

УДК 517.53+512.54+477.85[378.016:51]''194/199
№ держреєстрації 0120U105711
Инв. №

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
58002, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 5; тел. (0372) 52-61-42
факс (0372) 55-29-44; nd-office@chnu.edu.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи
Чернівецького
національного університету
імені Юрія Федьковича

Юрій ХАЛАВКА



2025 р.

**ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ**

**ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ В ЗЛІЧЕННО НОРМОВАНИХ
ПРОСТОРАХ. ГРУПИ, КІЛЬЦЯ – ДОСЛІДЖЕННЯ
БУДОВА. МАТЕМАТИКА БУКОВИНИ ЗА ЧАСІВ
НЕЗАЛЕЖНОСТІ УКРАЇНИ
(остаточний)**

Деканка факультету
математики та інформатики,
докторка фіз.-мат. наук, професорка














Ольга МАРТИНІУК

Керівник НДР,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Руслана КОЛІСНИК

2025

СПИСОК АВТОРІВ

- | | | |
|--|---|---|
| 1. Доктор фіз.-мат. наук, професор |  | В.Городецький
(вступ, розділ I, п.п. 1.1-1.5,
висновки) |
| 2. Доктор історичних наук, професор |  | І. Житарюк
(вступ, розділ III, п.п. 3.1-3.4
висновки) |
| 3. Докторка фіз.-мат. наук,
професорка |  | О. Мартинюк
(вступ, розділ I, п.п. 1.1-1.4) |
| 4. Кандидатка фіз.-мат. наук,
доцентка |  | В. Сікора
(вступ, розділ II, п. 2.1,
висновки) |
| 5. Кандидатка фіз.-мат. наук,
доцентка |  | Р. Колісник
(вступ, розділ I, п. 1.2-1.3) |
| 6. Кандидатка фіз.-мат. наук,
доцентка |  | С. Боднарук
(розділ III, п. 3.4) |
| 7. Кандидат фіз.-мат. наук, доцент |  | В. Мироник
(розділ I, п. 1.4) |
| 8. Кандидатка фіз.-мат. наук,
асистентка |  | Н. Шевчук
(розділ I, п. 1.5) |
| 9. Кандидатка фіз.-мат. наук,
асистентка |  | В. Лучко
(розділ III, п. 3.3-3.4) |
| 10. Кандидатка фіз.-мат. наук,
асистентка |  | Ж. Довгей
(розділ III, п. 3.3) |
| 11. Кандидат фіз.-мат. наук, асистент |  | С. Мартинюк
(розділ III, п. 3.4) |
| 12. Докторка філософії, асистентка |  | А. Скоролітня
(розділ III, п. 3.4) |
| 13. Асистентка |  | Н.Правіцка
(розділ III, п.3.2) |

РЕФЕРАТ

Звіт по НДР: 149 с., 5 табл., 98 джерела (55 власних за 5 років).

АВТОМАТНІ ПЕРЕСТАНОВКИ, АСОЦІАТИВНА АЛГЕБРА, ВІНЦЕВИЙ ДОБУТОК, ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЕ РІВНЯННЯ, ЕВОЛЮЦІЙНЕ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА І НАУКА, НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА, ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР, СИСТЕМА ТВІРНИХ, УЗАГАЛЬНЕНА ФУНКЦІЯ.

Об'єкт дослідження. Багатоточкові задачі для диференціально-операторних рівнянь. Алгебраїчні структури (вінцеві добутки деяких груп, групи автоматних перестановок). Математична освіта і наука Чернівецької області за часів незалежності України (сучасний етап).

Мета роботи. Розвиток теорії коректної розв'язності багатоточкових задач для диференціально-операторних рівнянь, зокрема, для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь. Побудова та дослідження властивостей окремих алгебраїчних конструкцій (вінцевих добутків груп, груп автоматних перестановок). Дослідити розвиток математичної освіти і науки в Чернівецькій області за роки незалежності, вивчити методичні особливості викладання математики у старшій школі (рівень стандарту) за глобалізаційних викликів та розробити методичні рекомендації (навчальні підручники) щодо її покращення.

Основні результати:

- розвинено теорію нелокальної багатоточкової за часом задачі (зокрема, задачі Коші) для диференціально-операторних рівнянь вигляду $u'(t) + \varphi(A)u(t) = 0$, $t \in (0, T]$ (або $t \in (0, +\infty)$), де $u(t)$ – функція із значеннями в деякому локально опуклому топологічному просторі, $\varphi(A)$ – функція від оператора A , при цьому розглядаються випадки: 1) A – оператор диференціювання в узагальнених просторах типу S ; 2) A – модуль оператора диференціювання у певному просторі нескінченно диференційовних на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функцій; 3) A – псевдодиференціальний оператор у просторі нескінченних диференційовних періодичних функцій; 4) A – невід'ємний самоспряжений оператор з дискретним спектром у гільбертовому просторі; 5) A – оператор узагальненого диференціювання у просторі цілих функцій типу W ;
- досліджено питання побудови систем твірних груп автоматних підстановок, котрі занурюються у вінцевий добуток симетричних груп скінченного рангу та які діють на множині всіх слів над даним алфавітом або на множині слів довжини r ($r \in \mathbb{N}$) над цим алфавітом; встановлено, що група, індукована автоматними підстановками на множині слів довжини r має мінімальну (за кількістю елементів) базу, яка складається рівно з r елементів, побудовано коректне доведення

нескінченної породжуваності основних груп автоматних підстановок, наведено приклади нових систем твірних для груп автоматних підстановок;

- досліджено питання, що стосуються формування системи математичної освіти і науки на Буковині у роки незалежності України. Зазначено, що на математичному факультеті Чернівецького університету функціонували й функціонують потужні національні математичні школи як фундаментального, так і прикладного спрямування, де готували й готують добротних фахівців для педагогічної роботи, науково-дослідних установ й виробництва краю та держави. Основні напрямки наукових досліджень переважно стосувалися й стосуються теорії диференціальних й диференціально-функціональних рівнянь та теорії функцій, а також методики навчання математики;
- вивчено питання, що стосувалися оновлення навчально-методичного забезпечення загальноосвітнього курсу математики, розширено спектр навчальних матеріалів, посібників, завдань для підготовки до ЗНО (НМТ). Значну частину цих напрацювань створено буковинськими науковцями й учителями-методистами. Важливою складовою розвитку стало запровадження інформаційних технологій у навчання в ЗВО та ЗЗСО, організація олімпіадних рухів, різного роду математичних турнірів, зокрема турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, подальше вдосконалення роботи БМАН, що стимулювало й стимулює талановиту молодь до наукової діяльності.

Зміст

ВСТУП.....	7
Розділ I. ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ В ЗЛІЧЕННО НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ.....	17
1.1. Еволюційні псевдодиференціальні рівняння в просторах типу S	18
1.1.1. Деякі класи узагальнених просторів типу S	18
1.1.2. Псевдодиференціальні оператори в узагальнених просторах типу S	25
1.1.3. Простори узагальнених функцій типу S'	28
1.1.4. Нелокальна за часом задача для рівнянь з частинними похідними параболічного типу	29
1.1.5. Еволюційні рівняння нескінченного порядку у просторах типу S ...	36
1.1.6. Псевдодиференціальні рівняння зі змінними символами у просторах типу S	46
1.2. Еволюційні рівняння з модулем оператора диференціювання.....	50
1.2.1. Простори основних та узагальнених функцій.....	51
1.2.2. Дробове диференціювання у просторі $\Phi\alpha$	55
1.2.3. Нелокальна за часом задача для еволюційного рівняння з оператором дробового диференціювання	56
1.2.4. Еволюційні рівняння з функціями від оператора дробового диференціювання	60
1.3. Нелокальна за часом задача в просторах узагальнених періодичних функцій.....	64
1.3.1. Простори основних та узагальнених періодичних функцій	65
1.3.2. Псевдодиференціальні оператори у просторах періодичних функцій	67
1.3.3. Нелокальна багатоточкова за часом задача.....	68
1.3.4. Граничні властивості розв'язків багатоточкової за часом задачі	71
1.4. Нелокальна за часом задача для диференціально-операторних рівнянь.....	74
1.4.1. Еволюційні рівняння з операторами спектри, яких суто дискретні.....	75
1.4.2. Наближені розв'язки диференціально-операторних рівнянь	84
1.5. Про один клас операторів у просторах цілих функцій типу W	89

1.5.1. Топологічна структура просторів W_M^Ω	91
1.5.2. Оператори типу Гельфонда-Леонтьєва у просторах W_M^Ω	95
Розділ II. ГРУПИ, КІЛЬЦЯ – ДОСЛІДЖЕННЯ, БУДОВА	100
2.1. Побудови системи твірних для деяких груп автоматних підстановок....	100
III. МАТЕМАТИКА БУКОВИНИ ЗА ЧАСІВ НЕЗАЛЕЖНОСТІ УКРАЇНИ...	109
3.1. Система освіти Радянської Буковини напередодні незалежності України	109
3.2. Система математичної освіти і науки на Буковині у перші роки незалежності України	114
3.3. Математична освіта і наука у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича у період незалежності України.....	124
3.4. Впровадження сучасних інноваційних технологій навчання у навчальний процес ЗО	130
ВИСНОВКИ.....	136
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	140

ВСТУП

I. При математичному моделюванні різних складних явищ у сучасному природознавстві використовуються рівняння з частинними похідними як скінченного, так і нескінченного порядків, рівняння зі зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, еволюційні рівняння з псевдодиференціальними операторами або функціями від таких операторів. Задача Коші для таких рівнянь часто ставиться у випадку, коли початкові функції мають особливості в одній або декількох точках. Якщо ці особливості мають степеневий порядок, то такі функції допускають регуляризацію в просторах узагальнених функцій скінченного порядку типу розподілів Соболева–Шварца. Якщо ж порядок особливостей вищий за степеневий, то ці функції є узагальненими функціями нескінченного порядку (наприклад, ультрарозподілами, гіперфункціями). Отже, задача Коші для таких рівнянь має природну постановку і у класах початкових умов, які є узагальненими функціями скінченного або нескінченного порядків.

Важливий клас еволюційних рівнянь складають рівняння з псевдодиференціальним оператором (ПДО). До поняття ПДО привели систематичні дослідження інтегро-диференціальних операторів (Кальдерон, Зигмунд), які є лінійною комбінацією частинних похідних з коефіцієнтами – сингулярними інтегральними операторами. Псевдодиференціальні оператори характеризуються своїм символом аналогічно тому, як диференціальні оператори характеризуються своєю характеристичною формою. Псевдодиференціальні оператори та рівняння з ПДО тісно пов'язані з важливими задачами аналізу, сучасної математичної фізики, теорією ймовірностей, теорією фракталів. До класу псевдодиференціальних операторів належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, згортки, тощо.

Псевдодиференціальні оператори формально можна подати у вигляді $F_{\sigma \rightarrow x}^1[a(t, x, \sigma)F_{x \rightarrow \sigma}]$, $\{x, \sigma\} \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$, де a – функція (символ), яка задовольняє певні умови, F , F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є. Якщо символ a є

цілою функцією аргумента σ (тобто $a(t, x, \sigma) = P(t, x, \sigma)$, де P – поліном змінної σ при фіксованих t, x , який задовольняє певну умову параболічності), то еволюційні рівняння з такими ПДО належать до класу параболічних рівнянь.

Теорія лінійних параболічних рівнянь з частинами похідними бере свій початок із дослідження рівняння теплопровідності. Класична теорія задачі Коші та крайових задач для таких рівнянь і систем рівнянь побудована у працях І.Г. Петровського, С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І. Матійчука, М.В. Житарашу, А. Фрідмана, С. Теклінда, І.А. Кіпріянова, В.В. Катрахова, В.В. Крехівського, В.П. Лавренчука та ін.

Задача Коші з початковими даними з просторів узагальнених функцій типу розподілів та ультрарозподілів вивчалася Г.Є. Шиловим, Б.Л. Гуревичем, М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, О.І. Кашпіровським, Я.І. Житомирським, В.В. Городецьким, О.Г. Возняк, В.А. Літовченком та ін.

Дослідженням задачі Коші для еволюційних рівнянь з ПДО займалися багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (М. Nagase, R. Shinkai, С. Tsutsumi, М.А. Шубін, М. Тейлор, Л. Хермандер, А.Н. Кочубей, Ю.А. Дубінський, Б.Й. Пташник та ін.). Одержано важливі результати щодо розв'язності задачі Коші в різних функціональних просторах.

У теорії задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) з ПДО, побудованими за точково-негладкими однорідними символами, відомі результати про структуру й оцінки фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК). За допомогою цих результатів одержується зображення розв'язку у вигляді інтеграла Пуассона, досліджені якісні властивості розв'язків (ППДР) і систем таких рівнянь (зокрема, поведінка розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємність, теореми типу Ліувіля). Відзначимо, що асимптотика ФРЗК для таких рівнянь уже не є експоненціальною, як у випадку параболічних рівнянь з частинними похідними, а степеневою. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів, зокрема, при побудові розривних марковських процесів за твірними інтегродиференціальними операторами, які відносяться до псевдодиференціальних

операторів. Якщо символ ПДО не залежить від просторових координат, то задача Коші для ппдр коректно розв'язна в просторі узагальнених функцій типу розподілів, при цьому розв'язок подається у вигляді згортки ФРЗК з початковою узагальненою функцією. Ці результати є надбанням вітчизняних і зарубіжних математиків, зокрема, С.Д. Ейдельмана, Я.М. Дріня, М.В. Федорюка, А.Н. Кочубея, В.В. Городецького, В.А. Літовченка).

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum_{k=0}^m \alpha_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Нелокальні за часом задачі відносяться до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Нелокальні крайові задачі виникають при моделюванні багатьох процесів і задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами. Такі задачі виникають також при описуванні всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач.

Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (О.О. Дезін, В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, Б.Й. Пташник, О.А. Самарський, В.І. Чесалін). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, дослідження питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У розділі 1 об'єктом досліджень є нелокальна багатоточкова за часом задача (зокрема, задача Коші) для диференціально-операторних рівнянь вигляду

$$u'(t) + \varphi(A)u(t) = 0, \quad t \in (0, T] \text{ (або } t \in (0, +\infty)),$$

де $u(t)$ – функція із значеннями в деякому локально опуклому топологічному просторі, $\varphi(A)$ – функція від оператора A , при цьому розглядаються випадки:

- 1) A – оператор диференціювання в узагальнених просторах типу S (пункт 1.1);
- 2) A – модуль оператора диференціювання у певному просторі нескінченно диференційовних на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функцій (пункт 1.2);
- 3) A – псевдодиференціальний оператор у просторі нескінченних диференційовних періодичних функцій (пункт 1.3);
- 4) A – невід’ємний самоспряжений оператор з дискретним спектром у гільбертовому просторі (пункт 1.4);
- 5) A – оператор узагальненого диференціювання у просторі цілих функцій типу W (пункт 1.5).

У пунктах 1.1 та 1.2 вважається, що функція φ , за якою будується оператор $\varphi(A)$, – мультиплікатор у просторі $F[X]$, де $F[X]$ – Фур’є-образ простору основних функцій X . За допомогою основної спектральної теореми для самоспряжених операторів доводиться, що звуження оператора $\varphi(A)$ на X збігається з ПДО, побудованим за функцією φ , як за символом. Такий підхід дозволяє ефективно застосувати метод перетворення Фур’є для дослідження нелокальної за часом задачі для досить широкого класу рівнянь з частинними похідними. В пунктах 1.3 та 1.4 використовуються формальні тригонометричні ряди та формальні ряди Фур’є, побудовані за невід’ємним самоспряженим оператором з суто дискретним спектром. У пункті 1.5 будуються оператори узагальненого диференціювання у просторі цілих функцій типу W . До класу таких операторів, як частковий випадок, належать оператори узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтєва.

Розвивається теорія нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначених диференціально-операторних рівнянь у випадку, коли функція, за допомогою якої задається відповідна багатоточкова умова є узагальненою функцією типу розподілів (ультрарозподілів) або узагальненим елементом (у випадку невід’ємного самоспряженого оператора).

II. Одним із фундаментальних класичних понять алгебри є поняття групи, значення якого для математики порівнюють із такими базовими концептами, як категорія, множина, відображення, кільце, модуль, топологічний простір,

многовид чи міра. Протягом останнього століття саме групи стали одним із головних об'єктів дослідження, причому їхня роль постійно розширюється завдяки введенню додаткових структур: топологічні групи, групи Лі, алгебраїчні групи, p -адичні аналітичні групи, проскінченні та адельні групи. Ці конструкції утворюють основу сучасної геометрії, теорії чисел та квантової фізики. Серед дослідників, які розвивали ці напрями: Жан-П'єр Серр^{1, 2}, Александр Гротендік³, Роберт Ленглендс⁴.

Особливу цікавість становлять конкретні групи: симетричні, прості скінченні, алгебраїчні, кристалографічні та спорадичні. Їхнє вивчення привело до класифікації скінченних простих груп, над якою працювали Даніель Горенштейн^{5, 6}, Річард Лайонс, Рональд Соломон, Річард Борчардс. Дослідження нескінченних груп нині тісно пов'язане з геометричною груповою теорією, започаткованою працями Михайла Громова⁷. Його концепція гіперболічних груп та теорема про групи поліноміального росту стали фундаментом сучасних досліджень. Скінченні групи мають численні застосування у теорії чисел, комбінаториці, теорії кодування та класифікації многовидів. Тут ключову роль відіграє теорія будівель Жака Тітса⁸, яка поєднує алгебраїчні та геометричні методи.

Теорія зображень груп існує вже понад 120 років. Перший період розвитку пов'язаний з іменами Фердинанда Фробеніуса, Ісаї Шура, Вільяма Бернсайда^{9, 10}. Другий період — роботи Германна Вейля, Елі Картана, Ізраїля Гельфанда^{11, 12}. Сучасні дослідження продовжують Джеймс Артур та інші, розвиваючи ідеї у контексті автоморфних форм.

¹ [Jean-Pierre Serre - Wikipedia](#)

² [Jean-Pierre Serre | Biography, Books, & Facts | Britannica](#)

³ [Alexander Grothendieck - Wikipedia](#)

⁴ [Langlands program - Wikipedia](#)

⁵ [Finite Simple Groups: An Introduction to Their Classification - Daniel Gorenstein - Google книги](#)

⁶ [Classification of finite simple groups - Wikipedia](#)

⁷ [Mikhail Gromov \(mathematician\) - Wikipedia](#)

⁸ [Building \(mathematics\) - Wikipedia](#)

⁹ [History of representation theory - Wikipedia](#)

¹⁰ [Pioneers of representation theory : Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer : Curtis, Charles W : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive](#)

¹¹ [Israel Gelfand - Wikipedia](#)

¹² <https://archive.org/details/i-m-gelfand.-representation-theory-and-automorphic-functions>

Важливим напрямом є дослідження метасиметричних груп, започатковане працями Л.А. Калужніна. Їхні підгрупи — метазнакозмінні групи — залишаються менш дослідженими, хоча вже відомі фундаментальні результати, як-от теорема М. Бхаттачар'ї про двопородженість вінцевих добутоків¹³.

Метасиметричні групи, тобто ітеровані вінцеві добутки симетричних груп скінченного степеня, було введено до розгляду в роботах Л.А. Калужніна у зв'язку з дослідженням груп ізометрій так званих метричних просторів Кантора. Пізніше з'ясувалося, що ці групи природним чином виникають в теорії графів, теорії автоматних груп, фрактальній геометрії тощо. У зв'язку з цим, цілий ряд робіт різних авторів було присвячено дослідженню будови різних типів метасиметричних груп. Кожна метасиметрична група містить природну підгрупу — вінцевий добуток відповідних знакозмінних груп. Такі вінцеві добутки називають метазнакозмінними групами. У порівнянні з метасиметричними групами, будова метазнакозмінних груп досліджена поки що мало. Найвідомішим результатом тут є теорема М. Бхаттачар'ї про те, що вінцевий добуток за нескінченними послідовностями знакозмінних груп степеня не вище 5 є 2-породженим як проскінченна група. Проте доведення цього факту неконструктивне. Воно істотно опирається на класифікацію скінченних простих груп. А тому, природною задачею є питання конструктивної побудови і характеристики скінченних незвідних систем твірних (в топологічному сенсі) в різних метазнакозмінних групах.

Саме вивченню цих питань присвячено розділ 2, у якому описано алгоритми побудови систем твірних груп автоматних підстановок, котрі занурюються у вінцевий добуток симетричних груп скінченного рангу та які діють на множині всіх слів над даним алфавітом або на множині слів довжини r ($r \in \mathbb{N}$) над цим алфавітом; встановлено, що група, індукована автоматними підстановками на множині слів довжини r має мінімальну (за кількістю елементів) базу, яка складається рівно з r елементів, побудовано коректне доведення нескінченної

¹³M.Bhattacharjee. The probability of generating certain profinite groups by two elements // Israel journal of Mathematics.— 1994.— Vol. 86.— P.311—329.

породжуваності основних груп автоматних підстановок, наведено приклади нових систем твірних для груп автоматних підстановок.

III. Розвиток математичної освіти і науки в Україні за часів її незалежності відбувався в умовах глибоких трансформацій суспільства, гуманітарної сфери та науково-освітньої політики держави. Євроінтеграційні прагнення та необхідність модернізації системи освіти зумовили перегляд змісту й методології математичної підготовки, переосмислення ролі науково-педагогічних шкіл та актуалізацію проблеми регіонального розвитку науки. У цьому контексті особливе значення має вивчення становлення й розвитку математичної освіти і науки на Буковині – регіоні з потужними освітніми традиціями, багатою науковою спадщиною та помітним внеском у формування українського математичного простору.

Період незалежності України визначив й нові вимоги до фахівців природничо-математичного профілю, що поставило перед освітянською й науковою спільнотою Буковини завдання трансформувати зміст математичної освіти, модернізувати методики викладання, активізувати науково-дослідну роботу та забезпечити інтеграцію регіональних математичних шкіл у загальноукраїнський і міжнародний науковий простір. У зазначених умовах особливо важливим є опрацювання історичного досвіду, дослідження діяльності наукових колективів Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, збереження традицій та виявлення нових тенденцій, що сформували сучасне обличчя математичної науки Буковини.

Окреслена тематика передбачає аналіз широкого спектру питань: розвиток математичної освіти в ЗЗСО і ЗВО; формування сучасної навчальної політики; становлення й еволюція наукових шкіл; інтеграція математичних досліджень Буковини в український і світовий контекст; зміни змісту навчальних програм; вплив освітніх реформ та особливості реалізації компетентнісного підходу. Сучасна математична освіта регіону формувалася й формується у взаємозв'язку з реформами, що охопили Національну доктрину розвитку освіти, перехід на 12-річний формат навчання, упровадження Державних стандартів базової та повної

загальної середньої освіти (2011, 2020), Концепцію Нової української школи та цифровізацію навчального процесу.

Вивчення розвитку математичної освіти і науки Чернівецької області за часів незалежності України дозволяє осмислити динаміку розвитку загальної та професійної математичної підготовки, з'ясувати, яким чином змінювався зміст освітніх програм у ЗЗСО області, як посилювалися міжпредметні зв'язки, інтеграція STEM-технологій, методик активного й проєктного навчання. Особлива увага приділяється реформуванню структури математичних дисциплін, зростанню ролі профільної освіти, появі нових спецкурсів, факультативів й навчально-методичних комплексів, розроблених педагогами Буковини. Значна частина інноваційної діяльності відбувалася й відбувається через участь регіону в українських експериментах з профільного навчання, інтегрованих курсів, цифрових освітніх ресурсів.

Вивчення розвитку математичної освіти і науки Чернівецької області в період незалежності України має важливе наукове, культурно-освітнє, суспільні й гуманітарне значення. Адже саме в цей час у регіоні розпочався новий етап трансформації змісту математичної освіти, оновлення навчальних програм, упровадження компетентнісного та особистісно орієнтованого підходів, розширення можливостей наукової творчості й підготовки математичних кадрів вищої кваліфікації. Регіональний вимір уможлиблює цілісне бачення розвитку математичної освіти і науки краю в контексті державних освітніх реформ, включно з переходом на нові стандарти, запровадженням профільної школи, використанням інформаційно-комунікаційних технологій, змінами у підготовці вчителя математики.

Аналіз розвитку математичної освіти і науки Буковини у період незалежності невід'ємно пов'язаний з діяльністю Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, який виступав і продовжує залишатися ключовим осередком формування наукової математичної школи регіону. Власне університет забезпечує підготовку математичного профілю для ЗО,

промисловості, IT-сфери, наукових установ не лише Буковини, а й усієї України та й зарубіжжя.

Вагомим чинником розвитку математики Буковини став поступ наукових шкіл ЧНУ імені Юрія Федьковича, серед яких варто виокремити школи з функціонального аналізу, алгебри, теорії ймовірностей, математичного моделювання, диференціальних рівнянь, топології та прикладної математики. Активно розвивалися кафедри математичного факультету, інститутів й структурних підрозділів університету, формувалися нові напрями досліджень, зокрема чисельні методи, математичні основи інформатики, прикладне моделювання економічних і технічних процесів. Важливо підкреслити, що упродовж останніх десятиліть науковці Буковини інтегрувалися у міжнародні дослідницькі проєкти, брали участь у конференціях світового рівня, публікувалися у міжнародних журналах, що сприяло поглибленню потенціалу регіональної математичної науки.

У 1991-2000-х роках буковинські науковці активно працювали над становленням нової парадигми математичної освіти, що передбачала поєднання фундаментальності навчання з його практичною спрямованістю. Значний внесок у розвиток математичних досліджень й підготовку педагогічних кадрів зробили С.Д. Івасишен, Я.Й. Бігун, Р.Ф. Домбровський, В.В. Крехівський, М.І. Матійчук, В.П. Лавренчук, В.Т. Мартинюк, А.М. Садов'як, П.Ф. Ярема, М.П. Ленюк та інші. Їхні праці були присвячені проблемам функціонального аналізу, диференціальних рівнянь. Геометрії, алгебри та методики навчання математики. Розвиток наукових напрямів сприяв формуванню власної математичної школи Буковини, відомої як в Україні, так і за її межами. Важливим джерелом є й праці І.В. Житарюка, присвячені вивченню розвитку математичної освіти і науки краю, становленню педагогічних традицій та аналізу освітньої політики регіону. У працях буковинських вчених системно висвітлено взаємозв'язок університетської науки з освітнім середовищем, роль фахової підготовки вчителя математики, зміни в розвитку обдарованої молоді, участь учнів у математичних олімпіадах, конкурсах-захистах, наукових гуртках.

У ЗВО математична підготовка зазнала істотних змін у зв'язку з переходом на кредитно-модульну систему, введенням ступеневої підготовки бакалавра і магістра, формуванням освітніх програм нового покоління, акцентом на академічну мобільність, проєктну діяльність та цифрову компетентність. З'явилися нові спеціальності, напрями досліджень та наукові лабораторії. Поступ математичної науки Буковини підсилювався завдяки співпраці з науковими інституціями України та зарубіжжя, виконанні госпдоговірних досліджень.

Окреме місце в розвитку математичної освіти регіону посідає оновлення навчально-методичного забезпечення загальноосвітнього курсу математики. У період незалежності було суттєво розширено спектр навчальних матеріалів, посібників, завдань для підготовки до ЗНО (НМТ). Значна частина цих напрацювань була створена саме буковинськими науковцями й учителями-методистами. Важливою складовою стало запровадження інформаційних технологій у навчальний процес, організація різного роду математичних турнірів, зокрема турніру юних математиків Буковини, вдосконалення роботи БМАН, що стимулювало талановиту молодь до наукової діяльності.

