дослідження існування та наближеної побудови розв'язків. Встановлено необхідні та конструктивні достатні умови існування розв'язків, знайдено оцінки похибки побудованих наближених розв'язків.

Література

- [1] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1995. 462 p.
- [2] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. Київ, Вища школа. 2000. 294 с.

Стійкість розв'язків систем «прямого» регулювання з запізнюванням та стохастичною невизначеністю

Валентин ПЕТРУЛЯ, Андрій ШАТИРКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

valentinpetrulia@knu.ua, shatyrko.a@knu.ua

Роботу присвячено дослідженню якісної поведінки нелінійних систем автоматичного регулювання з часовим відхиленням аргументу в умовах невизначеності [1]. З метою демонстрації обраної техніки та конструктивності підходу початково детально досліджено скалярний випадок.

Розглянемо стохастичну систему «прямого» регулювання, описану диференціальним рівнянням Іто зі сталим запізнюванням, у якій невизначений нелінійний обернений зв'язок задовольняє лінійну секторну умову та умову Ліпшиця:

$$dx(t) = (a_0x(t) + a_\tau x(t - \tau) + b f(\sigma(t)))dt + (g_0x(t) + g_\tau x(t - \tau))dw(t), \quad (1)$$

$$\sigma(t) = c x(t), \quad (2)$$

$$0 \leq f(\sigma) \sigma \leq k \sigma^2, \quad f(0) = 0, \quad k = \text{const}. \quad (3)$$

Тут $a_0, a_\tau, g_0, g_\tau, b, c \in \mathbb{R}$ — сталі коефіцієнти ($c \neq 0$), $\tau > 0$ — запізнювання, $w(t)$ — стандартний вінерівський процес, а $\sigma(t)$ — вихідний сигнал, що подається на нелінійну функцію керування f . Через $M\{\cdot\}$ позначено математичне сподівання; початковий стан задає неперервна функція $x(s) = \psi(s)$, $s \in [t_0 - \tau, t_0]$, а міру початкового збурення — норма $\|x(t_0)\|_\tau^2 = \sup_{t_0 - \tau \leq s \leq t_0} |\psi(s)|^2$.

Означення 1. Тривіальний розв'язок $x \equiv 0$ системи (1), (2) із заданою нелінійністю f називається *стійким у середньому квадратичному*, якщо для довільного $\varepsilon_0 > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon_0) > 0$ таке, що з $\|x(t_0)\|_\tau^2 < \delta$ випливає $M\{|x(t)|^2\} < \varepsilon_0$ при всіх $t > t_0$; *асимптотично стійким у середньому квадратичному* — якщо, крім того, $M\{|x(t)|^2\} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Означення 2. Тривіальний розв'язок $x \equiv 0$ системи (1), (2) із заданою нелінійністю f називається *експоненційно стійким у середньому квадратичному*, якщо існують сталі $R > 0$ і $\gamma_0 > 0$ такі, що $M\{|x(t)|^2\} \leq R \|x(t_0)\|_\tau^2 e^{-\gamma_0(t-t_0)}$ при всіх $t > t_0$.

Означення 3. Система (1), (2) називається *абсолютно асимптотично стійкою у середньому квадратичному*, якщо для довільного $\varepsilon_0 > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon_0) > 0$, спільне для всіх нелінійностей f , що задовольняють умову (3) із заданою сталою k , таке, що для кожної такої f з $\|x(t_0)\|_\tau^2 < \delta$ випливає $M\{|x(t)|^2\} < \varepsilon_0$ при всіх $t > t_0$ і, крім того, $M\{|x(t)|^2\} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

На базі прямого методу Ляпунова з допомогою функції Ляпунова типу Лур'є–Постнікова

$$V(x) = h x^2 + \beta \int_0^\sigma f(\xi) d\xi \quad (4)$$

з вільними параметрами $h > 0$ і $\beta \geq 0$, а також підходу Разуміхіна [2] отримано достатні умови абсолютної асимптотичної стійкості у середньому квадратичному. Умови мають алгебраїчний характер, залежать лише від коефіцієнтів системи та сталої розмаху лінійного сектора і не містять величини запізнювання, тож стійкість гарантується при будь-якому відхиленні аргументу; крім того, в процесі доведення встановлено експоненційну оцінку швидкості згасання других моментів розв'язку.

З доведенням ряду проміжних лем, основний результат сформульовано у вигляді наступного твердження.

Теорема. *Нехай існують константи $h > 0$, $\varepsilon > 0$, $\beta \geq 0$, що задовольняють рівняння $2(a_0 + a_\tau)h + (g_0 + g_\tau)^2h = -\varepsilon$, а параметр N підпорядкований оцінці $M\{N\} \leq \mu M\{|x|^2\}$ зі сталою $\mu \geq 0$. Тоді, якщо виконується умова*

$$\varepsilon > \mu + h\varphi(3 + \varphi)(|a_\tau| + |(g_0 + g_\tau)g_\tau|) + 2h\varphi g_\tau^2(1 + \varphi), \quad (5)$$

то система «прямого» регулювання (1), (2) абсолютно асимптотично стійка у середньому квадратичному при будь-якому запізнюванні $\tau > 0$. Крім того, для довільної наперед заданої точності $\varepsilon_0 > 0$ виконується $M\{|x(t)|^2\} < \varepsilon_0$ при всіх $t > t_0$, як тільки

$$\|x(t_0)\|_\tau^2 < \delta(\varepsilon_0, \tau) = [(1 + K\tau)e^{L\tau}\varphi]^{-1}\varepsilon_0. \quad (6)$$

Тут

$$N = 2hbxf(\sigma) + \beta(a_0 + a_\tau)\sigma f(\sigma) + \beta cbf^2(\sigma) + \frac{1}{2}\beta c^2(g_0 + g_\tau)^2f'(\sigma)x^2, \\ K = |a_\tau| + |g_0g_\tau| + g_\tau^2, \quad L = 2|a_0| + |a_\tau| + 2|b|k|c| + g_0^2 + |g_0g_\tau|, \quad \varphi = 1 + \frac{\beta kc^2}{2h}.$$

Стійкість гарантується одразу для всього секторного класу (3): величина δ визначається лише сталою k і не змінюється при переході від однієї нелінійності до іншої. Отриманий критерій узагальнює на стохастичний випадок відомі умови абсолютної стійкості детермінованих систем Лур'є з післядією [3].

Література

- [1] Pakshin P.V., Ugrinovskii V.A. Stochastic problems of absolute stability. Automation and Remote Control. 2006. 67, № 11. P. 1811–1846.
- [2] Mao X. Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional differential equations. Stochastic Processes and their Applications. 1996. 65, № 2. P. 233–250.
- [3] Шатирко А.В., Хусаїнов Д.Я. Стійкість нелінійних систем регулювання з післядією: навч. посіб. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 73 с.

Існування обмеженого на всій прямій розв'язку стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу в гільбертових просторах

Олександр ПРАВДИВИЙ, Зоя ХАЛЕЦЬКА

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка,
Кропивницький, Україна*

oleksandrpravdyvyi@knu.ua, khaletskazoya@gmail.com

Нами досліджується питання існування обмеженого на осі розв'язку стохастичних рівнянь нейтрального типу з запізненням у гільбертовому просторі вигляду

$$d(u(t) - g(u(t-h))) = (Au(t) + f(u(t-h), u(t)))dt + \sigma(u(t-h), u(t))dW(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(t) = \phi(t), t \in [-h, 0]. \quad (2)$$

Тут A – необмежений оператор, що є генератором сильно неперервної напівгрупи $\{S(t), t \geq 0\}$ обмежених лінійних операторів у сепарабельному гільбертовому просторі H . Випадковий шум $W(t)$ є Q -вінерівським процесом у сепарабельному гільбертовому просторі K . Для деякого $h > 0$ позначимо $C_h := C([-h, 0], H)$ – простір неперервних H -значних функцій $\phi : [-h, 0] \rightarrow H$ з нормою

$$\|\phi\|_{C_h} := \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\phi(\theta)\|_H.$$

Нехай Q – лінійний обмежений оператор коваріації такий, що $trQ < \infty$.

Ми припускаємо існування повної ортонормованої системи $\{e_k\}$ в K і послідовності невід'ємних дійсних чисел λ_k таких, що $Qe_k = \lambda_k e_k, k = 1, 2, \dots$, і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Нехай $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(K)$ і $L_2^0 = L_2(U_0, H)$ є простором всіх операторів Гільберта-Шмідта з U_0 в H зі скалярним добутком $(\Phi, \Psi)_{L_2^0} = tr[\Phi Q \Psi^*]$ і нормою $\|\Phi\|_{L_2^0}$, відповідно.

Нехай також $S(t)$ є напівгрупою компактних операторів, а отже, напівгрупа є неперервною у рівномірній операторній топології при $t > 0$.

З [2] також отримуємо, що для всіх $\alpha \in (0, 1)$ дробовий степінь оператора $-A$ існує і є замкненим лінійним оператором в області визначення $D((-A)^\alpha)$.

Також зазначимо наступне допоміжне твердження, яке безпосередньо впливає з теореми 1.4.3 у [4]:

Твердження 1. Для кожного $\alpha \in (0, 1)$ існують $C_\alpha, \zeta > 0$ такі, що для всіх $t > 0$

$$\|(-A)^\alpha S(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\zeta t},$$

та існує $C_0 > 0$ таке, що

$$\|S(t)\| \leq C_0 e^{-\zeta t},$$

Позначимо H^α – гільбертів простір $D((-A)^\alpha)$, оснащений нормою

$$\|u\|_\alpha := \|(-A)^\alpha u\|.$$

Очевидно, що ця норма еквівалентна нормі графіка $(-A)^\alpha$.

Для доведення існування розв'язку накладемо наступні умови на оператор A та відображення f, σ, g .

1. Якщо $\sigma(-A)$ – це спектр оператора $-A$, тоді маємо $\operatorname{Re} \sigma(-A) > \delta > 0$.
2. Для всіх $u, v, u_1, v_1 \in H$ маємо

$$\|f(u, v) - f(u_1, v_1)\| \leq L(\|u - u_1\| + \|v - v_1\|),$$

і

$$\|\sigma(u, v) - \sigma(u_1, v_1)\|_{L_2^0} \leq L(\|u - u_1\| + \|v - v_1\|),$$

3. Для всіх $u, v, u_1, v_1 \in H$ і для кожного $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ функція g задовольняє

$$\|g(u, v) - g(u_1, v_1)\|_\alpha \leq L(\|u - u_1\| + \|v - v_1\|).$$

4. Для сталої $L > 0$ виконується наступна умова. Нехай

$$C_{\Gamma, \alpha} := \frac{C_{1-\alpha}^2}{\delta^{3-2\alpha}} \Gamma(3 - 2\alpha),$$

де Γ – гамма функція Ойлера. Тоді

$$4L^2(1 + \frac{C_0^2}{\delta^2} + \frac{C_0^2}{2\delta} + \frac{C_{\Gamma, \alpha}}{\delta}) < 1, \quad (3)$$

Нескладно побачити, що з умови 2. випливає лінійний ріст для f, σ в H , а з умови 3. випливає лінійний ріст в H_α .

Теорема 1 (Існування обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку). За виконання умов 1.-4. на коефіцієнти рівняння і при виконанні (3), існує розв'язок $u^*(t)$ рівняння (1), обмежений на $\mathbb{R}$ в сенсі

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{E} \|u^*(t)\|^2 < \infty.$$

Література

- [1] Misiats O., Stanzhytsky O., Yip N.K. Existence and uniqueness of invariant measures for stochastic reaction-diffusion equations in unbounded domains. Journal of Theoretical Probability. 2016. 29. P. 996–1026. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.0298>.
- [2] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag. New York. 1983. 279 p.
- [3] Da Prato G., Zabczyk J. Ergodicity for Infinite-Dimensional Systems. Cambridge University Press. Cambridge. 1996. 339 p.
- [4] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 840. Springer-Verlag. Berlin-New York. 1981. 348 p.

Нескінченносимвольні системи зображення чисел у задачах теорії функцій з фрактальними властивостями

Микола ПРАЦЬОВИТИЙ

Інститут математики НАН України, УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
prats4444@gmail.com

Кодуванням чисел проміжка $I = \langle a; b \rangle$ засобами нескінченного алфавіту A називається сюр'єктивне відображення $g : L \rightarrow I$, де $L = A \times A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту. Якщо потужність алфавіту зліченна, то кодування чисел називають *нескінченносимвольним*.

Одним з найпростіших кодувань чисел проміжка $(0; 1]$ засобами алфавіту N є зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.

Нескінченносимвольні зображення чисел можна отримати з двосимвольних зображень шляхом перекодування. Наприклад, маючи класичне двійкове зображення числа $x \in (0; 1]$

$$\Delta_{\underbrace{0\dots 01}_{a_1} \underbrace{0\dots 01}_{a_2} \dots \underbrace{0\dots 01}_{a_n} \dots}^2 = x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{2^\infty}, \quad a_n \in N.$$

Аналогічне має місце для узагальнень та аналогів двосимвольних зображень.

Теорема 1. [7] *Нехай $q_0 \in (0; 1)$, $q_1 = 1 - q_0$. Для будь-якого числа $x \in (0; 1]$ існує послідовність (a_n) , $a_n \in N$, така, що*

$$x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty} q_0^{a_1+a_2+\dots+a_{n+1}-n} q_1^n \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}.$$

Існують нескінченносимвольні зображення чисел, які не є перекодуваннями скінченносимвольних зображень. До цього класу відносяться зображення чисел рядами Люрота, Енгеля, Серпінського, Остроградського, Сільвестера, Остроградського-Серпінського-Пірса. Серед нескінченносимвольних зображень існують поліосновні, зокрема системи з двома основами. Наприклад, Δ^μ -зображення чисел.

Нехай $(0; 1) \ni \mu$ – фіксоване число (параметр).

Теорема 2. [4] *Для будь-якого числа $x \in (0; 1]$ існує послідовність (скінченна або нескінченна) натуральних чисел така, що*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} ((1 - \mu)^{a_1+\dots+a_{2n-1}-1} \mu^{a_2+\dots+a_{2n-2}} - (1 - \mu)^{a_1+\dots+a_{2n-1}-1} \mu^{a_2+\dots+a_{2n-2}+a_{2n}}) \equiv \\ &\equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^\mu \end{aligned} \quad (1)$$

Розклад числа в ряд (2) називається Δ^μ -представленням, а скорочений запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^\mu$ – Δ^μ -зображенням.

Дана система зображення чисел є узагальненням системи зображення чисел, породженої сингулярною функцією Мінковського [3]. З використанням даної системи зображення чисел, тополого-метрична теорія якої розвинена у роботі [4], було побудовано і досліджено клас фрактальних функцій зі N -самоафінними графіками [5], а також перетворення, що зберігають хвости Δ^μ -зображення чисел [6].

Ми цікавимось системою зображення чисел, що є узагальненням Δ^μ -зображення чисел. Нехай задано послідовність дійсних чисел (μ_n) , $\mu_n \in (0; 1)$.

Теорема 3. Для довільного числа $x \in (0; 1]$ існує послідовність (a_n) (скінченна або нескінченна) натуральних чисел така, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n (1 - \mu_i)^{a_1 + \dots + a_{2i-1} - 1} \mu_i^{a_2 + \dots + a_{2i} - 2} - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_i)^{a_1 + \dots + a_{2i-1} - 1} \mu_i^{a_2 + \dots + a_{2i-2} + a_{2i}} \right) \equiv \quad (2)$$

$$\equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\mu^*}$$

У доповіді пропонуються застосування нескінченносимвольних систем зображення чисел у теорії неперервних локально складних функцій та їх фрактальному аналізі.

Література

- [1] Baranovskyi O., Pratsiovytyi M. One class of continuous functions with complicated local properties related to Engel series. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*. 2023. 68(2). P. 143–166. <https://doi.org/10.7169/facm/1963>.
- [2] Pratsiovytyi M.V., Lechinskii O.L. Properties of random variable defined by the distributions of elements of their Δ -representation. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 1998. 57. P. 143–148.
- [3] Працьовитий М.В., Калашніков А.В., Безбородов В.К. Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. 2010. 11. С. 207–213.
- [4] Ісаєва Т.М., Працьовитий М.В. Геометрія та основи метричної теорії зліченно-символьного зображення дійсних чисел одиничного півінтервала. *Наукові записки НАУКМА. Фізико-математичні науки*. 2015. 165. С. 11–18.
- [5] Працьовитий М.В., Ісаєва Т.М. Фрактальні функції, пов'язані з Δ^μ -зображенням чисел. *Буковинський математичний журнал*. 2015. 3(3–4). С. 156–165.
- [6] Pratsiovytyi M., Isaieva T. Transformations of $(0; 1]$ preserving tails of Δ^μ -representation of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2016. 22(1). P. 102–115.
- [7] Гончаренко Я.В., Лисенко І.М. Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞ -зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. 2013. 15. С. 100–118.

Нелокальна загальна крайова задача для нерівномірно 2b-параболічних рівнянь зі степеневими особливостями

Іван ПУКАЛЬСЬКИЙ, Богдан ЯШАН

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

i.pukalsky@chnu.edu.ua, b.yashan@chnu.edu.ua

Нехай $\eta, t_0, t_1, \dots, t_{N+1}$ – фіксовані числа, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, $\eta \neq t_j$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, Ω – деяка обмежена область $\dim \Omega \leq n - 1$, D – обмежена область в R^n з межею ∂D , $\dim D = n$, $\Omega \subset D$, $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$, $Q_0 = \{(t, x) \mid t \in [t_0, t_{N+1}), x \in \Omega\} \cup \{(t, x) \mid t = \eta, x \in Q\}$.

Розглянемо в області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ задачу знаходження функції $u(t, x)$, яка задовольняє при $(t, x) \in Q \setminus Q_0$, $t \neq t_j$ рівняння

$$(Lu)(t, x) = \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t, x) \partial_x^k - \sum_{|p| \leq 2b-1} A_p(t, x) \partial_x^p \right] u(t, x) = f_0(t, x), \quad (1)$$

умову за змінною t

$$(Bu)(x) \equiv u(t_0, x) + \sum_{j=1}^N d_j(x) u(t_j, x) = \varphi(x) \quad (2)$$

а на межі області $\Gamma [t_j, T] \times \partial D$ крайові умови

$$\lim_{x \rightarrow z \in \partial D} \left[\sum_{|k|=r_\lambda} B_k^{(\lambda)}(t, x) \partial_x^k u + \sum_{|p| \leq r_\lambda - 1} B_p^{(\lambda)}(t, x) \partial_x^p u - f_\lambda(t, x) \right] = 0, \quad (3)$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $\lambda \in \{1, \dots, b\}$, $0 \leq r_\lambda \leq 2b - 1$.

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайових умов (3) у точці $P(t, x) \in Q \setminus Q_0$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$: $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = |t - \eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t - \eta| \leq 1$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = 1$ при $|t - \eta| \geq 1$; $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \leq 1$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = 1$ при $\rho(x) \geq 1$, $\rho(x) = \inf_{z \in \partial \Omega} |x - z|$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)}, \dots, \beta_n^{(\nu)})$, $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$.

Позначимо через $l, q, \gamma^{(\nu)}, \mu_{p_i}^{(\nu)}, \delta_{\lambda, p_i}^{(\nu)}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_0^{(\nu)}, \delta_\lambda^{(\nu)}$ – дійсні додатні числа.

Крайова задача (1) – (3) досліджується у просторі $C^l(\gamma; \beta; q; Q)$ [1].

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(k_i \beta_i^{(1)}, t) s_2(k_i \beta_i^{(2)}, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$,

$A_p(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(\rho_i \mu_{p_i}^{(1)}, t) s_2(\rho_i \mu_{p_i}^{(2)}, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$, $1 \leq |p| \leq 2b - 1$, $A_0(t, x) s_1(\mu_0^{(1)}, t) \times$

$\times s_2(\mu_0^{(2)}, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$, $A_0(t, x) \leq K < \infty$ і задачі

$$\left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(k_i \beta_i^{(1)}, t) s_2(k_i \beta_i^{(2)}, x) \partial_x^k \right] u(t, x) = \tilde{f}(t, x), \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow z \in \partial D} \left[\sum_{|k|=r_\lambda} B_k^{(\lambda)}(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(k_i \beta_i^{(1)}, t) s_2(k_i \beta_i^{(2)}, x) \partial_x^k u(t, x) - \tilde{f}_\lambda(t, x) \right] = 0 \quad (6)$$

задовольняє в області Q рівномірну умову параболічності та умову Я.Б. Лопатинського;

б) коефіцієнти крайових умов $B_k^{(\lambda)}(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(k_i \beta_i^{(1)}, t) s_2(k_i \beta_i^{(2)}, x) \in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $B_p^{(\lambda)}(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(\rho_i \delta_{p_i, \lambda}^{(1)}, t) s_2(\rho_i \delta_{p_i, \lambda}^{(2)}, x) \in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $B_0^{(\lambda)}(t, x) s_1(\delta_\lambda^{(1)}, t) s_2(\delta_\lambda^{(2)}, x) \in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $0 \leq |p| \leq r_\lambda - 1$;
в) функції $f_0(t, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 2b; Q)$, $f_\lambda(t, x) \in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma; \beta; r_\lambda; Q)$, $\partial D \in C^{2b+\alpha}$, $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; D)$, $\tilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$, $\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\sum_{j=1}^N |d_j(x)| \int_D |G_0(t_j, x, t_0, \xi)| d\xi \leq \lambda_0 < 1$, $d_j(x) \in C^{2b+\alpha}(Q \cap (t = t_j))$, $G_0(t_j, x, t_0, \xi)$ – функція Гріна однорідної крайової задачі (4)–(6), $\tilde{f}_\lambda = 0$,
$$\gamma^{(\nu)} = \max \left\{ \max_i \beta_i^{(\nu)}, \max_{i, p_i} \frac{p_i (\mu_{p_i}^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)})}{2b - |p|}, \max_{i, \lambda, p_i} \frac{p_i (\delta_{p_i, \lambda}^{(\nu)} - \beta_i^{(\lambda)})}{r_\lambda - |p|}, \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b}, \max_\lambda \frac{\delta_\lambda^{(\nu)}}{r_\lambda} \right\},$$

 $\nu \in \{1, 2\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. Нехай для задачі (1)–(3) виконані умови а)–в). Тоді існує єдиний розв’язок задачі (1)–(3) із простору $C^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ і справджується нерівність

$$\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2b+\alpha} \leq C \left(\|f; \gamma; \beta; 2b; Q\|_\alpha + \|\varphi; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; D\|_{2b+\alpha} + \sum_{\lambda=1}^b \|f_\lambda; \gamma; \beta; r_\lambda; Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha} \right). \quad (7)$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку розв’язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв’язків виділимо збіжну підпоследовательність, граничне значення якої буде розв’язком задачі (1)–(3).

Література

- [1] Pukal's'kyi I.D., Yashan B.O. Problem with Impulsive Effect for 2b-Parabolic Equation with Degeneracy. Journal of Mathematical Sciences. 2025. 291. P. 636–648.

Комп'ютерне моделювання дифузійних потоків домішки в шарі із системою випадкових точкових внутрішніх джерел маси

Петро ПУКАЧ, Юрій ЧЕРНУХА

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

petro.y.pukach@lpnu.ua, yurii.a.chernukha@lpnu.ua

Використання стохастичних моделей дає змогу враховувати невизначеності та випадкові збурення в процесах масоперенесення що є особливо актуальним для систем, у яких малі концентрації або варіації відіграють суттєву роль [1].

Розглянемо дифузію домішкової речовини в шарі товщиною z_L де діє система точкових джерел маси з випадковими координатами $z = \hat{z}_i$, $\hat{z}_i \in [\bar{z}_a, \bar{z}_b]$ (причому $0 \leq \bar{z}_a < \bar{z}_b \leq z_L$) розподіленими рівномірно, з рівномірним внеском кожного джерела. Це зумовлює стохастичність концентрації домішки, дифузійного потоку та кількості речовини, що пройшла крізь шар.

Рівняння дифузії домішки в шарі, в якому діє система точкових масових джерел, для одновимірному випадку можна записати на основі законів Фіка:

$$\rho \frac{\partial c(t, z)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 c(t, z)}{\partial z^2} + \sum_{i=1}^K w_i \delta(z - \hat{z}_i), \quad (1)$$

де $c(t, z)$ позначає концентрацію речовини, ρ — густина середовища, d — кінетичний коефіцієнт перенесення, K — кількість точкових джерел, w_i — потужність i -го джерела, $\delta(z)$ — функція Дірака, t — час, z — просторова координата.

Концентрація частинок домішки задовольняє крайові умови першого роду, а саме:

$$\begin{aligned} c(t, z)|_{t=0} &= 0, \\ c(t, z)|_{z=0} &= c_0 \equiv const, \quad c(t, z)|_{z=z_L} = c_L \equiv const. \end{aligned} \quad (2)$$

Розв'язок задачі (1),(2) отримано у вигляді суми розв'язку однорідної крайової задачі та згортки функції Гріна із системою випадкових точкових джерел.

За першим законом Фіка на основі знайденої усередненої концентрації отримано потік крізь переріз $z = z_*$

$$\begin{aligned} \frac{z_L}{d} \langle J|_{z=z_*} \rangle &= c_0 - c_L - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(y_n z_*) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\rho} [c_0 + (-1)^{n+1} c_L] + \frac{W y_n S_{12}(y_n)}{dK(\bar{z}_a - \bar{z}_b)} \left[1 + e^{-dy_n^2 t/\rho} \right] \right), \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$S_{12}(y_n) = \frac{\cos(y_n \bar{z}_a) - \cos(y_n \bar{z}_b)}{y_n^3}, \quad W = \sum_{i=1}^K w_i, \quad y_n = \frac{\pi n}{z_L}.$$

Отримання розрахункової формули для усереднених потоків (3) дозволяє визначити кількість речовини Q_* , що пройшла крізь одиницю площі поверхні $z = z_L$ за час t_* .

Для проведення чисельних експериментів було розроблено програмний комплекс на основі отриманих розрахункових формул (Рис. 1).

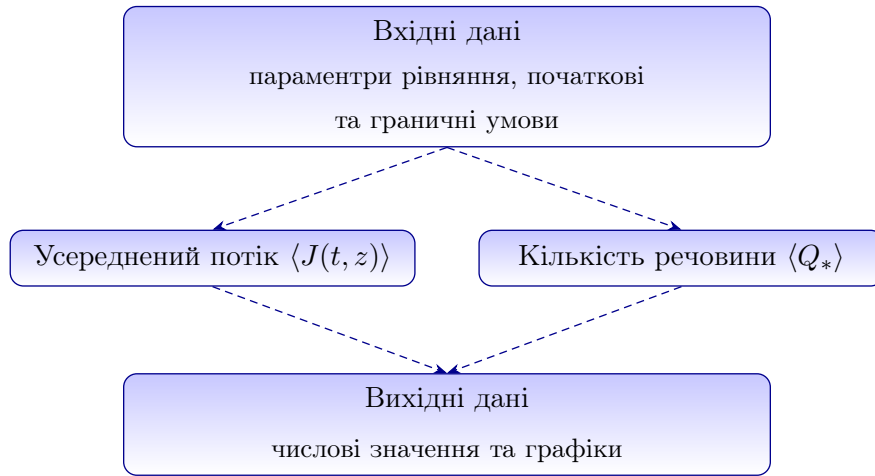


Рис. 1: Схема програмного модуля.

Розрахунки проводились у безрозмірних змінних $\xi = z/z_L$, $\tau = dt/\rho z_L^2$. За базові значення параметрів задачі прийнято $d = 1$, $\rho = 1$, $K = 2$, $w_1 = w_2 = 3$, $\xi_0 = 1$, $\bar{\xi}_a = \bar{x}_1/z_L = 0.4$, $\bar{\xi}_2 = \bar{z}_b/z_L = 0.6$, $c_0 = 1$, $c_L = 0$.

Рис. 2 ілюструє розподіли усереднених потоків $\langle J|_{\xi=\xi_*} \rangle$ за дії системи випадкових точкових джерел та дифузійних потоків $J_h|_{\xi=\xi_*}$ за відсутності внутрішніх точкових джерел через різні перерізи $\xi_* = 0.51, 0.59, 1$ (криві 1-3 відповідно). Криві а (суцільні лінії) відповідають графікам $\langle J|_{\xi=\xi_*} \rangle$, а криві б (пунктирні лінії) - $J_h(\tau, \xi)$. На рис. **a** обчислення виконано для інтервалу $[\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b] = [0.4, 0.6]$, а на рис. **b** - для інтервалу $[\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b] = [0.2, 0.6]$.

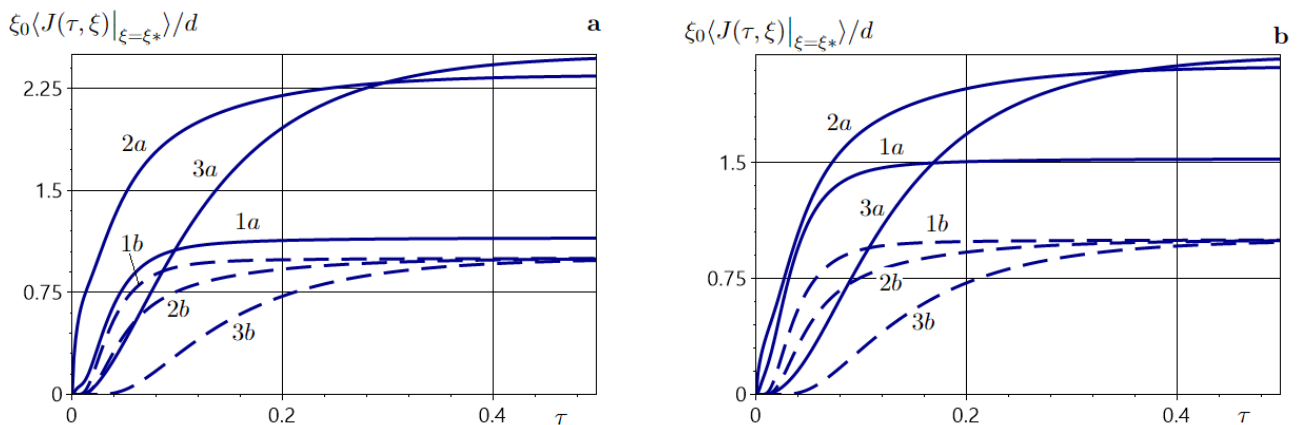


Рис. 2: Усереднені дифузійні потоки за дії системи випадкових точкових джерел у тілі та за її відсутності при $[\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b] = [0.4, 0.6]$ (a) та $[\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b] = [0.2, 0.6]$ (b).

Зауважимо, що час виходу на стаціонарний режим усередненого дифузійного потоку J^{st} змінюється залежно від того, де розташований переріз, через який визначають потік відносно інтервалу дії джерел $\xi_* \in [0, \bar{\xi}_a]$, $\xi_* \in [\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b]$, чи $\xi_* \in [\bar{\xi}_b, \xi_L]$.

Література

- [1] Reis F.D.A.A., Voller V.R. Models of infiltration into homogeneous and fractal porous media with localized sources. Physical Review E. 2019. 99(4). P. 042111.

Задача оптимального керування для інтегро-диференціального рівняння в банахових просторах

Євгеній РАДЧИН*, Ольга КІЧМАРЕНКО**

*Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна, **Військова
академія м. Одеса, Одеса, Україна

*evgeniy.radchin@stud.onu.edu.ua, **olga.kichmarenko@gmail.com

В доповіді розглядається задача оптимального керування для еволюційного інтегро-диференціального рівняння в банахових просторах до моменту часу, коли розв'язок покине задану область. Система описується рівнянням:

$$\frac{du}{dt} = Au + f_1(t, u) + f_2(t, u)z + \int_0^t f_3(t, s, u(s))z(s)ds, \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

Оцінка керування здійснюється за критерієм:

$$J[z] = \int_0^\tau L(t, u(t), z(t))dt \rightarrow \inf. \quad (2)$$

Тут $A : X \rightarrow X$ є лінійним (необмеженим) оператором у рефлексивному банаховому просторі X , де X відповідає встановленій нормі $\|\cdot\|_X$, а область визначення $D(A)$ є щільною в X . Нехай D - відкрита множина в X , а ∂D - її межа у розумінні [1, р. 8], і $\overline{D} = D \cup \partial D$, τ - перший момент часу, коли розв'язок $u(t)$ виходить на границю ∂D , $0 < T \leq \tau$, $T > 0$ є фіксованим. Нехай $f_1 : [0, T] \times D \rightarrow X$, $f_2 : [0, T] \times D \rightarrow L(X, X)$ - простір лінійних обмежених операторів з X у X з нормою $\|\cdot\|_L$, $f_3 : [0, T] \times [0, T] \times D \rightarrow L(X, X)$, $z(t) \in X$ - параметр керування.

Введемо припущення щодо задачі (1) - (2).

Припущення 1. (H1). Припускаємо, що оператор A є нескінченно малим породжувачем C_0 -напівгрупи $\{S(t), t \geq 0\}$ обмежених лінійних операторів у просторі X . Припускаємо, що напівгрупа $S(t)$ є компактною для $t > 0$.

Тоді, за припущенням (H1), теорема 3.2 з [2] означає, що напівгрупа $S(t)$ є неперервною в рівномірній операторній топології для $t > 0$:

Означення 1. Будемо називати функцію $u(t) \in X$ м'яким розв'язком початкової задачі

$$\frac{du}{dt} = u' = Au + f\left(t, u(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right), \quad u(0) = u_0 \in X. \quad (3)$$

на $[0, T]$, якщо:

- 1) $u(0) = u_0$;
- 2) $u \in C([0, T], X)$;

3) $u(t)$ на $[0, T]$ задовольняє інтегральне рівняння

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) f\left(s, u(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, u(\tau)) d\tau\right) ds. \quad (4)$$

Нехай для задачі оптимального керування (1) - (2) виконані наступні умови.

Припущення 2. (H2). Допустимими керуваннями $z(t)$ є функції $z(t)$, такі що $z \in L^p((0, T); X)$, $p > 1$, і $z(t) \in F$ для майже всіх $t \in (0, T)$, де F є замкненою опуклою множиною в X , а розв'язок (1) $u(t) = u(t, z)$, що відповідає керуванню z , існує та є неперервним до першого моменту часу, коли він досягає межі області D , і $J[z] < \infty$.

Припущення 3. (H3). Нехай $f_1 : [0, T] \times D \rightarrow X$, $f_2 : [0, T] \times D \rightarrow L(X, X)$, $f_3 : [0, T] \times [0, T] \times D \rightarrow L(X, X)$, і для будь-яких $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$ функції $f_1(t, \cdot)$, $f_2(t, \cdot)$, $f_3(t, s, \cdot)$ є неперервними за $u \in D$, а для будь-якого фіксованого $u \in D$ функції $f_1(\cdot, u)$, $f_2(\cdot, u)$, $f_3(\cdot, \cdot, u)$ є вимірними за t .

Припущення 4. (H4). Умова лінійного росту. Існує додатна стала K така, що $\|f_1(t, u)\| + \|f_2(t, u)\|_{\mathcal{L}} + \|f_3(t, s, u)\|_{\mathcal{L}} \leq K(1 + |u|)$ для всіх $t \in [0, T]$, $u \in D$.

Припущення 5. (H5). Відображення $L(t, u, z) : [0, T] \times D \times F \rightarrow \mathbb{R}^1$ є неперервним за всіма змінними.

Припущення 6. (H6). Похідна Фреше L_z є неперервною за всіма аргументами, і існують $C_1 > 0, \alpha > 0$ такі, що $\|L_z(t, u, z)\|_* \leq C_1(1 + \|u\|^\alpha + \|z\|^{p-1})$, де $\|\cdot\|_*$ є нормою у спряженому просторі X^* .

Припущення 7. (H7). Існують сталі $C_2 \geq 0, C_3 > 0$ та функція $\omega \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$ такі, що $L(t, u, z) \geq \omega(t) + C_2 \|u\| + C_3 \|z\|^p$, для всіх $t \in [0, T]$, $u \in D$, $z \in F$.

Припущення 8. (H8). $L(t, u, z)$ є опуклою за z для фіксованих $t \in [0, T]$, $u \in D$.

Припущення 9. (H9). Існують сталі $C_4 > 0, \nu > 0$ такі, що для будь-яких $u, u_1 \in X$, $t \in [0, T]$, $z \in F$ виконується $|L(t, u, z) - L(t, u_1, z)| \leq C_0 \|u - u_1\| (1 + \|u\|^\nu + \|u_1\|^\nu + \|z\|^p)$.

Тоді має місце теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються припущення (H1)–(H9). Тоді задача оптимального керування (1) - (2) має розв'язок $(u^*(t), z^*(t))$, де $z^*(t)$ є оптимальним керуванням, а $u^*(t)$ — відповідною оптимальною траєкторією.

Література

- [1] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag. Berlin. 1995. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-66282-9>.
- [2] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag. New York. 1983. 279 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>.

Циліндричні дробби ланцюгових A_s -дробів

Софія РАТУШНЯК

Інститут математики НАН України, УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

ratush404@gmail.com

Нехай $A_s = \{e_0, e_1, \dots, e_{s-1}\}$ – алфавіт (впорядкований набір (кортеж) додатних дійсних чисел), $L = A_s \times A_s \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту.

Теорема 1. Якщо $e_{i+1} - e_i = \frac{e_{s-1} - e_0}{s-1}$ для всіх $i \in \{0, 1, \dots, s-2\}$, то для довільного числа $x \in [\frac{s-1}{se_{s-1}}; \frac{s-1}{se_0}]$ існує послідовність $(a_n) \in L$ така, що

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}. \quad (1)$$

Розклад числа x в ланцюговий дріб (1) (A_s -дріб) називається A_s -розкладом, а скорочений запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}$ – його A_s -зображенням.

Існує зліченна множина чисел, які мають два A_s -зображення (A_s -бінарні числа). Це числа виду $\Delta_{c_1 \dots c_{2m-1} c_{2m} (e_{s-1} e_0)}^{A_s} = \Delta_{c_1 \dots c_{2m-1} [c_{2m} - d] (e_0 e_{s-1})}^{A_s}$. Решта чисел (A_s -унарні) мають єдине A_s -зображення.

Система зображення чисел нескінченними ланцюговими дробами при $s = 2$ вперше була розроблена та ефективно використана в задач фрактального аналізу в роботах [1, 4, 5, 6].

Означення 1. Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ – фіксований впорядкований набір елементів алфавіту. Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_s}$ чисел, означена рівністю $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_s} = \{x : x = [0; c_1, c_2, \dots, c_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots], (\alpha_n) \in L_s\}$.

Мінімальний відрізок, який містить циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_s}$, позначається $\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^{A_s}$ і називається циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$.

Теорема 2. [2] Циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_s}$ є обмеженою, континуальною і досконалою множиною. Для будь-якого набору $(c_1, \dots, c_m) \in A_s^m$ і $s \in A_s$ існують сталі C_1 і C_2 такі, що $0 < C_1 < \frac{|\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m c}^{A_s}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_s}|} < C_2 < 1$.