Одним з визначальних аспектів є становлення й діяльність математичної спільноти області, розвиток Чернівецького осередку МАН України, активізація роботи учнівських секцій, розширення спектру дослідницьких тем з прикладної й теоретичної математики. Значний поступ спостерігається у проведенні математичних олімпіад, що сприяє популяризації математичних знань і формуванню професійних інтересів учнівської молоді. Простежується посилення взаємодії між університетом і ЗЗСО краю, що формує широку освітньо-наукову екосистему.

У підсумку варто зазначити, що математична освіта і наука Буковини за часів незалежності України постала як динамічна система, що поєднує освітні традиції, інноваційні практики й активний розвиток наукових шкіл.

Розділ I. ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ В ЗЛІЧЕННО НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими або залежними від часової змінної коефіцієнтами часто використовуються простори $S_\alpha^\beta \equiv S_{k^{k\alpha}}^{n^{n\beta}}$, $\alpha, \beta > 0$ – фіксовані параметри. Ці простори відносяться до просторів типу S , введених І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим. Елементами таких просторів є нескінченно диференційовні на \mathbb{R} функції, які разом з усіма своїми похідними задовольняють умову $|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, з деякими сталими $c, A, B > 0$, залежними від функції φ . І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим доведено, що кожна функція з простору S_α^β разом з усіма своїми похідними при $|x| \rightarrow \infty$ спадає швидше, ніж $\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. У працях [1.1]-[1.7] встановлено, що простори типу S та S' – топологічно спряжені з S , є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є аналітичними функціями за просторовою змінною. Наприклад, для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega,$$

фундаментальний розв'язок задачі Коші – функція

$$G(t, x) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}, \quad (t, x) \in \Omega,$$

при кожному $t > 0$, як функція змінної x , є елементом простору $S_{1/2}^{1/2} \equiv S_{k^{k/2}}^{n^{n/2}}$, який відноситься до просторів типу S .

Представляє науковий інтерес дослідження просторів $S_{a_k}^{b_n}$, які є узагальненнями просторів типу S і будуються за певними послідовностями $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел (дослідження топологічної структури, властивостей функцій, основних операцій, властивостей перетворення Фур'є

функцій з просторів типу S' , згортки, згортувачів та мультиплікаторів). У першому пункті цього розділу даються відповіді саме на ці питання. У інших пунктах даються застосування одержаних результатів при дослідженні нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу у таких просторах.

У розділі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача (зокрема, задача Коші) для диференціально-операторних рівнянь вигляду

$$u'(t) + \varphi(A)u(t) = 0, \quad t \in (0, T] \text{ (або } t \in (0, +\infty)),$$

де $u(t)$ – функція із значеннями в деякому локально опуклому топологічному просторі, $\varphi(A)$ – функція від оператора A , при цьому розглядаються випадки:

- 1) A – оператор диференціювання в узагальнених просторах типу S (пункт 1.1);
- 2) A – модуль оператора диференціювання у певному просторі нескінченно диференційовних на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функції (пункт 1.2);
- 3) A – псевдодиференціальний оператор у просторі нескінченних диференційовних періодичних функцій (пункт 1.3);
- 4) A – невід’ємний самоспряжений оператор з дискретним спектром у гільбертовому просторі (пункт 1.4);
- 5) A – оператор узагальненого диференціювання у просторі цілих функцій типу W (пункт 1.5).

1.1. Еволюційні псевдодиференціальні рівняння в просторах типу S

1.1.1. Деякі класи узагальнених просторів типу S

Розглянемо послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка володіє властивостями:

- 1) $\forall n \in \mathbb{Z}_+: m_n \leq m_{n+1}, m_0 = 1;$
- 2) $\exists c > 0 \exists M > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+: m_{n+1} \leq cM^n m_n;$
- 3) $\exists c_0 \geq 1 \exists L_0 > 0: m_k m_{n-k} \leq c_0 L_0^n m_n, k \in \{0, 1, \dots, n\}.$

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду $m_n = n^{n\beta}$, $m_n = (n!)^\beta, n \in \mathbb{Z}_+$, де $\beta > 0$ – фіксований параметр.

Покладемо $\gamma(x) = \inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{m_n}{|x|^n}$, $x \neq 0$. Очевидно, що γ – невід’ємна, парна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція. Якщо $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, то, з урахуванням властивості 1) послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, маємо, що $\inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{m_n}{|x|^n} = 1$, тобто $\gamma(x) = 1$ для $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Якщо $1 \leq x_1 < x_2$, то $\gamma(x_2) < \gamma(x_1) \leq \gamma(1) = 1$, тобто γ монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$. Звідси, з урахуванням властивості парності функції γ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, дістаємо, що γ монотонно зростає на проміжку $(-\infty, -1]$, $0 < \gamma(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Наприклад, якщо $m_n = n^{n\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$, то І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим встановлено таку оцінку функції γ на проміжку $[1, +\infty)$: $\inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{n^{n\alpha}}{|\xi|^n} \leq e^{\frac{\alpha e}{2}} e^{-\frac{\alpha}{e} \xi^{1/\alpha}}$, $\xi \geq 1$.

Якщо $0 < \xi < 1$, то $\inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{n^{n\alpha}}{|\xi|^n} = 1 \leq e^{\frac{\alpha}{e}} e^{-\frac{\alpha}{e} \xi^{1/\alpha}}$.

Отже, $\forall \xi: 0 < \xi < \infty: \gamma(\xi) \leq c e^{-\frac{\alpha}{e} \xi^{1/\alpha}}$, $c = e^{\frac{\alpha e}{2}}$. Крім того, на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція γ задовольняє нерівність

$$e^{-\frac{\alpha}{e} |\xi|^{1/\alpha}} \leq \inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{n^{n\alpha}}{|\xi|^n} \leq c e^{-\frac{\alpha}{e} |\xi|^{1/\alpha}}, \quad c = e^{\frac{\alpha e}{2}}, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1.1)$$

Лема 1.1. *Правильною є нерівність*

$$\ln \gamma(x_1) + \ln \gamma(x_2) \geq \ln \gamma(x_1 + x_2), \quad \forall \{x_1, x_2\} \subset (0, +\infty). \quad (1.2)$$

Нехай $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – послідовності, які володіють властивостями 1)–3). Символом $S_{a_k}^{b_n}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists c, A, B > 0 \quad \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}: |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n a_k b_n \quad (1.3)$$

(сталі $c, A, B > 0$ залежать від функції φ).

$S_{a_k}^{b_n}$ збігається з об’єднанням просторів $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ за всіма $A, B > 0$, де символом $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ позначається сукупність функцій $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, які для довільних $\delta, \rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з одними й тими ж сталими $A, B > 0$. $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо систему норм у цьому просторі задати за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x, k, n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n a_k b_n}, \quad \{\delta, \rho\} \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset S_{a_k}^{b_n}$ збігається до нуля у просторі $S_{a_k}^{b_n}$ при $\nu \rightarrow +\infty$, якщо $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset S_{a_k, A}^{b_n, B}$ при деяких $A, B > 0$ і збігається до нуля у цьому просторі, тобто $\|\varphi_\nu\|_{\delta\rho} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ для довільних $\{\delta, \rho\} \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$. Це означення рівносильне такому: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset S_{a_k}^{b_n}$ збігається до нуля в цьому просторі при $\nu \rightarrow +\infty$, якщо функції φ_ν та їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і при цьому справджуються нерівності

$$|x^k \varphi_\nu^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

де сталі $c, A, B > 0$ не залежать від ν (доведення цієї властивості аналогічне доведенню відповідної властивості у випадку просторів $S_\alpha^\beta \equiv S_{k^{k\alpha}}^{n^{n\beta}}$).

Множина $F \subset S_{a_k}^{b_n}$ називається *обмеженою*, якщо F міститься у просторі $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ з деякими $A, B > 0$ і в ньому обмежена, тобто для всіх функцій $\varphi \in F$ виконується оцінка (1.3) з одними й тими ж сталими $c, A, B > 0$.

Лема 1.2. *Функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ є елементом простору $S_{a_k}^{b_n}$ тоді й лише тоді, коли вона задовольняє умову*

$$\exists c, a, B > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}: |\varphi^{(n)}(x)| \leq c B^n b_n \tilde{\gamma}(ax), \quad (1.4)$$

$$\text{де } \tilde{\gamma}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{a_k}{|x|^k}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Якщо $a_k = k^{k\alpha}$, $b_n = n^{n\beta}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\alpha, \beta > 0$ фіксовані параметри, то в цьому випадку простір $S_{k^{k\alpha}}^{n^{n\beta}}$ позначається символом S_α^β . Простори S_α^β називаються просторами типу S ; ці простори детально вивчені в монографії І.М. Гельфанда та Г.Є. Шилова, їх можна охарактеризувати ще так.

Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha + \beta \geq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ і утворюють щільні множини в $L_2(\mathbb{R})$.

S_α^β , $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta \geq 1$, складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на \mathbb{R} функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $c, a, B > 0$, залежними лише від функції φ .

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в усю комплексну площину і задовольняють умову

$$\exists c = c(\varphi) > 0 \exists a = a(\varphi) > 0 \exists b = b(\varphi) > 0:$$

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простір S_α^1 ($\alpha > 0$ – довільне) складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються до функції $\varphi(x + iy)$ у деяку смугу $|y| < \delta$ (залежну від φ) комплексної площини, при цьому

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad c, a > 0, x \in \mathbb{R}, |y| < \delta.$$

Простори $S_{a_k}^{b_n}$, побудовані за послідовностями $\{a_k\}$, $\{b_n\}$, які задовольняють умови 1)–3), називатимемо узагальненими просторами типу S .

У просторі $S_{a_k}^{b_n}$ визначені, є лінійними і неперервними оператори зсуву аргумента, множення на незалежну змінну та диференціювання.

Зауважимо також, що простори $S_{a_k}^{b_n}$ є досконалими (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні). Звідси та із загальної теорії досконалих просторів випливає, що операція зсуву аргумента є диференційовною (навіть нескінченно диференційовною) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x + h) - \varphi(x))h^{-1} \rightarrow \varphi'(x)$, $h \rightarrow 0$, справджуються для кожної функції $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ у сенсі збіжності за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$.

У просторі $S_{a_k}^{b_n}$ визначений, є лінійним і неперервним оператор множення на незалежну змінну і відображає цей простір у себе.

Зауважимо також, що $\varphi \cdot \psi \in S_{a_k}^{b_n}$ для довільних $\{\varphi, \psi\} \subset S_{a_k}^{b_n}$.

Функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ називається *мультиплікатором* у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, якщо $g \cdot \varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ для довільної функції $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ і відображення $\varphi \rightarrow g\varphi$ є лінійним і неперервним, що діє з $S_{a_k}^{b_n}$ в $S_{a_k}^{b_n}$.

Лема 1.3. *Мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^{b_n}$ є кожна функція $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка задовольняє умову*

$$\exists B_0 > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R}: |f^{(n)}(x)| \leq c_\varepsilon B_0^n b_n (\tilde{\gamma}(\varepsilon x))^{-1}. \quad (1.5)$$

Якщо послідовності $\{a_k\}, \{b_n\}$ задовольняють умову

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \geq c_a k^{1-\mu}, \frac{b_n}{b_{n-1}} \geq c_b n^{1-\lambda}, \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu \leq 1, \{k, n\} \subset \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} \leq c_0 A_0^k,$$

то правильною є формула $F[S_{a_k}^{b_n}] = S_{b_k}^{a_n}$, де $F[S_{a_k}^{b_n}] := \{\psi: \psi(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma, \forall \varphi \in S_{a_k}^{b_n}\}$, зокрема, $F[S_{k^{k\alpha}}^{n^\beta}] \equiv F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha \equiv S_{k^{k\beta}}^{n^\alpha}$.

Оператор $F: S_{a_k}^{b_n} \rightarrow S_{b_k}^{a_n}$ є неперервним.

Якщо послідовність $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, за допомогою якої будується простір $S_{a_k}^{b_n}$, “повільно зростає”, то такий простір може складатися із нескінченно диференційовних на \mathbb{R} функцій, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняють певну умову.

Теорема 1.1. *Нехай існує $L \in [0, +\infty)$ таке, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{b_n}}{n} = L$. Правильними є твердження:*

1. *Якщо $L \in (0, +\infty)$, то кожна функція $\varphi(x)$ з простору $S_{a_k}^{b_n}$ допускає аналітичне продовження в деяку смугу $|\text{Im}z| = |\text{Im}(x + iy)| = |y| < c_0$, $c_0 = c_0(\varphi)$ комплексної площини.*

2. *Якщо $L = 0$, то кожна функція $\varphi(x)$ з простору $S_{a_k}^{b_n}$ аналітично продовжується у всю комплексну площину до цілої функції $\varphi(x + iy)$, яка задовольняє нерівність*

$$|\varphi(x + iy)| \leq c\tilde{\gamma}(ax)\tilde{\rho}(by), \quad \forall \{x, y\} \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

де $c, a, b > 0$ – деякі сталі (залежні від φ), $\tilde{\gamma}(x) =$

$$\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{a_k}{|x|^k}, & |x| > 1, \end{cases} \quad \tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 1, \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{|y|^n}{\hat{b}_n}, & |y| > 1, \end{cases} \quad \hat{b}_n = \frac{n!}{b_n}.$$

3. У випадку, коли існує $\omega \in (1, +\infty)$ таке, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{b_n}}{n^\omega} = +\infty$, серед елементів простору $S_{a_k}^{b_n}$ є фінітні нескінченно диференційовні функції.

Як приклад застосування теореми 1.1 розглянемо простір $S_\alpha^\beta \equiv S_k^{n^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \geq 1 - \beta$ (умова нетривіальності простору S_α^β). У цьому випадку $b_n = n^{n^\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

$$\text{Якщо } \beta \in (0, 1), \text{ то } \tilde{\rho}_1(y) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{|y|^n}{\hat{b}_n} = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{|y|^n e^n}{n^{n(1-\beta)}} = \frac{1}{\inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{n^{n(1-\beta)}}{|ey|^n}}, \quad y \neq 0.$$

Із оцінок (1.1) випливають нерівності

$$\tilde{\rho}(y) \leq \exp \left\{ b|y|^{\frac{1}{1-\beta}} \right\}, \quad b > 0, \quad \tilde{\gamma}(x) \leq c \exp \left\{ -a|x|^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad c > 1, \quad a > 0.$$

Отже, звідси та з твердження 2 теореми 1.1 випливає, що кожна функція $\varphi \in S_\alpha^\beta$, $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $\alpha \geq 1 - \beta$, аналітично продовжується у всю комплексну площину і задовольняє нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp \left\{ -a|x|^{\frac{1}{\alpha}} + b|y|^{\frac{1}{1-\beta}} \right\},$$

де $c, a, b > 0$ – деякі сталі, залежні від функції φ (отримали відомий результат, встановлений І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим).

Якщо $\beta = 1$, то $b_n = n^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{b_n}}{n} = 1$. У цьому випадку кожна функція $\varphi \in S_\alpha^1$ аналітично продовжується в деяку смугу комплексної площини, ширина якої залежить від функції φ .

Якщо $\beta > 1$, то для довільного фіксованого $\omega \in (1, \beta)$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{b_n}}{n^\omega} = +\infty$. Отже, простір S_α^β , $\alpha > 0$, $\beta > 1$, містить фінітні нескінченно диференційовні

на \mathbb{R} функції (цей же результат у випадку простору S_α^β при $\beta > 1$ безпосередньо випливає з теореми Карлемана–Островського).

Простори типу W . До просторів типу W відносяться простори W_M^Ω , введені Б.Л. Гуревичем. Ці простори будуються за допомогою функцій M та G , які мають вигляд:

$$M(x) = \int_0^x \mu(\xi) d\xi, \quad \Omega(x) = \int_0^x \omega(\xi) d\xi, \quad x \geq 0,$$

$$M(-x) = M(x), \quad \Omega(-x) = \Omega(x).$$

Тут $\mu, \omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неперервні, монотонно зростаючі на $[0, \infty)$ функції такі, що $\mu(0) = \omega(0) = 0$, $\mu(1) = \omega(1) = 1$. Функція M опукла (донизу) на $[0, \infty)$, тобто

$$M(x_1) + M(x_2) \leq M(x_1 + x_2), \quad \{x_1, x_2\} \subset (0, \infty),$$

$$nM(x) \leq M(nx), \quad x \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Крім того, функція M володіє властивостями:

- а) $\forall t \in (0, 1) \forall x \in [0, +\infty): tM(x) \geq M(tx)$;
- б) $\forall t \geq 1 \forall x \in [0, +\infty): tM(x) \leq M(tx)$.

Ці властивості випливають з рівності

$$M(tx) = t \int_0^x \mu(t\xi) d\xi, \quad x \geq 0,$$

та властивості монотонного зростання функції μ на $[0, +\infty)$.

Аналогічними властивостями володіє функція Ω .

W_M^Ω визначається як сукупність цілих функцій $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких

$$\exists c, a, b > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\} \quad (1.8)$$

(сталі c, a, b залежать від функції φ).

$W_M^{\Omega, b}$ можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $W_{M, a}^{\Omega, b}$, де $W_{M, a}^{\Omega, b}$ складається з тих функцій $\varphi \in W_M^\Omega$, для яких правильними є нерівності

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-M(\bar{a}x) + \Omega(\bar{b}y)\}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де \bar{a} – довільна додатна стала, менша за a , \bar{b} – довільна стала, більша за b .

Ящо для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z \in \mathbb{C}} [|\varphi(z)| \exp\{-\Omega((b+\rho)y) + M(a(1-\delta)x)\}],$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \{1/n, n \geq 2\},$$

то з цими нормами простір $W_{M,a}^{\Omega,b}$ стає повним досконалим зліченно нормованим простором.

Розглянемо послідовності

$$\tilde{a}_k := (ev_k)^k e^{-M(v_k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \tilde{b}_n := n! \left(\frac{e}{\rho_n}\right)^n e^{\Omega(\rho_n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

і введемо, для зручності, позначення

$$W_M^\Omega(\mathbb{R}) := \{\varphi \in W_M^\Omega : D(\varphi) = \mathbb{R}\}.$$

Тоді $S_{\tilde{a}_k}^{\tilde{b}_n} = W_M^\Omega(\mathbb{R})$, тобто простори W_M^Ω є частковим випадком просторів $S_{a_k}^{b_n}$ і характеризуються зазначеним вище способом у термінах поведінки похідних функцій з цих просторів на дійсній осі.

1.1.2. Псевдодиференціальні оператори в узагальнених просторах типу S

Розглянемо функцію

$$\tilde{\rho}(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| \leq 1, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|\sigma|^k}{a_k}, & |\sigma| > 1. \end{cases}$$

Очевидно, що $\tilde{\rho}$ – невід’ємна, парна на \mathbb{R} функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, $\rho(\sigma) \geq 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Оскільки

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|\sigma|^k}{a_k} = \frac{1}{\inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{a_k}{|\sigma|^k}}, \quad \sigma \neq 0,$$

то $\tilde{\rho}$ збігається з функцією $\frac{1}{\gamma}$ для $\sigma \neq 0$, розглянутою в п. 1.1.1.

Якщо, наприклад, $a_k = k^{k\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$, то функція $\tilde{\rho}$, побудована за цією послідовністю, задовольняє нерівності

$$c_0 e^{\frac{\alpha}{e}|\sigma|^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \tilde{\rho}(\sigma) \leq e^{\frac{\alpha}{e}|\sigma|^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad c_0 = e^{-\frac{\alpha e}{2}}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

З нерівності (1.2), яку задовольняє функція $\ln \gamma$ (див. лему 1.1), дістаємо таку нерівність опуклості для функції $\ln \tilde{\rho}$:

$$\ln \tilde{\rho}(\sigma_1) + \ln \tilde{\rho}(\sigma_2) \leq \ln \tilde{\rho}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \forall \{\sigma_1, \sigma_2\} \subset (0, +\infty). \quad (1.9)$$

Нехай φ – нескінченно диференційовна на \mathbb{R} функція, яка володіє властивостями:

- 1) $\varphi(\sigma) > \Omega(\sigma) \geq \ln \tilde{\rho}(\sigma), \sigma \in \mathbb{R}$;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall \sigma \in \mathbb{R}: \varphi(\sigma) \leq c_\varepsilon \tilde{\rho}(\varepsilon \sigma)$;
- 3) $\exists c_0, B_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall \sigma \in \mathbb{R}: |\varphi^{(n)}(\sigma)| \leq c_0 B_0^n n!$.

Тут $\Omega(\sigma) = \int_0^\sigma \omega(\xi) d\xi, \sigma \geq 0, \Omega(\sigma) = \Omega(-\sigma),$ де $\omega(\xi), 0 \leq \xi < +\infty,$ монотонно зростаюча неперервна функція така, що $\omega(0) = 0, \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \omega(\xi) = +\infty.$

Ω – неперервно диференційовна, парна на \mathbb{R} і монотонно зростаюча на $[0, +\infty)$ функція, яка володіє властивостями:

- а) $\forall \alpha \in (0, 1) \forall \sigma \in [0, +\infty): \Omega(\alpha \sigma) \leq \alpha \Omega(\sigma)$;
- б) $\forall \alpha \geq 1 \forall \sigma \in [0, +\infty): \Omega(\alpha \sigma) \geq \alpha \Omega(\sigma).$

Зауважимо тепер, що з властивостей 2), 3) функції φ випливає, що вона є мультиплікатором у просторі $S_{\alpha_k}^1 \equiv S_{\alpha_k}^{n_n}$. Звідси випливає, що в просторі $S_1^{a_n} \equiv S_{k^k}^{a_n}$ визначений, є лінійним і неперервним псевдодиференціальний оператор A , побудований за функцією-символом φ :

$$A\psi = F^{-1}[\varphi(\lambda)F[\psi]], \quad \forall \psi \in S_1^{a_n}.$$

Якщо розглянути самоспряжений у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$ оператор $\frac{i \partial}{\partial x}$ з областю визначення

$$D\left(\frac{i \partial}{\partial x}\right) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}): \exists \psi' \in L_2(\mathbb{R})\},$$

то, як випливає з основної спектральної теореми для самоспряжених операторів,

$$\varphi\left(\frac{i \partial}{\partial x}\right)\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) dE_\lambda \psi,$$

де $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R},$ – спектральна функція оператора $\frac{i \partial}{\partial x}$. Відомо, що

$$E_\lambda \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right\} e^{-ix\sigma} d\sigma \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} F[\psi](\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma.$$

Звідси дістаємо співвідношення

$$dE_\lambda \psi = \frac{1}{2\pi} F[\psi](\lambda) e^{-ix\lambda} d\lambda.$$

Отже, $\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right)\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) F[\psi](\lambda) e^{-ix\lambda} d\lambda = F^{-1}[\varphi(\lambda)F[\psi]]$, $\forall \psi \in S_1^{a_n}$.

Звуження оператора $\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right)$ на простір $S_1^{a_n}$ збігається з псевдодиференціальним оператором A у просторі $S_1^{a_n}$, побудованим за функцією (символом) φ , яка є мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^1$.

Як приклад, розглянемо функцію $\varphi_p(\sigma) := \left(1 + \sum_{k=1}^p \sigma^{2k}\right)^{\frac{1}{2p}}$, $\sigma \in \mathbb{R}$,

де $p \in \mathbb{N}$ – фіксоване. Безпосередньо переконаємося в тому, що функція φ_p володіє властивостями:

1) $\varphi_p \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi_p(\sigma) > |\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall \sigma \in \mathbb{R}: \varphi_p(\sigma) \leq c_\varepsilon \exp\{\varepsilon|\sigma|\}$, $c_\varepsilon = (p+1)^{\frac{1}{2p}} \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}\right\}$;

3) $|D_\sigma^n \varphi_p(\sigma)| \leq c_0 B_0^n n!$, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, де $c_0 = c_0(p) > 0$, $B_0 = B_0(p) > 0$ – деякі сталі.

Звідси випливає, що φ_p – мультиплікатор у просторі $S_1^1 \equiv S_{k^k}^n$. Відповідно, звуження оператора

$$\varphi_p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(I + \sum_{k=1}^p \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2k}\right)^{\frac{1}{2p}} = \left(I + \sum_{k=1}^p (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}\right)^{\frac{1}{2p}}$$

на простір S_1^1 збігається з псевдодиференціальним оператором $F^{-1}[\varphi_p(\lambda)F]$.

Зауважимо, що

$$\varphi_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_2\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Оператор $\varphi_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ часто використовується у теорії дробового інтегродиференціювання. Цей оператор прийнято називати оператором Бесселя дробового диференціювання порядку $\frac{1}{2}$.

1.1.3. Простори узагальнених функцій типу S'

Символом $(S_{a_k}^{b_n})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на основному просторі $S_{a_k}^{b_n}$ зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основну функцію $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ задаємо формулою $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$.

Кожна локально інтегровна на \mathbb{R} функція f , яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |f(x)| \leq c_\varepsilon (\tilde{\gamma}(\varepsilon x))^{-1} \quad (1.10)$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (S_{a_k}^{b_n})'$:

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in S_{a_k}^{b_n}.$$

Правильним є твердження: якщо локально інтегровні на \mathbb{R} функції f і g , які задовольняють умову (1.10), не збігаються на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in S_{a_k}^{b_n}$ така, що $\langle f, \varphi_0 \rangle \neq \langle g, \varphi_0 \rangle$, тобто $F_f \neq F_g$. Навпаки, якщо $F_f = F_g$, то функції f і g не збігаються на множині додатної міри Лебега.

Сформульоване твердження дозволяє ототожнювати локально інтегровні на \mathbb{R} функції, які задовольняють умову (1.10), з породжуваними ними узагальненими функціями з простору $(S_{a_k}^{b_n})'$. З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення $S_{a_k}^{b_n} \ni f \rightarrow F_f \in (S_{a_k}^{b_n})'$ є неперервним.

Оскільки в основному просторі $S_{a_k}^{b_n}$ визначена операція зсуву аргумента T_x , то згортку узагальненої функції $f \in (S_{a_k}^{b_n})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) \rangle = \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$$

(тут $\langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) \rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію $T_{-x}\check{\varphi}(\xi)$ як функцію аргумента ξ). Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента у просторі $S_{a_k}^{b_n}$ випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на \mathbb{R} функцією.

Нехай $f \in (S_{a_k}^{b_n})'$. Якщо $f * \varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, $\forall \varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ і із співвідношення $\varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$ випливає, що $f * \varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$, то функціонал f називається *згортувачем у просторі* $S_{a_k}^{b_n}$.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_{a_k}^{b_n})'$ означимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in S_{b_k}^{a_n}.$$

Звідси випливає, що $F[f] \in (S_{b_k}^{a_n})'$, якщо $f \in (S_{a_k}^{b_n})'$, при цьому оператор $F: (S_{a_k}^{b_n})' \rightarrow (S_{b_k}^{a_n})'$ є неперервним.

Теорема 1.2. *Якщо узагальнена функція $f \in (S_{a_k}^{b_n})'$ – згортувач у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, то для довільної функції $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$.*

З теореми 1.2 випливає, що якщо узагальнена функція f – згортувач у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, то її перетворення Фур'є – мультиплікатор у просторі $S_{b_k}^{a_n}$.

1.1.4. Нелокальна за часом задача для рівнянь з частинними похідними параболічного типу

Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Bu(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1.11)$$

де $B = \varphi \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) |_{S_1^{a_n}}$ – звуження оператора $\varphi \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ на простір $S_1^{a_n}$. B – псевдодиференціальний оператор у просторі $S_1^{a_n}$, побудований за функцією φ , яка володіє властивостями 1)–3), сформульованими у п. 1.1.2.