Означення 2. Значення скінченного дробу $[0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, де $p_0 \equiv 0$, $p_1 \equiv 1$, $q_0 \equiv 1$, $q_1 \equiv a_1$, $p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$, $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$, називається підхідним дробом ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n(a_n)}{q_n(a_n)} = x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$.

Підхідний дріб є важливим поняттям в задачах метричного, топологічного, ймовірного характеру, проте суттєвим їхнім “недоліком” є те, що підхідний дріб $\frac{p_n}{q_n}$ ланцюгового дробу $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}$, взагалі кажучи [3], не належить циліндру $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_s}$.

Означення 3. Дроби $\frac{u_n}{v_n} = [0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + d_0]$ і $\frac{s_n}{r_n} = [0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + d_1]$, де $d_0 = [0; (e_{s-1}, e_0)]$ і $d_1 = [0; (e_0, e_{s-1})]$ називаються *циліндричними дробами n -го порядку* числа $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}$.

Очевидно, що для довільного числа $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}$ має місце рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{k=1}^n \left[\frac{u_k}{v_k}; \frac{s_k}{r_k} \right] = x$$

Лема 1. Для довільного $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}$ має місце рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{r_n} = x$.

Згідно з означенням циліндричних дробів має місце рівність

$$\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^{A_s} = \begin{cases} \left[\frac{u_m}{v_m}; \frac{s_m}{r_m} \right], & \text{якщо } m - \text{непарне,} \\ \left[\frac{s_m}{r_m}; \frac{u_m}{v_m} \right], & \text{якщо } m - \text{парне.} \end{cases}$$

Лема 2. [2] Якщо A_s -зображення чисел має нульову надлишковість, тобто виконуються умови теореми 1, то для довільного відрізка $u \subset [d_0; d_1]$ існує не більше $2(s^v + s - 1)$, де v – найменший натуральний розв’язок нерівності $C_2^v \leq C_1$, A_s -циліндрів, C_1, C_2 – константи, існування яких констатує теорема 2, які покривають u і мають довжину, яка не перевищує довжину u .

Теорема 3. [1] При обчисленні фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича борелівських підмножин відрізка $[d_0; d_1]$ можна обмежитись покриттями A_s -циліндрами, де $[d_0; d_1]$ – множина значень усіх нескінченних ланцюгових дробів A_s -дробів.

У доповіді пропонуються елементи тополого-метричної та ймовірнісної теорії ланцюгового A_s -зображення чисел, а також застосування циліндричних дробів до задач метричного характеру та їх зв’язок з підхідними дробами.

Література

- [1] Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Pratsiovytyi M. V. *A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry*. Ukrainian Math. J. 2009, **61** (4), 541–555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [2] Pratsiovytyi M., Ratushniak S. A *Infinite continued fractions with a finite alphabet and their applications*, 2026, Aug. 25 – 13 p. – Preprint <https://arxiv.org/pdf/2608.24528>
- [3] Pratsiovytyi M., Goncharenko Ya., Lysenko I., Ratushniak S. *Finite A_2 -continued fractions in the problems of rational approximations of real numbers* Ukrains’kyi Matematychnyi Zhurnal, vol. 75, no. 6, June 2023, pp. 849–858.

- [4] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. *Singularity of the distribution of a random variable represented by an A_2 -continued fraction with independent elements*, Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2010, **81**, 159–175. <https://doi.org/10.1090/S0094-9000-2011-00817-4>
- [5] Pratsiovytyi M., Chuikov A. *Continuous distributions whose functions preserve tails of an A -continued fraction representation of numbers*. Random Oper. Stochastic Equations 2019, **27** (3), 199–206. <https://doi.org/10.1515/rose-2019-2017>
- [6] Pratsiovytyi M. V., Makarchuk O. P., Chuikov A. S. *Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval $[0.5, 1]$ by A_2 -continued fractions*. Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2019. № 1(130), 71-83.

Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора збуреного випадковим процесом

Антон РИХЛІК

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Розглядається модель гармонічного осцилятора без тертя. Модель розуміємо як систему, рух якої описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (1)$$

де x_0, v_0 — початкове положення і початкова швидкість осцилятора; $x(t), \dot{x}(t)$ — положення і швидкість осцилятора в момент часу t ;

$$E(t) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2(t) + \omega^2 x^2(t))$$

— повна енергія осцилятора.

Досліджується поведінка з часом (при $t \rightarrow \infty$) математичного сподівання повної енергії випадкових осциляторів двох типів:

1. випадково збурюється лише друга компонента фазової швидкості, тобто розглядається система вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + \xi(t) \end{cases} \quad (\text{тип I}); \quad (2)$$

2. випадкове збурення відбувається під певним кутом α до вектора фазової швидкості, тобто розглядається система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \xi(t) \cos \alpha, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + \xi(t) \sin \alpha \end{cases} \quad (\text{тип II}), \quad (3)$$

у випадках: 1) $\xi(t)$ — стаціонарний процес; 2) $\xi(t)$ — одномірний вінерівський процес.

Теорема 1. Нехай $(x_1(t), x_2(t))$ — розв'язок рівняння (2), в якому $\xi(t)$ — стаціонарний в широкому розумінні неперервний з ймовірністю 1 випадковий процес із $\mathbf{E}[\xi(t)] = 0$ і кореляційною функцією

$$R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \cos \nu_n(t).$$

($\nu_1, \nu_2, \dots$ — спектр процесу $\xi(t)$).

1. Якщо $\omega \neq \nu_i$ для всіх $i = 1, 2, \dots$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \left(\frac{1}{(\nu + \omega)^2} + \frac{1}{(\nu - \omega)^2} \right) = l < \infty,$$

то $\mathbf{E}[E(t)] \leq l$ для всіх $t \geq 0$, де $l > 0$ – стала.

2. Якщо при певному n_0 $k = \nu_{k_0}$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \left(\frac{1}{(\nu + \omega)^2} + \frac{1}{(\nu - \omega)^2} \right) < \infty,$$

то $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \mathbf{E}[E(t)] = \frac{C_{n_0}^2}{4}$ (випадок резонансу).

Теорема 2. Нехай $(x_1(t), x_2(t))$ – розв’язок рівняння (2), в якому $\xi(t) = W(t)$, де $W(t)$ – вінерівський процес. Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbf{E}[E(t)] = \frac{1}{\omega^2}. \quad (4)$$

Теорема 3. Нехай $(x_1(t), x_2(t))$ – розв’язок рівняння (3), в якому $\xi(t)$ – неперервний з ймовірністю 1 випадковий процес. Тоді

$$E(t) = E(0) \exp -2\omega \sin \alpha \int_0^t \xi(s) ds$$

з ймовірністю 1 для всіх $t \geq 0$.

Література

- [1] Гіхман І.І., Скороход А.В. Стохастичні диференціальні рівняння, Київ, Наукова думка, 1968. 354 с.

Поліноміальне керування для однієї нелінійної некерованої системи

Віктор РУСАКОВ, Світлана ІГНАТОВИЧ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна

viktor.rusakov@student.karazin.ua, s.ignatovich@karazin.ua

Розглянемо наступну нелінійну некеровану систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_1^2, \\ x(0) &= x^0, \quad x(\theta) = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

Ця система не є керованою через те, що $\dot{x}_3 \geq 0$, але при цьому вона є досяжною. Можна показати [1], що множина усіх ненульових точок, з яких можна потрапити у початок координат за довільний час, має вигляд:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}.$$

Але виникає питання: як для довільної точки $x^0 \in \mathcal{R}$ побудувати керування, яке переведе її у початок координат за час θ ?

У цій роботі ми презентуємо один із можливих варіантів побудови такого керування, а саме поліноміального керування. Відомо, що для деяких класів нелінійних систем поліноміальне керування може бути дуже ефективним [2, 3]. Ми використовуємо поліноми Лежандра на відрізок $[0, \theta]$:

$$\begin{aligned}P_0(t) &= 1, \quad P_1(t) = \frac{2}{\theta}t - 1, \\ P_{i+1}(t) &= \frac{2i+1}{i+1} \left(\frac{2}{\theta}t - 1 \right) P_i(t) - \frac{i}{i+1} P_{i-1}(t), \quad i \geq 1.\end{aligned}$$

Припустимо, що $u(t)$ це поліном степеня $n-1$. Тоді $x_1(t)$ це поліном степеня n , який може бути записаний як

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^n a_i P_i(t).\tag{2}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема. Розглянемо систему (1) та припустимо, що $\theta > 0$ фіксоване.

1. Множина усіх точок x^0 , які поліноміальне керування степеня не більше за $n-1$, де $n \geq 3$, може перевести у початок координат за час θ , має вигляд

$$\mathcal{R}_n(\theta) = \left\{ x^0 \in \mathbb{R}^3 : x_3^0 \leq -\frac{(x_2^0)^2}{\theta} - \frac{(\theta x_1^0 + 2x_2^0)^2}{4\theta A_n} - \frac{(x_1^0)^2}{4B_n} \theta \right\},$$

де

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((-1)^i + 1)(2i + 1), \quad B_n = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((-1)^i - 1)(2i + 1).$$

Керування може бути знайдено наступним чином:

(а) якщо виконується рівність

$$x_3^0 = -\frac{(x_2^0)^2}{\theta} - \frac{(\theta x_1^0 + 2x_2^0)^2}{4\theta A_n} - \frac{(x_1^0)^2}{4B_n}\theta,$$

тоді

$$u(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n a_i P_i(t), \quad (3)$$

де a_i мають наступний вигляд:

$$a_i = \begin{cases} \frac{x_1^0 \theta + 2x_2^0}{2\theta A_n} (2i + 1), & \text{коли } i \text{ парне,} \\ -\frac{x_1^0}{2B_n} (2i + 1), & \text{коли } i \text{ непарне.} \end{cases} \quad (4)$$

В цьому випадку керування є єдиним.

(b) У випадку, коли

$$x_3^0 < -\frac{(x_2^0)^2}{\theta} - \frac{(\theta x_1^0 + 2x_2^0)^2}{4\theta A_n} - \frac{(x_1^0)^2}{4B_n}\theta,$$

спочатку знайдемо $R = x_3^0 + \frac{(x_2^0)^2}{\theta} + \frac{(\theta x_1^0 + 2x_2^0)^2}{4\theta A_n} + \frac{(x_1^0)^2}{4B_n}\theta$ та визначимо μ , яке задовільняє рівність $R = -\frac{10\theta\mu^2}{21}$. Тоді $u(t)$ може бути обрано у вигляді (3), де усі a_i визначаються формулами (4) окрім a_1 та a_3 , котрі визначаються наступним чином:

$$a_1 = -\frac{3x_1^0}{2B_n} - \mu, \quad a_3 = -\frac{7x_1^0}{2B_n} + \mu.$$

2. Множина усіх ненульових точок x^0 , які поліноміальне керування довільного степеня може перевести у початок координат за час θ , має вигляд

$$\mathcal{R}(\theta) = \left\{ x^0 \in \mathbb{R}^3 : x_3^0 < -\frac{(x_2^0)^2}{\theta} \right\}.$$

Для того, щоб знайти керування, спочатку треба знайти n , для котрого $x^0 \in \mathcal{R}_n(\theta)$, і потім діяти за описаним вище алгоритмом.

Література

- [1] Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu. Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment problems. SIAM Journal on Control and Optimization. 2003. 42(4). P. 1325–1346.
- [2] Siciliano B., Villani L., Oriolo G., De Luca A. Foundations of Robotics. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer. Cham. 2025. 719 p.

- [3] Korobov V.I., Sklyar K.V., Ignatovich S.Y. Almost feedback linearizable systems of the class C1 and solving the constructive controllability problem. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. 2024. 41(2). P. 356–377.

Метод двобічних наближень в аналізі задачі про статичний прогин балки мікроелектромеханічної системи із сегментованим електродом

Антон САВЧЕНКО

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

anton.savchenko@nure.ua

При математичному моделюванні статичного прогину пружної консольної балки (лівий кінець жорстко закріплений, правий вільний) мікроелектромеханічної системи, у якій нерухомий електрод складається зі скінченної кількості сегментів, виникає крайова задача для напівлінійного диференціального рівняння четвертого порядку [1]. Після переходу до безрозмірних величин приходимо до такої моделі:

$$u^{IV}(x) = f(u)(H(x - x_1) - H(x - x_2) + H(x - x_3)), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0, \quad (2)$$

де $u(x)$ — безрозмірний прогин балки, H — функція Хевісайда, $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ — межі сегментів електрода, а

$$f(u) = \frac{\lambda}{(1 - u)^2}, \quad (3)$$

де $\lambda > 0$ — коефіцієнт, пропорційний квадрату прикладеної до системи напруги. Комбінація функцій Хевісайда у правій частині (1) відповідає тому, що електростатична сила діє лише на множині $E = [x_1, x_2] \cup [x_3, 1]$, породжуючи розривність правої частини за x .

Функцію Гріна цієї крайової задачі побудовано у [2], де розглядався випадок суцільного електрода. Функція Гріна $G(x, s)$ невід'ємна і має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{s x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{x s^2}{2} - \frac{s^3}{6}, & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Тоді задача (1)–(2) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна $u = Tu$ з оператором

$$(Tu)(x) = \int_E G(x, s) f(u(s)) ds. \quad (5)$$

До розв'язання рівняння (5) застосуємо метод двобічних наближень, теоретичним підґрунтям якого є теорія нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах [3]. Рівняння (5) розглядатимемо у банаховому просторі $C[0, 1]$ з нормою $\|u\| = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$, у якому виділимо конус невід'ємних функцій $K_+ = \{u \in C[0, 1] : u(x) \geq 0\}$. Функція $f(u)$ неперервна і додатна при $0 \leq u < 1$ та монотонно зростає за u , а тому інтегральний оператор T є цілком неперервним, додатним та ізотонним, тобто залишає інваріантним конус K_+ .

Для оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок $\langle 0, \beta \rangle$, який є апіорною оцінкою невідомого розв'язку. Оскільки $f(0) = \lambda > 0$, умова інваріантності $T\langle 0, \beta \rangle \subset \langle 0, \beta \rangle$ зводиться до нерівності $\lambda M(1 - \beta)^{-2} \leq \beta$, де

$$M = \max_{x \in [0,1]} \int_E G(x, s) ds. \quad (6)$$

Звідси число $\beta \in (0, 1)$ існує як найменший додатний корінь рівняння $\lambda M = \beta(1 - \beta)^2$ за умови

$$\lambda \leq \frac{4}{27 M}. \quad (7)$$

Ітераційний процес двобічних наближень означимо схемою

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(x) &= \int_E G(x, s) f(v^{(k)}(s)) ds, \\ w^{(k+1)}(x) &= \int_E G(x, s) f(w^{(k)}(s)) ds, \end{aligned} \quad (8)$$

з початковими наближеннями $v^{(0)}(x) = 0$, $w^{(0)}(x) = \beta$. На відрізку $0 \leq u \leq \beta$ функція f задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L = 2\lambda(1 - \beta)^{-3}$, звідки $\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq q \|w^{(k)} - v^{(k)}\|$ з коефіцієнтом стиску $q = L M$. Це доводить наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай виконано умову (7) і*

$$q = \frac{2\lambda M}{(1 - \beta)^3} < 1.$$

Тоді крайова задача (1)–(2) має єдиний додатний розв'язок $u^ \in \langle 0, \beta \rangle$, до якого двобічно збігається ітераційний процес (8).*

За наближений розв'язок на k -й ітерації слід взяти

$$u^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(v^{(k)}(x) + w^{(k)}(x)).$$

Тоді справджується апостеріорна оцінка похибки

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(k)} - v^{(k)}\|.$$

Величина M монотонно залежить від множини E : оскільки $G(x, s) \geq 0$, звуження E зменшує M і, відповідно до (7), розширює діапазон допустимих λ . Так, для суцільного випадку $E = [0, 1]$ маємо $M = \frac{1}{8}$, а для сегментованого $E = [0, 08; 0, 26] \cup [0, 76; 1]$ — $M \approx 0,0684$, звідки $\lambda_{\max} \approx 2,166$. При $\lambda \approx 0,598$ маємо $\beta \approx 0,0448$, $q \approx 0,094 < 1$, і ітераційний процес (8) збігається із точністю 10^{-4} за три ітерації, гарантовано локалізуючи точний розв'язок.

Література

- [1] Ouakad H.M., Younis M.I., Alsaleem F. Dynamic response of an electrostatically actuated microbeam to drop-table test. Journal of Micromechanics and Microengineering. 2012. 22. Article 095003.

- [2] Савченко А.В. Застосування методу двобічних наближень до аналізу впливу типів закріплення кінців на статичний прогин балки в моделях мікроелектромеханічних систем. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2026. 30. С. 93–106.
- [3] Krasnoselskii M.A. Positive Solutions of Operator Equations. Groningen: P. Noordhoff. 1964. 381 p.

Асимптотичне інтегрування крайових задач для сингулярно збурених слабо нелінійних диференціально-алгебраїчних систем

Петро САМУСЕНКО

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

psamusenko@ukr.net

Досліджується двоточкова крайова задача

$$\varepsilon A(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = B(t, \varepsilon)x + \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0; T], \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_0], \quad (1)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(T, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

де $x(t, \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор, $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$, M та N – квадратні матриці порядку n , $f(x, t, \varepsilon)$ та $d(\varepsilon)$ – n -вимірні вектори, ε – малий параметр.

Крайова задача (1), (2) розглядається за різних умов щодо структури кронекерової в'язки матриць $B(t, 0) - \lambda A(t, 0)$.

Формальний розв'язок крайової задачі (1), (2) шукається у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + Px(\tau, \varepsilon) + Qx(\xi, \varepsilon),$$

де $\bar{x}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{x}_k(t)$ – регулярна частина асимптотики, а $Px(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k x(\tau)$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, та

$Qx(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k x(\xi)$, $\xi = \frac{t-T}{\varepsilon}$, – сингулярна частина асимптотики.

Наявність примежевих рядів дозволяє побудувати рівномірну асимптотику розв'язку заданої крайової задачі на відрізок $[0; T]$.

Члени регулярної частини асимптотики визначаються з певних алгебраїчних систем, а члени сингулярної частини асимптотики – розв'язки лінійних диференціально-алгебраїчних систем зі сталими коефіцієнтами.

У роботі побудовано асимптотичне розв'язання розв'язку крайової задачі (1), (2) та доведено його асимптотичний характер.

Література

- [1] Chang K.W., Howes F.A., Nonlinear singular perturbation phenomena: theory and applications, Springer Science & Business Media, 2012. 180 p.
- [2] Vasileva A.B., Butuzov V.F., Kalachev L.V. The Boundary Function Method for Singular Perturbation, Philadelphia: SIAM, 1995. 221 p.
- [3] Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем, Київ, Політехніка, 2003. 202 с.

Властивості станів рівноваги дискретних динамічних систем із притягальною взаємодією типу середнього поля

Оксана САТУР

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

orlassat@gmail.com

Розглядається дискретна динамічна система, яка описує перерозподіл обмеженого ресурсу між компонентами скінченного простору станів $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $n > 1$. Частку ресурсу в стані ω_i у момент часу t позначимо через $p_i^t \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i^t = 1$, так що $\mathbf{p}^t = (p_1^t, \dots, p_n^t)$ є стохастичним вектором. Кожна компонента взаємодіє не з іншими компонентами окремо, а із середнім полем — стохастичним вектором $\mathbf{r}^t = (r_1^t, \dots, r_n^t)$ з координатами

$$r_i^t = \frac{1 - p_i^t}{n - 1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

тобто з усередненим розподілом ресурсу по множині $\Omega \setminus \{\omega_i\}$. Динаміка системи задається конфліктним перетворенням

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 + c_i r_i^t)}{z^t}, \quad z^t = \sum_{j=1}^n p_j^t(1 + c_j r_j^t), \quad (2)$$

де сталі $c_i \in (0, 1]$ описують сприятливість умов, пов'язаних зі станом ω_i . Побудова (2) походить від теореми про конфлікт для пари стохастичних векторів [1]; на відміну від «гри за владу» [2] з відштовхувальною взаємодією, тут взаємодія притягальна. Виключаючи $\mathbf{r}^t$ за допомогою (1), дістаємо зручнішу для аналізу форму

$$p_i^{t+1} = p_i^t \cdot \frac{n - 1 + c_i(1 - p_i^t)}{n - 1 + L_c^t}, \quad L_c^t = \sum_{k=1}^n c_k p_k^t(1 - p_k^t). \quad (3)$$

Для монотонних траєкторій система (3) збігається до єдиної нерухомої точки $\mathbf{p}^\infty$ [3]. Її координати визначаються множиною активних індексів $M^* = \{k: p_k^\infty > 0\}$, $\gamma(M^*) = |M^*|$, і пороговим значенням

$$\Lambda(M^*) = \frac{\gamma(M^*) - 1}{\sum_{k \in M^*} \frac{1}{c_k}},$$

а саме

$$p_i^\infty = \begin{cases} 1 - \frac{\Lambda(M^*)}{c_i}, & c_i > \Lambda(M^*), \\ 0, & c_i \leq \Lambda(M^*). \end{cases}$$

Сама множина M^* самоузгоджена й знаходиться скінченною процедурою послідовного відсіювання індексів, для яких умова виживання порушується. Отже, асимптотика системи повністю визначається набором сталих c_i , а якісна перебудова рівноваги відбувається тоді, коли змінюється потужність множини M^* .

Це спостереження робить біфуркаційний аналіз природною частиною дослідження системи: сталі c_i виступають параметрами, а рівність

$$c_i = \Lambda(M^*)$$

є біфуркаційною умовою. Одночасне занулення всіх n координат неможливе, оскільки умова $\sum_{i=1}^n p_i^t = 1$ зберігається при всіх t ; найбільша можлива перебудова — занулення $n - 1$ координат, коли атрактор потрапляє у вершину симплекса, $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{e}_k$, що відповідає повній агрегації ресурсу в одній компоненті.

У прикладних термінах перетин критичного значення означає повне вичерпання ресурсу в i -му стані та витіснення відповідної компоненти із системи. Оскільки пороги виражені явно через сталі c_i , останні відіграють роль керування, що переводить систему в наперед задану конфігурацію рівноваги. Повні доведення та аналіз стійкості наведено в [3].

Роботу частково підтримано грантом Simons Foundation SFI-PD-Ukraine-00014586 та проектом «Математичне моделювання складних систем і процесів, пов'язаних з безпекою» (№ 0125U000299).

Література

- [1] Koshmanenko V. A theorem on conflict for a pair of stochastic vectors. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2003. 55(5). P. 671–678.
- [2] Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K. Mean field model of a game for power. *Physica A*. 2019. 525. P. 535–547.
- [3] Satur O.R. Mean-field dynamics of attractive resource interaction: from uniform to aggregated states. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2026. 248. P. 213–238.

Найкращі наближення класів згорток, породжуваних лінійними комбінаціями аналітичних ядер з синхронізованими фазовими зсувами

Анатолій СЕРДЮК

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

serdyuk@imath.kiev.ua

Розглянемо такі простори 2π -періодичних функцій: C — неперервних, $L = L_1$ — сумовних на $(0, 2\pi)$ і L_∞ — вимірних істотно обмежених функцій φ зі стандартними нормами: $\|\varphi\|_C$, $\|\varphi\|_L = \|\varphi\|_1$ і $\|\varphi\|_\infty$, відповідно.

Через $K * \mathfrak{M}$ позначимо клас функцій f , які можна представити у вигляді згортки фіксованого ядра $K \in L_1$ із всеможливими функціями φ з множини $\mathfrak{M} \subset L_1$, тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (K * \varphi)(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t) \varphi(x-t) dt, \quad \varphi \in \mathfrak{M}, \quad a_0 \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

В якості $\mathfrak{M}$ виступатимуть множини $U_\infty^0 = \left\{ \varphi \in L_\infty : \|\varphi\|_\infty \leq 1, \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0 \right\}$, $U_1^0 = \left\{ \varphi \in L_1 : \|\varphi\|_1 \leq 1, \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0 \right\}$, а в ролі твірних ядер K — нетривіальні лінійні комбінації

$$K(t) = \Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Psi_{i,\beta}(t), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i \neq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

функцій $\Psi_{i,\beta}(t)$ з однаковим (синхронізованим) фазовим зсувом $\frac{\beta\pi}{2}$ вигляду

$$\Psi_{i,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_i(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad \psi_i(k) > 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

послідовності коефіцієнтів $\psi_i(k)$ яких задовольняють граничні умови Даламбера D_q :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} = q_i, \quad q_i \in [0, 1), \quad i = \overline{1, m},$$

з різними показниками q_i (в такому випадку записуватимемо коротко $\psi_i \in D_{q_i}$).

За вказаних умов класи згорток $K * \mathfrak{M}$ складаються з аналітичних функцій f , що допускають регулярне продовження у смугу $\text{Im} z < \min\{\ln 1/q_i\}_{i=1}^m$ комплексної площини.

Досліджується задача про знаходження найкращих наближень в середньому ядер $\Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}}(t)$ вигляду (2), тобто величин

$$E_n(\Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}})_L = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \Psi_{i,\beta} - t_{n-1} \right\|_1, \quad (4)$$

а також задача про обчислення точних значень величин

$$E_n(\Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}} * U_\infty^0)_C = \sup_{f \in \Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}} * U_\infty^0} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C, \quad (5)$$

$$E_n(\Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}} * U_1^0)_L = \sup_{f \in \Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}} * U_1^0} \inf_{t_{n-1} \in T_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_1, \quad (6)$$

де T_{2n-1} — підпростір усіх тригонометричних поліномів порядку не вищого за $n-1$.

Теорема 1. Для будь-яких фіксованих $m \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{R}, \alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ядро $\Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}}$ вигляду (2) за виконання умов $\psi_i \in D_{q_i}, i = \overline{1, m}, 0 < q_m < q_{m-1} < \dots < q_2 < q_1 < 1$, задовольняє умову Надя N_n^* (див. означення 2 із [1]) для всіх значень $n \in \mathbb{N}$, починаючи з деякого номера n_0 , і, як наслідок, мають місце рівності

$$E_n(\Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}} * U_\infty^0)_C = E_n(\Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}} * U_1^0)_L = E_n(\Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}})_L = \\ = \|\Psi_{m,\beta}^{\bar{\alpha}} * \text{sign} \sin n(\cdot)\|_C = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi((2k+1)n)}{2k+1} \sin \left((2k+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right|, \quad (7)$$

де θ_n — єдиний на $[0, 1)$ корінь рівняння $\sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=0}^{\infty} \psi((2k+1)n) \cos((2k+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2}) = 0$.

У частинному випадку, коли в ролі ядер K виступають нетривіальні лінійні комбінації гармонічних ядер Пуассона $\Psi_{i,\beta}(t) = P_{q_i,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_i^k \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$, $i = \overline{1, m}$, рівності (7) встановлено у роботі [1]. Теорема 1 дозволяє розповсюдити результати зазначеної роботи [1] на випадок нетривіальних лінійних комбінацій ядер Неймана, полігармонічних ядер Пуассона та багатьох інших аналітичних ядер.

Наведемо наслідок з теореми 1 для випадку нетривіальних лінійних комбінацій бігармонічних ядер Пуассона ($\beta = 2\nu, \nu \in \mathbb{Z}$) та спряжених до них ($\beta = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{Z}$):

$$B_{m,\beta}^{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1-q_i^2) \right) q_i^k \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad \beta \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, m \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

з різними показниками $q_i \in (0, 1)$.

Теорема 2. За виконання умови $0 < q_m < q_{m-1} < \dots < q_2 < q_1 < 1$ для будь-якого ядра $B_{m,\beta}^{\bar{\alpha}}(t)$ вигляду (8) знайдеться номер n_0 , починаючи з якого при $\beta \in \mathbb{Z}$

$$E_n(B_{m,\beta}^{\bar{\alpha}} * U_\infty^0)_C = E_n(B_{m,\beta}^{\bar{\alpha}} * U_1^0)_L = E_n(B_{m,\beta}^{\bar{\alpha}})_L = \\ = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\arctg q_i^n + \frac{n(1-q_i^2)}{2} \frac{q_i^n}{1+q_i^{2n}} \right) \right|, & \beta = 2\nu, \nu \in \mathbb{Z}, \\ \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+q_i^n}{1-q_i^n} + \frac{n(1-q_i^2)}{2} \frac{q_i^n}{1+q_i^{2n}} \right) \right|, & \beta = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Робота частково підтримана грантом Фонду Саймонса (SFI-PD-Ukraine-00014586, AS).

Література

- [1] Сердюк А., Сорич В., Сорич Н. Найкраще наближення тригонометричними поліномами класів згорток, породжених деякими лінійними комбінаціями періодичних ядер. Укр. мат. журн. 2025. 77, № 5. С. 349–363.

Цифрові технології в діяльності вчителя математики

Аліна СКОРОЛІТНЯ, Іванна ПАЛАМАРЮК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

`skorolitnia.alina@chnu.edu.ua; palamariuk2206@gmail.com`

Сучасна математична освіта розвивається в умовах цифрової трансформації суспільства, що зумовлює оновлення змісту, методів і форм організації навчання. Одним із ключових завдань учителя математики є створення освітнього середовища, у якому цифрові технології не замінюють традиційне навчання, а підсилюють його дидактичні можливості. Використання цифрових ресурсів сприяє розвитку математичної, цифрової та дослідницької компетентностей учнів, забезпечує візуалізацію абстрактних понять, індивідуалізацію навчання й оперативний зворотний зв'язок [1].

Професійна діяльність сучасного вчителя математики передбачає не лише володіння цифровими інструментами, а й уміння інтегрувати їх у педагогічні стратегії відповідно до навчальної мети. О. Коношевський підкреслює, що цифрова компетентність педагога охоплює здатність добирати математичне програмне забезпечення, створювати власні цифрові освітні матеріали та організовувати ефективну взаємодію учнів у цифровому середовищі [2]. Саме тому цифрові технології слід розглядати як важливий компонент методичної системи навчання математики, а не лише як технічний засіб проведення уроку.

Відповідно до сучасних підходів до навчання математики, цифрові технології реалізуються через кілька взаємопов'язаних стратегій. Когнітивні стратегії спрямовані на засвоєння нових математичних знань, формування понять і розвиток логічного мислення. Їх основною метою є допомога учням у розумінні складних тем шляхом візуалізації та математичного моделювання. Ефективним прикладом є використання GeoGebra – інтерактивного безкоштовного середовища для вивчення геометрії, алгебри, функцій, статистики та елементів математичного аналізу. Завдяки динамічним побудовам учні можуть досліджувати властивості геометричних фігур, спостерігати зміну графіків функцій під час варіювання параметрів, перевіряти математичні припущення та встановлювати причинно-наслідкові зв'язки між величинами [1]. Подібний підхід забезпечує перехід від пасивного сприйняття інформації до активного пізнання.

Не менш важливими є організаційні стратегії, які орієнтовані на практичне застосування знань, їх систематизацію та узагальнення. У діяльності вчителя математики вони реалізуються через використання цифрових сервісів для створення таблиць, схем, діаграм, інтерактивних вправ і тестових завдань. Такі інструменти, як Canva, Desmos, Kahoot, Google Forms або LearningApps, дозволяють урізноманітнювати форми роботи, організовувати групову взаємодію, здійснювати формувальне оцінювання та оперативно аналізувати результати навчання. Використання подібних ресурсів сприяє розвитку навичок аналізу, порівняння, класифікації та узагальнення математичної інформації, що є важливими складниками математичної компетентності учнів.

Особливе місце посідають метакогнітивні стратегії, які передбачають розвиток уміння самостійно планувати, контролювати й оцінювати власну навчальну діяльність. Такі стратегії найбільш ефективно реалізуються під час дослідницького та проєктного навчання, виконання STEM-завдань, моделювання практичних ситуацій і створення індивідуальних освітніх траєкторій. Використання цифрових платформ, електронних освітніх середовищ, математичних тренажерів та інтелектуальних цифрових помічників дає можливість учителю організовувати диференційоване навчання відповідно до рівня підготовки кожного учня. При цьому цифрові технології поєднують кілька педагогічних стратегій одночасно, забезпечуючи навчання через дослідження, співпрацю та рефлексію [1].

Важливою складовою професійної діяльності вчителя є також мотиваційна стратегія, спрямована на створення позитивного психологічного клімату та підвищення інтересу до вивчення математики. Інтерактивні демонстрації, математичні симуляції, гейміфіковані освітні застосунки, навчальні відео та цифрові візуалізації роблять абстрактний математичний матеріал більш доступним і зрозумілим для учнів. Крім того, сучасні системи штучного інтелекту можуть використовуватися для добору прикладів, створення варіативних задач, генерації тестових завдань і пояснення окремих математичних понять різними способами. Водночас вирішальна роль у навчальному процесі залишається за вчителем, який здійснює критичний відбір цифрового контенту та забезпечує академічну доброчесність.

Ефективність використання цифрових технологій визначається не кількістю застосованих сервісів, а їх педагогічною доцільністю. Учитель математики повинен враховувати зміст навчальної теми, вікові особливості учнів, рівень сформованості їхніх компетентностей та очікувані результати навчання. Саме поєднання традиційних методів навчання з цифровими інструментами створює умови для формування стійкої навчальної мотивації, розвитку критичного мислення та підвищення якості математичної освіти.

Отже, цифрові технології є невід'ємною складовою професійної діяльності сучасного вчителя математики. Їх інтеграція в когнітивні, організаційні, метакогнітивні та мотиваційні стратегії навчання забезпечує реалізацію компетентнісного підходу, активізує пізнавальну діяльність учнів і сприяє формуванню математичної та цифрової компетентностей. Подальший розвиток математичної освіти пов'язаний із удосконаленням цифрової компетентності педагогів та методично обґрунтованим використанням інноваційних цифрових засобів.

Література

- [1] Гончаренко М. Цифрові технології у стратегіях навчання математики у базовій середній освіті. Молодь і ринок. 2025. <https://doi.org/10.24919/2308-4634.2025.339577>.
- [2] Коношевський О. Л. Підготовка майбутніх учителів математики до застосування цифрових технологій в освітньому процесі закладів загальної середньої освіти. Математика, інформатика, фізика: наука та освіта. 2024. 1(2). С. 200–209. <https://doi.org/10.31652/3041-1955/2024-01-02-10>.

Задача Коші для рівняння коливань струни на площині з випадковими збуреннями у просторі Орліча

Ганна СЛИВКА-ТИЛИЩАК, Мирослава ГЛЕБЕНА

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

anna.slyvka@uzhnu.edu.ua, myroslava.hlebena@uzhnu.edu.ua

Вплив випадкових факторів є невіддільною складовою багатьох сучасних процесів, тому їхнє врахування під час моделювання та розв'язання задач математичної фізики набуває все більшої актуальності. Класичним представником гіперболічних рівнянь математичної фізики є рівняння коливання струни [1], яке широко використовується для опису різноманітних коливальних процесів у середовищах із випадковими характеристиками або зовнішніми збуреннями. Дослідження таких моделей дозволяє глибше зрозуміти поведінку динамічних систем під дією випадкових факторів.

У роботі розглядається задача Коші для неоднорідного рівняння коливання струни на площині з сталими коефіцієнтами [2]:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + \xi(x, y, t),$$

за нульових початкових умов, де права частина $\xi(x, y, t)$ є вибірково неперервним з імовірністю одиниця випадковим полем із простору Орліча $L_U(\Omega)$ [3].

Основну увагу зосереджено на дослідженні умов існування з імовірністю одиниця класичного та узагальненого розв'язків задачі. За допомогою методу інтегральних перетворень Фур'є побудовано подання розв'язку через інтеграли з використанням кореляційної функції випадкового поля.

Доведено леми та теореми про існування з імовірністю одиниця відповідних інтегралів, а також встановлено умови рівномірної збіжності за імовірністю послідовностей інтегралів, що визначають розв'язок та його похідні до другого порядку включно.

Отримано оцінки норм у просторі $L_U(\Omega)$ для різниць розв'язку та його похідних у парах точок, що дозволяє гарантувати виконання умов гладкості й існування класичного розв'язку задачі Коші для випадку, коли функція генератора простору Орліча дорівнює $U(x) = |x|^p$ при $p > 3$.

Література

- [1] Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики: підручник. Київ: ВПЦ «Київський університет». 2017. 520 с.
- [2] Slyvka-Tylyshchak A., Mykhasiuky M. Cauchy Problem for the Equation of String Oscillations on a Plane with Random Factors from the Orlicz Space. *Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications*. New York: Nova Science Publishers. 2023. P. 453 – 478.
- [3] Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. American Mathematical Society. Rhode Island. 2000. 257 p.

Існування циклів порядку Шарковського для імпульсної системи Лієнара

Валентин СОБЧУК, Єлизавета РУДИК, Олексій НЕСТЕРЕНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

sobchuk@knu.ua, lizandra.rudyk@gmail.com, oleksii-nesterenko@knu.ua

За наявності імпульсної дії поведінка розв'язків диференціальних рівнянь може бути суттєво нелінійною і значно відрізнятися від поведінки таких систем за відсутності імпульсів [4]. Особливе ускладнення динаміки виникає у випадку імпульсної дії у нефіксовані моменти часу, що призводить до появи багатоперіодичних та хаотичних режимів. У цьому контексті ключове значення має порядок Шарковського, який встановлює ієрархію існування періодичних точок для одновимірних відображень [3].

Розглядається задача про існування періодичних розв'язків рівняння Лієнара з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad \Delta\dot{x}|_{x=x^*} = I(\dot{x}), \quad (1)$$

де імпульс відбувається у моменти проходження рухомою точкою фіксованого положення $x = x^*$, а неперервна функція I визначає приріст кількості руху, що залежить від швидкості точки в момент проходження. Покладемо $G(x) = \int_0^x g(s) ds$ та $y^* = \sqrt{2G(x^*)}$.

Означення. Рівняння (1), для якого $xg(x) > 0$ при $x \neq 0$ та $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, згідно з класифікацією Опяля належить до класу S .

Надалі вважаємо, що рівняння (1) є рівнянням типу S і задовольняє умови існування та єдиності розв'язку, пряма $x = x^*$ трансверсальна потоку всюди, крім траєкторії, для якої вона є дотичною (тоді $I(0) = 0$), а оператор імпульсної дії неперервний за своїми змінними.

Відображення Пуанкаре для прямої $x = x^*$ зводить задачу про періодичні розв'язки задачі (1) до задачі про періодичні та нерухомі точки відображення відрізка в себе $\varphi(y) = -y + I(-y)$, $y = \dot{x}$ [1, 2]. Для кусково-лінійної імпульсної дії $I(y) = (\lambda - 1)y + \lambda y^*$ при $y \leq 0$ та $I(y) = -(\lambda + 1)y + \lambda y^*$ при $y > 0$ воно набуває вигляду

$$\varphi(y) = \begin{cases} \lambda(y^* - y), & y \geq 0, \\ \lambda(y^* + y), & y < 0, \end{cases} \quad 0 < \lambda \leq \sup G(x). \quad (2)$$

Відображення (2) неперервне на $\mathbb{R}$; при $0 < \lambda < 1$ воно має єдину нерухому точку, яка є стійкою, а при $1 < \lambda \leq \sup G(x)$ — нерухомі точки $\frac{\lambda}{1-\lambda}y^*$, $\frac{\lambda}{1+\lambda}y^*$ та точку періоду 2.