Під розв'язком рівняння (1.11) розуміємо неперервно диференційовну за змінною t функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, таку, що $u(\cdot, x) \in S_1^{a_n}$ при кожному $t > 0$ задовольняє рівняння (1.11).

Для рівняння (1.11) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (1.11), який задовольняє умову

$$\mu u(0, x) - \mu_1 u(t_1, x) - \dots - \mu_m u(t_m, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, f \in S_1^{a_n}, \quad (1.12)$$

де $u(0, x) = \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x)$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, +\infty)$ – фіксовані числа, причому $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$.

Розв'язок задачі (1.11), (1.12) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t, x) = F^{-1}[v(t, \cdot)]$. Для функції $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ :

$$\frac{dv(t, \sigma)}{dt} + \varphi(\sigma)v(t, \sigma) = 0, \quad (t, \sigma) \in \Omega, \quad (1.13)$$

$$\mu v(0, \sigma) - \sum_{k=1}^m \mu_k v(t_k, \sigma) = \tilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (1.13) має вигляд

$$v(t, \sigma) = c \exp\{t\varphi(\sigma)\}, \quad (t, \sigma) \in \Omega, \quad (1.15)$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (1.14). Підставляючи (1.15) в (1.14), знайдемо, що

$$c = \tilde{f}(\sigma) \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k \varphi(\sigma)\} \right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Введемо позначення: $G(t, x) = F^{-1}[v(t, \sigma)]$, $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t, \sigma) = \exp\{-t\varphi(\sigma)\}, \quad Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \sigma) \right)^{-1}.$$

Далі, міркуючи формально, прийдемо до співвідношення

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x).$$

Справді,

$$u(t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi \right) e^{-i\sigma x} d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right) f(\xi) d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x), \quad (t, x) \in \Omega.
\end{aligned}$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів впливає з властивостей функції G , які ми наведемо нижче. Властивості функції G визначаються властивостями функції Q , оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t, \sigma)$ як функції змінної σ .

Лема 1.4. Для похідних функції $Q_1(t, \sigma)$, $(t, \sigma) \in \Omega$ (за змінною σ), правильними є оцінки

$$|D_{\sigma}^n Q_1(t, \sigma)| \leq c A^n t^{\omega n} n^n \exp\{-t\varphi(\sigma)\}, \quad (t, \sigma) \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.16)$$

де $\omega = 0$, якщо $0 < t \leq 1$ і $\omega = 1$, якщо $t > 1$, сталі $c > 1$, $A > 0$ не залежать від t .

Зауваження 1.1. Із лем 1.4 випливає, що $Q_1(t, \cdot) \in S_{a_k}^1$ при кожному $t > 0$.

Лема 1.5. Функція Q_2 – мультиплікатор у просторі $S_{a_k}^1$.

Урахувавши (1.15) лему 1.5 та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, отримаємо

$$\begin{aligned}
|D_{\sigma}^n Q(t, \sigma)| &= \left| \sum_{l=0}^n C_n^l D_{\sigma}^l Q_1(t, \sigma) D_{\sigma}^{n-l} Q_2(\sigma) \right| \leq \\
&\leq c \tilde{c} \sum_{l=0}^n C_n^l A^l t^{l\omega} l^l A_1^{n-l} (n-l)^{n-l} \exp\{-t\varphi(\sigma)\} \leq \tilde{b} \tilde{B}^n t^{\omega n} n^n \exp\{-t\varphi(\sigma)\},
\end{aligned}$$

де $\tilde{b} = c\tilde{c}$, $\tilde{B} = 2\max\{A, A_1\}$. З останньої нерівності, з урахуванням зауваження 1.1, дістаємо, що $Q(t, \sigma)$ як функція σ є елементом простору $S_{a_k}^1$ (при кожному $t > 0$). Оскільки $G = F^{-1}[Q]$, то функція $G(t, \cdot)$ є елементом простору $S_1^{a_n}$ при кожному $t > 0$.

Лема 1.6. Функція $G(t, \cdot)$, $t \in (0, +\infty)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_1^{a_n}$, диференційовна по t .

Наслідок 1.1. Правильною є формула $\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t}$, $\forall f \in (S_1^{a_n})'$, $t > 0$.

Лема 1.7. У просторі $(S_1^{a_n})'$ виконуються граничні співвідношення:

1. $G(t, \cdot) \rightarrow F^{-1}[Q_2]$, $t \rightarrow +0$.
2. $\mu G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow +0} \delta$ (тут δ – дельта-функція Дірака). (1.17)

Зауваження 1.2. Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, то задача (1.11), (1.12) перетворюється в задачу Коші для рівняння (1.11). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $G(t, x) = F^{-1}[e^{-t\varphi(\sigma)}]$ і $G(t, \cdot) \rightarrow F^{-1}[1] = \delta$, $t \rightarrow +0$, у просторі $(S_1^{a_n})'$.

Теорема 1.3. Нехай $\omega(t, x) = f * G(t, x)$, $f \in (S_{1,*}^{a_n})'$, $(t, x) \in \Omega$ (тут $(S_{1,*}^{a_n})'$ – клас згортувачів у просторі $S_1^{a_n}$). Тоді у просторі $(S_1^{a_n})'$ виконується граничне співвідношення $\mu \omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \omega(t_k, \cdot) \rightarrow f$, $t \rightarrow +0$. (1.18)

Функція $G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (1.11). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t, \sigma)] = F^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma) \right] = -F^{-1}[\varphi(\sigma)Q(t, \sigma)],$$

$$BG \equiv \varphi \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) G(t, x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)F^{-1}[G(t, \cdot)]] = F^{-1}[\varphi(\sigma)Q(t, \sigma)].$$

Отже, $\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} + Bu(t, x) = 0$, $(t, x) \in \Omega$, що й потрібно було довести.

З теореми 1.3 випливає, що нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (1.11) можна ставити так: знайти функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, яка задовольняє рівняння (1.11) і умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k u(t_k, \cdot) = f, \quad f \in (S_{1,*}^{a_n})' \quad (1.19)$$

(граничне співвідношення (1.19) розглядається в просторі $(S_1^{a_n})'$, обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m, t_1, \dots, t_m$ такі ж, як у випадку задачі (1.11), (1.12)).

Теорема 1.4. Нелокальна багатоточкова за часом задача (1.11), (1.19) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою $u(t, x) = f * G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, $u(t, \cdot) \in S_1^{a_n}$ при кожному $t > 0$.

Розглянемо тепер диференціально-операторне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \hat{B}_p u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1.20)$$

де \hat{B}_p – звуження оператора $B_n = \left(I + \sum_{k=1}^p (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \right)^{\frac{1}{2p}}$ на простір S_1^β , $p \in \mathbb{N}$ – фіксоване, $\beta \geq 1$. Цей оператор на S_1^β збігається із псевдодиференціальним оператором $F^{-1}[\varphi_p(\sigma)F]$, побудованим за функцією-символом $\varphi_p(\sigma) = \left(1 + \sum_{k=1}^p \sigma^{2k} \right)^{\frac{1}{2p}}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, яка володіє властивостями 1)–3) (див. п. 1.1.2) і є мультиплікатором у просторі S_1^β , $\beta \geq 1$.

Під розв’язком рівняння (1.20) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка неперервно диференційовна по t при кожному $x \in \mathbb{R}$, $u(\cdot, x) \in S_1^\beta$ при кожному $t > 0$ і задовольняє рівняння (1.20).

Для рівняння (1.20) поставимо задачу: знайти розв’язок рівняння (1.20), який задовольняє умову:

$$\mu u(0,x) - \mu_1 B_1 u(t_1,x) - \dots - \mu_m B_m u(t_m,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.21)$$

де $f \in S_1^1$, $u(0,x) := \lim_{t \rightarrow +0} u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, \infty)$ – фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, B_1, \dots, B_m – псевдодиференціальні оператори в просторі S_1^1 , побудовані за функціями-символами $g_k: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ відповідно: $B_k = F^{-1}[g_k(\sigma)F]$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Функції g_k , $k \in \{1, \dots, m\}$, задовольняють умови: $g_k \in C^\infty(\mathbb{R})$;

$$\forall \varepsilon_k > 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}: g_k(\sigma) \leq \exp\{\varepsilon_k |\sigma|\}; \quad \exists L_k > 0 \quad \forall s \in \mathbb{N}: |D_\sigma^s g_k(\sigma)| \leq L_k^s s^s.$$

Зауважимо, що з наведених властивостей функції g_k випливає, що g_k , $k \in \{1, \dots, m\}$, – мультиплікатор у просторі S_1^1 та S_1^β , де $\beta \geq 1$.

Розв’язок задачі (1.20), (1.21) шукаємо за допомогою перетворення Фур’є. У результаті одержимо, що

$$u(t,x) = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

$$\text{де } G(t,\cdot) = F^{-1}[Q(t,\cdot)], \quad Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma),$$

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{-t\varphi_p(\sigma)\}, \quad Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k, \sigma) \right)^{-1}.$$

Для похідних функції $Q_1(t, \sigma)$ (за змінною σ) правильними є оцінки

$$|D_\sigma^s Q_1(t, \sigma)| \leq c A^s t^{\omega s} s^s \exp\{-t|\sigma|\}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (1.22)$$

де $\omega = 0$, якщо $0 < t \leq 1$ і $\omega = 1$, якщо $t > 1$, сталі $c > 1$, $A > 0$ не залежать від t (доведення цієї властивості аналогічне доведенню леми 1.4, див. також властивості функції $\varphi_p(\sigma)$ п. 1.1.1.5).

Лема 1.8. Функція Q_2 – мультиплікатор у просторі S_1^2 .

Зауважимо тепер, що з (1.22) випливає властивість: $Q_1(t, \cdot) \in S_1^1$ при кожному $t > 0$.

Наслідок 1.2. При кожному $t > 0$ функція $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, є елементом простору S_1^2 , при цьому справджуються оцінки

$$|D_\sigma^s Q(t, \sigma)| \leq \tilde{c} \tilde{A}^s t^{\omega s} s^{2s} \exp\{-t|\sigma|\}, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad (t, \sigma) \in \Omega, \quad (1.23)$$

де сталі $\tilde{c}, \tilde{A} > 0$ не залежать від t .

З (1.23) випливає, що $Q(t, \cdot) \in S_1^2$ при кожному $t > 0$.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та формулу $F^{-1}[S_1^2] = S_2^1$ дістаємо, що $G(t, \cdot) \in S_2^1$ при кожному $t > 0$.

Правильним є твердження.

Лема 1.9. Похідні функції $G(t, x)$ (за змінною x) при $t > 1$ задовольняють нерівності

$$|D_x^s G(t, x)| \leq c_3 \bar{B}^s s^s t^{-1} \exp\left\{-a_0 t^{-\frac{1}{2}} |x|^{\frac{1}{2}}\right\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.24)$$

сталі $c_3, \bar{B}, a_0 > 0$ не залежать від t .

Наведемо ще деякі властивості функції $G(t, x)$:

1) функція $G(t, x)$, $t(0, +\infty)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі S_2^1 , диференційовна по t ;

2) правильною є формула $\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t}$, $\forall f \in (S_2^1)'$, $t > 0$;

3) у просторі $(S_2^1)'$ виконується співвідношення $G(t, \cdot) \rightarrow F^{-1}[Q_2]$, $t \rightarrow +0$.

Лема 1.10. У просторі $(S_2^1)'$ виконується співвідношення

$$\mu G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k G(t_k, \cdot) \rightarrow \delta, \quad t \rightarrow 0, \quad (\delta - \text{дельта-функція Дірака}). \quad (1.25)$$

Наслідок 1.3. Нехай $\omega(t, x) = f * G(t, x)$, $f \in (S_{2,*}^1)'$, $(t, x) \in \Omega$ (тут $(S_{2,*}^1)'$ – клас згортувачів у просторі S_2^1). Тоді у просторі виконується граничне співвідношення $\mu \lim_{t \rightarrow +0} \omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k \omega(t_k, \cdot) \rightarrow f$, $t \rightarrow +0$.

З наслідку 1.3 випливає, що нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (1.20) можна ставити так: знайти функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, яка задовольняє рівняння (1.20) і умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k u(t_k, \cdot) = f, \quad f \in (S_{2,*}^1)' \quad (1.26)$$

(граничне співвідношення розглядається в просторі $(S_2^1)'$).

Теорема 1.5. Задача (1.20), (1.26) є розв'язною, розв'язок дається формулою $u(t, x) = f * G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, $u(t, \cdot) \in S_2^1$ при кожному $t > 0$.

Теорема 1.6. Нехай $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, розв'язок задачі (1.20), (1.26). Тоді $u(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ у просторі $(S_2^1)'$.

Якщо узагальнена функція f в умові (1.26) є фінітною (тобто носій $f(\text{supp} f)$ – обмежена множина в \mathbb{R}), то можна говорити про рівномірне прямування до нуля на \mathbb{R} розв'язку $u(t, x)$ задачі (1.20), (1.26). Зауважимо, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторах типу S . Ця властивість випливає із загального результату, який стосується теорії досконалих просторів, отриманого І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим: якщо Φ – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ . Фінітні функціонали утворюють досить широкий клас. Зокрема, кожна обмежена замкнена множина $F \subset \mathbb{R}$ є носієм деякої фінітної функції [1.8].

Теорема 1.7. Нехай $u(t, x)$ – розв'язок задачі (1.20), (1.26) з початковою функцією f в умові (1.26), яка є елементом простору $(S_2^\beta)'$ $\subset (S_2^1)'$, $\beta > 1$ і $\text{supp} f$ – обмежена множина в \mathbb{R} . Тоді $u(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ рівномірно на \mathbb{R} .

Наведемо схему доведення сформульованого твердження. Нехай $\text{supp} f \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\varphi \in S_2^\beta$, $\beta > 1$, таку, що $\varphi(x) = 1$,

$x \in [a_1, b_1]$, $\text{supp} \varphi \subset [a_2, b_2]$. Така функція існує, оскільки простір S_2^β при $\beta > 1$ містить фінітні функції (див. п. 1.1..13). Подамо функцію $u(t, x)$ у вигляді

$u(t, x) = \langle f_\xi, \varphi(\xi)G(t, x - \xi) \rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi)G(t, x - \xi) \rangle$, де $\gamma = 1 - \varphi$. Оскільки $\text{supp}(\gamma(\xi)G(t, x - \xi)) \cap \text{supp} f = \emptyset$, то $u(t, x) = t^{-1} \langle f_\xi, t\varphi(\xi)G(t, x - \xi) \rangle$.

Для доведення сформульованого твердження залишається встановити, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t\varphi(\xi)G(t, x - \xi)$ обмежена в просторі S_2^β , $\beta > 1$, при великих значеннях t і $x \in \mathbb{R}$.

Наприклад, якщо в умові (1.26) $f = \delta$, то δ – згортувач у просторі S_2^1 , $\text{supp} \delta = \{0\}$, при цьому $u(t, x) = \delta * G(t, x) = G(t, x)$. З оцінок (1.24) безпосередньо випливає, що $G(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ рівномірно на \mathbb{R} .

1.1.5. Еволюційні рівняння нескінченного порядку у просторах типу S

Розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\rho_0 = 1$, додатних чисел, яка володіє властивостями а)–в), сформульованими у п. 1.1.1. Крім того, вважаємо, що послідовність $\{\rho_n\}$ додатково задовольняє умови:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\rho_n} = +\infty, \exists c_0 > 0 \exists 0 < \gamma_0 < \gamma < 1 \forall n \in \mathbb{N}: \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \geq c_0 n^{\gamma_0}$$

(тут $\gamma \in (0, 1)$ – стала з умови б), яку задовольняє послідовність $\{\rho_n\}$). За послідовністю $\{\rho_n\}$ побудуємо простір $S_{\rho_k}^{n! \rho_n}$. Оскільки, внаслідок властивості а)

послідовності $\{\rho_n\}$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[n]{\rho_n}}{n} = 0$, то, згідно з теоремою 1.1, кожна функція

φ з простору $S_{\rho_k}^{n! \rho_n}$ аналітично продовжується в комплексну площину і задовольняє умову $\exists c, a, b > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |\varphi(x + iy)| \leq c \tilde{\gamma}(ax) \tilde{\rho}(by)$,

$$\text{де } \tilde{\gamma}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\rho_k^{-1}}{|x|^k}, & |x| > 1, \end{cases} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{|x|^k \rho_k}, & |x| > 1, \end{cases}$$

$$\tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 1, \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{|y|^n}{\hat{b}_n}, & |y| > 1, \end{cases} \hat{b}_n = \frac{n!}{n! \rho_n} = \frac{1}{\rho_n}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

$$\text{Отже, } \tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 1, \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (|y|^n \rho_n), & |y| > 1. \end{cases}$$

Оскільки $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (|y|^n \rho_n) = \frac{1}{\inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{|y|^n \rho_n}}$, $y \neq 0$, то звідси дістаємо, що $\tilde{\rho} = \frac{1}{\tilde{\gamma}}$ або $\tilde{\gamma} = \frac{1}{\tilde{\rho}}$.

Зауважимо також, що при вказаних обмеженнях на послідовність $\{\rho_n\}$ правильною є формула $F \left[S_{k! \rho_k}^{\rho_n^{-1}} \right] = S_{\rho_k^{-1}}^{n! \rho_n}$ при цьому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{\rho_n^{-1}}}{n} = 0$, тобто кожна функція з простору $S_{k! \rho_k}^{\rho_n^{-1}}$ також аналітично продовжується у всю комплексну площину.

Наприклад, якщо $\rho_n = n^{n(\alpha-1)}$, $\alpha \in (0,1)$ – фіксоване, то ця послідовність володіє сформульованими властивостями, при цьому

$$n! \rho_n \sim n^{n\alpha}, \quad \rho_k^{-1} = k^{k(1-\alpha)}, \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, для цієї послідовності $S_{\rho_k^{-1}}^{n! \rho_n} = S_{k^{k(1-\alpha)}}^{n^{n\alpha}} \equiv S_{1-\alpha}^\alpha$.

Із властивостей послідовності $\{\rho_n\}$ випливає, що функція $\tilde{\rho}$ – диференційовна на \mathbb{R} і задовольняє нерівність

$$\rho(y) \geq c_1 e^{c_2 |y|}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus [-1,1],$$

з деякими сталими $c_1, c_2 > 0$; для функції $\ln \tilde{\rho}$ виконується нерівність опуклості

$$\ln \tilde{\rho}(y_1) + \ln \tilde{\rho}(y_2) \leq \ln \tilde{\rho}(y_1 + y_2), \quad \{y_1, y_2\} \subset (0, +\infty).$$

Функція $\ln \tilde{\gamma}$ задовольняє нерівність (див. п. 1.1.1.1):

$$\ln \tilde{\gamma}(x_1) + \ln \tilde{\gamma}(x_2) \geq \ln \tilde{\gamma}(x_1 + x_2), \quad \{x_1, x_2\} \subset (0, +\infty).$$

Мультиплікатором у просторі $S_{\rho_k^{-1}}^{n! \rho_n}$ є кожна ціла функція g , яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |g(z)| \leq c_\varepsilon (\tilde{\gamma}(\varepsilon x))^{-1} \tilde{\rho}(\varepsilon y) \equiv c_\varepsilon \rho(\varepsilon x) \rho(\varepsilon y).$$

Із властивостей перетворення Фур'є випливає, що в просторі $S_{k! \rho_k}^{\rho_n^{-1}}$ визначений i є неперервним оператор

$$A_g \varphi = F^{-1} [g(\sigma) F[\varphi]], \quad \forall \varphi \in S_{k! \rho_k}^{\rho_n^{-1}},$$

побудований за функцією (символом) g , яка є мультиплікатором у просторі $S_{\rho_k}^{n|\rho_n}$. Оператор A_g відображає простір $S_{k|\rho_k}^{\rho_n^{-1}}$ в себе. Оператор A_g можна розуміти як оператор диференціювання "нескінченного порядку", якщо покласти за означенням

$$A_g \equiv g\left(i\frac{d}{dx}\right) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(i\frac{d}{dx}\right)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

при цьому ряд

$$\psi(x) \equiv \left(g\left(i\frac{d}{dx}\right)\varphi\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(i\frac{d}{dx}\right)^n \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

повинен зображати деяку основну функцію з простору $S_{k|\rho_k}^{\rho_n^{-1}}$.

Теорема 1.8. Якщо ціла функція g – мультиплікатор у просторі $S_{\rho_k}^{n|\rho_n}$, то в просторі $S_{k|\rho_k}^{\rho_n^{-1}}$ визначений і є неперервним оператор A_g , при цьому

$$(A_g\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{-1} [g(\sigma)F[\varphi](\sigma)], \quad \{x, \sigma\} \subset \mathbb{R}, \quad \varphi \in S_{k|\rho_k}^{\rho_n^{-1}}. \quad (1.27)$$

Зауваження 1.3. Аналогічне твердження є правильним і у випадку, коли оператор $A_{\tilde{g}}$ побудовано за функцією (символом) \tilde{g} , яка є мультиплікатором у просторі $S_{k|\rho_k}^{\rho_n^{-1}}$. При цьому оператор $A_{\tilde{g}} = F^{-1}[\tilde{g}F]$ – неперервний оператор у просторі $S_{\rho_k}^{n|\rho_n}$, який можна розуміти як оператор диференціювання нескінченного порядку у цьому просторі.

Зауваження 1.4. Надалі вважаємо, що послідовність $\{\rho_n\}$ додатково задовольняє умову: $\rho_n \geq \frac{1}{n^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$. При виконанні цієї умови функція \tilde{g} є мультиплікатором і у просторі $S_{k|\rho_k}^2 \equiv S_{k|\rho_k}^{n/2}$, оскільки тоді $S_{k|\rho_k}^{\rho_n^{-1}} \subset S_{k|\rho_k}^2$, а оператор $A_{\tilde{g}} := B$ – неперервний оператор у просторі $S_2^{n|\rho_n}$.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Bu(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1.28)$$

де B – псевдодиференціальний оператор, побудований за функцією \tilde{g} (див. зауваження 1.4.). Символом $P_{k!\rho_k}^{\rho_n^{-1}}$ позначимо клас функції, які задовольняють умови: 1) кожна функція $\varphi \in P_{k!\rho_k}^{\rho_n^{-1}}$ – мультиплікатор у просторі $S_{k!\rho_k}^{\rho_n^{-1}}$; 2) $e^\varphi \in S_{k!\rho_k}^{\rho_n^{-1}}$. Умова 2) означає, що існують сталі $c_0, a, b > 0$ такі, що

$$|e^{\varphi(z)}| \leq c_0 \tilde{\gamma}_0(ax) \tilde{\rho}_0(by), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

(сталі $c_0, a, b > 0$ залежать від функцій φ), де

$$\tilde{\gamma}_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{k! \rho_k}{|x|^n}, & |x| > 1, \end{cases} \quad \tilde{\rho}_0(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 1, \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{|y|^n}{n! \rho_n}, & |y| > 1, \end{cases}$$

звідки випливає, що $\tilde{\rho}_0 = \frac{1}{\tilde{\gamma}_0}$ або $\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{\tilde{\rho}_0}$. Отже, якщо $e^\varphi \in P_{k!\rho_k}^{\rho_n^{-1}}$, то

$$\exists c_0, a, b > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |e^{\varphi(z)}| \leq c_0 e^{-\ln \tilde{\rho}_0(ax) + \ln \tilde{\rho}_0(by)}.$$

Наприклад, нехай $\tilde{g}(\sigma) = -\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$. У цьому випадку

$$B = F^{-1}[-\sigma^2 F] = -i \left(i \frac{d}{dx} \right) = D_x^2,$$

а рівняння (1.28) – це рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Оскільки

$$|e^{-z^2}| = |e^{-(\sigma+iy)^2}| = e^{-\sigma^2+y^2}, \quad z = \sigma + iy \in \mathbb{C},$$

то звідси та з характеристики просторів S_α^β (див. п. 1.1.1) випливає, що $e^{-\sigma^2} \in S_{1/2}^{1/2} \equiv S_{k^{k/2}}^{n^{n/2}}$. Крім того, $-\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – мультиплікатор у просторі $S_{1/2}^{1/2}$. Отже, функція $\tilde{g}(\sigma) = -\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – елемент простору $P_{1/2}^{1/2}$.

Для рівняння (1.28) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (1.28), який задовольняє умову

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f, \quad f \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}), \quad (1.29)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \equiv T$, B_1, \dots, B_m – псевдодиференціальні оператори, побудовані за функціями (символами) g_1, \dots, g_m , які задовольняють умови:

$$\exists a > 0 \quad \forall \varepsilon > 0: 0 < g_k(\sigma) \leq \exp\{\varepsilon \ln \tilde{\rho}_0(a\sigma)\}, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$

$$\exists L_k > 0 \exists a > 0 \forall \varepsilon > 0: |D_\sigma^s g_k(\sigma)| \leq L_k^s s! \exp\{\varepsilon \ln \tilde{\rho}_0(a\sigma)\},$$

$$s \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathbb{R}, k \in \{1, \dots, m\},$$

Розв'язок задачі (1.28), (1.29) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є. У результаті одержимо, що

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x), (t, x) \in \Omega,$$

де $G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)]$, $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t, \sigma) = \exp\{t\tilde{g}(\sigma)\}$,

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) \exp\{t_k, \tilde{g}(\sigma)\} \right)^{-1} = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k, \sigma) \right)^{-1}.$$

Оскільки $\tilde{g} \in P_{k! \rho_k}^{\rho_n^{-1}}$, та функція $e^{\tilde{g}}$ задовольняє умову

$$|e^{\tilde{g}(z)}| \leq c_0 e^{-\ln \tilde{\rho}_0(a\sigma) + \ln \tilde{\rho}_0(by)}, z = \sigma + iy \in \mathbb{C}, \quad (1.30)$$

де сталі $c_0, a, b > 0$ залежать від функції \tilde{g} . Надалі вважаємо, що стала c_0 у нерівності (1.30) задовольняє умову $c_0 \leq 1$, тоді

$$|e^{t\tilde{g}(z)}| = |e^{g(z)}|^t \leq [c_0 \exp\{-\ln \tilde{\rho}_0(a\sigma) + \ln \tilde{\rho}_0(b\tau)\}]^t \leq \exp\{-t \ln \tilde{\rho}_0(a\sigma) + t \ln \tilde{\rho}_0(by)\}. \quad (1.31)$$

Лема 1.11. Для функції $Q_1(t, \sigma)$, $(t, \sigma) \in \Omega$, та її похідних (за змінною σ) правильними є оцінки

$$|D_\sigma^s Q_1(t, \sigma)| \leq \tilde{b}^s s! \exp\{-t \ln \tilde{\rho}_0(a\sigma)\}, \quad (1.32)$$

$s \in \mathbb{Z}_+$, де $a > 0$ – стала з нерівності (1.31), $\tilde{b} > 0$ не залежить від t .

Зауваження 1.5. Из оцінок (1.32) випливає, що $Q_1(t, \cdot) \in S_{k! \rho_k}^1$ при кожному $t \in (0, T]$.

Лема 1.12. Функція Q_2 – мультиплікатор у просторі $S_{k! \rho_k}^2$.

Оскільки $G(t, \cdot) = F^{-1}[Q(t, \cdot)]$, то, врахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого і оберненого) одержимо, що $G(t, \cdot) \in S_2^{n! \rho_n}$ при кожному $t \in (0, T]$.