Теорема 1. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ та для всіх $y \in \mathbb{R}$

$$\varphi^n(y) = P_n(\lambda) y^* \pm \lambda^n y, \quad P_1(\lambda) = \lambda, \quad P_n(\lambda) = \lambda \pm \lambda P_{n-1}(\lambda), \quad n \geq 2, \quad (3)$$

де знак « $\pm$ » відповідає тій гілці (2), у яку потрапляє точка на відповідному кроці ітерувания.

Твердження 1. Нехай $\mathcal{P}_n$ — множина всіх многочленів, породжених рекурентною формулою з (3) при фіксованому $n \geq 2$ і всеможливих виборах знаків, а $\mathcal{P}_n^*$ — множина всіх многочленів вигляду $a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + \lambda$, $a_i = \pm 1$, $i = \overline{2, n}$. Тоді $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^*$.

Оскільки n -періодична точка φ є нерухомою точкою φ^n , з (3) дістаємо $(1 \mp \lambda^n)y = P_n(\lambda)y^*$.

Наслідок 1. При $1 < \lambda \leq \sup G(x)$ задача (1) має $T(n)$ -періодичні розв'язки, для яких фазова точка за період зазнає рівно n імпульсних дій, а точки дії імпульсних сил мають вигляд $y = \frac{P_n(\lambda)}{1 \pm \lambda^n} y^*$, де $P_n \in \mathcal{P}_n^*$.

Послідовне ітерування точки $y = \frac{\lambda - \lambda^2 - \dots - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n} y^*$ дає явний вигляд чисельників усіх точок циклу та систему нерівностей на λ , з якої достатньою є одна нерівність $\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0$. Отже, зі зростанням n проміжок допустимих значень параметра λ звужується.

Теорема 2. Точки, що визначають цикл періоду n відображення (2) на проміжку $(1, \sup G(x))$, мають вигляд

$$\frac{\lambda - \lambda^2 - \dots - \lambda^{n-1} - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n} \quad \text{та} \quad \frac{\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1} - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n},$$

причому $\lambda \in (\alpha_n, \sup G(x))$, де α_n — єдиний додатний корінь рівняння $r + r^2 + \dots + r^{n-1} - r^n = 0$; $\alpha_2 = 1$, $\alpha_n \in (1, 2)$ при $n \geq 3$ та $\alpha_n \rightarrow 2$ при $n \rightarrow \infty$.

Приклад. Нехай $y^* = 1$, $\lambda = \frac{17}{10}$. Тоді $\alpha_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \lambda < \alpha_4$, і за теоремою 2 точки циклу (випадок зі знаменником $1 + \lambda^3$) дорівнюють $y_1 = -\frac{6103}{5913}$, $y_2 = -\frac{323}{5913}$, $y_3 = \frac{9503}{5913}$. Безпосереднє ітерування дає $\varphi(y_1) = y_2$, $\varphi(y_2) = y_3$, $\varphi(y_3) = y_1$, причому $y_1, y_2 \neq y_3$, тобто це справді цикл найменшого періоду 3. За порядком Шарковського [3] звідси впливає існування циклів усіх натуральних періодів.

Література

- [1] Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Собчук В.В. Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією. Укр. мат. журн. 1999. 51, № 6. С. 827–834.
- [2] Самойленко В.Г., Собчук В.В. Періодичні розв'язки рівняння Лієнара з імпульсною дією. Нелінійні коливання. 2000. 3, № 2. С. 256–265.
- [3] Sharkovsky A.N., Kolyada S.F., Sivak A.G., Fedorenko V.V. Dynamics of One-Dimensional Maps. Springer Science+Business Media, 1997. 262 p.
- [4] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1995. 472 p.

Наближення класів згорток періодичних функцій за допомогою лінійних поліноміальних методів, побудованих на основі коефіцієнтів Фур'є-Лагранжа

Ігор СОКОЛЕНКО

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p , $1 \leq p \leq \infty$, — простори 2π -періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ та $\|\cdot\|_p$, відповідно. Позначимо через $C_{\bar{\beta},p}^\psi$, $1 \leq p \leq \infty$, множину всіх 2π -періодичних функцій f , які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \Psi_{\bar{\beta}}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B_p^0 = \{h \in L_p : \|h\|_p \leq 1, \varphi \perp 1\}, \quad (1)$$

із фіксованим твірним ядром $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\Psi_{\bar{\beta}}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right),$$

де $\psi = \psi(k)$ і $\bar{\beta} = \beta_k$, $k = 1, 2, \dots$, — довільні послідовності дійсних чисел. Якщо $\psi(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, то функцію φ у зображенні (1) називають $(\psi, \bar{\beta})$ -похідною функції f і позначають $f_{\bar{\beta}}^\psi$. Поняття $(\psi, \bar{\beta})$ -похідної введено О. І. Степанцем. Оскільки $\varphi \in L_p$, а $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_{p'}$, то згортка (1) є неперервною функцією, тобто $C_{\bar{\beta},p}^\psi \subset C$. Зрозуміло, що при $p = 2$ умова включення $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_2$ еквівалентна виконанню умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty. \quad (2)$$

Нехай $f(x)$ — довільна 2π -періодична неперервна функція, N і n — довільні натуральні числа такі, що $N \geq 2n + 1$. Покладемо $x_k^{(N)} = \frac{2k\pi}{N}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Відомо, що серед всіх тригонометричних поліномів $T_n(x)$ порядку не вищого ніж n найменше значення суми

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| f \left(x_k^{(N)} \right) - T_n \left(x_k^{(N)} \right) \right|^2$$

реалізує тригонометричний поліном

$$T_n^{(N)}(f; x) = \frac{a_0^{(N)}}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^{(N)} \cos kx + b_k^{(N)} \sin kx),$$

де

$$a_k^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^{(N)}) \cos kx_i^{(N)}, \quad b_k^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^{(N)}) \sin kx_i^{(N)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

При $N = 2n + 1$ поліном $T_n^N(f; x) = T_n^{2n+1}(f; x)$ є інтерполяційним тригонометричним поліномом n -го порядку функції $f(x)$. Тобто $T_n^{2n+1}(f; x)$ інтерполює $f(x)$ у з рівновідданих вузлах $x_k^{(N)} = x_k^{(2n+1)} = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$:

$$T_n^{2n+1}(f; x_k^{(2n+1)}) = f(x_k^{(2n+1)}), \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Розглянемо лінійні поліноміальні методи наближення функцій f з класів $C_{\beta,2}^\psi$, які побудовані на основі їх коефіцієнтів $a_k^{(N)}$ і $b_k^{(N)}$. Нехай $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ і $M = \|\mu_k^{(n)}\|$, $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots$, — нескінченні трикутні матриці дійсних чисел такі, що

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(n)} &= 1, & \mu_0^{(n)} &= 0, & n &= 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda_k^{(n)} &= 0, & \mu_k^{(n)} &= 0, & k &= n+1, n+2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k^{(n)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Позначимо через $\tilde{U}_n = \tilde{U}_n(\Lambda; M)$ лінійний оператор, який кожній функції $f \in C$ ставить у відповідність тригонометричний поліном вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n(f; x) = \tilde{U}_n(f; \Lambda; M; x) &= \frac{a_0^{(N)}}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k^{(n)} (a_k^{(N)} \cos kx + b_k^{(N)} \sin kx) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_k^{(n)} (-b_k^{(N)} \cos kx + a_k^{(N)} \sin kx) \right), \end{aligned}$$

де $a_k^{(N)}$ і $b_k^{(N)}$ — коефіцієнти, що визначаються рівностями (3).

Теорема 1. Нехай послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2), а $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ і $M = \|\mu_k^{(n)}\|$ — умови (4). Тоді для довільної послідовності $\bar{\beta} = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, і довільного $n \in \mathbb{N}$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\bar{\beta},2}^\psi; \Lambda; M; x) &= \sup_{f \in C_{\bar{\beta},2}^\psi} |f(x) - \tilde{U}_n(f; x)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^n \left((1 - \lambda_k^{(n)})^2 + (\mu_k^{(n)})^2 \right) \psi^2(k) + \right. \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{N-n-1} \psi^2(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=mN-n}^{mN+n} \left(\left(\cos mNx - \lambda_{|k-mN|}^{(n)} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\sin mNx + \mu_{|k-mN|}^{(n)} \right)^2 \right) \psi^2(k) + \sum_{k=mN+n+1}^{(m+1)N-n-1} \psi^2(k) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

При $N = 2n + 1$ теорему 1 доведено в [1].

Література

- [1] Сердюк А.С., Соколенко І.В. Апроксимація класів згорток періодичних функцій лінійними методами, побудованими на основі коефіцієнтів Фур'є–Лагранжа. Аналіз та застосування. Збірник праць Інституту математики НАН України. 2017. 14(1). С. 238–248.

Про d-характеристики крайових задач для диференціальних систем вищих порядків із найбільш загальними крайовими умовами

Віталій СОЛДАТОВ

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

soldatov@imath.kiev.ua

Нехай довільно вибрано числа $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, натуральні числа m, l, r та ціле число $n \geq 0$. На скінченному інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ розглянемо лінійну крайову задачу для системи m диф. рівнянь порядку $r \geq 1$:

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t)y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \quad (1)$$

$$By = c. \quad (2)$$

Тут довільно задано $A_{r-j} \in (C^{(n)})^{m \times m}$, де $1 \leq j \leq r$, $f \in (C^{(n)})^m$, $c \in \mathbb{C}^l$ і лінійний неперервний оператор $B: (C^{(n+r)})^m \rightarrow \mathbb{C}^l$.

Крайова умова (2) задає l скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь порядку r . У випадку $l > rm$ ця крайова умова є *перевизначеною*, а у випадку $l < rm$ вона є *недовизначеною* щодо диференціальної системи (1).

Запишемо крайову задачу (1), (2) у вигляді рівняння $(L, B)y = (f, c)$ з допомогою лінійного неперервного оператора

$$(L, B): (C^{(n+r)})^m \rightarrow (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^l. \quad (3)$$

Теорема 1. *Оператор (3) є фредгольмовим з індексом $rm - l$.*

Означення 1. Блочну числову матрицю $M(L, B) := ([BY_1], \dots, [BY_r]) \in \mathbb{C}^{l \times rm}$ розміру $l \times rm$, утворену із r прямокутних блоків $[BY_i] \in \mathbb{C}^{m \times l}$, називаємо *характеристичною матрицею* крайової задачі (1), (2).

Тут $[BY_i]$ позначає комплексну числову матрицю розміру $l \times m$, кожен j -й стовпець якої отримується в результаті дії оператора B на j -й стовпець матричної функції $Y_i(\cdot) \in (C^{(n+r)})^{m \times m}$, яка для кожного номера $i \in \{1, \dots, r\}$, є єдиним розв'язком сім'ї задач Коші

$$Y_i^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t)Y_i^{(r-j)}(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \quad (4)$$

$$Y_i^{(j-1)}(a) = \delta_{i,j}I_m, \quad j \in \{1, \dots, r\}, \quad (5)$$

де O_m і I_m позначають нульову і одиничну матриці розміру $m \times m$, а $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Теорема 2. Для d -характеристик фредгольмового оператора (3) правильні формули

$$\dim \ker(L, B) = \dim \ker M(L, B), \quad (6)$$

$$\dim \operatorname{coker}(L, B) = \dim \operatorname{coker} M(L, B). \quad (7)$$

Звідси впливає така необхідна і достатня умова оборотності оператора (3):

Наслідок 1. Оператор (3) є оборотним (тобто топологічним ізоморфізмом) тоді й лише тоді, коли $l = rm$ і квадратна матриця $M(L, B)$ є невідродженою.

Поряд із (1), (2), розглянемо послідовність задач

$$L(k)y(t, k) := y^{(r)}(t, k) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t, k)y^{(r-j)}(t, k) = f(t, k), \quad t \in (a, b), \quad (8)$$

$$B(k)y(\cdot, k) = c(k), \quad (9)$$

Тут $k \in \mathbb{N}$, $A_{r-j}(\cdot, k) \in (C^{(n)})^{m \times m}$, $f(\cdot, k) \in (C^{(n)})^m$, $c(\cdot, k) \in \mathbb{C}^l$, а $B(k)$ — лінійний неперервний оператор на парі просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $\mathbb{C}^l$. З (8), (9) пов'яжемо такі послідовності їх операторів і характеристичних матриць

$$(L(k), B(k)) : (C^{(n+r)})^m \rightarrow (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^l \quad (10)$$

$$M(L(k), B(k)) := ([B(k)Y_1(k)], \dots, [B(k)Y_r(k)]) \subset \mathbb{C}^{l \times rm}.$$

Теорема 3. Якщо $(L(k), B(k)) \xrightarrow{s} (L, B)$, то $M(L(k), B(k)) \rightarrow M(L, B)$.

Теорема 4. Припустимо, що

$$(L(k), B(k)) \xrightarrow{s} (L, B). \quad (11)$$

Тоді

$$\dim \ker(L(k), B(k)) \leq \dim \ker(L, B) \quad \text{для всіх } k \gg 1,$$

$$\dim \operatorname{coker}(L(k), B(k)) \leq \dim \operatorname{coker}(L, B) \quad \text{для всіх } k \gg 1.$$

$(*) \xrightarrow{s} (**)$ позначає збіжність послідовності операторів у сильній операторній топології. Всі границі розглядаємо при $k \rightarrow \infty$.

У наступних наслідках останньої теореми припустимо, що виконується умова (11).

Наслідок 2. Якщо оператор (3) є оборотним, то оператори (10) є оборотними для всіх $k \gg 1$.

Наслідок 3. Якщо крайова задача (1), (2) має розв'язок для кожних зазначених правих частин, то це правильно і для крайових задач (8), (9) для всіх $k \gg 1$.

Наслідок 4. Якщо крайова задача (1), (2) має лише тривіальний розв'язок у випадку нульових правих частин, то це правильно і для крайових задач (8), (9) для всіх $k \gg 1$.

Представлені результати було опубліковано в роботі [1].

Література

- [1] Солдатов В. Розв'язність лінійних крайових задач для звичайних диференціальних систем високого порядку у просторах неперервно диференційовних функцій. Український математичний журнал. 2026. 78(9–10). 13 с. <https://doi.org/10.3842/umzh.v78i9-10.9803>.

Інваріантні міри для нескінченновимірних стохастичних рівнянь

Олександр СТАНЖИЦЬКИЙ¹, Ольга МАРТИНЮК², Юрій ПЕРЕСТИЮК¹

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

²Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

stanzhytskyi@knu.ua, perestyuk.yuriy@knu.ua, o.martynyuk@chnu.edu.ua

Нехай E – польський простір, $B_b(E)$ (відповідно $C_b(E)$) – множини дійсних, обмежених борелівських функцій (відповідно обмежених неперервних функцій) на E , а $M(E)$ – множина всіх ймовірнісних мір, визначених на вимірному просторі (E, Θ) .

Через $P_t(x, \Gamma)$, $t \geq 0$, $x \in E$, $\Gamma \in \Theta$ позначимо марковську перехідну функцію на E . Із перехідною функцією пов'язані дві сім'ї напівгруп лінійних операторів P_t і P_t^* , одна з яких діє на просторі $B_b(E)$ за формулою

$$P_t \varphi(x) = \int_E P_t(x, dy) \varphi(y),$$

а інша — на ймовірнісних мірах

$$P_t^* \mu(\Gamma) = \int_E P_t(x, \Gamma) \mu(dx).$$

Ймовірнісна міра називається інваріантною, якщо

$$P_t^* \mu = \mu, \quad t \geq 0.$$

Ми обговорюємо умови існування інваріантних мір для марковських динамічних систем, приводимо абстрактну теорему Крилова–Боголюбова та наслідки з неї.

Для динамічних систем, породжених стохастичними диференціальними рівняннями у гільбертовому просторі H

$$dx = (Ax + f(x)) dt + g(x) dW(t), \tag{1}$$

де A – замкнутий в H лінійний оператор, $f : H \rightarrow H$, $g : H \rightarrow L_2^0$ – спеціальний простір операторів Гільберта–Шмідта, W – Q -ядерний процес Вінера, ми описуємо підхід компактності для дослідження інваріантних мір, що базується на теоремі Крилова–Боголюбова.

Для стохастичних рівнянь у частинних похідних приведені коефіцієнтні умови існування інваріантних мір.

Дослідження О. Станжицького виконані за підтримки НФДУ, проєкт №23.03/0074 «Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою».

Стійкість стану здорового організму в моделі імунної відповіді під впливом екологічного фактору

Олег УКРАЇНЕЦЬ

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

Чернівці, Україна

`o.ukrainets@chnu.edu.ua`

Базова модель імунної відповіді Г. І. Марчука [1] описує динаміку антигена V , плазмоклітин C , антитіл F та міри ураження органу-мішені m . Якісний аналіз для даної моделі розвинено, зокрема, у [2]. У цих запропоновано врахувати екологічний фактор, як зважену суму забруднень довкілля та соціально-психологічних чинників, які послаблюють імунну відповідь.

Нехай $E(t) \in [0, 1]$ — узагальнений показник забруднення, $E(t) = \sum_{\nu=1}^{\ell} a_{\nu} E_{\nu}(t)$, $a_{\nu} \geq 0$, $\sum a_{\nu} = 1$. Динаміку $E(t)$ пропонується моделювати узагальненим рівнянням Гатчінсона [3] вигляду

$$\frac{dE}{dt} = r \left(1 - \left(\frac{E(t - \Delta)}{K} \right)^n \right) E(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

де $r > 0$, $\Delta > 0$ — час відновлення екологічної рівноваги, $0 < K < 1$ — нормативний рівень, $n \in \mathbb{N}$. Досліджено, що розв'язок $E = 0$ нестійкий при $r > 0$; $E = K$ локально асимптотично стійкий тоді й лише тоді, коли $0 < rn\Delta < \pi/2$. При $rn\Delta = \pi/2$ виникає періодичний розв'язок і відповідні йому коливання факторів.

Вплив $E(t)$ враховано лінійно щодо інших факторів: зменшенням швидкості формування плазмоклітин ($\varepsilon_c \geq 0$) та збільшенням швидкості ураження органу ($\varepsilon_m \geq 0$). Нейтралізацію антигена описуємо добутком VF^k , $k \in \mathbb{N}$. Одержуємо систему [4, 5]

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (\beta - \gamma F^k(t))V(t), \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha \xi(m(t))V(t - \tau)F(t - \tau) - \mu_c(C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t), \\ \frac{dF}{dt} &= \rho C(t) - \mu_f F(t) - \eta \gamma V(t)F^k(t), \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V(t) - \mu_m m(t) + \varepsilon_m E(t), \end{aligned} \quad (2)$$

де коефіцієнти невід'ємні, $\tau > 0$ — час формування імунної відповіді, $\xi(m) = 1$ при $0 \leq m \leq m^* \in (0, 1)$ і лінійно спадає до нуля при $m^* \leq m \leq 1$; $V(t) = 0$ на $[-\tau, 0)$, $V(0) = V_0 \geq 0$, решта початкових даних невід'ємна.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти (1), (2) і початкові значення невід'ємні, $C_0 \geq C^*$ та $\varepsilon_c < \mu_c C^*$. Тоді існує єдиний невід'ємний неперервний розв'язок при $t > 0$, диференційований при $t > \tau$.*

Якщо $\xi(m) = 1$ і $E = K$, стан здорового організму має вигляд

$$V_1 = 0, \quad C_1 = C^* - \frac{\varepsilon_c K}{\mu_c}, \quad F_1 = \frac{\rho C_1}{\mu_f}, \quad m_1 = \frac{\varepsilon_m K}{\mu_m}. \quad (3)$$

Він невід'ємний і $m_1 \leq m^*$, якщо

$$\varepsilon_c \leq \frac{\mu_c C^*}{K}, \quad \varepsilon_m \leq \frac{\mu_m m^*}{K}. \quad (4)$$

На відміну від моделі представленої в [1], $C_1 < C^*$ і $m_1 > 0$ навіть за відсутності антигена.