Зауважимо, що для функції Q_2 правильним є таке зображення

$$\begin{aligned}
Q_2(\sigma) &= \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) e^{t_k \tilde{g}(\sigma)} \right)^{-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) e^{t_k \tilde{g}(\sigma)} \right)^r = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} (\mu_1 g_1(\sigma) e^{t_1 \tilde{g}(\sigma)})^{r_1} \dots (\mu_m g_m(\sigma) e^{t_m \tilde{g}(\sigma)})^{r_m} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} g_1^{r_1}(\sigma) \dots g_m^{r_m}(\sigma) e^{(t_1 r_1 + \dots + t_m r_m) \tilde{g}(\sigma)}
\end{aligned}$$

(тут ми скористалися поліноміальною формулою та нерівністю $\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) e^{t_k \tilde{g}(\sigma)} < 1$). Звідси дістаємо, що

$$\begin{aligned}
G(t, x) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{t \tilde{g}(\sigma)} Q_2(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} \tilde{G}(\lambda + t, x),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\lambda + t, x) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{(\lambda+t)\tilde{g}(\sigma)} g_1^{r_1}(\sigma) \dots g_m^{r_m}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \\
\lambda &:= t_1 r_1 + \dots + t_m r_m,
\end{aligned}$$

$\tilde{G}(t, x)$ – фундаментальний розв’язок задачі Коші для рівняння (1.28).

Лема 1.13. Функція $G(t, \cdot)$, $t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $S_2^{n! \rho_n}$, диференційовна по t .

Лема 1.14. Правильними є твердження:

$$1) \frac{\partial}{\partial t} (f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t}, f \in (S_2^{n! \rho_n})', t \in (0, T];$$

2) у просторі $(S_2^{n! \rho_n})'$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} G(t, \cdot) - \sum_{l=1}^m \mu_l \lim_{t \rightarrow t_l} B_l G(t, \cdot) = \delta, (\delta - \text{дельта-функція Дірака}). \quad (1.33)$$

Символом $(S_{2,*}^{n! \rho_n})'$ позначимо клас узагальнених функцій з $(S_2^{n! \rho_n})'$, які є згортувачами у просторі $S_2^{n! \rho_n}$.

Лема 1.15. Нехай $\omega(t, x) = f * G(t, x)$, $f \in (S_{2,*}^{n|\rho_n})'$, $(t, x) \in \Omega$. Тоді в просторі $(S_2^{n|\rho_n})'$ виконується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} \omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} B_k \omega(t, \cdot) = f. \quad (1.34)$$

Функція $G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (1.28). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t, \sigma)](x) = F^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma) \right] (x).$$

З іншого боку,

$$BG(t, x) = F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)F[G(t, x)](\sigma)] = F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)Q(t, \sigma)] = F^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma) \right],$$

$$(t, x) \in \Omega.$$

Звідси дістаємо, що функція G задовольняє рівняння (1.28).

З леми 1.15 випливає, що для рівняння (1.28) нелокальну багатоточкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти розв'язок рівняння (1.28), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} B_k u(t, \cdot) = f, \quad f \in (S_{2,*}^{n|\rho_n})', \quad (1.35)$$

де граничне співвідношення (1.35) розглядається в просторі $(S_2^{n|\rho_n})'$ (обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m, t_1, \dots, t_m$ такі ж, як у випадку задачі (1.28), (1.29)).

Теорема 1.9. Задача (1.28), (1.35) є розв'язною, розв'язок дається формулою $u(t, x) = f * G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$.

Доведення. Функція $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$ є розв'язком рівняння (1.28). Справді (див. твердження а) леми 1.14),

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (f * G(t, x)) = f * \frac{\partial G(t, x)}{\partial t},$$

$$Bu(t, x) = F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)F[f * G](\sigma)](t, x).$$

Оскільки f – згортувач у просторі $S_2^{n|\rho_n}$, то $F[f * G(t, \cdot)] = F[f]F[G] = F[f]Q$.

Отже,

$$Bu(t, x) = F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)Q(t, \sigma)F[f](\sigma)](x) = F^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma)F[f](\sigma) \right] (x) =$$

$$= F^{-1} \left[F \left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, x) \right] (\sigma) F[f](\sigma) \right] = F^{-1} \left[F \left[f * \frac{\partial G}{\partial t} \right] \right] = f * \frac{\partial G(t, x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (1.28). З леми 1.15 випливає, що u задовольняє рівняння (1.35) у зазначеному сенсі.

Теорема доведена.

Зауваження 1.6. Якщо в умові (1.35) $B_1 = B_2 = \dots = B_m = I$ (де I – одиничний оператор), то можна довести, що задача (1.28), (1.35) коректно розв’язна у випадку, коли початкова функція f в (1.35) є елементом простору узагальнених функцій $(S_{1,*}^{n_1 \rho_n})'$, розв’язок дається формулою $u(t, x) = f * G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, де $G(t, x) = F^{-1}[\exp\{t\tilde{g}(\sigma)\}(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k \tilde{g}(\sigma)\})^{-1}]$.

Якщо послідовність $\{\rho_n\}$ має вигляд $\rho_n = n^{n(\alpha-1)}$, де $\alpha \in (0, 1)$, то, як вже відзначалося раніше, $S_{k! \rho_k}^{\rho_n^{-1}} = S_{\alpha}^{1-\alpha} \equiv S_{k^{k\alpha}}^{n^{n(1-\alpha)}}$.

У цьому випадку всі твердження переформулюються відповідним чином.

Розглянемо тепер рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = P \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x), \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1.36)$$

де $P(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову ”параболічності”:

$$\exists c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: \operatorname{Re} P(x) \leq -c|x|^{2b}.$$

Зауважимо, що

$$|e^{P(x)}| \leq e^{\operatorname{Re} P(x)} \leq e^{-c|x|^{2b}},$$

$$\exists c_1 > 0 \quad \forall z = x + it \in \mathbb{C}: |e^{P(z)}| \leq e^{|P(z)|} \leq e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тоді з огляду узагальнення теорема Фрагмена–Ліндельофа, одержимо, що ціла функція $e^{P(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, у комплексній площині задовольняє нерівність

$$|e^{P(z)}| \leq c_0 e^{-c_2|x|^{2b} + c_3|t|^{2b}}, \quad c_0, c_2, c_3 > 0. \quad (1.37)$$

З останньої нерівності та характеристики просторів S_{α}^{β} випливає, що $e^{P(x)}$ є елементом простору S_{α}^{β} , де $\frac{1}{\alpha} = 2b$, тобто $\alpha = \frac{1}{2b}$ і $\frac{1}{1-\beta} = 2b$, тобто $\beta = 1 - \frac{1}{2b}$.

Введемо позначення: $p = 2b$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ (тобто $q = \frac{p}{p-1} \equiv \frac{2b}{2b-1}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Отже,

при вказаних обмеженнях на поліном P маємо, що $e^{P(x)} \in S_{1/p}^{1/q}$. Із властивостей просторів S_{α}^{β} випливає також, що $P(x)$ – мультиплікатор у просторі $S_{1/p}^{1/q}$.

Поставимо задачу: знайти розв’язок рівняння (1.36), який задовольняє умову:

$$\mu u(0, x) - \mu_1 u(t_1, x) - \dots - \mu_m u(t_m, x) = f(x), \quad f \in S_{1/p}^{1/q}, \quad (1.38)$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$, $u(0, x) := \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x)$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$,

$\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа, причому $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$. Розв’язок задачі (1.36), (1.38) шукаємо за допомогою перетворення Фур’є; у результаті одержимо, що $u(t, x)$ дається формулою:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

де $G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)]$, $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t, \sigma) = \exp\{tP(\sigma)\}, \quad Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k P(\sigma)\} \right)^{-1}.$$

З’ясуємо, якими властивостями володіє функція $Q(t, \sigma)$, як функція змінної $\sigma \in \mathbb{R}$.

Лема 1.16. Для функції $Q_1(t, \sigma)$, $(t, \sigma) \in \Omega$, та її похідних (за змінною σ) правильними є оцінки

$$|D_{\sigma}^s Q_1(t, \sigma)| \leq c_1 A_1^s t^{\frac{s}{p}} s^{\frac{s}{q}} \exp\{-a_2 t |\sigma|^p\}, \quad (1.39)$$

де сталі $c_1, A_1, a_2 > 0$ не залежать від t .

Лема 1.17. Функція Q_2 – мультиплікатор у просторі $S_{1/p}^{1/q}$.

На підставі лем 1.16, 1.17 робимо висновок, що $Q_1(t, \sigma)$, як функція σ , є елементом простору $S_{1/p}^{1/q}$ (при кожному $t > 0$). Урахувавши (1.39) та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, одержимо

$$\begin{aligned} |D_{\sigma}^s Q(t, \sigma)| &= \left| \sum_{l=0}^s C_s^l D_{\sigma}^l Q_1(t, \sigma) D_{\sigma}^{s-l} Q_2(\sigma) \right| \leq \\ &\leq c_1 \tilde{c}_1 \sum_{l=0}^s C_s^l A_1^l t^{\frac{l}{p}} l^{\frac{l}{q}} A_2^{s-l} (s-l)^{(s-l)q} \exp\{-a_2 t \sigma^p\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \tilde{b} \tilde{B}^s t^{\frac{\nu s}{p}} s^{\frac{s}{q}} \exp\{-a_2 t \sigma^p\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\tilde{b} = c_1 \tilde{c}_1$, $\tilde{B} = 2 \max\{A_1, A_2\}$, $\nu = 0$, якщо $0 < t \leq 1$ і $\nu = 1$, якщо $t > 1$.

Звідси випливає, що $G(t, \cdot) = F^{-1}[Q(t, \cdot)]$ є елементом простору $S_{1/q}^{1/p}$, оскільки $F^{-1}[S_{1/q}^{1/p}] = S_{1/q}^{1/p}$ (при кожному $t > 0$).

Скориставшись зображенням функції Q_2 , одержимо

$$\begin{aligned} G(t, x) &= F^{-1}[Q(t, \sigma)] = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{tP(\sigma)} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{t_k P(\sigma)} \right)^{-1} e^{-ix\sigma} d\sigma = \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{tP(\sigma)} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} e^{(t_1 r_1 + \dots + t_m r_m)P(\sigma) - ix\sigma} d\sigma = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} \tilde{G}(t_1 r_1 + \dots + t_m r_m + t, x), \end{aligned}$$

де $\tilde{G}(t_1 r_1 + \dots + t_m r_m + t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{(t_1 r_1 + \dots + t_m r_m + t)P(\sigma)} e^{-ix\sigma} d\sigma$,

$\tilde{G}(t, x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1.36), тобто $\tilde{G}(t, x) = F^{-1}[Q_1(t, \sigma)]$.

Наприклад, у випадку двоточкової задачі для рівняння теплопровідності ($m = 1$, $\mu > \mu_1$, $P(-i \frac{\partial}{\partial x}) = -(-i \frac{\partial}{\partial x})^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$) маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}, \\ G(t, x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \mu_1^r \tilde{G}(t + t_1 r, x) = \\ &= \frac{1}{2\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi(t + t_1 r)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t + t_1 r)}\right\}, \quad 0 < t_1 \leq T. \end{aligned}$$

Якщо $f \in (S_{1/q,*}^{1/p})'$, то $f * G(t, x)$ є елементом простору $S_{1/q}^{1/p}$, функція

$$u(t, x) = f * G(t, x), \quad f \in (S_{1/q,*}^{1/p})', \quad (t, x) \in \Omega,$$

задовольняє рівняння (1.36) і багатоточкову умову (1.38) в просторі $(S_{1/q}^{1/p})'$ з початковою функцією f . При цьому відповідна нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння (1.36) коректно розв'язна, $u(t, \cdot) \in S_{1/q}^{1/p}$ при кожному $t \in (0, T]$.

1.1.6. Псевдодиференціальні рівняння зі змінними символами у просторах типу S

Розглянемо функцію $g(t, x, \sigma)$, задану на $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \Omega$, яка володіє властивостями

1) $\forall (t, x, \sigma) \in \Omega: g(t, x, \sigma) > 0$, $g(t, x, \sigma)$ – неперервна функція аргумента $t \in [0, T]$ (при фіксованих x, σ);

2) при фіксованих t, x функція $g(t, x, \sigma)$ – нескінченно диференційовна функція аргумента σ , яка задовольняє умови:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall (t, x, \sigma) \in \Omega: g(t, x, \sigma) \leq e^{\varepsilon|\sigma|^\alpha},$$

де $\alpha > 2$ – фіксований параметр,

$$\exists c, B > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall (t, x, \sigma) \in \Omega: |D_\sigma^n g(t, x, \sigma)| \leq cB^n n!;$$

3) $g(t, x, \sigma)$ (при фіксованих t, σ) – неперервна обмежена на \mathbb{R} функція аргумента x ;

$$4) \exists c'_0 > 0 \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}: g(t, x, \sigma) \geq c'_0 |\sigma|^\alpha.$$

Із властивостей функції g випливає, що $g(t, x, \sigma)$, як функція σ (при фіксованих t, x), – мультиплікатор у просторі $S_1^{1/\alpha}$.

Розглянемо псевдодиференціальний оператор у просторі $S_1^{1/\alpha}$, який визначається співвідношенням

$$(A_t \varphi)(x) = F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} [g(t, x, \sigma) F_{x \rightarrow \sigma} [\varphi](x)](\sigma), \quad \forall \varphi \in S_1^{1/\alpha}.$$

Надалі використовуватимемо позначення: $A_t \equiv A$.

Із властивостей функції g випливає, що $A\varphi \in \mathbb{K}(\mathbb{R})$, де $\mathbb{K}(\mathbb{R})$ складається із неперервних обмежених на \mathbb{R} функцій ψ з нормою $\|\psi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|$.

Оператор A надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором, побудованим за змінним символом $g(t, x, \sigma)$.

У смугі $\Pi_T = \{(t, x): 0 \leq \tau < t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу про відшукування розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + Au(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T, \quad (1.40)$$

який у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ задовольняє умову

$$u(t, x)|_{t=\tau} \equiv \lim_{t \rightarrow \tau+0} u(t, x) = \varphi(x), \quad (1.41)$$

де $\varphi \in \mathbb{K}(\mathbb{R})$.

Введемо позначення

$$L \equiv L\left(t, x, A, \frac{\partial}{\partial t}\right) := \frac{\partial}{\partial t} + A.$$

Під фундаментальним розв'язком задачі Коші (1.40), (1.41) розуміємо функцію

$$Z(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x) \in \Pi_T, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

яка володіє властивостями:

1) $LZ(t, x; \tau, \xi) = 0$, тобто функція Z , як функція t, x , при фіксованих τ, ξ , є розв'язком рівняння (1.40);

2) $\lim_{t \rightarrow \tau+0} \int_{\mathbb{R}} Z(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x)$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Для побудови функції Z використаємо метод Леві (метод параметрикса), який полягає в тому, що функція Z шукається у вигляді суми двох доданків ($Z = V + \Gamma$): головного та деякого допоміжного. За головний доданок вибирається фундаментальний розв'язок рівняння (1.40), в який входить оператор з фіксованим символом у точці $(t, x) = (\chi, \xi)$. Другий доданок шукаємо у вигляді інтегрального оператора, щільність якого визначається з деякого інтегрального рівняння.

Розглянемо задачу про відшукування розв'язку рівняння

$$L\left(\chi, \xi, A, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T, \quad (1.42)$$

зі сталим символом $g(\chi, \xi, \sigma)$, який задовольняє умову (1.41). Розв'язок задачі (1.42), (1.41) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є. У результаті знайдемо, що

$$u(t, x) = G(t - \tau, x; \chi, \xi) * \varphi(x), \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

де $G(t - \tau, x; \tau, \xi) = F_{\sigma \rightarrow x}^{-1}[Q(t - \tau, \chi; \xi, \sigma)]$,

$$Q(t - \tau, \chi; \xi, \sigma) = \exp\{-(t - \tau)g(\chi, \xi, \sigma)\}.$$

Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні леми 1.4, прийдемо до твердження: для похідних функції Q за змінною σ (для $0 < t - \tau \leq$

1) правильними є оцінки:

$$|D_{\sigma}^n Q(t - \tau, \chi; \xi, \sigma)| \leq c A^n n! \exp\{-\tilde{c}_0(t - \tau)|\sigma|^{\alpha}\},$$

де сталі $\tilde{c}_0, \tilde{A}, c > 0$ не залежить від t, τ, χ, ξ .

Лема 1.18. Для функції G та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності

$$|D_x^k G(t - \tau, x; \chi, \xi)| \leq c_4 B_1^k (t - \tau)^{-\frac{(k+1)}{\alpha}} k^{\frac{k}{\alpha}} e^{-b_0|x|}, \quad (1.43)$$

$k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, сталі $c_4, B_1, b_0 > 0$ не залежать від $t - \tau, \chi, \xi$.

Функція

$$G(t - \tau, x; \chi, \xi) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t - \tau, \chi; \xi, \sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma \quad (1.44)$$

є неперервною функцією аргумента $t \in (\tau, T]$. Для $t \geq \tau$ виконується оцінка

$$|Q(t - \tau, \chi; \sigma, \xi)| \leq c \exp\{-c'_0(t - \tau)|\sigma|^{\alpha}\}.$$

Звідси дістаємо, що інтеграл (1.44) збігається рівномірно у кожній смузі $\{(t, \sigma): 0 < \tau < t_0 \leq t \leq T, \sigma \in \mathbb{R}\}$, тому функція G є неперервною у кожній точці проміжку $(\tau, T]$. Аналогічно доводимо диференційовність функції G у кожній точці $t \in (\tau, T]$. Зазначимо також, що функція $\frac{\partial G}{\partial t}$ є неперервною функцією аргумента t (при фіксованому x).

Наведемо ще такі властивості функції G :

1) функція G як абстрактна функція параметра $t \in (\tau, T]$ зі значеннями у просторі $S_1^{1/\alpha}$, диференційовна по t ;

2) у просторі $(S_1^{1/\alpha})'$ справджується граничне співвідношення

$$G(t - \tau, x; \tau, \xi) \rightarrow \delta, \quad t \rightarrow \tau + 0$$

(тут δ – дельта-функція Дірака).

Із наведених вище результатів випливає, що $G(t - \tau, x - \xi, \tau, \xi)$, як функція t , x (при фіксованих τ, ξ) є розв'язком рівняння (1.40). Отже, за функцією $V(t, x; \tau, \xi)$ можна взяти функцію $G(t - \tau, x - \xi, \tau, \xi)$.

Нехай

$$J(t, \tau, x) = \int_{\tau}^t d\mu \int_{\mathbb{R}} G(t - \mu, x - \xi, \mu, \xi) \varphi(\mu, \xi) d\xi, \quad (1.45)$$

де $\varphi(t, x)$ – функція, задана на $[0, T] \times \mathbb{R}$, неперервна по t , $\varphi(t, \cdot) \in S_1^{1/\alpha}$ при кожному $t \in [0, T]$. У наступному твердженні дається формула застосування оператора $\frac{\partial}{\partial t}$ до інтеграла (1.45).

Лема 1.19. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial J(t, \tau, x)}{\partial t} = \int_{\tau}^t d\mu \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} G(t - \mu, x - \xi, \mu, \xi) \varphi(\mu, \xi) + \varphi(t, x). \quad (1.46)$$

Надалі оператор A у рівнянні (1.40) розуміємо як оператор, який діє з простору X у $\mathbb{K}(\mathbb{R})$, де символом X позначатимемо простір, який складається з функцій $\psi \in S_1^{1/\alpha}$ з нормою $\|\psi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|$.

Лема 1.20. *Нехай $\varphi(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, – функція, неперервна за змінною t , $\varphi(t, \cdot) \in S_1^{1/\alpha}$. Правильною є формула*

$$AJ(t, \tau, x) = \int_{\tau}^t d\mu \int_{\mathbb{R}} A G(t - \mu, x - \xi, \mu, \xi) \varphi(\mu, \xi) d\xi. \quad (1.47)$$

На підставі лем 1.19 та 1.20 робимо висновок, що при вказаних обмеженнях на функцію φ правильною є формула

$$LJ(t, \tau, x) = \int_{\tau}^t d\mu \int_{\mathbb{R}} L G(t - \mu, x - \xi, \mu, \xi) \varphi(\mu, \xi) d\xi + \varphi(t, x).$$

Лема 1.21. *Правильною є нерівність $|AG(t - \mu, x - \xi, \mu, \xi)| \leq c(t - \mu)^{-\frac{1}{\alpha}} \exp\{-a|x - \xi|\}$, $t > \mu \geq 0$, сталі $c, a > 0$ не залежать від t, μ .*

Урахувавши попередні оцінки, прийдемо до такого твердження: *функція LG задовольняє нерівність $|LG(t - \tau, x - \xi, \tau, \xi)| \leq c(t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \exp\{-a|x - \xi|\}$, де сталі $c, a > 0$ не залежать від t, τ , $t > \tau$.*

Перейдемо до побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1.40). Цей розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$Z(t, x; \tau, \xi) = G(t - \tau, x - \xi; \tau, \xi) + \Gamma(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x) \in P_\tau,$$

де

$$\Gamma(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\mu \int_{\mathbb{R}} G(t - \mu, x - \eta, \mu, \eta) \Phi(\mu, \eta, \tau, \xi) d\eta,$$

G – функція, визначена раніше. Функцію $\Phi(t, x, \tau, \xi)$ підберемо так, щоб Z , як функція t, x , задовольняла рівняння (1.40). Застосувавши до Z оператор L та врахувавши при цьому формули (1.46), (1.47) знайдемо, що це буде тоді й лише тоді, коли

$$\Phi(t, x, \tau, \xi) = K(t - \tau, x, \tau, \xi) + \int_{\tau}^t d\mu \int_{\mathbb{R}} K(t - \mu, x, \mu, \eta) \Phi(\mu, \eta, \tau, \xi) d\eta,$$

де $K(t - \tau, x, \tau, \xi) = -LG(t - \tau, x - \xi, \tau, \xi)$.

Отже, функція $Z(t, x; \tau, \xi) = V(t, x; \tau, \xi) + \Gamma(t, x; \tau, \xi)$, $V(t, x; \tau, \xi) = G(t - \tau, x - \xi; \tau, \xi)$, є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1.40), а функція

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} V(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (1.48)$$

– розв'язок цієї задачі при $\tau = 0$. Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 1.10. *Задача Коші для рівняння (1.40) з параметром $\tau = 0$ розв'язна в класі X , розв'язок зображається формулою (1.48).*

1.2. Еволюційні рівняння з модулем оператора диференціювання

Різні класичні функціональні простори (наприклад, соболевські, аналітичних функцій, нескінченно диференційовних функцій та розподілів Шварца) можна розуміти як позитивні і негативні простори відносно L_2 , побудовані за функціями від модуля оператора диференціювання або множення на незалежну змінну, або як проєктивні та індуктивні границі таких просторів .

У цьому пункті досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача у півпросторі $t > 0$ для диференціально-операторного рівняння $\partial u / \partial t + Au = 0$, де $A = |D_x|^\alpha$, $D_x = d/dx$, $\alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$ – дробовий степінь модуля оператора диференціювання. Такий оператор можна розуміти як аналог оператора дробового диференціювання Вейля, який використовується у теорії періодичних функцій.

Встановлено, що кожний псевдодиференціальний оператор (у випадку однієї незалежної змінної), побудований за однорідною функцією порядку α , не диференційовною у точці 0, збігається із звуженням оператора $|D_x|^\alpha$ на деякій локально-опуклий топологічний простір, який є проективною границею банахових просторів, неперервно вкладених один в одній. Це дозволило застосувати перетворення Фур'є при дослідженні нелокальної багатоточкової задачі для зазначеного рівняння з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів. Така постановка задачі дозволяє розширити клас початкових функцій, оскільки кожену функцію, яка має степеневу особливість у точці 0, можна регуляризувати у просторі розподілів Шварца (тобто таку функцію можна розуміти як регулярний функціонал). Доведено коректну розв'язність зазначеної задачі, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, при цьому досліджені властивості фундаментального розв'язку, встановлено, що при виконанні певного обмеження на початкову функцію розв'язок задачі стабілізується до нуля рівномірно на \mathbb{R} при $t \rightarrow +\infty$.

1.2.1. Простори основних та узагальнених функцій

Простір Φ_α . Нехай α – фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$, $\alpha_0 := [\alpha] + 1$ ($[\alpha]$ – ціла частина числа α), $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_\alpha := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall k \in \mathbb{Z}_+ \exists c_k = c_k(\varphi) > 0 \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$M^{\alpha_0+k}(x) |\varphi^{(k)}(x)| \leq c_k\}.$$

У Φ_α вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою норм

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^p M^{\alpha_0+k}(x) |\varphi^{(k)}(x)| \right\}, \quad \varphi \in \Phi_\alpha, p \in \mathbb{Z}_+,$$

при цьому [1.8], Φ_α – повний досконалий зліченно-нормований простір з топологією проєктивної границі банахових просторів $\Phi_{p,\alpha}$: $\Phi_\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} p r \Phi_{p,\alpha} = \bigcap_{p=0}^{\infty} \Phi_{p,\alpha}$ ($\Phi_{p,\alpha}$ – поповнення Φ_α за p -ою нормою), вкладення $\Phi_{p+1,\alpha} \subset \Phi_{p,\alpha}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервними.

Прикладом функції, яка є елементом простору Φ_α , може служити функція

$$\varphi(x) = (1+x^2)^{-([\alpha]+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}.$$

Використовуючи метод індукції, переконуємося в тому, що похідні цієї функції мають вигляд

$$\varphi^{(k)}(x) = P_k(x)(1+x^2)^{-(k+[\alpha]+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де P_k – многочлен степеня k . Звідси отримуємо, що всі норми $\|\varphi\|_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є скінченними.

Множина $B \subset \Phi_\alpha$ називається *обмеженою*, якщо

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \exists c_p > 0 \forall \varphi \in B: \|\varphi\|_p \leq c_p$$

(тобто кожна норма простору Φ_α обмежена на множині B своєю сталою).

Послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi_\alpha$ збігається в Φ_α до функції $\varphi \in \Phi_\alpha$ при $\nu \rightarrow +\infty$, якщо $\|\varphi_\nu - \varphi\|_p \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow +\infty$ для кожного $p \in \mathbb{Z}_+$.

Зауважимо, що у просторі Φ_α визначена і неперервна операція зсуву аргумента $T_\xi: \varphi(x) \rightarrow \varphi(x + \xi)$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, та операція диференціювання. Оскільки Φ_α – досконалий простір, то із загальних результатів теорії досконалих просторів випливає, що операція зсуву аргумента у просторі Φ_α не лише неперервна, але і нескінченно диференційовна (тобто граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \rightarrow \varphi'(x)$, $h \rightarrow 0$, виконуються у сенсі збіжності за топологією простору Φ_α).

Простір Ψ_α . Функції з простору Φ_α абсолютно інтегровні на \mathbb{R} , тому на них визначена операція перетворення Фур'є F :

$$F[\varphi](\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \quad \varphi \in \Phi_\alpha.$$

Символом Ψ_α позначимо Фур'є-образ простору Φ_α : $\Psi_\alpha = F[\Phi_\alpha]$. Очевидно, кожна функція $F[\varphi]$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, обмежена і неперервна на \mathbb{R} . Розглянемо основні властивості функцій з простору Ψ_α ([1.9], с. 197-210):

1. Якщо $\varphi \in \Phi_\alpha$, то $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$.
2. Якщо $\varphi \in \Phi_\alpha$, то $F[\varphi]$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція.

Зауважимо, що у точці $\sigma = 0$ функція $F[\varphi]$ може бути не диференційовною. Наприклад, функція $\varphi(x) = (1 + x^2)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, є елементом простору Φ_α , де $\alpha \in (1, 2)$. Але відомо, що $F[\varphi](\sigma) = \pi \operatorname{exr}\{-|\sigma|\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Ця функція не диференційовна в точці $\sigma = 0$.