За допомогою лінеаризації (2) в околі (3) при $\xi \equiv 1$ отримуємо характеристичне рівняння $(\beta - \gamma F_1^k - \lambda)(\mu_c + \lambda)(\mu_f + \lambda)(\mu_m + \lambda) = 0$. Корені $-\mu_c$, $-\mu_f$, $-\mu_m$ від'ємні; $\lambda_1 = \beta - \gamma F_1^k < 0$ тоді й лише тоді, коли

$$\beta < \gamma F_1^k. \quad (5)$$

Теорема 2. Якщо $0 < rn\Delta < \pi/2$ і виконано (4), (5), то розв'язки $E = K$ та (3) локально асимптотично стійкі.

Наслідок. Умову (5) можна записати у вигляді

$$\beta < \gamma \frac{\rho^k}{\mu_f^k} \left(C^* - \frac{\varepsilon_c K}{\mu_c} \right)^k.$$

Зростання ε_c звужує область стійкості: захворювання не розвивається при досить малій швидкості розмноження антигена β або при достатній концентрації C^* (зокрема після вакцинації).

Теорема 3. Нехай виконано (4), (5) та $2e^{-\mu_c \tau} < 1$. Якщо $0 < V_0 < V^*$, де

$$V^* = \frac{1}{\eta\beta} \left(\rho C^* - \mu_f \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}} \right) + \frac{\varepsilon_c \rho}{\eta\beta\mu_c} (2e^{-\mu_c \tau} - 1), \quad (6)$$

то захворювання не розвивається у гострій чи хронічній формі і $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$.

Властивості розв'язку (6) відображають, що екологічний вплив знижує імунологічний бар'єр V^* . Числове моделювання в програмному середовищі Mathematica [6] показує: за наявності $E(t)$ зростає пік антигена, C і F прямують до нижчих значень (3), зберігається $m_1 > 0$; якщо $rn\Delta > \pi/2$, розв'язки (2) осцилюють.

Література

- [1] Marchuk G.I. Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases. Dordrecht: Springer, 1997. 350 p.
- [2] Foryś U. Global analysis of Marchuk's model in case of strong immune system. J. Biol. Syst. 2000. Vol. 8, no. 4. P. 331–346.

- [3] Smith H. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. New York: Springer, 2011. 172 p.
- [4] Бігун Я.Й., Українець О.З. Математична модель впливу забруднення зовнішнього середовища на імунну відповідь організму людини. Буковинський мат. журнал. 2025. Т. 13, № 2. С. 114–124.
- [5] Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. Acta et Commentationes. 2024. Vol. 18, no. 2. P. 7–17.
- [6] Українець О. З. Математичне моделювання природничих процесів та економічних систем під дією збурень : дис. ... д-ра філос. : 113 Прикладна математика / Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. Чернівці, 2026.

Слабко нелінійна крайова задача для двочленного диференціального рівняння дробового порядку з секвенціальною похідною

Віктор ФЕРУК

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

feruk.viktor@imath.kiev.ua

Досліджується питання існування і побудови розв'язків

$$x = x(t, \varepsilon) : \quad x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

слабко нелінійної крайової задачі для двочленного диференціального рівняння дробового порядку

$${}^C D_{a+}^{\alpha} \left({}^C D_{a+}^{\beta} + \lambda(t) \right) x(t, \varepsilon) = f(t) + \varepsilon Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$lx(\cdot, \varepsilon) = q + \varepsilon J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad (2)$$

де $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leq 1$, ${}^C D_{a+}^{\alpha}$, ${}^C D_{a+}^{\beta}$ — лівосторонні похідні Капуто, $\lambda(t) \in C[a, b]$, $f(t) \in C[a, b]$, $l = \text{col} \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \dots, & l_p \end{pmatrix} : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ — обмежений лінійний векторний функціонал, $l_{\nu} : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu = \overline{1, p}$, $q = \text{col} \begin{pmatrix} q_1, & q_2, & \dots, & q_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, $Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ — нелінійна за першою компонентою функція така, що

$$Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \leq \mu],$$

$$Z(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \in C[a, b], \quad Z(x(t, \cdot), t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

$J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний обмежений p -вимірний вектор-функціонал, неперервно диференційовний за x у розумінні Фреше і неперервний за ε в околі породжувального розв'язку, μ , ε_0 — достатньо малі константи, ε — малий параметр.

У роботі [1] доведено критерій розв'язності лінійної крайової задачі ($\varepsilon = 0$) і побудовано загальний вигляд розв'язку цієї задачі за припущення, що кількість крайових умов (2) може не співпадати з розмірністю системи дробових диференціальних рівнянь (1). У [2] отримано необхідні й достатні умови існування розв'язків крайової задачі (1), (2) ($\varepsilon \neq 0$) та запропоновано ітераційний алгоритм їх побудови.

Цю роботу підтримано грантом від Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, В.Ф.).

Література

- [1] Бойчук О.А., Ферук В.А. Нетерова крайова задача для двочленного диференціального рівняння дробового порядку з секвенціальними похідними. Укр.мат. журнал. 2025. 77(1). С. 3–13.

- [2] Ферук В.А. Слабко нелінійна крайова задача для двочленного диференціального рівняння дробового порядку з секвенціальною похідною. Укр. мат.журнал. 2026. 78(7–8). С. 575–587.

Контекстуальна марковська модель дискретної кооперативної гри

Вячеслав ЦУРКАН

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

tsurkan.viacheslav.i@chnu.edu.ua

Розглядається дослідження теорії ігор в розділі дискретних динамічних кооперативних ігор. Група гравців виконуючи послідовно дії прагнуть досягнути максимального результату за обмежену кількість кроків. В попередніх дослідженнях, використовуючи зібрані статистичні дані та сформовані по них матриці результату, як інструмент формування початкових стохастичних даних для динамічної кооперативної гри, побудовано Марківську модель (MDP) переходів між станами гри та сформульовано алгоритм визначення оптимальної стратегії [1].

В даній роботі розглядається розширення існуючої MDP до контекстуальної Марковської моделі, де контекстом виступатиме якість виконання дій. Відповідно, в отриманій моделі, динаміка середовища та функція винагороди змінюється залежно від контексту.

Побудова стохастичної моделі у вигляді Марковського процесу прийняття рішень для дискретної динамічної кооперативної гри розглядалася авторами в [2], а підхід до обчислення ймовірностей виграшу та знаходження оптимальних стратегій запропоновано в [3].

Контекстуальний Марковський процес (сMDP) прийняття рішень визначаємо як кортеж:

$$(C, S, A, M)$$

де: C - простір контекстів, S - множина станів, A - спільний простір дій, $M(c)$ - функція, яка відображає контекст $c \in C$ у конкретній MDP.

$$M(c) = (S, A, P_c, R_c, \gamma)$$

Тут ймовірності переходу $P(s' | s, a)$ та винагороди $R(s, a, s')$ явно залежать від контексту c :

$$P(s' | s, a) = \mathbb{P}(S_{t+1} = s' | S_t = s, A_t = a, C = c).$$

В постановці кооперативної динамічної дискретної гри ігрова поверхня дискретизована у вигляді матриці розмірності $m \times n$. Кожна клітина цієї матриці однозначно відповідає конкретній просторовій позиції.

Множина клітин: $X = \{x_{ij} | i \in 1, \dots, m, j \in 1, \dots, n\}$

Для кожного гравця $k \in 1, \dots, N$ задано матриці результатів:

матриця виграшу $W^{(k)} = [w_{ij}^{(k)}], w_{ij}^{(k)} = P_{win}^{(k)}(x_{ij}, t)$,

матриця програшу $L^{(k)} = [l_{ij}^{(k)}], l_{ij}^{(k)} = P_{loss}^{(k)}(x_{ij}, t)$, при чому $w_{ij}^{(k)} + l_{ij}^{(k)} \leq 1$.

Таким чином, кожна клітина ігрової поверхні несе повну інформацію про результативність усіх гравців.

Потрібно обчислити ймовірність виграшу команди на будь-якому етапі при виконанні дії, що передбачає врахування всіх можливих рішень гравців на попередніх етапах. Вибрати стратегію для кожного гравця на кожному з етапів та побудувати оптимальну політику для отримання максимальної ймовірності виграшу команди.

При використанні Марковського процесу прийняття рішень в результаті ми отримали оптимальну політику для гравців.

Тому для стану (k, t, x_{ij}) :

$$\pi^*(k, t, x_{ij}) = \begin{cases} act, & P_{win}^{(k)}(x_{ij}, t) \geq \max_{l \neq k} \sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij})W(l, t+1, x_{i'j'}), \\ pass(l^*), & i, \end{cases}$$

де $l^* = \arg \max_{l \neq k} \sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij})W(l, t+1, x_{i'j'})$.

Таким чином:

$$\mathbb{P}(\text{виграш команди} | k, t, x_{ij}) = W(k, t, x_{ij}).$$

А ймовірність того, що саме на етапі t буде виграшна дія:

$$\mathbb{P}(\text{виграш команди на етапі } t) = \sum_{k, x_{i'j'}} \mathbb{P}(s_t = (k, x_{ij})) \bullet 1\{\pi^*(k, t, x_{ij}) = act\} \bullet P_{win}^{(k)}(x_{ij}, t).$$

Для контекстуальної MDP оптимальна стратегія з урахуванням поточного контексту

c_t приймає вигляд:

$$\pi^*(k, t, x_{ij}, c_t) = \begin{cases} act, & P_{win}^{(k)}(x_{ij}, t, c_t) \geq \max_{l \neq k} \sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij}, c_t)W(l, t+1, x_{i'j'}, c_{t+1}), \\ pass(l^*), & i, \end{cases}$$

де l^* визначається як дія/передача іншому агенту l , що максимізує очікуваний виграш

з урахуванням контексту:

$$l^* = \arg \max_{l \neq k} \sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij}, c_t)W(l, t+1, x_{i'j'}, c_{t+1}).$$

А ймовірність того, що саме на етапі t буде виграшна дія:

$$\mathbb{P}(\text{виграш команди на етапі } t) = \sum_{c_t \in C} \mathbb{P}(c_t) \sum_{k, x_{i'j'}} \mathbb{P}(s_t = (k, x_{ij}) | c_t) \bullet \mathbb{I}\{\pi^*(k, t, x_{ij}, c_t) = act\} \bullet P_{win}^{(k)}(x_{ij}, t, c_t)$$

де $\mathbb{I}\{\pi^*(k, t, x_{ij}, c_t) = act\}$ - індикаторна функція $1\{\pi^*(k, t, x_{ij}, c_t) = act\}$, яка дорівнює 1, якщо контекстуально-адаптивна оптимальна стратегія обирає виконання дії act , і 0 — в іншому випадку.

Отже, розглянуто використання даної гри для побудови стохастичної математичної моделі на основі контекстуального Марковського процесу, що дає змогу регулювати результат в залежності від контексту. При умові що ймовірнісні дані формуються базуючись на аналізі дій гравців протягом попередніх аналогічних ігор, вони будуть чітко задавати початкові умови для гри [5].

Література

- [1] Birge J.R., Louveaux F. Introduction to Stochastic Programming. 2nd ed. Springer. New York. 2011.

- [2] Tsurkan V., Martyniuk S. Choosing the optimal strategy for a discrete dynamic cooperative game. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics. 2025. 81(2). P. 182–186. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.28>.
- [3] Kirk D.E. Optimal Control Theory: An Introduction. Dover Publications. Mineola, NY. 2004.
- [4] Мартинюк С.В., Цуркан В.І. Математична модель гравця, побудована з використанням матриці результатів. Математика. Інформаційні технології. Освіта. 2024. 11. С. 86–92.
- [5] Мартинюк С.В., Цуркан В.І. Математична модель оцінки якісних змін виконання командних дій на основі Т-критерію Вілкоксона. Буковинський математичний журнал. 2023. 11(2). С. 190–196. <https://doi.org/10.31861/bmj2023.02.19>.

Асимптотика розв'язків диференціального рівняння третього порядку

Володимир ШИНКАРЕНКО, Наталія ШАРАЙ

Одеський національний економічний університет, Одеса, Україна

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна

shinkarenko.v.n@gmail.com, rusnat@gmail.com

Розглядається диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^\sigma, \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ - неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$.

Диференціальне рівняння (1) є частковим випадком диференціального рівняння вигляду

$$y''' = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \quad (2)$$

де функція $\varphi(y)$ неперервна в деякому околі особливої точки.

Коли функція $\varphi(y) = y$ рівняння (2) набуває вигляду

$$y''' = \alpha_0 p(t) y, \quad (3)$$

та є лінійним диференціальним рівнянням. Проблема отримання для таких класів диференціальних рівнянь третього порядку розв'язків, що відповідають певним властивостям, неодноразово піднімалась у роботах дослідників у галузі якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь. Основні результати досліджень понад три десятиліття назад сформульовано у монографії І. Кігурадзе та Т. Чантурія [1].

Зважаючи на різноманітність підходів до проблеми пошуку умов існування розв'язків та чисельні практичні застосування, дослідження звичайних диференціальних рівнянь третього порядку не втратило актуальності і в наш час.

Розв'язок рівняння (1), який заданий та відмінний від нуля на проміжку $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, будемо називати $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язком, якщо він задовольняє умовам:

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm \infty \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y''(t))^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0.$$

В роботі В. Євтухова [2] отримано асимптотичні властивості $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків та доведено, що вони розподіляться на класи в залежності від значення λ_0 (можливо скінченного або нескінченного).

В роботах [3], [4] для рівняння (1) було встановлено умови існування $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків у випадку, якщо $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, а також $\lambda_0 = \pm\infty$. Були отримані асимптотичні зображення для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно. Також у деяких випадках встановлено точну кількість розв'язків із знайденим асимптотичним зображенням.

Наступним кроком є уточнення асимптотичних зображень та отримання нових умов існування $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків у рівняння (1). Для формулювання теореми введемо допоміжні функції

$$P_1(t) = \int_{A_1}^t p(\tau) d\tau, \quad P_2(t) = \int_{A_2}^t P_1(\tau) d\tau,$$

$$J_A(t) = \int_A^t \pi_\omega(\tau) p(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau, \quad I(t) = \int_a^t J_A(\tau) d\tau,$$

$$A_1 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases} \quad A_2 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega |P_1(\tau)| d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega |P_1(\tau)| d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)| p(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)| p(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau < +\infty, \end{cases}$$

Теорема 1. *Припустимо, що існує скінчена або нескінчена границя*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_A(t)}{J_A(t)}$$

Диференціальне рівняння (1) має $P_\omega(0)$ -розв'язки тільки у тому випадку, коли виконуються умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) J_A(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_A(t)}{J_A(t)} = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = \pm \infty..2)$$

При цьому кожен з таких розв'язків має наступні асимптотичні зображення коли $t \uparrow \omega$:

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \pi_\omega(t)[1 + o(1)], \quad \ln |y'(t)| = \alpha_0 I(t)[1 + o(1)]$$

Зауважимо, що виконання умов теореми гарантує, що диференціальне рівняння (1) має дво-параметричну сім'ю розв'язків, яка має вказані вище асимптотичні розвинення при $t \uparrow \omega$ як у випадку скінченного, так і нескінченного значення ω .

Література

- [1] Kiguradze I., Chanturia T. Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 1993. 331 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1808-8>.
- [2] Evtukhov V.M. Asymptotic Representations of Solutions of Non-Autonomous Ordinary Differential Equations. D.Sc. Thesis. Kyiv: Institute of Mathematics of NASU. 1998.

- [3] Sharai N., Shinkarenko V. Asymptotic Representations for the Solutions of Third-Order Nonlinear Differential Equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. 215(3). P. 408–420. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2847-5>.
- [4] Sharai N., Shinkarenko V. Asymptotic Behavior of Solutions for One Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations. *Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations QUALITDE-2018*. Tbilisi, Georgia. 2018. P. 165–169.

Існування мартингального розв'язку дробового стохастичного рівняння тонких плівок

Дмитро ШТЕФАН, Андрій СТАНЖИЦЬКИЙ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

dmitrijstefan396@gmail.com, a.stanzhytskyi@gmail.com

У даній роботі досліджується дробове стохастичне рівняння тонких плівок із кольоровим гауссівським шумом Стратоновича. Еволюція висоти плівки $u(t, x)$ задається рівнянням

$$du + \partial_x (u^2 \partial_x \mathcal{I}(u)) dt = \partial_x (u \circ dW), \quad (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{T}_L, \quad (1)$$

де $T, L \in (0, \infty)$, $\mathbb{T}_L$ – одновимірний тор довжини L . Нелокальний диференціальний оператор $\mathcal{I}$, що діє на u , визначається як від'ємний дробовий лапласіан порядку $2s$: $\mathcal{I}(u) = -(-\Delta)^s u$, для $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Припускатиемо наявність періодичних крайових умов

$$\partial_x^i u(t, L) = \partial_x^i u(t, 0), \quad \partial_x \mathcal{I}(u(t, 0)) = \partial_x \mathcal{I}(u(t, L)) \quad \text{для всіх } t \in (0, T), i \in \{0, 1, 2\}$$

Рівняння (1) описує еволюцію висоти двовимірної в'язкої тонкої плівки під впливом теплового шуму в припущенні умови ковзання Нав'є на підкладці. Шум W задається у вигляді $W(t, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \psi_k(x) \beta^k(t)$, де $(\beta^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ – взаємно незалежні стандартні дійснозначні вінерівські процеси, а $(\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ – ортонормований базис власних функцій періодичного лапласіана. Припускаємо, що коефіцієнти шуму $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ є невід'ємними та задовольняють умову $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k^2 < \infty$.