Інший приклад: функція $\varphi(x) = (1 + x^2)^{-m}$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, є елементом простору Φ_α , $\alpha \in (2m - 1, 2m)$. При цьому

$$F[\varphi](\sigma) = \frac{2\pi}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k-1)!}{k!(m-k-1)! 2^{m+k}} |\sigma|^{m-k-1} e^{-|\sigma|}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Ця функція не має похідної у точці $\sigma = 0$.

Ці приклади характеризують елементи з Φ_α як прообрази Фур'є негладких у точці 0 функцій.

3. У функції $D_\sigma^k F[\varphi](\sigma)$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, $\sigma \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim_{\sigma \rightarrow \pm 0} D_\sigma^k F[\varphi](\sigma)$.

4. Перетворення Фур'є неперервно та бієктивно відображає Φ_α на Ψ_α .

5. Функції з простору Ψ_α задовольняють умову

$$\forall \{k, l\} \in \mathbb{Z}_+, k \geq l, \exists b_k > 0 \exists d_l > 0: \sup_{\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |\sigma^k D_\sigma^l \psi(\sigma)| \leq b_k \cdot d_l, \quad \psi \in \Psi_\alpha$$

(сталі $b_k, d_l > 0$ залежать від функції ψ).

У просторі Ψ_α вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою норм

$$\|\psi\|_p := \sup_{\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{k=0}^p |\sigma|^k \sum_{l=0}^k |D_\sigma^l \psi(\sigma)| \right\}, \quad \psi \in \Psi_\alpha, p \in \mathbb{Z}_+.$$

При цьому ([1.9], с. 206-207), Ψ_α – повний зліченно-нормований простір, $\Psi_\alpha = \bigcap_{p=0}^{\infty} \Psi_{p,\alpha}$, де $\Psi_{p,\alpha}$ – поповнення простору Ψ_α за нормою $\|\cdot\|_p$, вкладення $\Psi_{p+1,\alpha} \subset \Psi_{p,\alpha}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервними.

Функція $g \in C(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ називається мультиплікатором у просторі Ψ_α , якщо $g\psi \in \Psi_\alpha$ для довільної функції $\psi \in \Psi_\alpha$ і відображення $\psi \rightarrow g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з Ψ_α в Ψ_α .

Простір Φ'_α . Символом Φ'_α позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ_α зі слабкою збіжністю. Оскільки в основному просторі введена топологія проєктивної границі банахових просторів $\Phi_{p,\alpha}$, вкладення $\Phi_{p+1,\alpha} \subset \Phi_{p,\alpha}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервні, то

$$\Phi'_\alpha = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} p r \Phi_{p,\alpha} \right)' = \lim_{p \rightarrow +\infty} \text{ind} \Phi'_{p,\alpha} \equiv \bigcup_{p=0}^{\infty} \Phi'_{p,\alpha}.$$

Отже, якщо $f \in \Phi'_\alpha$, то $f \in \Phi'_{p,\alpha}$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких p називається порядком f , тобто кожна узагальнена функція $f \in \Phi'_\alpha$ має скінченний порядок.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'_\alpha$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \psi \rangle = 2\pi \langle f, F^{-1}[\psi] \rangle, \quad \forall \psi \in \Psi_\alpha.$$

Із властивостей лінійності і неперервності функціонала f та перетворення Фур'є (прямого і оберненого) основних функцій впливає лінійність і неперервність функціонала $F[f]$, заданого на $\Psi_\alpha = F[\Phi_\alpha]$, тобто $F[f] \in \Psi'_\alpha$, якщо $f \in \Phi'_\alpha$.

Згортка в Φ'_α . У [1.8] (с. 112-118) даються три ознаки існування згортки в Φ'_α . Наведемо одну з них: якщо $f \in \Phi'_\alpha$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, то згортка $f * \varphi$ існує і визначається формулою $(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_{-x} \check{\varphi}(\xi) \rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle$, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$,

при цьому $f * \varphi$ – звичайна нескінченно диференційовна на \mathbb{R} функція.

Нехай $f \in \Phi'_\alpha$. Якщо $f * \varphi \in \Phi_\alpha$ для довільної функції $\varphi \in \Phi_\alpha$ і зі співвідношення $\varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow +\infty$ у просторі Φ_α впливає, що $f * \varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ у просторі Φ_α , то функціонал f називається *згортувачем* у просторі Φ_α .

Оскільки Φ_α – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то справедливе твердження: якщо $f \in \Phi'_\alpha$ – згортувач у просторі Φ_α , то $F[f * \varphi] = F[f]F[\varphi]$, $\forall \varphi \in \Phi_\alpha$, при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі Ψ_α .

Наприклад, δ -функція Дірака ($\delta: \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$) – згортувач у просторі Φ_α :

$$\delta * \varphi = \langle \delta_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) \rangle = T_{-x}\check{\varphi}(0) = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in \Phi_\alpha,$$

функція $F[\delta] = 1$ – мультиплікатор у просторі Ψ_α .

1.2.2. Дробове диференціювання у просторі Φ_α

Розглянемо оператор $A = |D_x|^\alpha = |iD_x|^\alpha$, який є дробовим степенем модуля оператора диференціювання, A – невід’ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, оскільки iD_x – самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ оператор з областю визначення

$$\mathcal{D}(iD_x) = \{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) \mid \exists \varphi' \in L_2(\mathbb{R})\}.$$

Якщо E_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, спектральна функція оператора iD_x , то, внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів,

$$A\varphi = |iD_x|^\alpha \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^\alpha dE_\lambda \varphi,$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(A) = \left\{ \varphi \in L_2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{2\alpha} d(E_\lambda \varphi, \varphi) < \infty \right\}.$$

Врахувавши вигляд спектральної функції оператора iD_x , знайдемо, що для довільної функції $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ правильним є співвідношення

$$E_\lambda \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right\} e^{-it\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} F[\varphi](\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma.$$

Звідси отримуємо

$$dE_\lambda \varphi = \frac{1}{2\pi} F[\varphi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda.$$

Отже,

$$A\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^\alpha F[\varphi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda = F^{-1}[|\lambda|^\alpha F[\varphi]], \quad \varphi \in \Phi_\alpha. \quad (1.49)$$

Обґрунтуванням співвідношення (1.49) є таке твердження.

Лема 1.22. Функція $\chi(\sigma) = |\sigma|^\alpha$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – мультиплікатор у просторі Φ_α .

Нехай $\hat{A} = A|_{\Phi_\alpha}$ – звуження оператора $A = i\partial/\partial x$ на Φ_α . З леми 1.22 отримуємо, що оператор \hat{A} відображає Φ_α в Φ_α , є лінійним і неперервним і при цьому збігається на Φ_α з псевдодиференціальним оператором $F^{-1}[\chi(\sigma)F]$, побудованим за функцією-символом $\chi(\sigma) = |\sigma|^\alpha$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Зауваження 1.7. Якщо $a(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – однорідна порядку $\alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$ функція, неперервна на \mathbb{R} і нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то, як відомо, $a(\sigma)$ має вигляд: $a(\sigma) = c|\sigma|^\alpha$, $c = \text{const}$. Отже, із наведених вище міркувань випливає, що у випадку однієї незалежної змінної, кожний псевдодиференціальний оператор, побудований за функцією $a(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, збігається з оператором $\hat{A} = A|_{\Phi_\alpha}$.

1.2.3. Нелокальна за часом задача для еволюційного рівняння з оператором дробового диференціювання

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \hat{A}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1.50)$$

де \hat{A} – оператор дробового диференціювання у просторі Φ_α .

Під розв'язком даного рівняння розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка:

- 1) неперервно диференційовна за змінною t ;
- 2) $u(t, \cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t > 0$;
- 3) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння.

Для рівняння (1.50) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (1.50), який задовольняє умову

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t_1,x) - \dots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \Phi_\alpha, \quad (1.51)$$

де $u(0,x) = \lim_{t \rightarrow +0} u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, +\infty)$ – фіксовані числа, $0 < t_1 < \dots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$.

Розв'язок задачі (1.50), (1.51) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F^{-1}[v(t,\sigma)]$. Для функції $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ :

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + |\sigma|^\alpha v(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in \Omega, \quad (1.52)$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^m \mu_k v(t_k,\sigma) = \tilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad (1.53)$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f](\sigma)$. Розв'язок задачі (1.52), (1.53) дається формулою

$$v(t,\sigma) = \tilde{f}(\sigma) \exp\{-t|\sigma|^\alpha\} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k|\sigma|^\alpha\} \right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, розв'язком задачі (1.50), (1.51) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} v(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma.$$

Введемо позначення:

$$G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)], \quad Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma) \cdot Q_2(\sigma),$$

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{-t|\sigma|^\alpha\}, \quad Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k|\sigma|^\alpha\} \right)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально, отримуємо

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi) f(\xi) d\xi = G(t,x) * f(x).$$

Справді,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi \right) e^{-i\sigma x} d\sigma = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right) f(\xi) d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi) f(\xi) d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega. \end{aligned}$$

Коректність проведених тут перетворень впливає з властивостей функції $Q(t,\sigma)$, як функції змінної σ , які ми наведемо нижче.

Лема 1.23. При фіксованому $t > 0$ функція $Q(t,\sigma)$ нескінченно диференційовна за змінною $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для її похідних правильними є оцінки

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \leq b_s t^{\gamma_s} |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\{-t|\sigma|^\alpha\}, \quad (1.54)$$

$\sigma \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$, де стала $b_s > 0$ не залежить від t ,

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < t \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } t > 1, \end{cases} \quad \omega_s = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } \sigma \neq 0, |\sigma| < 1, \\ \alpha s, & \text{якщо } |\sigma| > 1. \end{cases}$$

Зауваження 1.8. *Із лема 1.23 випливає, що $\{Q_1(t, \cdot), Q(t, \cdot)\} \subset \Psi_\alpha$ при кожному $t > 0$. Звідси та з обмеженості функції Q_2 на \mathbb{R} дістаємо також, що Q_2 – мультиплікатор у просторі Ψ_α .*

Зауваження 1.9. *При $t > 1$ похідні функції $Q(t, t^{-1/\alpha}\sigma) = \exp\{-|\sigma|^\alpha\}(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t^{-1}t_k|\sigma|^\alpha\})^{-1}$ задовольняють нерівності $|D_\sigma^s Q(t, t^{-1/\alpha}\sigma)| \leq L_s |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\{-|\sigma|^\alpha\}$, $\sigma \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$, де сталі $L_s > 0$ не залежать від t . Якщо $0 < t \leq 1$, то $|D_\sigma^s Q(t, t^{-1/\alpha}\sigma)| \leq L_s t^{-s} |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\{-|\sigma|^\alpha\}$, $\sigma \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$.*

Розглянемо тепер функцію

$$G(t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma = F^{-1}[Q(t, \sigma)].$$

Із зауваження 1.9 випливає, що $G(t, \cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t > 0$, тобто

$$|D_x^k G(t, x)| \leq c_k(t) (1 + |x|)^{-(1+[\alpha]+k)}, \quad (t, x) \in \Omega, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Виділимо в оцінках функції $G(t, x)$ та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t .

Лема 1.24. *Для функції $G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, та її похідних (за змінною x) правильні оцінки $|D_x^k G(t, x)| \leq c_k t^{\lambda(k)} (t^{1/\alpha} + |x|)^{-(1+[\alpha]+k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $c_k > 0$ не залежать від t , $\lambda(k) = \begin{cases} -(\alpha + (\alpha - 1)([\alpha] + k))/\alpha, & \text{якщо } 0 < t \leq 1, \\ [\alpha]/\alpha, & \text{якщо } t > 1. \end{cases}$*

Зауваження 1.10. *Із властивостей функції $Q(t, \sigma)$ випливає неперервна диференційовність функції $G(t, x)$ як функції аргумента $t \in (0, +\infty)$. Крім того, оскільки $Q(t, \sigma) = F[G(t, x)] = \int_{\mathbb{R}} G(t, x) e^{ix\sigma} dx$, то $Q(t, 0) = (\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k)^{-1} = \int_{\mathbb{R}} G(t, x) dx$.*

Зауваження 1.11. *Оскільки $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, то $\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k |\sigma|^\alpha\} \leq \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k < 1$.*

Використовуючи поліноміальну формулу, одержимо

$$\begin{aligned}
Q_2(\sigma) &= \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k |\sigma|^\alpha} \right)^{-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k |\sigma|^\alpha} \right)^r = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} (\mu_1 e^{-t_1 |\sigma|^\alpha})^{r_1} \dots (\mu_m e^{-t_m |\sigma|^\alpha})^{r_m} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} Q_1(\lambda, \sigma),
\end{aligned}$$

де $\lambda := t_1 r_1 + \dots + t_m r_m$, $Q_1(\lambda, \sigma) = e^{-\lambda |\sigma|^\alpha}$. Звідси отримуємо таке зображення для функції $G(t, x)$:

$$\begin{aligned}
G(t, x) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} e^{-(\lambda+t) |\sigma|^\alpha} e^{-ix\sigma} d\sigma = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} \tilde{G}(t_1 r_1 + \dots + t_m r_m + t, x),
\end{aligned}$$

де

$$\tilde{G}(\lambda + t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda+t) |\sigma|^\alpha} e^{-ix\sigma} d\sigma = F^{-1}[Q_1(\lambda + t, \sigma)].$$

Лема 1.25. Функція $G(t, x)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями у просторі Φ_α , диференційовна по t .

Наслідок 1.4. Правильною є формула $\frac{\partial}{\partial t} (f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t}$, $\forall f \in \Phi'_\alpha$, $t > 0$.

Лема 1.26. У просторі Φ'_α виконуються граничні співвідношення:

$$1) G(t, \cdot) \rightarrow F^{-1}[Q_2], t \rightarrow +0;$$

$$2) \mu G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k, \cdot) \rightarrow \delta, \quad t \rightarrow +0 \text{ (тут } \delta \text{ – дельта-функція Дірака).}$$

Зауваження 1.12. Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, то задача (1.50), (1.51) перетворюється в задачу Коші для рівняння (1.50). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1$, $\forall \sigma \in \mathbb{R}$, $G(t, x) = F^{-1}[e^{-t|\sigma|^\alpha}]$ і $G(t, \cdot) \rightarrow F^{-1}[1] = \delta$ при $t \rightarrow +0$ у просторі Φ'_α .

Наслідок 1.5. Нехай $\omega(t, x) = f * G(t, x)$, $f \in \Phi'_{\alpha,*}$, $(t, x) \in \Omega$; тут $\Phi'_{\alpha,*}$ – клас згортувачів у просторі Φ_α . Тоді у просторі Φ'_α виконується граничне співвідношення $\mu\omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \omega(t_k, \cdot) \rightarrow f$, $t \rightarrow +0$.

Зауваження 1.13. Функція $G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (1.50).

Справді, $\frac{\partial}{\partial t} G(t, x) = -F^{-1}[|\sigma|^\alpha Q(t, \sigma)]$, $\hat{A}G(t, x) = F^{-1}[|\sigma|^\alpha F[F^{-1}Q(t, \sigma)]] = F^{-1}[|\sigma|^\alpha Q(t, \sigma)]$.

Звідси отримуємо

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} + \hat{A}G(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Omega,$$

що й потрібно було довести.

Надалі функцію $G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, називатимемо *фундаментальним розв'язком багатоточкової за часом задачі для рівняння (1.50)*.

З наслідку 1.5 випливає, що нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (1.50) можна сформулювати так: знайти функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, яка задовольняє рівняння (1.50) і умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k u(t_k, \cdot) = f, \quad f \in \Phi'_{\alpha,*} \quad (1.55)$$

(граничне співвідношення (1.55) розглядається у просторі Φ'_α , обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m, t_1, \dots, t_m$ такі ж, як у випадку задачі (1.50), (1.51)).

Теорема 1.11. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (1.50), (1.55) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою $u(t, x) = f * G(t, x)$, $u(t, \cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t > 0$.*

Теорема 1.12. *Нехай $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, – розв'язок задачі (1.50), (1.55) з початковою функцією $f \in \Phi'_{\alpha,*}$, яка має обмежений носій (тобто $\text{supp} f$ – обмежена множина в \mathbb{R}). Тоді $u(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ рівномірно на \mathbb{R} .*

1.2.4. Еволюційні рівняння з функціями від оператора дробового диференціювання

Тут досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача у півпросторі $t > 0$ для еволюційного рівняння $\partial u / \partial t + Bu = 0$, де

$$B := \sqrt{I + |iD_x|^\alpha} = \sqrt{I + |D_x|^\alpha}, \quad \alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}.$$

Такий оператор можна розуміти як певний аналог оператора $\sqrt{I + (iD_x)^2} = \sqrt{I - D_x^2}$, який використовується в теорії дробового інтегродиференціювання і називається оператором Бесселя дробового диференціювання.

Міркуючи аналогічно тому, як це зроблено у пункті 1.2.1, одержимо

$$\begin{aligned} B\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^\alpha)^{1/2} F[\varphi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda = \\ &= F^{-1} \left[(1 + |\lambda|^\alpha)^{1/2} F[\varphi] \right], \quad \varphi \in \Phi_\alpha. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Для обґрунтування співвідношення (1.56) наведемо таке твердження.

Лема 1.27. *Функція $a(\sigma) := (1 + |\sigma|^\alpha)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – мультиплікатор у просторі Ψ_α .*

Нехай $\hat{B} := B|_{\Phi_\alpha}$ – звуження оператора B на Φ_α . Із леми 1.27 випливає, що оператор \hat{B} відображає Φ_α в Φ_α , є лінійним і неперервним і при цьому збігається на Φ_α з псевдодиференціальним оператором $F^{-1}[a(\sigma)F]$, побудованим за функцією-символом $a(\sigma) = (1 + |\sigma|^\alpha)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Оператор \hat{B} є функцією від оператора $|D_x|^\alpha$: $\hat{B} = a(|D_x|^\alpha)$.

Розглянемо тепер еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \hat{B}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega. \quad (1.57)$$

Під розв'язком рівняння (1.57) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка: 1) неперервно диференційовна за змінною t ; 2) $u(t,\cdot) \in \Phi_\alpha = D(\hat{B})$ при кожному $t > 0$; $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє дане рівняння.

Для рівняння (1.57) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння, який задовольняє умову

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t_1,x) - \dots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, f \in \Phi_\alpha, \quad (1.58)$$

де $u(0,x) = \lim_{t \rightarrow +0} u(t,x)$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, +\infty)$, – фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$.

Розв'язок задачі (1.57), (1.58) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є. Міркуючи формально, знайдемо, що

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x),$$

де $G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)]$, $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t, \sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\}$,

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\} \right)^{-1}.$$

Коректність наведеної формули впливає з властивостей функції $G(t, x)$, які пов'язані з властивостями функції $Q(t, \sigma)$, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t, \sigma)$ як функції змінної σ .

Лема 1.28. При кожному фіксованому $t > 0$ функція $Q(t, \sigma)$ нескінченно диференційовна за змінною $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; для її похідних виконуються оцінки $|D_\sigma^s Q(t, \sigma)| \leq c_s t^{\gamma s} |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\{-t|\sigma|^{\alpha/2}\}$, де стала $c_s = c_s(\alpha) > 0$ не залежить від t , $\gamma = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < t < 1, \\ 1, & \text{якщо } t \geq 1, \end{cases}$ $\omega_s = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } \sigma \neq 0, |\sigma| < 1, \\ \alpha s, & \text{якщо } |\sigma| \geq 1 \end{cases}$

Зауваження 1.14. Використовуючи лему 1.28, безпосередньо переконуємося в тому, що $\{Q_1(t, \cdot), Q(t, \cdot)\} \subset \Psi_\alpha$ при кожному $t > 0$. Звідси, з урахуванням обмеженості Q_2 на \mathbb{R} , отримуємо, що функція Q_2 – мультиплікатор у просторі Ψ_α .

Дослідимо тепер, якими властивостями володіє функція

$$G(t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma = F^{-1}[Q(t, \sigma)].$$

З леми 1.28 випливає, що $G(t, \cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t > 0$, тобто функція G та її похідні задовольняють нерівності

$$|D_x^k G(t, x)| \leq c_k (1 + |x|)^{-(1+[\alpha]+k)}, \quad (t, x) \in \Omega,$$

де $c_k = c_k(t) > 0$.

Неведемо ще деякі властивості функції $G(t, x)$.

1. $G(t, \cdot)$, $t \in (0, +\infty)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі Φ_α , диференційовна по t .

2. Правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t}, \quad \forall f \in \Phi'_\alpha, t > 0.$$

3. У просторі Φ'_α виконується граничне співвідношення:

$$\mu G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k, \cdot) \rightarrow \delta, \quad t \rightarrow +0,$$

де δ – дельта-функція Дірака.

4. Функція $G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$ задовольняє рівняння (1.57).

5. Якщо $f \in \Phi'_{\alpha,*}$ ($\Phi'_{\alpha,*}$ – клас згортувачів у просторі Φ_α), то у просторі Φ'_α справджується граничне співвідношення

$$\mu f * G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k (f * G(t_k, \cdot)) \rightarrow f, \quad t \rightarrow +0.$$

З властивості 5 випливає, що нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (1.57) можна сформулювати так: знайти функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, яка задовольняє рівняння (1.57) і умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow 0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k u(t_k, \cdot) = f, \quad f \in \Phi'_{\alpha,*} \quad (1.59)$$

(граничне співвідношення (1.59) розглядається в просторі $\Phi'_{\alpha,*}$).

Основний результат містить наступне твердження.

Теорема 1.13. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (1.57), (1.59) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою $u(t, x) = f * G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, $u(t, \cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t > 0$.*

Як приклад, розглянемо задачу (1.57), (1.59) з початковою функцією $f = \delta$, де δ – дельта-функція Дірака. Оскільки $\delta \in \Phi'_{\alpha,*}$, то, згідно з теоремою 1.12, така задача коректно розв'язна, розв'язок дається формулою

$$u(t, x) = \delta * G(t, x) = G(t, x), \quad (t, x) \in \Omega.$$

Оскільки $Q(t, \sigma) = F[G(t, x)] = \int_{\mathbb{R}} G(t, x) e^{i\sigma x} d\sigma$, $(t, \sigma) \in \Omega$,

то $Q(t, 0) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x) dx = \exp\{-t\}(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k\})^{-1}$

(тут враховано, що $a(0) = 1$). Отже, розв'язок вказаної задачі володіє властивістю

$$\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Зазначимо також, що особливістю проведених у цьому пункті досліджень є неоднорідність у точці $\sigma = 0$ функції-символи $a(\sigma) = (1 + |\sigma|^\alpha)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, оператора $\hat{B} = B|_{\Phi_\alpha}$.

Операційне числення для оператора $\hat{A} = |D_x|^\alpha|_{\Phi_\alpha}$ можна будувати за функціями, які зростають експоненціально. Наприклад, нехай f – ціла функція, порядок зростання якої не перевищує β , $\beta \in (0, +\infty)$, з типом, меншим за b , $b \in (0, +\infty)$, тобто f задовольняє умову

$$|f(z)| \leq c e^{b|z|^\beta}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $c > 0$, $0 < b_1 < b$ – деякі сталі, залежні від f .

Лема 1.29. Для похідних функції f на дійсній осі правильними є оцінки $|f^{(n)}(x)| \leq c_1 B^n n^{n(1-1/\beta)}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, де $c_1, B > 0$ – деякі сталі, залежні від f .

Введемо позначення: $a(\xi) := |\xi|^\alpha$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$.

Лема 1.30. Функція $f(a)$ – мультиплікатор у просторі Ψ_α .

Використовуючи методи, наведені в цьому пункті, для еволюційних рівнянь з оператором $f(\hat{A}) = f(|D_x|^\alpha|_{\Phi_\alpha})$ можна досліджувати нелокальну багатоточкову за часом задачу (зокрема, задачу Коші) на коректну розв'язність у просторах Φ_α та Φ'_α .

1.3. Нелокальна за часом задача в просторах узагальнених періодичних функцій

При дослідженні багатьох задач аналізу та математичної фізики виникають різні класи узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо). Якщо розглядати періодичні узагальнені функції, то, як доведено в [1.1], всі ці класи вкладаються в простір формальних тригонометричних рядів, які ототожнюються з лінійними неперервними функціоналами, заданими на просторі тригонометричних поліномів. У просторах узагальнених періодичних функцій визначені і є неперервними операції диференціювання, множення на

нескінченно диференційовні періодичні функції та згортки. Оператори дробового диференціювання та задача Коші для еволюційних рівнянь з такими операторами в просторах узагальнених періодичних функцій досліджувалися в [1.3].

1.3.1. Простори основних та узагальнених періодичних функцій

Простори T та T' . Символом T позначимо множину всіх тригонометричних поліномів

$$P(x) = \sum_{k=-s}^s c_{k,p} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}_+, i = \sqrt{-1},$$

над полем комплексних чисел, тобто $c_{k,p} \in \mathbb{C}$. Очевидно, що відносно звичайних операцій додавання поліномів та множення їх на числа T є лінійним простором.

У T природним способом вводяться операції диференціювання, множення поліномів та згортки, які є неперервними в T .

Символом T' позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи з T' назвемо 2π -періодичними узагальненими функціями.

Операція диференціювання у просторі T' визначається за допомогою формули

$$\langle f^{(k)}, P \rangle = (-1)^k \langle f, P^{(k)} \rangle, \quad P \in T, k \in \mathbb{N}.$$

Вона є неперервною в T' , оскільки неперервною є така операція в просторі T . Отже, кожний елемент з T' є нескінченно диференційовним в T' .

Операція згортки в T' двох узагальнених функцій $\{f, g\} \subset T'$ визначається так:

$$\langle f * g, P \rangle = \left\langle f_x, \langle g_y, P(x+y) \rangle \right\rangle, \quad \forall P \in T.$$

Вона має зміст, оскільки

$$\langle g_y, P(x+y) \rangle = \left\langle g_y, \sum_{k=-s}^s c_{k,p} e^{ik(x+y)} \right\rangle = \sum_{k=-s}^s c_{k,p} \langle g, e^{iky} \rangle e^{ikx} \in T.$$

Згортка $f * g \in T'$ є неперервною в T' у тому розумінні, що коли $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ в T' , то $f_n * g \rightarrow f * g$ при $n \rightarrow \infty$ в T' для $\forall g \in T'$. Цей факт випливає з самого означення згортки. Крім того, правильною є формула [1.1]:

$$(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g = f * g^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Простір T неперервно вкладається в T' у тому розумінні, що якщо $Q \in T$, то елемент $f_Q \in T'$, який відповідає Q , визначається формулою

$$\langle f_Q, P \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x) \overline{P(x)} dx, \quad \forall P \in T.$$

Символом $H\langle m_k \rangle$ позначимо сукупність всіх 2π -періодичних нескінченно диференційовних на \mathbb{R} функцій, які володіють властивістю: існують сталі c, B такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq c B^k m_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Множина функцій $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, для яких справедлива оцінка, утворює банахів простір $H_B\langle m_k \rangle$ відносно норми

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\substack{x \in [0, 2\pi] \\ k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{|\varphi^{(k)}(x)|}{B^k m_k}.$$

Якщо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається з однією із послідовностей Жевре, то $H\langle (k!)^\beta \rangle = H\langle k^{k\beta} \rangle := G_{\{\beta\}}, \beta > 0$ – простір Жевре порядку β . Простір $H\langle k! \rangle = H\langle k^k \rangle \equiv G_{\{1\}}$ складають аналітичні 2π -періодичні на \mathbb{R} функції.

Символом $H'\langle m_k \rangle$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $H\langle m_k \rangle$ зі слабкою збіжністю. $H'\langle m_k \rangle = \lim_{B \rightarrow \infty} \text{pr} H'_B\langle m_k \rangle$. Елементи простору $H'\langle m_k \rangle$ називаються ультрарозподілами класу $\{m_k\}$. Елементи з $H'\langle k! \rangle$ називаються гіперфункціями або аналітичними функціоналами. У працях Горбачук В.І. дається характеристика просторів $H\langle m_k \rangle$ та $H'\langle m_k \rangle$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів.

У просторі $H'\langle m_k \rangle$ згортка визначена для довільних $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k \rangle \subset T'$. Правильним є таке твердження.

- Лема 1.31.** 1. Якщо $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k \rangle$, то $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k \rangle$.
 2. Для довільних $\varphi \in H\langle m_k \rangle$ та $f \in H'\langle m_k \rangle$ згортка $f * \varphi \in H\langle m_k \rangle$.

Для згортки $f * \varphi$, $f \in H'\langle m_k \rangle$, $\varphi \in H\langle m_k \rangle$ існує інше (еквівалентне вихідному) зображення, а саме

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot) \rangle \equiv \langle f_t, \varphi(x - t) \rangle,$$

де T_{-x} – оператор зсуву аргумента у просторі $H\langle m_k \rangle$, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$.

1.3.2. Псевдодиференціальні оператори у просторах періодичних функцій

Нехай $\tilde{G}: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ – неперервна парна функція така, що $\tilde{G}(x) \geq |x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. За допомогою функції \tilde{G} у просторі T' побудуємо оператор $\hat{A}: T' \rightarrow T'$

$$T' \ni \tilde{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\tilde{f}) e^{ikx} \rightarrow \hat{A}\tilde{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(k) c_k(\tilde{f}) e^{ikx} \in T',$$

$$c_k(\tilde{f}) = \langle \tilde{f}, e^{-ikx} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оператор \hat{A} лінійний і неперервний в T' . Оператор \hat{A} – згортувач у алгебрі T' .

Якщо $\tilde{G}(x) = |x|^\gamma$, $\gamma \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, то \hat{A} збігається з оператором \hat{A}_γ дробового диференціювання в T' . Зазначимо, що сім'я операторів володіє властивостями:

$$\text{а) } \forall \tilde{f} \in T' \quad \forall \{\alpha, \beta\} \subset (0, +\infty): \hat{A}_\alpha(\hat{A}_\beta \tilde{f}) = \hat{A}_{\alpha+\beta} \tilde{f};$$

$$\text{б) } \forall \tilde{f} \in T' \quad \hat{A}_{2k} \tilde{f} = (-1)^k D_x^{2k} \tilde{f}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Якщо A – звуження оператора \hat{A} на простір $H = L_2[0, 2\pi]$, то, як доведено в [1.3], A – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною областю визначення, причому $T \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор A надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $L_2[0, 2\pi]$.

Нехай $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – деяка неперервна функція. За функцією f та оператором A побудуємо оператор $f(A)$:

$$f(A)\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(\varphi) e^{ikx}, \quad \lambda_k = \tilde{G}(k), \quad \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $f(A) := A_f$ – невід’ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення

$$\mathcal{D}(A_f) = \left\{ \varphi \in H: \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^2(\lambda_k) |c_k(\varphi)|^2 \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(A_f \varphi)|^2 < \infty \right\},$$

причому $T \subset \mathcal{D}(A_f)$, $\sigma(A_f) = \{f(\lambda_k), \lambda_k = \tilde{G}(k)\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1.14. *Якщо неперервна на $[0, \infty)$ функція f задовольняє умову $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall x \in [0, \infty): 0 \leq f(x) \leq c_\varepsilon \rho(\varepsilon x)$, то оператор A_f неперервний у просторі $H\langle m_k \rangle$ і відображає цей простір в себе.*

1.3.3. Нелокальна багатоточкова за часом задача

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1.60)$$

де A_f – оператор, побудований у 1.3.2. Під розв’язком рівняння (1.60) розуміємо функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, неперервно диференційовну по t при кожному $x \in \mathbb{R}$, яка задовольняє це рівняння, $u(t, \cdot) \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $t \in (0, T]$.

Розглянемо задачу: знайти функцію u , яка є розв’язком рівняння (1.60) та задовольняє умову

$$\mu u(0, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k u(t_k, \cdot) = g, \quad g \in L_2[0, 2\pi], \quad (1.61)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$, B_1, \dots, B_m – псевдодиференціальні оператори в просторі $L_2[0, 2\pi]$, побудовані за функціями g_1, \dots, g_m відповідно та оператором A . Тут $g_k: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $k \in \{1, \dots, m\}$, – неперервна функція, яка задовольняє умову:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in [0, \infty): 0 \leq g_k(x) \leq e^{\varepsilon f(x)}, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$

оператори B_1, \dots, B_m – невід’ємні самоспряжені в $H = L_2[0, 2\pi]$ зі щільними в H областями визначення, $\sigma(B_i) = \{g_i(\lambda_k), \lambda_k = \tilde{G}(k), k \in \mathbb{Z}\}$, $i \in \{1, \dots, m\}$. При цьому $u(0, \cdot)$ розуміємо як $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot)$, де границя розглядається в гільбертовому

просторі $H = L_2[0, 2\pi]$. Задачу (1.60), (1.61) надалі називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (1.61).

Нехай u – розв’язок рівняння (1.60). Оскільки $u(t, \cdot) \in H$ при кожному $t \in (0, T]$, то

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_k(t) e^{ikx}, \quad (t, x) \in \Omega,$$

$$\tilde{c}_k(t) \equiv c_k(u(t, \cdot)) = (u(t, \cdot), e^{-ikx}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

причому

$$\|u(t, \cdot)\|_H^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{c}_k(t)|^2, \quad t \in (0, T].$$

Для того, щоб знайти $\tilde{c}_k(t)$ домножимо (1.60) скалярно на e^{-ikx} , $k \in \mathbb{Z}$; у результаті прийдемо до співвідношення:

$$(u'_t, e^{-ikx}) + (A_f u, e^{-ikx}) = 0.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}$ маємо

$$(A_f u, e^{-ikx}) = (u, A_f e^{-ikx}) = (u, f(\lambda_k) e^{-ikx}) = f(\lambda_k) (u, e^{-ikx}) = f(\lambda_k) \tilde{c}_k(t),$$

$$\lambda_k = \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k)$$

(тут враховано, що $e^{-ikx} \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $k \in \mathbb{Z}$, причому e^{-ikx} є власною функцією оператора A_f , а $f(\lambda_k)$ – його власне число).

Із диференційовності $u(t, \cdot)$ (за змінною $t \in (0, T]$) випливає диференційовність функції $\tilde{c}_k(t) = (u(t, \cdot), e^{-ikx})$, $t \in (0, T]$. Отже,

$$\frac{d}{dt} \tilde{c}_k(t) = \frac{d}{dt} (u(t, \cdot), e^{-ikx}) = \left(\frac{d}{dt} u(t, \cdot), e^{-ikx} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо також, що $\lim_{t \rightarrow +0} \tilde{c}_k(t) = \tilde{c}_k(0) = c_k(u(0, \cdot))$. Справді, $\tilde{c}_k(t) = (u(t, \cdot), e^{-ikx})$, $\tilde{c}_k(0) = (u(0, \cdot), e^{-ikx})$,

$$|\tilde{c}_k(t) - \tilde{c}_k(0)| = |(u(t, \cdot) - u(0, \cdot), e^{-ikx})| \leq \|u(t, \cdot) - u(0, \cdot)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +0.$$

Функція $\tilde{c}_k(t)$ задовольняє рівняння

$$\tilde{c}'_k(t) + f(\lambda_k) \tilde{c}_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

загальний розв’язок якого має вигляд

$$\tilde{c}_k(t) = c_k \exp\{-tf(\lambda_k)\}, \quad c_k = \text{const}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp\{-tf(\lambda_k)\} e^{ikx}, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.62)$$

Згідно з означенням оператора A_f маємо:

$$A_f u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f(\lambda_k) e^{-tf(\lambda_k)} e^{ikx}.$$

Функція $u(t, x)$ диференційовна за змінною t на проміжку $(0, T]$ при кожному $x \in [0, 2\pi]$ і

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f(\lambda_k) e^{-tf(\lambda_k)} e^{ikx}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t, x)$ є розв'язком рівняння (1.60) тоді й лише тоді, коли вона зображається формулою (1.62). Звідси випливає, що задача (1.60), (1.61) має єдиний розв'язок.

Підсумуємо одержані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 1.15. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (1.60), (1.61) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою $u(t, x) = G(t, x) * g(x)$, де $G(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}$, $g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx} \in H$, при цьому $\{G(t, \cdot), u(t, \cdot)\} \subset H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.*

Зауважимо, що внаслідок відповідної властивості згортки $u(t, \cdot) = G(t, \cdot) * g \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$, якщо $g \in H'\langle m_k \rangle$. Функція $u(t, \cdot)$ є розв'язком рівняння (1.60), який задовольняє умову (1.61), де $g \in H'\langle m_k \rangle$, у тому розумінні, що

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} B_k u(t, \cdot) = g, \quad g \in H'\langle m_k \rangle \quad (1.62)$$

(границі розглядаються в просторі $H'\langle m_k \rangle$).

Лема 1.32. *Функція $G(t, \cdot)$, $t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі $H\langle m_k \rangle$, диференційовна по t .*

Лема 1.33. *Функція $u(t, x) = G(t, x) * g = \langle g_y, G(t, x - y) \rangle$, $g \in H'\langle m_k \rangle$, диференційовна по t , при цьому $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \left\langle g_y, \frac{\partial}{\partial t} G(t, x - y) \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} G(t, x) * g$.*

Функція $u(t, x) = G(t, x) * g$, $g \in H'\langle m_k \rangle$ задовольняє рівняння (1.60). Справді, $u(t, \cdot) \in H'\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$. Крім того,

$$\begin{aligned} A_f(G(t, x) * g) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(G(t, x) * g) e^{ikx} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(G) c_k(g) e^{ikx} = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що функція $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (1.60).

Лема 1.34. Нехай $u(t, x) = G(t, x) * g$, $g \in H'\langle m_k \rangle$, $(t, x) \in \Omega$. Тоді у просторі $H'\langle m_k \rangle$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} B_k u(t, \cdot) = g. \quad (1.63)$$

Оскільки $u(t, x) = G(t, x)$, якщо $g = \delta \in H'\langle m_k \rangle$, то функція $G(t, x)$ є розв'язком рівняння (1.60) і з (1.63) випливає, що функція $G(t, x)$ у просторі $H'\langle m_k \rangle$ задовольняє граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} G(t, \cdot) - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} B_n G(t, \cdot) = \delta.$$

Надалі $G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, називатимемо фундаментальним розв'язком нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (1.60).

Лема 1.34 дозволяє ставити нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (1.60) так: знайти розв'язок рівняння (1.60), який у просторі $H'\langle m_k \rangle$ задовольняє граничне співвідношення (1.63).

Теорема 1.16. Нелокальна багатоточкова за часом задача (1.60), (1.63) коректно розв'язна, її розв'язок дається формулою $u(t, x) = G(t, x) * g$, $(t, x) \in \Omega$, $u(t, \cdot) \in H'\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

1.3.4. Граничні властивості розв'язків багатоточкової за часом задачі

Із вигляду розв'язку задачі (1.60), (1.63) випливає, що його можна подати у вигляді

$$u(t, x) = \tilde{G}(t, x) * \tilde{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) c_k(\tilde{g}) e^{ikx}, \quad (t, x) \in \Omega,$$

де $\tilde{g} = g * \alpha$,

$$\tilde{G}(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) e^{ikx}, \quad (t, x) \in \Omega,$$

$\tilde{G}(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$,

$$\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_k(\alpha) = Q_2(\lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx}, \quad c_k(g) = \langle g, e^{-ikx} \rangle, \quad g \in H'\langle m_k \rangle.$$

Зауважимо також, що $c_k(\tilde{g}) = c_k(g)c_k(\alpha) = c_k(g)Q_2(\lambda_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Отже, розв'язок задачі (1.60), (1.63) збігається з розв'язком задачі Коші для рівняння (1.63), який відповідає початковій функції \tilde{g} . Оскільки $\alpha \in H'\langle m_k \rangle$, то за умови $g \in H'\langle m_k \rangle$ маємо, що $\tilde{g} = g * \alpha \in H'\langle m_k \rangle$, при цьому $u(t, \cdot) = \tilde{G}(t, \cdot) * \tilde{g} \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$ і $u(t, \cdot) \rightarrow \tilde{g}$ при $t \rightarrow +0$ у просторі $H'\langle m_k \rangle$. Якщо g належить до вужчого, ніж $H'\langle m_k \rangle$ простору, то \tilde{g} також може належати до простору, що міститься в $H'\langle m_k \rangle$, поведінка функції $u(t, x)$ у околі точки $(0, x)$ істотно залежить від того, елементом якого простору є $\tilde{g} = g * \alpha$.

Теорема 1.17. *Правильними є співвідношення еквівалентності ($\tilde{g} \in H$) \Leftrightarrow ($\exists c > 0 \forall t \in (0, T]: \|u(t, \cdot)\|_H \leq c$), при цьому $u(t, \cdot) \rightarrow \tilde{g}$ при $t \rightarrow +0$ у просторі $H = L_2[0, 2\pi]$.*

Нехай тепер γ – неперервна, додатна та інтегровна на $(0, T]$ функція така, що $\gamma(0) = 0$, K_γ – сукупність розв'язків багатоточкової задачі для рівняння (1.60), кожний з яких будується за певним елементом $\tilde{g} \in H'\langle m_k \rangle$, і ці розв'язки задовольняють умову

$$\int_0^T \gamma(t) \|u(t, \cdot)\|_H^2 dt < +\infty.$$

Оскільки $\gamma(t) \geq \gamma_\varepsilon > 0$ на кожному відрізку $[\varepsilon, T]$, $0 < \varepsilon < T$, то ця оцінка характеризує поведінку $u(t, x)$ при наближенні t до нуля (справа). Введемо позначення:

$$L(\lambda) = \left(\int_0^T \gamma(t) e^{-2t f(\lambda)} dt \right)^{-1/2}, \quad \lambda \geq 0.$$

Функція L – додатна, неперервна на $[0, \infty)$,

$$L(\lambda) \geq c > 0, \quad \forall \lambda \in [0, \infty), \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} L(\lambda) = +\infty.$$

На області визначення $\mathcal{D}(L(A))$ оператора $L(A)$ введемо скалярний добуток

$$(\varphi, \psi)_{H_L} := (L(A)\varphi, L(A)\psi)_H, \quad \forall \{\varphi, \psi\} \in \mathcal{D}(L(A)),$$

після чого $\mathcal{D}(L(A))$ перетворюється у гільбертів простір H_L . Якщо взяти H_L за позитивний простір і позначити через H'_L негативний простір, побудований за парою гільбертових просторів H та H_L (див.), то дістанемо ланцюжок

$$H\langle m_k \rangle \subset H_L \subset H \subset H'_L \subset H'\langle m_k \rangle$$

неперервно і щільно вкладених просторів, при цьому

$$\begin{aligned} (\varphi \in H_L) &\Leftrightarrow \left(\|\varphi\|_{H_L}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} L^2(\lambda_k) |c_k(\varphi)|^2 < \infty, \quad c_k(\varphi) = (\varphi, e^{-ikx}) \right), \\ (g \in H'_L) &\Leftrightarrow \left(\|g\|_{H'_L}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} L^{-2}(\lambda_k) |c_k(g)|^2 < \infty, \quad c_k(g) = \langle g, e^{-ikx} \rangle \right). \end{aligned}$$

Теорема 1.18. Нехай $u(t)$ – розв'язок багатоточкової задачі (1.60), (1.63), побудований за початковою функцією $g \in H'\langle m_k \rangle$. Тоді $(\tilde{g} \in H'_L) \Leftrightarrow (u(t, \cdot) \in K_\gamma, t \in (0, T])$, $\tilde{g} = g * \alpha$, при цьому $u(t, \cdot) \rightarrow \tilde{g}$ при $t \rightarrow +0$ у просторі H'_L .

Скориставшись зображенням узагальнених періодичних функцій, у вигляді формальних рядів Фур'є та підібравши при цьому відповідним чином функцію γ , простір $H'\langle m_k \rangle$ можна описати, охарактеризувавши поведінку розв'язку $u(t)$ багатоточкової задачі (1.60), (1.63) в околі нуля.

Наприклад, якщо $\gamma(t) = \exp\{-t^{-q}\}$, $q > 0$, то, правильним є співвідношення еквівалентності

$$\begin{aligned} &(\tilde{g} \in G'_{\{\beta\}} \equiv H\langle k^{k\beta} \rangle, \beta > 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall \alpha > 0 \exists c = c(\alpha) > 0: \|u(t, \cdot)\| \leq c \exp\{\alpha t^{-q}\}, t \in (0, T], q = (\beta - 1)^{-1}), \end{aligned}$$

або

$$(\tilde{g} \in G'_{\{\beta\}} \equiv H\langle k^{k\beta} \rangle, \beta > 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (u(t, \cdot) \in K_\gamma, \gamma(t) = \exp\{-t^{-q}\}, t \in (0, T], q = (\beta - 1)^{-1}).$$

1.4. Нелокальна за часом задача для диференціально-операторних рівнянь

При дослідженні багатьох задач аналізу та математичної фізики замість пари просторів – основного та спряженого з ним простору, часто використовується трійка гільбертових просторів $H_+, H, H_-, H_+ \subset H \subset H_-$, де H_+ – позитивний простір, H_- – негативний простір, H_+, H_- – простори відповідно основних та узагальнених елементів – лінійних неперервних функціоналів на H_+ . Роль гільбертового простору H в такому ланцюжку полягає в тому, що скалярний добуток в ньому продовжується до білінійної форми на $H_- \times H_+$, яка задає дію узагальненого елемента на основний. У [1.1] розглядаються простори основних та узагальнених елементів, які будуються за функціями від довільного самоспряженого оператора.

У цьому пункті розглядаються простори узагальнених елементів, які ототожнюються з формальними рядами Фур'є і будуються за невід'ємним самоспряженим оператором з суто дискретним спектром. Для диференціально-операторного рівняння

$$u'(t) + \varphi(A)u(t) = 0, t \in (0, T],$$

$\varphi(A)$ - функція від оператора A , ставиться нелокальна багатоточкова за часом задача у випадку, коли відповідна умова задовольняється в позитивному або негативному просторі, які побудовані за оператором A . Встановлюється коректна розв'язність такої задачі, при цьому будується фундаментальний розв'язок, досліджуються його структура та властивості. Розв'язок $u(t)$ дається у вигляді абстрактної згортки $G(t) * g$, де граничний елемент є лінійним неперервним функціоналом, заданим на просторі основних елементів (позитивному просторі H_+ , побудованому за оператором A), при цьому $\{G(t), u(t)\} \subset H_+$ при кожному $t \in (0, T]$, але згортка $G(t) * g$ задовольняє багатоточкову умову в негативному просторі H_- .

1.4.1. Еволюційні рівняння з операторами спектри, яких суто дискретні

Нехай H – сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) і нормою $\|\cdot\|$, $\{e_k, k \geq 1\}$ – ортонормований базис в H . Введемо позначення

$$\Phi_m = \left\{ \varphi \in H: \varphi = \sum_{k=1}^m c_{k,\varphi} e_k, c_{k,\varphi} \in \mathbb{C} \right\}, \quad \Phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind} \Phi_m.$$

Отже, послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$ збігається в Φ до елемента $\varphi \in \Phi$, якщо

$$\begin{aligned} \exists m \in \mathbb{N} \exists \nu_0 \in \mathbb{N}: \forall \nu \geq \nu_0: \{\varphi, \varphi_\nu\} \subset \Phi_m, \\ c_{k,\varphi_\nu} \rightarrow c_{k,\varphi}, \nu \rightarrow +\infty, \forall k \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що Φ лежить щільно в H .

Символом Φ' позначимо простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю:

$$\left(\Phi' \ni f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\Phi'} f \in \Phi' \right) \Leftrightarrow \left(\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \Phi \right)$$

зіставлення

$$H \ni \varphi \rightarrow f_\varphi \in \Phi': \langle f_\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi), \forall \psi \in \Phi,$$

визначає вкладення $H \subset \Phi'$. Елементи з простору Φ' називатимемо узагальненими.

Нехай s – простір усіх числових послідовностей $\{c_k, k \in \mathbb{N}\}$, $c_k \in \mathbb{C}$, з покоординатною збіжністю. Ізоморфізм

$$F: \Phi' \ni f \rightarrow \{c_k(f) = \langle f, e_k \rangle, k \in \mathbb{N}\} \in s$$

відображає Φ на множину фінітних послідовностей з s , а H – на l_2 [1.10].

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, де $c_k = \langle f, e_k \rangle$, називається рядом Фур'є елемента $f \in \Phi'$ його ряд Фур'є збігається в Φ' до f ; навпаки, довільний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збігається в Φ' до деякого елемента $f \in \Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [1.10]. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Звідси випливає, що Φ лежить щільно в Φ' .

Нехай G – неперервна монотонно зростаюча на $[0, +\infty)$ функція така, що

$$\exists c > 0 \forall x \in [0, \infty) G(x) \geq c > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} G^{-2}(k) < +\infty.$$

За функцією G у просторі Φ' побудуємо оператор \hat{A} :

$$\Phi' \ni f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} G(k) c_k(f) e_k = \hat{A}f \in \Phi'.$$

Очевидно, оператор \hat{A} є лінійним і неперервним в Φ' . Якщо A – звуження оператора \hat{A} на H , то A – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \varphi \in H: \sum_{k=1}^{\infty} G^2(k) |c_k(\varphi)|^2 < +\infty, c_k(\varphi) = (\varphi, e_k), k \in \mathbb{N} \right\},$$

причому $\Phi \subset \mathcal{D}(A)$. Спектр оператора A суто дискретний з єдиною граничною точкою у нескінченності: $\sigma(A) = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$, де $\lambda_k = G(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Введемо тепер деякі класи елементів, пов'язаних з оператором A . Для цього розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка володіє властивостями 1)–3), сформульованими у п. 1.1.1.

Позначимо

$$H_{\infty}(A) := \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{pr} H_{\alpha}(A), \quad H_{\alpha}(A) = \mathcal{D}(A^{\alpha}),$$

$\mathcal{D}(A^{\alpha})$ – область визначення оператора A^{α} ;

$$\mathcal{D}(A^{\alpha}) = \left\{ \varphi \in H: \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} |c_k(\varphi)|^2 < \infty, \lambda_k = G(k) \right\},$$

$$(\varphi, \psi)_{H_{\alpha}} = (\varphi, \psi) + (A^{\alpha} \varphi, A^{\alpha} \psi), \quad \{\varphi, \psi\} \subset \mathcal{D}(A^{\alpha}).$$

$$H_{\alpha} \langle m_n \rangle := \{ \varphi \in H_{\infty}(A) \mid \exists c > 0 \|A^n \varphi\| \leq c \alpha^n m_n, \alpha > 0, n \in \mathbb{Z}_+ \}.$$

Простір $H_{\alpha} \langle m_n \rangle$ банаховий відносно норми

$$\| \varphi \|_{H_{\alpha} \langle m_n \rangle} = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|A^n \varphi\|}{\alpha^n m_n}.$$

Покладемо $H_{\infty} \langle m_n \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{ind} H_{\alpha} \langle m_n \rangle$. Очевидно, що

$$\Phi \subset H_{\infty} \langle m_n \rangle \subset H_{\infty}(A) \subset H,$$

причому ці вкладення є щільними і неперервними. Якщо через $H'_\infty(A)$, $H'_\infty\langle m_n \rangle$ позначити простори антилінійних неперервних функціоналів, заданих на $H_\infty(A)$, $H_\infty\langle m_n \rangle$ відповідно, то, згідно з [1.10], прийдемо до ланцюжка щільних і неперервних вкладень

$$H \subset H'_\infty(A) \subset H'_\infty\langle m_n \rangle \subset \Phi',$$

при цьому

$$H'_\infty\langle m_n \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{pr} H'_\alpha\langle m_n \rangle.$$

Простори $G_{\{\beta\}}(A) := H_\infty\langle n^{n\beta} \rangle$, $\beta > 0$, називаються просторами, породженими оператором A ; $G_{\{1\}}(A)$ збігається з множиною аналітичних векторів оператора A [1.1].

Нехай $\rho(\lambda) = \sup_n \frac{\lambda^n}{m_n}$, $\lambda \in [1, +\infty)$. Із властивостей послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що функція $\rho(\lambda)$ неперервна, монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, $\rho(\lambda) \geq 1, \forall \lambda \in [1, +\infty)$.

Простір $H_\infty\langle m_n \rangle$ збігається з індуктивною границею гільбертових просторів

$$H_\alpha = \left\{ f \in \Phi' : \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \rho^2\left(\frac{\lambda_k}{\alpha}\right) < \infty, \lambda_k = G(k), c_k(f) = \langle f, e_k \rangle \right\},$$

скалярний добуток у $H_{\{\alpha\}}$ визначається формулою

$$(f, g)_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) \overline{c_k(g)} \rho^2\left(\frac{\lambda_k}{\alpha}\right), \{f, g\} \subset H_\alpha.$$

З точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів простори $H_\infty\langle m_n \rangle$ та $H'_\infty\langle m_n \rangle$ описуються так [1.10]:

$$(f \in H_\infty\langle m_n \rangle) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N}: |c_k(f)| \leq c \rho^{-1}(\mu \lambda_k));$$

$$(f \in H'_\infty\langle m_n \rangle) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{N}: |c_k(f)| \leq c \rho(\mu \lambda_k)).$$

Якщо $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$, то $\rho(\lambda) \sim \exp\{\lambda^{1/\beta}\}$, тобто в цьому випадку для $f \in \Phi'$ правильними є співвідношення еквівалентності:

$$(f \in G_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N}: |c_k(f)| \leq c \exp(-\lambda_k^{1/\beta}));$$

$$(f \in G'_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{N}: |c_k(f)| \leq c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta})).$$

Як приклад формальних рядів Фур'є, розглянемо формальні ряди Фур'є–Ерміта. Нехай $H = L_2(\mathbb{R})$. Функції Ерміта

$$h_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

утворюють ортонормований базис в $L_2(\mathbb{R})$, тому простір Φ у даному випадку складається з функцій вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^m c_{k,\varphi} h_k(x), \quad c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки

$$h'_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2}} h_{k-1}(x) - \sqrt{\frac{k+1}{2}} h_{k+1}(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$h'_0(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} h_1(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

то $\varphi' \in \Phi$, якщо $\varphi \in \Phi$, причому $\varphi'_v \rightarrow \varphi$ при $v \rightarrow \infty$ у просторі Φ , коли $\varphi_v \rightarrow \varphi$ при $v \rightarrow \infty$ у просторі Φ . Отже, у просторі Φ визначена і неперервна операція диференціювання.

Операція диференціювання у просторі Φ' визначається формулою

$$\forall f \in \Phi': \langle f^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \varphi \in \Phi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ця операція лінійна і неперервна в Φ' , оскільки лінійною і неперервною є відповідна операція в просторі Φ' . Отже, кожний елемент простору Φ' є нескінченно диференційовним.

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $c_k = \langle f, h_k \rangle$, називається рядом Фур'є–Ерміта узагальненої функції $f \in \Phi'$. У даному конкретному випадку простір Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k$.