Означення 1 (Мартингальний розв'язок). Нехай початкова умова $u_0 \in H^s(\mathbb{T}_L)$ є невід'ємною. Набір об'єктів, що складається з:

1) ймовірнісного простору з фільтрацією $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T)}, \tilde{\mathbb{P}})$, де $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T)}$ є повною та неперервною справа фільтрацією;

2) узгодженого з фільтрацією $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ обмеженого неперервного процесу $\tilde{u}$ на проміжку $[0, T)$ зі значеннями у просторі $H_w^s(\mathbb{T}_L)$, такого, що узагальнена дробова похідна $\partial_x \mathcal{I}(\tilde{u})$ є узгодженою з $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$, причому $\partial_x \mathcal{I}(\tilde{u}) \in L^2(\{\tilde{u} > r\})$ для будь-якого $r > 0$, а також $\tilde{u}^2 \partial_x \mathcal{I}(\tilde{u}) \in L^2(\{\tilde{u} > 0\})$, $\tilde{u} \geq 0$ та $\tilde{u}(0) = u_0$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -майже напевно;

3) послідовності взаємно незалежних стандартних дійсних $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -вінерівських процесів $(\tilde{\beta}^k)_{k \in \mathbb{Z}}$,

називається *мартингальним розв'язком* дробового стохастичного рівняння тонких плівок (1), якщо для кожної тестової функції $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}_L)$ та для всіх $t \in [0, T)$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -майже напевно

виконується наступна інтегральна тотожність:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{u}(t, \cdot), \varphi)_2 - (u_0, \varphi)_2 &= \int_0^t \int_{\{\tilde{u}(t', \cdot) > 0\}} \tilde{u}^2 (\partial_x \mathcal{I}(\tilde{u})) (\partial_x \varphi) dx dt' \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k^2 \int_0^t (\psi_k \partial_x (\psi_k \tilde{u}(t', \cdot)), \partial_x \varphi)_2 dt' \\
 &\quad - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \int_0^t (\psi_k \tilde{u}(t', \cdot), \partial_x \varphi)_2 d\tilde{\beta}^k(t').
 \end{aligned} \tag{2}$$

Основним результатом роботи є доведення існування мартингального розв'язку рівняння (1). Для цього використовується метод розщеплення (Trotter–Kato). Наближений розв'язок будується шляхом розбиття задачі на детермінований крок, який зберігає масу та задовольняє дробову енергетичну нерівність, і стохастичний крок.

На основі отриманих апіорних оцінок і нелокальних енергетичних нерівностей встановлюється відносна компактність послідовності ймовірнісних мір. За допомогою абстрактної теореми Якубовського доводиться збіжність майже напевно в сенсі Скорохода для відповідних підпослідовностей.

Теорема 1. *Нехай початкова умова $u_0 \in H^s(\mathbb{T}_L)$ є невід'ємною. Тоді існує мартингальний розв'язок дробового стохастичного рівняння тонких плівок (1), який задовольняє слабке формулювання $\tilde{\mathbb{P}}$ -майже напевно для кожної тестової функції $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}_L)$.*

Отриманий слабкий розв'язок $\tilde{u}$ є невід'ємним, зберігає масу та належить простору неперервних обмежених процесів зі значеннями у слабкому просторі Соболева $H_w^s(\mathbb{T}_L)$.

Дослідження А. Станжицького виконані за підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт 2023, 03/0074 «Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багато-значною та стохастичною динамікою».

Література

- [1] Schmeisser H.-J., Triebel H. Topics in Fourier Analysis and Function Spaces. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig. 1987.
- [2] Gess B., Gnann M.V. The stochastic thin-film equation: Existence of nonnegative martingale solutions. Stochastic Processes and their Applications. 2020. 130(12). P. 7260–7302.
- [3] Zhao J., Guo B. Qualitative behavior of solutions to a forced nonlocal thin-film equation. arXiv:2510.20289 [math.AP]. 2026.

Про стійкість розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із частинними похідними спеціального вигляду

Ігор ЮРЧЕНКО, Володимир ЯСИНСЬКИЙ

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна;
Едмонтон, Канада*

i.yurchenko@chnu.edu.ua, vkyasynskyu@ukr.net

Нехай на ймовірнісному просторі

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0; \mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}, t_1 < t_2\}, \mathbb{P})$$

задана задача Коші для системи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із частинними похідними (СДФРЧП) дифузійного типу другого порядку відносно

$$u(t, x, \omega): [0, T] \times X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

[1, 2], а саме:

$$du(t, x, \omega) = \alpha_1(t, \omega)a(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t) dt + \alpha_2(t, \omega)b(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t) dw(t, \omega), \quad (1)$$

$$dB_x u(t, x, \omega) = \alpha_3(t, \omega)a_1(t, B_x u) dt + \alpha_4(t, \omega)b_1(t, B_x u) dw_1(t, \omega), \quad (2)$$

$$dB_{xx} u(t, x, \omega) = \alpha_5(t, \omega)a_2(t, B_{xx} u) dt + \alpha_6(t, \omega)b_2(t, B_{xx} u) dw_2(t, \omega) \quad (3)$$

за початковими умовами:

$$u|_{t=0} = u(t + \theta, x, \omega)\Big|_{t=0} = u_0(\theta), \quad \theta \in [-\Delta, 0], \quad (4)$$

$$B_x u|_{t=0} \equiv \frac{\partial u(t, x, \omega)}{\partial x}\Big|_{t=0} = u_1(\theta), \quad B_{xx} u|_{t=0} \equiv \frac{\partial^2 u(t, x, \omega)}{\partial x^2}\Big|_{t=0} = u_2(\theta). \quad (5)$$

Тут $\alpha_j(t, \omega)|_{t=0} = \alpha_{j0}$, $j = \overline{1, 6}$,

$$\alpha_j(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

є заданими діагональними матрицями, які складаються з неперервних попарно незалежних випадкових процесів зі своїми функціями розподілу $F_{\alpha_j}(t, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, при цьому ці процеси попарно незалежні від векторних вінерових процесів

$$w_j(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{0, 6},$$

$$w_0(t, \omega) \equiv w(t, \omega).$$

Нехай

$$a_i(t, \cdot, \cdot, \cdot): [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$a_0 \equiv a, \text{ та}$$

$$b_i(t, \cdot, \cdot, \cdot): [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad i = 0, 1, 2,$$

$b_0 \equiv b$; a, b є неперервними функціоналами відносно 2-го–4-го аргументів; $a_i, b_i, i = 1, 2$, — неперервні функції своїх аргументів.

$B_x u, B_{xx} u$ визначаються аналітично за допомогою заміни Іто. Ці розв'язки підставляються в СДФРЧП (1)–(5), яке буде рівнянням з післядією відносно

$$u_t \equiv u(t + \theta, x, \omega): [0, T] \times X \times \Omega \rightarrow C(\mathbb{R}^n).$$

Уведемо надалі такі підпростори:

$$S_r \equiv \{\varphi \in C_n([-\Delta, 0]) \mid \|\varphi\| < r, \ r > 0\},$$

$$\|\varphi\| = \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} \{|\varphi(\theta)|^2\}, \quad \Delta > 0;$$

$$S_r^{(0)} \equiv \{\varphi \in C_n([-\Delta, 0]) \mid \|\varphi\|_0^2 < r\},$$

$$\|\varphi\|_0^2 = |\varphi(0)|^2 + \int_{-\Delta}^0 |\varphi(\theta)|^2 d\theta;$$

$$S_r^{(G)} \equiv \{\varphi \in G^s \mid \mathbb{E}\{\|\varphi\|_0^2\} < r, \ r > 0\},$$

де

$$G^s \equiv \{\varphi \in C_n([-\Delta, 0])\},$$

$\varphi(s) \in \mathcal{N}^s$ -вимірною функцією для $t \geq s \geq 0$,

$$\int_{-\Delta}^0 \mathbb{E}\{|\varphi(\theta)|^2\} d\theta < +\infty,$$

$$S_r^{(G)} \equiv \{\varphi \in G^s \mid \mathbb{E}\{\sup |\varphi(\theta)|^2\} < r^2\},$$

де $\varphi(\theta) \equiv u(\theta, x, \omega)$ для $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$, $x \in X$.

Для розв'язку задачі Коші (1)–(5) уведемо позначення

$$u(t, s, x, \omega): [0, T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

для $t \geq s \geq 0$.

Лема. *Нехай виконуються такі умови:*

1) на ймовірнісному просторі

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}, \ t_1 < t_2, \mathbb{P})$$

задана система СДФРЧП (1)–(5);

2) коефіцієнти-функціонали $a(t, \cdot, \cdot, \cdot)$, $b(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ та $a_j(t, \cdot)$, $b_j(t, \cdot)$, $j = 1, 2$, неперервні за всіма аргументами;

3) виконана глобальна умова Ліпшиця:

$$\begin{aligned} & |a(t, \varphi, \varphi_1, \varphi_2) - a(t, \psi, \psi_1, \psi_2)|^2 \\ & + \|b(t, \varphi, \varphi_1, \varphi_2) - b(t, \psi, \psi_1, \psi_2)\|^2 \\ & \leq L_1 \int_{-\Delta}^0 \left(|\varphi(\theta) - \psi(\theta)|^2 + |\varphi_1(\theta) - \psi_1(\theta)|^2 + |\varphi_2(\theta) - \psi_2(\theta)|^2 \right) \beta(d\theta) \\ & \leq L \int_{-\Delta}^0 |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|^2 \beta(d\theta), \end{aligned}$$

де β — функція обмеженої варіації,

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv u_0(\theta, x, \omega), & \varphi_1 &= \frac{\partial u_0(\theta, x, \omega)}{\partial x}, & \varphi_2 &= \frac{\partial^2 u_0(\theta, x, \omega)}{\partial x^2}; \\ \psi &\equiv u_1(\theta, x, \omega), & \psi_1 &= \frac{\partial u_1(\theta, x, \omega)}{\partial x}, & \psi_2 &= \frac{\partial^2 u_1(\theta, x, \omega)}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

$L \gg L_1 > 0$;

4) $a(t, 0, 0, 0) = 0$, $b(t, 0, 0, 0) = 0$;

5) $\alpha_j(t, \omega) < l_j$, $j = \overline{1, 6}$, за умови, що $\alpha_j(t, \omega)$ задані своїми функціями розподілу

$$F_{\alpha_j}(y) \equiv \mathbb{P} \{ \omega : \alpha_j(t, \omega) < y \}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тоді для довільних $p > 0$, $l_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, 6}$, $T > 0$ існує стала $K(L, T, p, l_j)$, така, що для всіх $s \in \mathbb{R}_+$, $t \in [0, T]$ та

$$\{\varphi, \varphi_1, \varphi_2\} \subset C_n([-\Delta, 0])$$

виконується нерівність

$$\mathbb{E} \{ \|u_t(s, \varphi, \varphi_1, \varphi_2)\|^p \} \leq K \|\varphi\|^p,$$

де

$$\begin{aligned} \|u_t(s, \varphi, \varphi_1, \varphi_2)\|^p &\equiv |u_s(s, \varphi, \varphi_1, \varphi_2)|^p \\ &+ \int_{t+s-\Delta}^{t+s} |u_{s_1}(s_1, \varphi, \varphi_1, \varphi_2)|^p ds_1, \end{aligned}$$

а

$$u_t(s, \varphi, \varphi_1, \varphi_2) \equiv u(t + s + \theta, \varphi, \varphi_1, \varphi_2).$$

Теорема. Нехай виконано умови лемми для СДФРЧП (1)–(5). Тоді для довільного $p > 0$ нульовий розв'язок $u \equiv 0$ СДФРЧП є експоненціально p -стійким ($p \geq 1$) в цілому тоді і тільки тоді, коли:

1) існує функціонал Ляпунова–Красовського–Царькова [3]

$$v \in \mathbb{D}(\mathcal{L}^+);$$

2) знайдуться $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$, такі, що для довільних $s \in \mathbb{R}_+$ та $\varphi \in D_n([-\Delta, 0])$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} k_1 \|\varphi\|^p &\leq v(s, \varphi) \leq k_2 \|\varphi\|^p, \\ (\mathcal{L}^+ v)(s, \varphi) &\leq -k_3 \|\varphi\|^p, \end{aligned}$$

де $\mathbb{D}(\mathcal{L}^+)$ — область значень слабого інфінітезимального оператора.

Література

- [1] I. I. Gihman, A. V. Skorokhod. *The Theory of Stochastic Processes. I–III*. Series: Classics in Mathematics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-49941-1>
- [2] V. K. Yasynskyy, I. V. Yurchenko. On the Existence of a Solution to the Cauchy Problem of Nonlinear Stochastic Partial Functional Differential Equations of Special Form. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2026. 62, No. 2. P. 311–316. <https://doi.org/10.1007/s10559-026-00868-1>
- [3] Ye. F. Tsarkov, V. K. Yasynskyy. *Quasilinear Stochastic Functional Differential Equations*. Riga: Orientir, 1992. 301 p.

Збіжність атракторів гальоркінських апроксимацій параболічної імпульсної системи

Тарас ЮСИПІВ, Артем ЗИСКО, Наталія ДЕНИСЕНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

taras.yusypiv@knu.ua, artem.zysko@knu.ua, denysenko.natalia@l111.kpi.ua

Ключову роль при дослідженні якісної поведінки розв'язків нескінченновимірних дисипативних динамічних систем відіграє вивчення глобального атрактора – компактної інваріантної підмножини фазового простору, що притягує всі траєкторії рівномірно по обмежених початкових даних [1].

Серед характеристик атрактора важливою є його напівнеперервна зверху залежність від розмірності скінченновимірних апроксимацій, побудованих за певним базисом в фазовому просторі. Тобто, якщо $V_N(t, u_0^N)$ – це розв'язок відповідної N -вимірної апроксимаційної системи диференціальних рівнянь з початковим даним u_0^N , то при досить загальних умовах [2] для атрактора Θ_N напівгрупи V_N справедливо:

$$\text{якщо } u_0^N \rightarrow u_0, \quad V_N(t, u_0^N) \rightarrow V(t, u_0) \quad (1)$$

$$\text{то } \text{dist}(\Theta_N, \Theta) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (2)$$

де Θ – це глобальний атрактор напівгрупи V , породженої розв'язками вихідної нескінченновимірної системи, dist – напівметрика Хаусдорфа.

Метою даної роботи є одержати виконання (2) у випадку імпульсних нескінченновимірних динамічних систем, тобто коли траєкторії еволюційної системи зазнають імпульсного збурення при досягненні ними фіксованої гіперповерхні M в фазовому просторі. Основи якісної теорії таких розривних динамічних систем було закладено в роботах видатних математиків А.М. Самойленка і М.О. Перестюка [3].

Важливим моментом стало перенесення основних положень теорії атракторів на розривні системи. Це стало можливим завдяки введенню нової концепції рівномірного атрактора, де властивість інваріантності замінюється на властивість мінімальності [4]. В подальших роботах М.О. Перестюка і О.В. Капустяна [5] було запропоновано низку умов на параметри імпульсної динамічної системи V , які є адаптацією умови неперервності по початковим даним і забезпечують для рівномірного атрактора Θ рівності:

$$\forall t \geq 0 \quad V(t, \Theta \setminus M) = \Theta \setminus M \text{ і } \overline{\Theta \setminus M} = \Theta. \quad (3)$$

В даній роботі ми використовуємо цей підхід для встановлення збіжності (2) для атра-

кторів гальоркінських апроксимацій параболічної задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \Delta y(t,x) - f(y(t,x)), & (t,x) \in (0, +\infty) \times \Omega, \\ y(t,x)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \\ y(t,x)|_{t=0} = y_0(x) \end{cases} \quad (4)$$

з малою гладкою нелінійністю f в фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$ з імпульсною множиною

$$M = \{y \in X \mid \int_{\Omega} y(x)\psi(x)dx = a\}, \text{ де } \psi \in X, a > 0 - \text{фіксовані.} \quad (5)$$

Література

- [1] Robinson J.C. Infinite-Dimensional Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors. Cambridge University Press. 2001.
- [2] Chueshov I.D. Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems. ACTA Scientific Publishing House. Kharkiv. 2002. 418 p.
- [3] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific. 1995. 462 p.
- [4] Kapustyan O.V., Perestyuk M.O. Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. Ukrainian Mathematical Journal. 2016. 68(4). P. 517–528.
- [5] Kapustyan O.V., Perestyuk M.O., Romanyuk I.V. Stability of the global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. Ukrainian Mathematical Journal. 2018. 70(1). P. 29–39.

Синтез структурної матриці мінімальної висоти паралельного алгоритму множення матриць Штрассена в альтернативному базисі

Інна ЯКОВЛЄВА, Вадим ЦУРИК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

i.yakovleva@chnu.edu.ua, tsuryk.vadym@chnu.edu.ua

Множення матриць є базовим алгоритмом, що широко використовується в чисельних методах, математичному моделюванні, аналізі даних та високопродуктивних обчисленнях машинного навчання. Актуальною задачею залишається покращення ефективності паралельного виконання цього алгоритму, оскільки продуктивність багатьох прикладних програм безпосередньо залежить від його швидкодії.

Більшість високооптимізованих реалізацій цього алгоритму використовують класичне множення матриць, що має асимптотичну складність $\Theta(n^3)$ [2]. Алгоритм множення матриць, що має меншу асимптотичну складність $\Theta(n^{\log_2 7})$, вперше показаний в роботі Штрассена [3]. У роботі [2], показана паралельна реалізація алгоритму Штрассена в альтернативному базисі, яка поділяється на декілька послідовних етапів виконання: перетворення базису φ_{opt} початкових матриць, білінійну фазу алгоритму та зворотне перетворення v_{opt}^{-1} результату в перетвореному базисі.

На відміну від існуючих досліджень [1, 2], де досліджується можливість оптимізації комунікаційних витрат, обсягу необхідної пам'яті та арифметичної складності, у даній роботі основна увага приділена зменшенню кількості ярусів структурної матриці (СМ) відповідних етапів виконання алгоритму множення матриць Штрассена в альтернативному базисі.

В загальному випадку $\langle n_0, m_0, k_0; t \rangle$ - білінійний алгоритм множення матриць, який рекурсивно виконується над матрицями $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ розмірів $n \times m$ та $m \times k$ відповідно, використовуючи t скалярних множень $t \in \mathbb{N}$, де $n = n_0^l$, $m = m_0^l$, $k = k_0^l$ для деяких $n_0, m_0, k_0 \in \mathbb{N}$ [2]. Алгоритм застосовується до $n_0 \times m_0$ та $m_0 \times k_0$ блоків, розмірів $\frac{n}{n_0} \times \frac{m}{m_0}$, $\frac{m}{m_0} \times \frac{k}{k_0}$ відповідно та отримується результуюча матриця $C \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Розглянемо алгоритм $\langle 2, 2, 2; 7 \rangle$ описаний в [2], де $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n = 2^l$, $l \in \mathbb{N}$. Виходячи з цього порядок виконання алгоритму наступний:

1) початкове рекурсивне перетворення базису $\tilde{A} = \varphi_{\text{opt}}(\vec{A})$ (1), (б), $\tilde{B} = \varphi_{\text{opt}}(\vec{B})$ початкових матриць A та B , де $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ матриці в перетвореному базисі, а $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ векторизоване представлення блоків матриць;

2) рекурсивне виконання білінійної фази алгоритму множення матриць в альтернативному базисі;

3) зворотне перетворення базису $\tilde{C} = v_{\text{opt}}^{-1}(\vec{C})$ (1), (в), де $\tilde{C}$ результуюча матриця в альтернативному базисі.

$$\varphi_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_{\text{opt}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{1,2} \\ A_{2,1} \\ A_{1,2} - A_{2,1} + A_{2,2} \end{pmatrix} \quad v_{\text{opt}}^{-1}(\vec{C}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} - C_{2,2} \\ -C_{2,1} + C_{2,2} \\ C_{2,2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

(а) (б) (в)

На кожному з етапів виконання алгоритму початкові матриці рекурсивно поділяються на блоки розміру $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ над якими виконуються операції. Далі наведено порядок виконання рекурсивної білінійної фази алгоритму, де $temp1$, та $temp2$ тимчасові змінні, а операція $\cdot =$ означає рекурсивне виконання цієї білінійної фази над блоками, які є операндами операції:

1. $temp_1 = -A_{1,1} + A_{2,2}$
2. $temp_2 = -B_{1,1} + B_{2,2}$
3. $A_{1,1} \cdot = B_{1,1}$
4. $B_{1,1} = -B_{1,2} + B_{2,2}$
5. $temp_1 \cdot = B_{1,2}$
6. $B_{1,2} = A_{2,1} + A_{2,2}$
7. $A_{2,1} \cdot = temp_2$
8. $temp_2 = B_{2,1} + B_{2,2}$
9. $B_{1,2} \cdot = temp_2$
10. $temp_2 = -A_{1,2} + A_{2,2}$
11. $A_{1,2} \cdot = B_{2,1}$
12. $A_{2,2} \cdot = B_{2,2}$
13. $temp_2 \cdot = B_{1,1}$
14. $A_{1,1} += A_{1,2}$
15. $A_{2,1} += temp_2$
16. $A_{2,2} = -A_{1,2} - A_{2,2}$
17. $A_{2,2} += B_{1,2}$
18. $A_{2,2} += temp_2$
19. $A_{1,2} = B_{1,2} - temp_1$

Для аналізу можливості паралельного виконання операцій алгоритму, було побудовано потокові графи (ПГА) початкового перетворення базису $\tilde{A} = \varphi_{\text{opt}}(\vec{A})$, $\tilde{B} = \varphi_{\text{opt}}(\vec{B})$, білінійної фази алгоритму та зворотного перетворення базису $\tilde{C} = v_{\text{opt}}^{-1}(\vec{C})$ результуючої матриці $\tilde{C}$.