За функцією $G(x) = 2x + 1$, $x \in [0, +\infty)$ і відповідною схемою побудуємо в $H = L_2(\mathbb{R})$ невід'ємний самоспряжений оператор, який збігається з гармонійним осцилятором – невід'ємним самоспряженим оператором, породженим у $L_2(\mathbb{R})$ диференціальним виразом – $d^2/dx^2 + x^2$. Функції Ерміта $h_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, є

власними функціями цього оператора, а $\lambda_k \equiv G(k) = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – його власними значеннями. У праці [1.1] доведено, що $G_{\{\beta\}}(A) \equiv H_\infty \langle n^{n\beta} \rangle = S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $\beta \geq 1$. Отже, простори $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, $\beta \geq 1$, за допомогою коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів характеризуються так:

$$\begin{aligned} (f \in S_{\beta/2}^{\beta/2}) &\Leftrightarrow \left(\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k(f)| \leq c \exp\left(-\mu(2k+1)^{\frac{1}{2\beta}}\right) \right), \\ (f \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})') &\Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k(f)| \leq \\ &\leq c \exp\left(\mu(2k+1)^{\frac{1}{2\beta}}\right)). \end{aligned}$$

Невід'ємні самоспряжені оператори як оператори згортки

Нехай $\{f_1, f_2\} \subset \Phi'$,

$$f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1) e_k, \quad f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_2) e_k.$$

У просторі Φ' визначимо операцію ”*”, яку назовемо ”абстрактною згорткою” (або просто ”згорткою”), за правилом

$$f_1 * f_2 := \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1) c_k(f_2) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1 * f_2) e_k.$$

Звідси випливає властивість комутативності та властивість асоціативності згортки в Φ' . Отже, Φ' – кільце (відносно згортки) з одиницею, роль якої відіграє узагальнений елемент $e = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \in \Phi'$.

Зауважимо, що коли $H = L_2[0, 2\pi]$ – гільбертів простір 2π -періодичних сумовних функцій, заданих на \mathbb{R} , то в цьому випадку Φ' – простір усіх тригонометричних рядів, які ототожнюються з лінійними неперервними функціоналами, заданими на просторі Φ тригонометричних поліномів (див. 1.3). Згортка двох узагальнених періодичних функцій $\{f, g\} \subset \Phi'$ визначається так:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \left\langle f_x, \langle g_y, \varphi(x+y) \rangle \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Як встановлено у п. 1.3, $c_k(f * g) = c_k(f)c_k(g)$. Таким чином, $f * g$ – узагальнена 2π -періодична функція з простору Φ' , яка ототожнюється з рядом Фур'є вигляду

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f * g)e^{ikx} \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)c_k(g)e^{ikx}.$$

Введена операція "абстрактної згортки" є певним аналогом згортки в періодичному випадку, перенесеної формально на елементи $\Phi' \supset H \supset \Phi'$, коли гільбертів простір H має ортонормований базис $\{e_k, k \geq 1\}$.

Введена операція згортки володіє властивостями:

- 1) якщо $\{f_1, f_2\} \subset H'_\infty\langle m_n \rangle$, то $f_1 * f_2 \in H_\infty\langle m_n \rangle$;
- 2) якщо $f_1 \in H'_\infty\langle m_n \rangle$, $f_2 \in H_\infty\langle m_n \rangle$, то $f_1 * f_2$ є елементом простору $H_\infty\langle m_n \rangle$.

Нехай $F: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – деяка неперервна функція. За функцією F побудуємо оператор B :

$$B\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k)c_k(\varphi)e_k, \quad \lambda_k = G(k),$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(B) := \left\{ \varphi \in H: \sum_{k=1}^{\infty} F^2(\lambda_k)|c_k(\varphi)|^2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(B\varphi)|^2 < +\infty \right\}.$$

Зазначимо, що B – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення, $\Phi \subset \mathcal{D}(B)$,

$$\sigma(B) = \{F(\lambda_k), \lambda_k = G(k), k \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 1.24. *Якщо неперервна на $[0, \infty)$ функція F задовольняє умову $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall x \in [0, \infty): 0 \leq F(x) \leq c_\varepsilon \rho(\varepsilon x)$, то оператор B неперервний у просторі $H_\infty\langle m_n \rangle$ і відображає цей простір у себе.*

Надалі вважатимемо, що функція F додатково задовольняє умову

$$\exists c > 0 \exists d_0 > 0 \forall x \in [0, +\infty): F(x) \geq d_0 \ln \rho(c_0 x).$$

m -точкова задача. Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$u'(t) + Bu(t) = 0, \quad t \in (0, T] \quad (1.64)$$

Під розв'язком рівняння (1.64) розумітимемо функцію $u: (0, T] \rightarrow H_\infty\langle m_n \rangle$, сильно диференційовну в H , яка задовольняє рівняння (1.64).

Поставимо таку задачу: знайти функцію u , яка є розв'язком рівняння (1.64) і задовольняє умову

$$\mu u(0) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k u(t_k) = g, \quad g \in H, \quad (1.65)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$, B_1, \dots, B_m – оператори в H , побудовані за функціями g_1, \dots, g_m відповідно. Тут $g_k: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $k \in \{1, \dots, m\}$, – неперервна функція, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in [0, \infty): 0 \leq g_k(x) \leq e^{\varepsilon F(x)}, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$

оператори B_1, \dots, B_m – невід'ємні самоспряжені в H зі щільними в H областями визначення,

$$\sigma(B_i) = \{g_i(\lambda_k): \lambda_k = G(k), k \in \mathbb{N}\}, \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

при цьому $u(0)$ розуміємо як $\lim_{t \rightarrow +0} u(t)$, де границя розглядається в просторі H . Задачу (1.64), (1.65) надалі називатимемо нелокальною m -точковою за часом задачею для рівняння (1.64).

Нехай $u(t)$ – розв'язок рівняння (1.64). Оскільки $u(t) \in H_\infty \langle m_n \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$, то

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(u(t)) e_k, \quad c_k(u(t)) = (u(t), e_k), \quad t \in (0, T],$$

причому

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(u(t))|^2.$$

Для відшукування $c_k(u(t))$ помножимо (1.64) скалярно на e_k , $k \in \mathbb{N}$:

$$(u'(t), e_k) + (Bu(t), e_k) = 0.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{N}$ маємо:

$$(Bu(t), e_k) = (u, B e_k) = (u, F(\lambda_k) e_k) = F(\lambda_k)(u(t), e_k) = F(\lambda_k) c_k(u(t)).$$

Із сильної диференційовності $u(t)$ на $(0, T]$ випливає диференційовність функції

$$c_k(u(t)) \equiv \tilde{c}_k(t) = (u(t), e_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, e_k\right) = \frac{d}{dt}(u(t), e_k) = \frac{d}{dt}c_k(u(t)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо також, що існує $\lim_{t \rightarrow +0} \tilde{c}_k(t) = \tilde{c}_k(0) = c_k(u(0))$. Справді,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k(t) &= (u(t), e_k), \quad \tilde{c}_k(0) = (u(0), e_k), \quad |\tilde{c}_k(t) - \tilde{c}_k(0)| = \\ &= |(u(t) - u(0), e_k)| \leq \|u(t) - u(0)\|_H \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Функція $\tilde{c}_k(t)$ задовольняє рівняння

$$\tilde{c}'_k(t) + F(\lambda_k)\tilde{c}_k(t) = 0, \quad t \in (0, T],$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$\tilde{c}_k(t) = c_k \exp\{-F(\lambda_k)t\}, \quad c_k = \text{const}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp\{-tF(\lambda_k)\}e_k. \quad (1.66)$$

Для відшукування c_k , $k \in \mathbb{N}$, помножимо (1.65) скалярно на e_k , $k \in \mathbb{N}$, у результаті прийдемо до співвідношення

$$\mu \tilde{c}_k(0) - \sum_{n=1}^m \mu_n g_n(\lambda_k) \tilde{c}_k(t_n) = c_k(g), \quad c_k(g) = (g, e_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

тут враховано, що $e_k \in \mathcal{D}(B_n)$ при кожному $k \in \mathbb{N}$, $n \in \{1, \dots, m\}$, e_k є власним елементом оператора B_n , а $g_n(\lambda_k)$ – його власне число. Врахувавши вигляд $\tilde{c}_k(t)$, знайдемо

$$c_k \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n g_n(\lambda_k) \exp\{-t_n F(\lambda_k)\} \right) = c_k(g).$$

Отже,

$$c_k = c_k(g) \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n g_n(\lambda_k) \exp\{-t_n F(\lambda_k)\} \right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t, \lambda_k) = \exp\{-tF(\lambda_k)\},$$

$$Q_2(\lambda_k) = \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n g_n(\lambda) e^{-t_n F(\lambda_k)} \right)^{-1} = \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n g_n(\lambda_k) Q_1(t_n, \lambda_k) \right)^{-1}.$$

Тоді

$$\tilde{c}_k(t) = c_k(u(t)) = Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(u(t)) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) e_k = G(t) * g,$$

де

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e_k, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(g) e_k \in H.$$

Теорема 1.25. *Задача (1.64), (1.65) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою $u(t) = G(t) * g$, $t \in (0, T]$, $u(t) \in H_{\infty}\langle m_n \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.*

Лема 1.37. *Функція $u(t) = G(t) * g$, $g \in H'_{\infty}\langle m_n \rangle$, сильно диференційовна в H на $(0, T]$, при цьому $u'(t) = G'(t) * g$.*

Із вигляду функції $G(t)$ та означення оператора B впливає співвідношення

$$B(G(t) * g) = B\left(\sum_{k=1}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) e_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) e_k = -\tilde{\gamma}(t) * g = -G'(t) * g.$$

Оскільки, $u'(t) = G'(t) * g$, то функція $u(t) = G(t) * g$, $g \in H'_{\infty}\langle m_n \rangle$, є розв'язком рівняння (1.64).

Лема 1.38. *Нехай $u(t) = G(t) * g$, $g \in H'_{\infty}\langle m_n \rangle$, $t \in (0, T]$. Тоді в просторі $H'_{\infty}\langle m_n \rangle$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t) - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} B_n u(t) = g. \quad (1.67)$$

Лема 1.38 дозволяє ставити m -точкову задачу для рівняння (1.64). Правильним є таке твердження.

Теорема 1.26. *Задача (1.64), (1.67) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою $u(t) = G(t) * g$, $t \in (0, T]$, $u(t) \in H_{\infty}\langle m_n \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.*

1.4.2. Наближені розв'язки диференціально-операторних рівнянь

Рівняння гіперболічного типу. Багато задач математичної фізики можна подати у вигляді задачі Коші для еволюційного рівняння гіперболічного типу

$$u''(t) + t^\alpha Au(t) = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = g, \quad u'(0) = \gamma, \quad (1.68)$$

де A – невід'ємний самоспряжений оператор зі щільною областю визначення в сепарабельному гільбертовому просторі. У праці А.В. Бабина методами теорії вагового наближення функцій на півосі одержано зображення розв'язку задачі Коші (1.68) у випадку $\alpha = 0, \gamma = 0$ у вигляді $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t, A)g$, де $P_n(t, \lambda)$ – поліном степеня n змінної λ при фіксованому t (збіжність розглядається в просторі H). У припущенні, що елемент g належить до області визначення оператора $\operatorname{ch}\sqrt{A}$, за шукані поліноми у вказаній праці беруться поліноми, які наближують функцію $\cos(t\sqrt{\lambda})$ на півосі з вагою $\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}$. При цьому дається оцінка швидкості збіжності: похибка $\|u(t) - P_n(t, A)g\|$ спадає як $\exp\{-\delta n\}$, $\delta > 0$. Тут пропонується інший метод побудови поліномів P_n , який базується на наближенні функцій на півосі частинними сумами їхніх рядів Фур'є, побудованими за ортогональними многочленами Лагерра, що утворюють ортонормований базис у просторі $L_2((0, \infty), \lambda^\alpha \exp(-\mu\lambda))$, де $\alpha > -1$, а $\mu > 0$ – число, залежне від векторів g, γ . Цей метод дає точнішу оцінку відхилення, але у вузкому класі початкових даних.

У цьому пункті будуються наближені розв'язки диференціально-операторного рівняння вигляду

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + Bu(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (1.69)$$

де B – невід'ємний самоспряжений оператор в $L_2(\mathbb{R})$, який є функцією гармонійного осцилятора $-d^2/dx^2 + x^2$. При цьому відповідні наближення є рівномірними відносно t, x .

Отже, нехай $H = L_2(\mathbb{R})$,

$$\Phi_m = \left\{ \varphi: \varphi = \sum_{k=0}^m c_{k,\varphi} h_k, c_{k,\varphi} \in \mathbb{C} \right\}, \quad \Phi = \bigcup_m \Phi_m,$$

$h_k, k \in \mathbb{Z}_+$, – функції Ерміта, які утворюють ортонормований базис у $L_2(\mathbb{R})$.

Розглянемо функцію $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, яка володіє властивостями:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall x \in [0, \infty): 0 \leq f(x) \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon x}, \\ \exists d_0 > 0 \forall x \in [0, \infty): f(x) \geq d_0 x. \end{aligned}$$

За функцією f будуюмо оператор $\hat{B}: \Phi' \rightarrow \Phi'$, для якого на елементи з Φ' визначається співвідношенням:

$$\Phi' \ni \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k = \varphi \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k h_k, \quad \lambda_k := f(2k + 1).$$

Нехай B – звуження на $L_2(\mathbb{R})$ оператора \hat{B} ; B – невід'ємний самоспряжений оператор, спектр якого є дискретним і складається з власних значень $\lambda_k = f(2k + 1), k \in \mathbb{Z}_+$, при цьому власними функціями є функції Ерміта $h_k, k \in \mathbb{Z}_+$.

Класи Жевре $G_{\{\beta\}}(B)$ оператора B у термінах коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів описуються так:

$$\left(\varphi \in G_{\{\beta\}}(B) \right) \Leftrightarrow \left(\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+: |c_k(\varphi)| \leq c e^{-\mu \lambda_k^{1/\beta}}, \lambda_k = f(2k + 1) \right).$$

Якщо $\beta \geq 1$, то із обмежень, накладених на f , випливає, що $G_{\{\beta\}}(B) \subset G_{\{\beta\}}(A)$, де A – гармонійний осцилятор.

Під розв'язком рівняння (1.69) розуміємо функцію u , яка задовольняє умови

- 1) $u(t, \cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t \in [0, T]$;
- 2) $u(\cdot, x)$ двічі диференційовна по t при кожному $x \in \mathbb{R}$;
- 3) u задовольняє рівняння (1.69).

Теорема 1.29. *Розв'язком рівняння (1.69) є функція вигляду*

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\cos t \sqrt{\lambda_k} c_k(g) + \frac{\sin t \sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}} c_k(\gamma) \right) h_k(x), \quad (1.70)$$

де $g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) h_k \in S_{1/2}^{1/2}$, $\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\gamma) h_k \in S_{1/2}^{1/2}$, $\lambda_k = f(2k + 1)$,

$$c_k(g) = (g, h_k), \quad c_k(\gamma) = (\gamma, h_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Зауваження 1.19. Формула (1.70) є правильною для кожного $t \in [0, T]$, зокрема, і для $t = 0$. Тоді $u(0, \cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) h_k \in S_{1/2}^{1/2}$.

Оскільки

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\sqrt{\lambda_k} \sin t \sqrt{\lambda_k} c_k(g) + \cos t \sqrt{\lambda_k} c_k(\gamma) \right) h_k(x), \quad t \in [0, T],$$

то

$$\frac{\partial u(0, \cdot)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\gamma) h_k = \gamma \in S_{1/2}^{1/2}.$$

Із наведених співвідношень випливає, що якщо для рівняння (1.69) задати початкові умови

$$u(0, \cdot) = g, \quad \frac{\partial u(0, \cdot)}{\partial t} = \gamma, \quad \{g, \gamma\} \in S_{1/2}^{1/2}, \quad (1.71)$$

то задача Коші (1.69), (1.71) коректно розв'язна в просторі $S_{1/2}^{1/2}$, тобто розв'язок, який дається формулою (1.70), є єдиним і неперервно залежить від початкових умов.

Вказаний результат можна узагальнити в такому розумінні. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + t^\alpha B u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1.72)$$

де $\alpha > 0$ – фіксований параметр. Відомо, що фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$\omega'' + b t^\alpha \omega = 0$$

($b > 0$ – число) утворюють функції

$$G_1(t, b, \alpha) \equiv G_1(t, b) = \pi \tau^\tau b^{\tau/2} t^{1/2} (\Gamma(\tau) \sin \pi \tau)^{-1} J_{-\tau}(2\tau b^{1/2} t^{1/(2\tau)}),$$

$$G_2(t, b, \alpha) \equiv G_2(t, b) = \Gamma(\tau) \tau^{1-\tau} t^{1/2} b^{-\tau/2} J_\tau(2\tau b^{1/2} t^{1/(2\tau)}),$$

де $\tau = (\alpha + 2)^{-1}$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція, $J_\omega(\cdot)$ – функція Бесселя першого роду порядку ω , $\omega \in \{-\tau, \tau\}$. Зазначимо, що

$$G_1(t, b, 0) = \cos t \sqrt{b}, \quad G_2(t, b, 0) = b^{-1/2} \sin t \sqrt{b}.$$

Звідси випливає, що функція

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (G_1(t, \lambda_k) c_k(g)) + (G_2(t, \lambda_k) c_k(\gamma)) h_k(x),$$

де

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) h_k \in S_{1/2}^{1/2}, \quad \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\gamma) h_k \in S_{1/2}^{1/2}, \quad \lambda_k = f(2k + 1),$$

є розв'язком рівняння (1.72). Доведення цього твердження здійснюється за схемою доведення теореми 1.25 При цьому використовується інтегральна формула Пуассона для функції Бесселя:

$$J_{\omega}(\lambda) = \frac{2(\lambda/2)^{\omega}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\omega + 1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(\lambda \cos t) \sin^{2\omega} t dt, \quad \omega > -1/2, \quad \lambda > 0.$$

З цієї формули випливають нерівності

$$\lambda^{\tau/2} J_{-\tau}(\lambda) \leq c_1, \quad \lambda^{-\tau/2} J_{\tau}(\lambda) \leq c_2, \quad \lambda > 0,$$

які використовуються при доведенні відповідного твердження.

Розв'язок рівняння (1.72) задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = g(x), \quad u'_t(0, x) = \gamma(x). \quad (1.73)$$

Зазначимо, що рівняння (1.72) відноситься до еволюційних рівнянь, які вироджуються за часовою змінною. Якщо в (1.72) відсутнє виродження ($\alpha = 0$), то маємо, очевидно, рівняння (1.69).

Функції $G_1(t, \lambda)$, $G_2(t, \lambda)$, $\lambda > 0$, за допомогою яких зображається розв'язок рівняння (1.72), мають складну структуру. Виявляється, що ці функції допускають розклади в ряди Фур'є за ортонормованими многочленами Лагерра, тобто в кожній точці $\lambda \in (0, \infty)$ правильними є співвідношення

$$G_i(t, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(i)}(t, \lambda), \quad \lambda > 0, \quad i = \{1, 2\},$$

де $P_n^{(i)}(t, \lambda)$ – частинні суми рядів Фур'є $G_i(t, \lambda)$ (при фіксованому $t > 0$). Отже, можна говорити про наближені розв'язки рівняння (1.72) у певному розумінні.

Параболічний випадок. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + Bu(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega', \quad (1.74)$$

де B – оператор, побудований у п. 1.4.1

Для рівняння (1.74) задамо початкову умову

$$u(0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad g \in G_{\{1\}}(B) \subset G_{\{1\}}(A) = S_{1/2}^{1/2}, \quad (1.75)$$

де A – гармонійний осцилятор в $L_2(\mathbb{R})$,

$$u(0, x) := \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Під розв'язком задачі Коші (1.74), (1.75) розумітимемо функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega'$, яка: 1) диференційовна за змінною $t \in (0, T]$ при кожному $x \in \mathbb{R}$; 2) $u(\cdot, x) \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t \in [0, T]$; 3) $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega'$ задовольняє рівняння (1.74) і початкову умову (1.75) (у вказаному розумінні).

Із результатів, одержаних у п.1.4.1 (випадок m -точкової задачі з параметрами $\mu = 1, \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$) випливає, що задача (1.74), (1.75) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t\lambda_k} c_k(g) h_k(x), \quad (t, x) \in \Omega', \quad \lambda_k = f(2k + 1).$$

Тут вивчається можливість зображення розв'язку задачі (1.74), (1.75) у вигляді

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t, B) g(x),$$

де $P_n(t, \lambda)$ – поліном степеня n змінної λ при фіксованому $t \in (0, T]$ (тут збіжність рівномірна відносно $x \in \mathbb{R}$).

За шукані поліноми візьмемо частинну суму ряду Фур'є функції $\exp(-t\lambda)$, $t \in (0, T]$, $\lambda \in (0, \infty]$, побудованого за многочленами Лагерра

$$\hat{L}_{\mu, k}(\lambda) = (-1)^k \sqrt{\mu} e^{\mu\lambda} [(\mu\lambda)^k e^{-\mu\lambda}]^{(k)} / k!, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

які утворюють ортонормований базис у просторі $L_2((0, \infty), \exp(-\mu\lambda))$.

Розклад функції $e^{-t\lambda}$ у ряд Фур'є за многочленами $\hat{L}_{\mu, k}(\lambda)$ має вигляд:

$$e^{-t\lambda} = \frac{\sqrt{\mu}}{t + \mu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{t}{t + \mu} \right)^k \hat{L}_{\mu, k}(\lambda).$$

Нехай $P_{\mu, t, n}$ позначає частинну суму ряду даного ряду. Тоді справедливе твердження.

Теорема 1.31. Якщо $g \in G_{\{1\}}(B) \subset G_{\{1\}}(A) = S_{1/2}^{1/2}$, то для кожного $T > 0$ існують сталі $c = c(g) > 0$, $\mu = \mu(g) > 0$, $\rho = \frac{T}{T+\mu}$ такі, що $\sup_{(t,x) \in \Omega'} |u(t,x) - P_{\mu,t,n}(B)g(x)| \leq c\rho^{n+1}$.

1.5. Про один клас операторів у просторах цілих функцій типу W

У теорії аналітичних у крузі функцій вивчається питання про зображення лінійних неперервних відображень у вигляді диференціальних або інтегральних операторів скінченного або нескінченного порядків, операторів узагальненого диференціювання та інтегрування. Різні аспекти цієї проблеми досліджували Ж. Дельсарт, Ж.-Л. Ліонс, Ю.Ф. Коробейник, М.І. Нагнибіда, В.В. Напалков, В.А. Ткаченко, І.І. Райчинов, М.Ю. Царьков, В.П. Подпорін, С.С. Лінчук та інші математики. Науковий інтерес до вивчення таких операторів пояснюється тим, що вони відіграють важливу роль у деяких розділах математики та суміжних дисциплінах (теоретична та ядерна фізика, теорія пружності).

Важливий клас операторів узагальненого диференціювання та інтегрування утворюють оператори Гельфонда–Леонтєєва, введені в середині 20-го століття при вивченні розкладів цілих функцій в узагальнені ряди Фур'є, які позначаються символами $D^n(F, \cdot)$, $I^n(F, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$. Властивості таких операторів досліджували і продовжують досліджувати у просторах A_R , $0 < R \leq +\infty$ всіх однозначних і аналітичних у крузі $K_R = \{z: |z| < R\}$ функцій. З курсу теорії функцій комплексної змінної відомо, що кожну функцію $F(z)$ з A_R можна єдиним способом розвинути в степеневий ряд

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad (1.76)$$

який збігається рівномірно на кожній компактній множині точок круга K_R , при цьому коефіцієнти a_k задовольняють умову

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{R}. \quad (1.77)$$

Навпаки, якщо послідовність комплексних чисел $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову (1.77) і R_1 – радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то, як впливає

з формули Коші–Адамара, $R_1 \geq R$. Отже, формула (1.76) визначає функцію з простору A_R .

Таким чином, простір A_R складається з тих і лише тих функцій $F(z)$, які зображаються у вигляді (1.76), а відповідні їм послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняють умову (1.77).

Топологія цього простору задається системою норм $\|\cdot\|_r$, $0 < r < R$, де $\|F\|_r = \max_{|z| < r} |F(z)|$, а послідовність $\{g_m(z), m \in \mathbb{N}\}$ функції з A_R збігається до функції $g(z)$ тоді і лише тоді, коли

$$\forall r < R: \lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m - g\|_r = 0.$$

Оскільки вказана умова рівносильна, очевидно, тому, що послідовність функцій $\{g_m(z), m \in \mathbb{N}\}$ збігається до $g(z)$ на кожній комплексній підмножині круга K_R рівномірно, то так введено в A_R топологію називають ще топологією компактної збіжності. Простір A_R із введеною топологією не є нормованим, але в той же час A_R – метризовний повний простір, тобто простір Фреше.

Важливий клас операторів узагальненого диференціювання в A_R утворюють оператори узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонт'єва. Оператором Гельфонда–Леонт'єва називається оператор, який будується за допомогою послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, для якої

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (k^{1/\rho} |a_k|^{1/k}) = (\sigma \rho)^{1/\rho}, \quad 0 < \sigma, \rho < +\infty,$$

тобто $a_k, k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Тейлора деякої спеціальної функції F порядку ρ і типу σ . Такий оператор позначається символом $D^n(F, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, і визначається так. Нехай $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ – довільна функція з простору A_R . Тоді, за означенням,

$$D^n(F, \varphi) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n}. \quad (1.78)$$

Внаслідок умови (1.76) існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k-n]{\left| \frac{a_{k-n}}{a_k} \right|} = 1,$$

тому ряд (1.78) збігається в крузі $|z| < R$, тобто функція $D^n(F, \varphi)$ регулярна у тому ж крузі, що і функція φ . Якщо $F(z) = e^z$, то $D^n(e^z, \varphi) = \frac{d^n}{dz^n} \varphi$, тобто $D^n(F, \varphi)$ справді можна розуміти як узагальнено похідну порядку n функції φ , породжену функцією $F(z)$.

Метою цього пункту було:

1) побудова аналога оператора узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонт'єва у просторах типу W без спеціальних обмежень на послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, тобто такі оператори не породжуються, взагалі кажучи, деякою цілою функцією із спеціальними властивостями (елементами цього класу операторів можуть бути і оператори Гельфонда–Леонт'єва);

2) дослідження задачі Коші для еволюційних рівнянь з такими операторами у просторах типу W .

Топологія просторів типу W відмінна від топології просторів A_R , $0 < R < +\infty$, тому, насамперед, зупинимось на топологічній структурі просторів типу W . Простори типу W введені Б.Л. Гуревичем і широко використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинами похідними.

1.5.1. Топологічна структура просторів W_M^Ω

Простір W_M^Ω будується за двома функціями M та Ω (про властивості цих функцій див. п. 1.1) і визначається як сукупність цілих функцій $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, для яких

$$\exists c = c(\varphi) > 0 \exists a = a(\varphi) > 0 \exists b = b(\varphi) > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C}:$$

$$|\varphi(z)| \leq c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}.$$

W_M^Ω можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, де $W_{M,a}^{\Omega,b}$ складається з тих функцій $\varphi \in W_M^\Omega$, для яких правильні нерівності

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-M(\bar{a}x) + \Omega(\bar{b}y)\}, z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де \bar{a} – довільна додатна стала, менша за a , \bar{b} – довільна додатна стала, більша за b . Якщо для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{|\varphi(z)| \exp\{-\Omega((b + \rho)y) + M(a(1 - \delta)x)\}\},$$

$$\delta \in \{1/n, n \geq 2\}, p \in \mathbb{N},$$

то з цими нормами простір W_M^Ω стає повним зліченно нормованим простором.