A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	B_{11}	B_{12}	B_{21}	B_{22}	T_1	T_2
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	2	0	0	2	0	2
3	0	0	0	3	0	0	0	0	0
0	0	0	0	4	4	0	4	0	0
0	0	0	0	0	5	0	0	5	0
0	0	6	6	0	6	0	0	0	0
0	0	7	0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	0	8	8	0	8
0	0	0	0	0	9	0	0	0	9
0	10	0	10	0	0	0	0	0	10
0	11	0	0	0	0	11	0	0	0
0	0	0	12	0	0	0	12	0	0
0	0	0	0	13	0	0	0	0	13
14	14	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	15	0	0	0	0	0	0	15
0	16	0	16	*	0	*	*	0	0
0	0	0	17	*	17	*	*	0	0
0	0	0	18	*	0	*	*	0	18
0	19	0	0	*	19	*	*	19	*

(а)

A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	B_{11}	B_{12}	B_{21}	B_{22}	T_1	T_2
1	0	0	1	2	0	0	2	1	2
3	0	0	0	3	0	0	0	0	0
0	0	0	0	4	4	0	4	0	0
0	0	0	0	0	5	0	0	5	0
0	0	6	6	0	6	0	0	0	0
0	0	7	0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	0	8	8	0	8
0	0	0	0	0	9	0	0	0	9
0	10	0	10	0	0	0	0	0	10
0	11	0	12	13	0	11	12	0	13
14	14	15	0	*	0	0	0	0	15
0	16	0	16	*	0	0	0	0	0
0	0	0	17	*	17	*	*	0	0
0	19	0	18	*	19	*	*	19	18

(б)

Рис. 1: СМ білінійної фази алгоритму (а), СМ мінімальної висоти білінійної фази алгоритму (б)

Для подальшого аналізу, було використано метод запису ПГА структурною матрицею [4]. В результаті було отримано, що СМ початкового перетворення базису $\tilde{A} = \varphi_{\text{opt}}(\vec{A})$, $\tilde{B} =$

$\varphi_{\text{opt}}(\vec{B})$ та зворотного перетворення $\vec{C} = v_{\text{opt}}^{-1}(\tilde{C})$ є оптимальними, так як операції кожного з ярусів СМ залежать від операцій попереднього ярусу, тому їх відображати не будемо. Застосувавши метод синтезу СМ мінімальної висоти до СМ білінійної фази алгоритму рис. 1, (а), була отримана оптимізована СМ рис. 1, (б).

СМ мінімальної висоти отримується перенесенням операцій на попередні яруси, якщо над операндами операції, яку переносять не здійснюються операції на одному чи декількох попередніх ярусах. Такий метод оптимізації СМ білінійної фази алгоритму рис. 1, (а) дозволив зменшити кількість ярусів з $l = 19$ до $l = 14$, що становить приблизно 26.3% від початкової кількості ярусів.

Література

- [1] Al-Mouhamed M., Fatayer A., Mohammad N., ul Hassan Khan A. Optimizing the matrix multiplication using Strassen and Winograd algorithms with limited recursions on many-core. International Journal of Parallel Programming. 2016. 44(4). P. 801–830. <https://doi.org/10.1007/s10766-015-0378-1>.
- [2] Schwartz O., Vaknin N. Pebbling game and alternative basis for high performance matrix multiplication. SIAM Journal on Scientific Computing. 2023. 45(6). P. C277–C303. <https://doi.org/10.1137/22M1502719>.
- [3] Strassen V. Gaussian elimination is not optimal. Numerische Mathematik. 1969. 13(4). P. 354–356. <https://doi.org/10.1007/BF02165411>.
- [4] Мельник А.О., Яковлева І.Д. Подання потокового графа алгоритму структурною матрицею. Вісник Хмельницького національного університету. 2008. 4. С. 124–129.

Дослідження просторових термoxімічних процесів методом двобічних наближень з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова

Равіль ЯНБЕКОВ

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

ravil.yanbekov@nure.ua

При дослідженні стаціонарних просторових термoxімічних процесів виникає наступна перша крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння:

$$-\Delta u + \kappa^2 u = \lambda f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де u — безрозмірна температура або концентрація, $u(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$; Ω — обмежена просторова область, де відбувається термoxімічний процес; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$; $\partial\Omega$ — кусково-гладка поверхня, що є межею області Ω ; $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ — числові параметри; $f(\mathbf{x}, u)$ — функція, що відповідає нелінійним джерелам.

Якщо термoxімічний процес описується відповідно до кінетики Арреніуса, то у (1) використовуються монотонні нелінійності $f(\mathbf{x}, u) = e^u$ або $f(\mathbf{x}, u) = e^{\frac{u}{1+\beta u}}$ ($\beta > 0$ — параметр насичення). Параметр λ визначає співвідношення між швидкістю генерації тепла та його відведенням у середовище та є узагальненою характеристикою інтенсивності тепловиділення внаслідок хімічної реакції, а член $\kappa^2 u$ описує втрати тепла через охолодження, радіацію, теплообмін тощо.

Нехай геометрію області Ω можна описати методом R -функцій [1], тобто побудувати таку елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$, що $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω , $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$ і $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

Введемо наступні функції:

$$Q^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})} e^{-\kappa r} - r e^{-\kappa \sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}}{r \sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}$$

— квазіфункція Гріна-Рвачова для оператора Гельмгольца $-\Delta u + \kappa^2 u$ у просторі $\mathbb{R}^3$;

$$K^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_3^2} \tilde{g}^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + \kappa^2 \tilde{g}^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

$$\tilde{g}^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-\kappa \sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}},$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2}$.

Тоді відповідно до методу квазіфункцій Гріна-Рвачова [2] крайова задача (1), (2) еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (3)$$

Узагальненим розв'язком u^* крайової задачі (1), (2) назвемо невід'ємну функцію з простору $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, що є розв'язком інтегрального рівняння (3). Для знаходження цього розв'язку побудуємо двобічний ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s},$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}),$$

де

$$K_+^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K_-^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Якщо за початкові наближення $v^{(0)}(\mathbf{x})$, $w^{(0)}(\mathbf{x})$ обрати кінці конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$, що є сильно інваріантним для гетеротонного оператора

$$(Tu)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{x}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s},$$

то записаний ітераційний процес за певних додаткових обмежень двобічно збігатиметься у нормі простору $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ до єдиного на конусному відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ розв'язку крайової задачі (1), (2).

Двобічна збіжність ітерацій розуміється у сенсі виконання ланцюга нерівностей

$$\begin{aligned} v_0(\mathbf{x}) = v^{(0)}(\mathbf{x}) &\leq v^{(1)}(\mathbf{x}) \leq \dots \leq v^{(k)}(\mathbf{x}) \leq \dots \leq u^*(\mathbf{x}) \leq \\ &\leq \dots \leq w^{(k)}(\mathbf{x}) \leq \dots \leq w^{(1)}(\mathbf{x}) \leq w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Література

- [1] Rvachev V.L., Sheiko T.I. R-Functions in boundary value problems in mechanics. Applied Mechanics Reviews. 1995. 48(4). P. 151–188. <https://doi.org/10.1115/1.3005099>.
- [2] Sidorov M.V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. Carpathian Mathematical Publications. 2018. 10(2). P. 360–375. <https://doi.org/10.15330/cmp.10.2.360-375>.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

- ANDRUSYAK Ivanna, 20
ANDRYTSULIAK Taras, 18
ASSANOVA Anar, 22

BANDURA Andriy, 25
BEBIYA Maksym, 27
BEKBAUOVA Altynshash, 130
BENNER Peter, 28, 30
BIHUN Yaroslav, 32
BILOZEROVA Maria, 34
BOKALO Mykola, 35
BOYKO Igor, 98
BRODYAK Oksana, 20
BRYNZAN Anastasia, 38
BUHRII Khrystyna, 41
BUHRII Oleh, 135
BUJAC Cristina, 42

CHEBITKO Iryna, 44
CHEREVKO Ihor, 47
CHUIKO Sergii, 28, 30
CHUIKO Viktor, 30
COZMA Dumitru, 50

DRIN Iryna, 53
DRIN Svitlana, 53
DRIN Yaroslav, 53
DROBOT Andrii, 32
DUDKO Artem, 55

GEFTER Serhii, 124
GLAVAN Vasile, 57
GORBACHUK Volodymyr, 59
GRIGORCHUK Rostyslav, 55
GUȚU Valeriu, 57

HENTOSH Oksana, 62
HUZYK Nadiia, 20

ILIKA Svitlana, 65
IVASIUK Ivan, 67

KAPUSTYAN Oleksiy, 68, 70
KARATAIEVA Tetyana, 73
KLEVCHUK Ivan, 76
KOMLEVA Tetyana, 100
KOROBov Valery, 77
KOSHMANENKO Volodymyr, 73
KUDUK Grzegorz, 79

LEVCHENKO Maksym, 136
LIANHA Anastasiia, 84
LOVEIKIN Yuriy, 81
LUTSKIV Mykhailo, 53

MARTYNIUK Sergiy, 18
MASLYUCHENKO Oleksandr, 84, 86
MATVIY Oleksandr, 65
MEDYNSKYI Ihor, 88
MISIATS Oleksandr, 90
MYKHAYLYUK Volodymyr, 91

NESMELOVA Olga, 28
NESTERUK Igor, 93

ONYPA Denys, 86

PASICHNYK Halyna, 38, 88
PERJAN Andrei, 95
PETRYK Mykhayko, 98
PETRYK Oksana, 98
PIDDUBNA Larysa, 65
PLOTNIKOV Andrii, 100
PRISHLYAK Oleksandr, 103
PYKHNIVSKYI Roman, 127

REVINA Tetiana, 44
RONTÓ András, 105
RONTÓ Miklós, 105
RYZHOV Anton, 127

SAMOILENKO Valerii, 107, 110
SAMOILENKO Yuliia, 110
SAVCHENKO Mariia, 113

- SHARAI Natalia, 34
 SHEPETYUK Bohdan, 93
 SHYNKARYK Mykola, 98
 SIKORA Vira, 116
 SKRIPNIK Natalia, 100
 SKRYPNIK Igor, 113
 SKURATOVSKII Ruslan, 119, 121
 SKURIKHIN Roman, 124
 SOBCHUK Valentyn, 127
 SPIVAK Yuliya, 59
 SUKRETNА Anna, 70
 SYMOTYUK Michail, 79
- TARANETS Roman, 129
 TAVANOVA Nazgul, 130
- UNHURIAN Halyna, 133
- VOZNIАK Oleh, 77
 VULPE Nicolae, 42
- YASHAN Bohdan, 133
 YATSENIАK Dariia, 135
 YURCHENKO Oleh, 116
- ZAVARZINA Olesia, 136
- ЄВТУХОВ В'ячеслав, 199
 ІВАСЮК Галина, 164
 ІВАСЮК Роман, 254
 ІГНАТОВИЧ Світлана, 314
 АКБЕРГЕНОВ Абдивалі, 138
 АСРОРОВ Фарход, 140
 АТЛАСЮК Олена, 142
 БІГУН Ярослав, 145
 БІЛОЗЕРОВА Марія, 147
 БАРАНОВСЬКИЙ Сергій, 154
 БОБИЛЄВ Дмитро, 150
 БОЙКО Петро, 152
 БОМБА Андрій, 154
 БОНДАРЕНКО Кирило, 156
 БОНДАРЕНКО Ольга, 158
- БУРИЛКО Олександр, 180
 БУРТНЯК Іван, 160
 ВІННИЧУК Олена, 164
 ВАСИЛИШИН Костянтин, 162
 ВАСИЛЬЄВ Олександр, 275
 ВОРОНЕНКО Микита, 167
 ГАГУРІН Євгеній, 286
 ГВОЗДЄВ Микита, 170
 ГЕМБАРСЬКА Світлана, 172
 ГЕСЕЛЕВА Катерина, 174
 ГИБКІНА Надія, 167
 ГЛАДУН Володимир, 176
 ГЛЕБЕНА Мирослава, 327
 ГОРБАЧ Валентина, 221
 ГОРОДНІЙ Михайло, 179
 ГОТИНЧАН Тетяна, 164
 ГРАБОВЕЦЬ Анастасія, 180
 ГРИГОРЧУК Галина, 182
 ГРИГОРЧУК Любомир, 182
 ГРОД Іван, 184
 ГРОД Інна, 184
 ГРОМИК Андрій, 185
 ГРУШКА Ярослав, 187
 ДАШКОВСЬКИЙ Сергій, 156
 ДВОРНИК Анатолій, 138
 ДЕНИСЕНКО Наталія, 355
 ДМИТРИШИН Мар'ян, 189
 ДОМНІЦАК Максим, 192
 ДОРОШ Андрій, 194
 ДОРОШЕНКО Ірина, 197
 ЖОЛТОВСЬКИЙ Олексій, 194
 ЖУК Тетяна, 201
 ЖУРАВЛЬОВ Валерій, 204
 ЗАВОРОТИНСЬКИЙ Андрій, 207
 ЗАХАРЕНКО Володимир, 210
 ЗАШКОЛЬНИЙ Давид, 213
 ЗЕЛЕНСЬКА Ірина, 215
 ЗИСКО Артем, 355
 ЗРАЖЕВСЬКА Віра, 218

- ЗРАЖЕВСЬКИЙ Григорій, 218
 КІЗІЛОВА Наталія, 251
 КІЧМАРЕНКО Ольга, 156, 307
 КАСІМОВА Ніна, 221
 КЛІМЧУК Тарас, 223
 КОЛІСНИК Руслана, 226
 КОНЕТ Іван, 185
 КОПИТКО Богдан, 227
 КОРОЛЬ Ігор, 294
 КОРОЛЬ Юрій, 294
 КОСОВАН Василь, 228
 КОСОВИЧ Ігор, 228
 КРАВЕЦЬ Василь, 243
 КРАВЦОВ Кирило, 230
 КРАСНЄВА Анна, 201
 КРАСНОКУТСЬКИЙ Олександр, 233
 КРЕНЕВИЧ Андрій, 271
 КУШНІРЧУК Василь, 235
 КУШНІРЧУК Володимир, 235, 238
 КУШНІР Роман, 240
 КУШНІРЕНКО Світлана, 291
 ЛІТОВЧЕНКО Владислав, 249
 ЛАХВА Роксолана, 243
 ЛЕБЕДЄВА Ірина, 215
 ЛЕКА Максим, 249
 ЛЕНЮК Олег, 245
 ЛИСЕНКО Ірина, 247
 ЛОПУШАНСЬКА Галина, 152
 МІНКОВ Костянтин, 273
 МІЧУТА Ольга, 259
 МАЙКО Ілля, 251
 МАКСИМОВ Олександр, 199
 МАЛИК Ігор, 254, 256
 МАЛИЦЬКА Ганна, 160
 МАМСА Катерина, 140
 МАР'ЯНЧУК Олександр, 265
 МАРТИНЮК Ольга, 226, 337
 МАРТИНЮК Петро, 259
 МАРТИНЮК Сергій, 262
 МАЦЕНКО Василь, 268
 МЕЛЬНИК Василь, 230
 МЕЛЬНИК Галина, 230
 МИХАЙЛЕЦЬ Володимир, 142
 МИХАЛЬЦОВ Кирило, 271
 МОГИЛЬОВА Вікторія, 243
 МУРАЧ Олександр, 207
 НІКІТІНА Ольга, 245
 НІКОРАК Олена, 280
 НАЗАРЕНКО Олег, 275
 НЕСТЕРЕНКО Василь, 278
 НЕСТЕРЕНКО Володимир, 256
 НЕСТЕРЕНКО Олексій, 329
 ОСИПЧУК Михайло, 283
 ПІЧКУР Володимир, 286
 ПАЛАМАРЮК Іванна, 325
 ПАНЬКОВ Андрій, 201
 ПАРХОМЕНКО Владислав, 288
 ПЕРЕГУДА Олег, 291
 ПЕРЕСТЮК Микола, 294
 ПЕРЕСТЮК Юрій, 337
 ПЕТРИШИН Роман, 145
 ПЕТРУЛЯ Валентин, 295
 ПИЛИПЮК Тетяна, 185
 ПЛАКИДА Віктор, 247
 ПРАВДИВИЙ Олександр, 297
 ПРАЦЬОВИТИЙ Микола, 158, 300
 ПРАЦЬОВИТИЙ Олександр, 247
 ПУКАЛЬСЬКИЙ Іван, 302
 ПУКАЧ Петро, 152, 304
 РАДЧИН Євгеній, 307
 РАТУШНЯК Софія, 158, 309
 РИХЛІК Антон, 312
 РУДИК Єлизавета, 329
 РУСАКОВ Віктор, 314
 САВЧЕНКО Антон, 317
 САМУСЕНКО Петро, 320
 САТУР Оксана, 321
 СЕРДЮК Анатолій, 323

СИДОРА Михайло, 262
СИДОРОВ Максим, 288
СКОРОЛІТНЯ Аліна, 325
СЛИВКА-ТИЛИЩАК Ганна, 327
СОБЧУК Валентин, 329
СОКОЛЕНКО Ігор, 331
СОЛДАТОВ Віталій, 334
СТАНЖИЦЬКИЙ Андрій, 349
СТАНЖИЦЬКИЙ Олександр, 337
СТЕХУН Анжела, 275
ТИХА Єлизавета, 179
ТКАЧЕНКО Віктор, 138
ТОКОВИЙ Юрій, 240
УКРАЇНЕЦЬ Олег, 338
УЛЯНЬЧУК-МАРТИНЮК Оксана, 259
ФЕРУК Віктор, 341
ФОТІЙ Олена, 278
ФРАТАВЧАН Тоня, 164
ХАЛЕЦЬКА Зоя, 297
ЦУРИК Вадим, 357

ЦУРКАН Вячеслав, 343
ЧЕПОК Ольга, 147
ЧЕРЕВКО Ігор, 233
ЧЕРНУХА Юрій, 304
ШАРАЙ Наталія, 346
ШАРИН Сергій, 189
ШАТИРКО Андрій, 295
ШЕВЧУК Роман, 227
ШИНКАРЕНКО Володимир, 346
ШИНКАРИК Микола, 245
ШКІЛЬНЮК Дмитро, 228
ШТЕФАН Дмитро, 349
ЮЗВ'ЯК Микола, 240
ЮРЧЕНКО Ігор, 351
ЮСИПІВ Тарас, 355
ЯКОВЛЄВА Інна, 357
ЯНБЕКОВ Равіль, 360
ЯСИНСЬКИЙ Володимир, 351
ЯШАН Богдан, 302