Збіжність у W_M^Ω як об'єднанні зліченно нормованих просторів визначається так: послідовність $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset W_M^\Omega$ збігається в W_M^Ω до нуля тоді і тільки тоді, коли вона: 1) правильно збігається до нуля; 2) обмежена.

Послідовність $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset W_M^\Omega$ правильно збігається до нуля в W_M^Ω , якщо вона рівномірно збігається до нуля на кожній обмеженій множині $Q \subset \mathbb{C}$. Множина $A \subset W_M^\Omega$ називається обмеженою, якщо $A \subset W_{M,a}^{\Omega,b}$ з деякими $a, b > 0$ і для всіх функцій $\varphi \in A$ виконуються оцінки

$$|\varphi(z)| \leq ce^{-M(ax) + \Omega(by)}$$

з одними й тими ж сталими $c, a, b > 0$.

Як вже відзначалось у пункті 1.1, означення W_M^Ω рівносильне такому

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow (\exists c_1 > 0 \exists a_1 > 0 \exists b_1 > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ \exists v_k \in [0, k), v_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \exists \rho_n \in [0, n), \rho_0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_1 n! \left(\frac{b_1}{\rho_n}\right)^n \left(\frac{v_k}{a_1}\right)^k \exp\{\Omega(\rho_n) - M(v_k)\}), \quad (1.79)$$

де ρ_n – розв'язок рівняння $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, v_k – розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. З (1.79) випливає, що простори W_M^Ω є частковим випадком узагальнених просторів типу S .

Врахувавши (1.79), у просторі W_M^Ω можна ввести поняття збіжності (еквівалентне введеному раніше) так: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset W_M^\Omega$ збігається до нуля в W_M^Ω , якщо при довільному $n \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, \nu \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно при $\nu \rightarrow \infty$ на будь-якому відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$, при довільних фіксованих $\{k, n\} \in \mathbb{Z}_+$ для функцій $x^k \varphi_\nu^{(n)}$ правильними є нерівності (1.79) зі сталими $c_1, a_1, b_1 > 0$, не залежними від ν .

Зупинимось на основних операціях у просторах W_M^Ω .

Нехай P – деякий фіксований многочлен. У просторах W_M^Ω визначена і неперервна операція множення на $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$ (зокрема, операція множення на незалежну змінну).

Мультиплікатором у просторі W_M^Ω є кожна ціла однозначна функція $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |\varphi(z)| \leq c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)\}.$$

За певних умов у просторі W_M^Ω визначений і є неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку. Для того, щоб сформулювати відповідне твердження, введемо означення функцій, двоїстих за Юнгом.

Нехай функції $M(x)$ та $\Omega(y)$ визначаються за допомогою функцій $\mu(\xi)$ та $\omega(\eta)$ відповідно. Якщо функції μ та ω взаємно обернені, тобто

$$\mu(\omega(\eta)) = \eta, \quad \omega(\mu(\xi)) = \xi,$$

то функції $M(x)$ та $\Omega(y)$ називаються двоїстими за Юнгом.

У цьому випадку має місце нерівність Юнга:

$$\forall x \in [0, \infty) \forall y \in [0, \infty): xy \leq M(x) + \Omega(y).$$

Якщо для заданого $x \in [0, \infty)$ взяти $y = \mu(x)$, то нерівність Юнга для таких x та y перетворюється в рівність. Прикладами взаємно двоїстих функцій є такі функції:

$$M(x) = \frac{x^p}{p}, \quad \Omega(y) = \frac{y^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$M(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x, \quad \Omega(y) = e^y - y - 1.$$

Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ – деяка ціла функція. Оператор

$$f(D) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-iD)^n, \quad D = \frac{d}{dz},$$

називається оператором диференціювання нескінченного порядку, якщо для довільної функції $\varphi \in W_M^\Omega$ ряд

$$(f(D)\varphi)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n ((-iD)^n \varphi)(z)$$

зображає деяку функцію з простору W_M^Ω . Як встановлено в праці [1], це буде тоді і тільки тоді, коли ціла функція f – мультиплікатор у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}$, де Ω_1 та M_1 – функції, двоїсті за Юнгом, відповідно до функції M та Ω .

Важливим є питання про нетривіальність просторів W_M^Ω , оскільки ці простори можуть містити лише єдину функцію $\varphi \equiv 0$. Так буде, наприклад, якщо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\Omega(bx) - M(ax)) = -\infty$$

для довільних $a, b > 0$.

Неперервна функція $l(x)$, $x \in (0, +\infty)$, називається повільною функцією, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 = x_0(\varepsilon) > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \exists c'_\varepsilon > 0 \forall x > x_0: c'_\varepsilon x^{-\varepsilon} < l(x) < c_\varepsilon x^\varepsilon.$$

У теорії аналітичних функцій відома теорема Левіна, яка стверджує, що для довільного $p > 0$ і довільної повільної функції l існує ціла функція $\varphi(z) \neq 0$, для якої

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-l(x)|x|^p + \gamma^l(y)|y|^p\}$$

з деякими сталими $c > 0$, $\gamma > 0$. З цієї теореми випливає нетривіальність простору W_M^Ω при $M = \Omega = l(x)x^p$, де l – повільна функція. Нетривіальним буде також кожний простір $W_M^{\Omega_1}$, де $M(x) = l(x)x^p$, $\Omega_1(x) \geq l(x)x^p$, $x \in (0, +\infty)$, оскільки він містить нетривіальний простір W_M^Ω .

Нехай $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{\nu_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ – розв'язки відповідно рівнянь $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Зазначимо, що $\rho_n < n$, $\rho_0 = 0$, $\nu_k < k$, $\nu_0 = 0$; при цьому послідовності $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{\nu_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ є монотонно зростаючими і необмеженими.

Умова $\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{\nu_k}{\rho_k} > 0$ є необхідною і достатньою умовою нетривіальності простору W_M^Ω , яка, в свою чергу, еквівалентна такій умові

$$\exists d_0 > 0 \exists c_0 > 0 \exists x_0 \in (0, \infty) \forall x \geq x_0: \Omega(x) \geq c_0 M(dx).$$

Надалі вважатимемо, що функції Ω та M задовольняють умову нетривіальності $\Omega(x) \geq M(x)$.

1.5.2. Оператори типу Гельфонда-Леонт'єва у просторах W_M^Ω

Візьмемо довільну функцію $\varphi \in W_M^\Omega$, яка є цілою. Для довільно фіксованої точки $z_0 \in \mathbb{C}$ маємо

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

де $b_k = \frac{\varphi^{(k)}(z_0)}{k!}$. Розглянемо в просторі W_M^Ω оператор D_α^n ($n \in \mathbb{N}$ – фіксоване), який будується за фіксованою послідовністю $\alpha = \{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ і визначається формулою

$$\begin{aligned} \psi_n(z) &\equiv (D_\alpha^n \varphi)(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{\alpha_{k-n}}{\alpha_k} (z - z_0)^{k-n} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+n} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+n}} (z - z_0)^k, \quad \forall \varphi \in W_M^\Omega. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Вважаємо, що послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k+n]{\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+n}} \right|} = 1. \quad (1.81)$$

Прикладами послідовностей $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, які задовольняють умову (1.81), можуть служити послідовності $\left\{ \frac{1}{k!}, k \in \mathbb{Z}_+ \right\}$, $\{k^{k\beta}, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\beta > 0$ – фіксоване число, $\{\ln(1+k), k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Зазначимо, що ψ_n також є цілою функцією, оскільки радіус збіжності степеневого ряду (1.80) дорівнює $+\infty$. Справді,

$$\frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|b_k|}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k+n]{|b_{k+n}|}} = +\infty$$

і, внаслідок (1.81)

$$\frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k+n]{|b_{k+n}| \left| \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+n}} \right|}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k+n]{|b_{k+n}|}} \cdot \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k+n]{\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+n}} \right|}} = +\infty.$$

Якщо за α взяти послідовність $\left\{ \frac{1}{k!}, k \in \mathbb{Z}_+ \right\}$, то $D_{|k|}^1 \varphi(z) = \varphi'(z)$, $\forall \varphi \in W_M^\Omega$.

Отже, оператор $D = d/dz$ звичайного диференціювання є частковим випадком

оператора D_n^α при $n = 1$, $\alpha = \frac{1}{k!}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Оператор D_n^α називатимемо оператором узагальненого диференціювання у просторі W_M^Ω .

Теорема 1.32. *Оператор D_α^n визначений коректно на W_M^Ω для довільно фіксованого $n \in \mathbb{N}$ і неперервно відображає цей простір у себе.*

Як приклад, розглянемо оператора D_α^n , побудований за послідовністю $\alpha = \left\{ \frac{1}{Q(1)Q(2)\dots Q(k)}, k \in \mathbb{Z}_+ \right\}$, де $Q(x) = \alpha_p x^p + \dots + \alpha_0$ – поліном, який задовольняє умову $Q(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (якщо $Q(x) = x$, то $\alpha = \left\{ \frac{1}{k!} \right\}$). Послідовність α задовольняє умову (1.81). Із результатів, отриманих Леонтєвим О.М., випливає, що

$$(D_\alpha^n \varphi)(z) = \sum_{k=n}^{np} \frac{\Delta_k^n}{k!} z^{k-n} \varphi^{(k)}(z), \quad (1.82)$$

де Δ_k^n – деякі коефіцієнти. Формула (1.82) має місце для довільної функції $\varphi \in W_M^\Omega$.

Нехай

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \quad \varphi \in W_M^\Omega,$$

де $z_0 \in \mathbb{C}$ – фіксована точка, $m \in \mathbb{N}$ – довільно фіксоване натуральне число, D_α^n – оператор узагальненого диференціювання у просторі W_M^Ω . Покладемо, за означенням,

$$\begin{aligned} (D_\alpha^n)^m \varphi(z) &\equiv D_\alpha^{nm} \varphi(z) := \sum_{k=nm}^{\infty} b_k \frac{\alpha_{k-nm}}{\alpha_k} (z - z_0)^{k-n} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+nm} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+nm}} (z - z_0)^k, \quad \varphi \in W_M^\Omega. \end{aligned}$$

Із теореми 1.32 випливає, що оператор D_α^{nm} неперервно відображає простір W_M^Ω в себе.

Нехай $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ – деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі W_M^Ω задано оператор узагальненого диференціювання нескінченного порядку

$$g(D_\alpha^n) := \sum_{m=0}^{\infty} c_m (D_\alpha^n)^m \equiv \sum_{m=0}^{\infty} c_m D_\alpha^{nm},$$

якщо для довільної функції $\varphi \in W_M^\Omega$ ряд

$$g(D_\alpha^n)\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m D_\alpha^{nm}\varphi(z)$$

зображає деяку функцію з простору W_M^Ω .

Теорема 1.33. *Якщо ціла функція g задовольняє умову*

$$\exists c_0 > 0 \exists a_0 > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |g(z)| \leq c_0 e^{M(a_0 x) + \Omega(a_0 y)}, \quad (1.83)$$

то для довільно фіксованого $n \in \mathbb{N}$ у просторі W_M^Ω визначений оператор $g(D_\alpha^n)$, який неперервно відображає W_M^Ω в себе.

Наприклад, функція $g(z) = e^{\gamma z}$, $z \in \mathbb{C}$, $\gamma \in (0, +\infty)$ – фіксоване число, задовольняє умову (1.83). Справді,

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |g(z)| = |e^{\gamma(x+iy)}| \leq e^{\gamma|x|}.$$

Для довільних опуклих функцій M, Ω на проміжку $(0, +\infty)$ при довільному $\varepsilon > 0$ правильною є нерівність

$$|x| \leq M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y) + d, \quad d = d(\varepsilon) > 0.$$

Тоді для $\gamma \in (0, 1)$ одержимо

$$|e^{\gamma z}| \leq e^{|x|} \leq c e^{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Якщо $\gamma \geq 1$, то для довільної опуклої на проміжку $(0, +\infty)$ функції L правильною є нерівність

$$\gamma L(x) \leq M(\gamma x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Отже,

$$|e^{\gamma z}| \leq e^{\gamma|x|} \leq c e^{\gamma M(\varepsilon x) + \gamma \Omega(\varepsilon y)} \leq c e^{M(\gamma \varepsilon x) + \Omega(\gamma \varepsilon y)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \varepsilon > 0.$$

Звідси випливає, що для функції $e^{\gamma z}$ виконується умова (1.83), тобто в просторі W_M^Ω визначений і є неперервним оператор

$$e^{\gamma D_\alpha^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m!} D_\alpha^{nm},$$

$n \in \mathbb{N}$ – фіксоване, який відображає простір W_M^Ω в себе.

Якщо $g(z) = e^{tz^2}$, $t > 0$, $z \in \mathbb{R}$, то, очевидно,

$$|g(z)| = |e^{tz^2}| = e^{tx^2+ty^2}.$$

Звідси випливає, що в просторі $W_{x^2}^{y^2}$ визначений і є неперервним оператор

$$e^{t(D_\alpha^n)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} (D_\alpha^{2n})^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D_\alpha^{2mn}.$$

Наведемо ще один приклад оператора узагальненого диференціювання у просторах W_M^Ω . Нехай $P(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, які задовольняє умову:

$$\exists c > 0 \forall x \in \mathbb{R}: \operatorname{Re}P(x) \leq -c|x|^{2b}.$$

Тоді

$$|e^{P(x)}| = e^{\operatorname{Re}P(x)} \leq e^{-c|x|^{2b}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\exists c_1 > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |e^{P(z)}| \leq e^{c_1|z|^{2b}}.$$

З огляду на узагальнення теорема Фрагмена–Ліндельофа, дістаємо, що функція $e^{P(z)}$ у комплексній площині задовольняє нерівність

$$|e^{P(z)}| \leq c_0 e^{-c_2|x|^{2b}+c_3|y|^{2b}} \leq c_0 e^{c_2|x|^{2b}+c_3|y|^{2b}}, \quad c_0, c_2, c_3 > 0.$$

Отже, для функції $e^{P(z)}$ виконується умова (1.83) з функціями $M(x) = x^{2b}$, $x > 0$, $\Omega(y) = y^{2b}$, $y > 0$. Звідси випливає, що в просторі $W_{x^{2b}}^{y^{2b}}$ визначений і є неперервним оператор

$$e^{P(D_\alpha^n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P^m(D_\alpha^n)}{m!},$$

$n \in \mathbb{N}$ – фіксоване, який відображає простір $W_{x^{2b}}^{y^{2b}}$ в себе.

Розглянемо в просторі W_M^Ω задачу Коші

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial t} = Au(t,z), \quad A := D_\alpha^n, \quad (t,z) \in [t_0, T] \times \mathbb{C}, \quad t_0 \geq 0, \quad T < +\infty, \quad (1.84)$$

$$u(t, \cdot)|_{t=t_0} = \varphi_0, \quad \varphi \in W_M^\Omega. \quad (1.85)$$

Під розв'язком задачі Коші (1.84), (1.85) розумітимемо функцію $u(t,z)$, диференційовну по t , яка при кожному $t \in [t_0, T]$ є елементом простору W_M^Ω ,

задовольняє рівняння (1.84) і початкову умову (1.85) у тому розумінні, що $u(t, z) \rightarrow \varphi_0(z)$ при $t \rightarrow t_0$ у просторі W_M^Ω , при цьому u неперервно залежить від φ_0 .

Теорема 1.34. *Задача Коші (1.84), (1.85) розв'язна в просторі W_M^Ω , розв'язок дається формулою $u(t, z) = e^{(t-t_0)A} \varphi_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^m}{m!} (A^m \varphi_0)(z)$.*

Аналогічні твердження є правильними у випадку задачі Коші для рівнянь

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial t} = A^2 u(t, z), \quad (t, z) \in [t_0, T] \times \mathbb{C},$$

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial t} = P(A)u(t, z), \quad (t, z) \in [t_0, T] \times \mathbb{C},$$

де P – поліном, розглянутий раніше.

Розділ II. ГРУПИ, КІЛЬЦЯ – ДОСЛІДЖЕННЯ, БУДОВА

2.1. Побудови системи твірних для деяких груп автоматних підстановок

Постановка задачі. Допоміжні твердження. Нехай задано два автомати

$$A_1 = \langle Q_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1 \rangle, A_2 = \langle Q_2, X_2, Y_2, \delta_2, \lambda_2 \rangle$$

такі, що вхідний алфавіт другого з цих автоматів збігається з вихідним алфавітом першого (тобто, що $X_2 = Y_1$). Наведемо означення, леми та теореми з робіт [2.6, 2.7], які знадобляться нам для подальших досліджень.

Означення 2.1 [2.1] Суперпозицією $A_1 \cdot A_2$ автоматів A_1 та A_2 називається автомат $B = \langle Q, X_1, Y_2, \delta, \lambda \rangle$, множина станів Q якого збігається з добутком $Q_2 \times Q_1$ множин станів автоматів A_1 та A_2 . При цьому для довільного стану $q = (q_2, q_1) \in Q$ та довільного вхідного сигналу $x \in X_1$ автомата B значення функцій переходів та виходів автомата B визначаються зі співвідношень:

$$\delta(q, x) = (\delta_2(q_2, \lambda_1(q_1, x)), \delta_1(q_1, x)), \lambda(q, x) = \lambda_2(q_2, \lambda_1(q_2, x)). \quad (2.1)$$

Лема 2.1 [2.3]. *Добуток автоматних відображень є автоматним відображенням. Обернене до бієктивного автоматного відображення також є автоматним.*

Таким чином, всі автоматні бієктивні відображення над алфавітом X утворюють групу, яку називають *групою автоматних підстановок* над алфавітом X і позначають $A(X)$. Згідно з вищенаведеним, маємо

$$A(X); \text{Aut } T(X),$$

де символом $\text{Aut } T(X)$ позначено групу автоморфізмів дерева $T(X)$.

Означення 2.2 [2.2]. Перетворення $f: X^* \rightarrow X^*$ називається *фінітарним*, якщо існує таке натуральне число m , що для довільного слова $\omega \in X^*$ його образ $f(\omega)$ відрізняється від ω не більше, ніж першими m літерами.

Лема 2.2 [2.2]. *Кожне фінітарне перетворення є скінченно автоматним. Усі фінітарні перетворення утворюють підгрупу в групі $K(X)$ всіх скінченно автоматних підстановок, яку позначають $F(X)$.*

Нехай $X^{(r)}$ — підмножина X^* , яка складається зі слів довжини точно r . Згідно з лемою 1.9 з [2.5], ця підмножина є інваріантною відносно перетворення $A(X)$, тобто можна розглянути групу перетворень $(A(X), X^{(r)})$. Якщо J_r — ядро цього перетворення, то фактор-група $A^{(r)}(X) = A(X) / J_r$ діє на $X^{(r)}$ точно. Аналогічно, фактор-групи

$$K^{(r)}(X) = K(X) / J_r \cap K(X), F^{(r)}(X) = F(X) / J_r \cap F(X)$$

також діють точно на $X^{(r)}$.

Лема 2.3 [2.6]. Для довільного $r \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$K^{(r)}(X) = F^{(r)}(X) = A^{(r)}(X).$$

Далі, для довільного $r \in \mathbb{N}$ можна визначити природну проєкцію (епіморфізм) $\varphi_r : A^{(r+1)}(X) \rightarrow A^{(r)}(X)$, та природний мономорфізм $\psi_r : A^{(r)}(X) \rightarrow A^{(r+1)}(X)$. Тим самим задано два спектри груп: прямий $(A^{(r)}(X); \psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$, та обернений $(A^{(r)}(X); \varphi_r)_{r \in \mathbb{N}}$. Отже, можна говорити про граничні групи (означення див. [2.7]).

Лема 2.4 [2.6]. Мають місце такі співвідношення:

$$(i) \lim_{\rightarrow} (A^{(r)}(X), \psi_r); F(X);$$

$$(ii) \lim_{\leftarrow} (A^{(r)}(X), \varphi_r); A(X).$$

Лема 2.5 [2.6]. Для довільного $r \in \mathbb{N}$ група $(A^{(r)}(X), X^{(r)})$, $\text{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) r -му вінцевому степеню симетричної групи $S(X)$. Група $(A(X), X^*)$, $\text{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) вінцевому степеню $\text{Wr}_{i=1}^{\infty} S(X)^{(i)}$ нескінченної послідовності симетричних груп степеня n в його інтранзитивній реалізації. Група $(K(X), X^*)$, $\text{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) обмеженому вінцевому степеню (b)

$\text{Wr}_{i=1}^{\infty} S(X)^{(i)}$ в його інтранзитивній реалізації. Група $(F(X), X^*)$, $\text{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) фінитарному вінцевому добутку $(F) \text{Wr}_{i=1}^{\infty} S(X)^{(i)}$.

На групі $A(X)$ природно вводиться метрика (див. [2.3]). А саме, якщо перетворення з $A(X)$ задаються таблицями, то відстань між ними дорівнює η^k , де η , $(0 < \eta < 1)$ — фіксоване число, а k — довжина спільного початку таблиць. Тим самим група $A(X)$ перетворюється в метричну групу і є повним метричним простором.

Лема 2.6 [2.6]. Підгрупа $F(X)$ є всюди щільною в підгрупі $A(X)$.

Згідно з лемою 2.4, група $A^{(r)}(X)$ ізоморфна вінцевому добутку r симетричних груп степеня n ($n = (X)$): $A^{(r)}(X); \underbrace{S_n \text{Wr } S_n \text{Wr} \dots \text{Wr } S_n}_r =: S(n, r)$.

Отже, $A^{(r)}(X)$ має степінь n^r і порядок $(n!)^{1+n+n^2+\dots+n^{r-1}}$, при цьому діє на множині слів довжини r транзитивно та імпримітивно. Для кожного цілого k ($1 \leq k \leq r$) група $A^{(r)}(X)$ містить підгрупу k -координатних таблиць, тобто таблиць вигляду $[\varepsilon, \dots, \varepsilon, g_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}), \varepsilon, \dots, \varepsilon]$, яка ізоморфна n^{k-1} -му степеню симетричної групи S_n .

Розглянемо спочатку системи твірних групи $A^{(r)}(X)$, які складаються лише з координатних таблиць. Для цього в симетричній групі S_n фіксуємо деяку систему твірних $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s\}$ і розглянемо таблиці вигляду

$$u_r(\bar{x}_{k-1}^{0,l}, k, \pi_l) = [\varepsilon, \dots, \varepsilon, h_{k,l}(x_1, \dots, x_{k-1}), \varepsilon, \dots, \varepsilon], \quad (2.2)$$

в яких

$$h_{k,l}(x_1, \dots, x_{k-1}) = \begin{cases} \pi_l, & \text{якщо } (x_1, \dots, x_{k-1}) = \bar{x}_{k-1}^{0,l}, \\ \varepsilon & \text{у решті випадків,} \end{cases} \quad (2.3)$$

де ε — одиничний елемент групи S_n , $\bar{x}_{k-1}^{0,l} = (x_{1,l}^0, \dots, x_{k-1,l}^0)$ — фіксований кортеж, $l = 1, 2, \dots, s$, $k = 1, 2, \dots, r$.

Теорема 2.1 [2.6]. Система елементів, визначених формулами (2.2) та (2.3), є системою твірних групи $S(n, r)$ при довільному виборі кортежів $\bar{x}_k^{0,l}$ ($1 \leq k \leq r-1$, $1 \leq l \leq s$). Ця система буде незвідною тоді й тільки тоді, коли система Π буде незвідною.

Оскільки симетрична група S_n породжується двома підстановками – такими, наприклад, будуть пари $(1, 2)$, $(1, 2, \dots, n)$ або $(1, 2, \dots, n-1)$, $(1, 2, \dots, n)$ – то група $S(n, r)$, а отже і $A^{(r)}(X)$, має незвідні системи твірних вигляду (2.2), які містять $2r$ підстановок.

Нагадаємо, що комутатор елементів a, b групи G визначається як $(a, b) = a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$, а підгрупа, породжена всіма комутаторами, називається *комутантом* G і позначається G' . Оскільки група G' є найменшою за включенням підгрупою такою, що фактор-група G/G' — абелева, то цю останню називають *абелізацією* групи G [2.7, 2.8]. Зокрема, комутантом симетричної групи S_n є знаковмінна група A_n , тобто абелізацією S_n буде циклічна група другого порядку. Для того, щоб описати абелізацію групи $S(n, r)$, охарактеризуємо спочатку комутант цієї групи. Нехай $\sigma = \prod f(\bar{x}_r)$ – добуток всіх значень деякої координатної функції, взятих у певному порядку. Підстановка σ є або парною, або непарною і ця властивість не залежить від порядку множників. Із означення оператора Π випливає:

(i) якщо $\prod f(\bar{x}_r) \in A_n$, то для довільної таблиці $u \in S(n, r)$ маємо

$$\prod f(\bar{x}_r^u) \in A_n;$$

(ii) якщо $\prod f(\bar{x}_r) \in A_n$ та $\prod g(\bar{x}_r) \in A_n$, то $\prod f(\bar{x}_r)g(\bar{x}_r) \in A_n$, де A_n –

знаковмінна група порядку n .

Теорема 2.2 [2.6]. Комутант $S'(n, r)$ містить ті й тільки ті таблиці $[g_1, g_2(x_1), \dots, g_r(\bar{x}_{r-1})]$, для яких виконується співвідношення: $g_1 \in A_n$, $\prod g_i(\bar{x}_{i-1}) \in A_n$ ($1 \leq i \leq r$).

Теорема 2.3 [2.7]. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних групи $S(n, r)$ для довільного $r \geq 2$ містить рівно r елементів.*

Теорема 2.3 допускає природне узагальнення на випадок довільних метасиметричних груп скінченного рангу. А саме, має місце таке твердження.

Теорема 2.4 [2.7]. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних метасиметричної групи $S(n_1, n_2, \dots, n_r)$ ($n_i \geq 2$ для $i = 1, 2, \dots, r$) довільного скінченного рангу $r \geq 2$ містить рівно r елементів.*

Основний результат. При виконанні умов доведених у роботах [4, 6, 7] лем 2.1–2.6 та теорем 2.1–2.4, можна довести наступні твердження.

Лема 2.7. [2.7] *Для довільного $r \in \mathbb{N}$ група $A^{(r)}(X)$, індукована групою автоматних перетворень на множині слів довжини r , має мінімальні (за кількістю елементів) системи твірних, які містять точно r елементів.*

Доведення. Твердження цієї леми безпосередньо випливає з теореми 2.3, оскільки $A^{(r)}(X); S(n, r)$.

У роботі [2.3] сформульовано теорему про те, що групи $A(X)$ та $K(X)$ (де $X = \{1, 2, \dots, n\}$) не мають скінченних систем твірних. Доведення цього твердження суттєво спирається на лему про те, що кількість елементів у довільній системі твірних групи $S(n, r)$ ($n, r \in \mathbb{N}$, $n > 2$, $r \geq 2$) більше або дорівнює r . Але доведення вказаної леми, яке наведене в [2.3], є неправильним. А саме, при доведенні будується гомоморфне відображення вінцевих добутків $S(n, r)$ при $n > 2$ на групу $S(2, r) = \underbrace{S_2 \text{ Wr } S_2 \text{ Wr } \dots \text{ Wr } S_2}_r$ для довільних $r \geq 2$ таким чином. Використовуючи позначення автора, кожному елементу

$$\varphi = [\varphi_1(p^1), \varphi_2(p^2), \dots, \varphi_r(p^r)]$$

групи $S(n, r)$ (де p^i — елемент множини $F(i, n)$ слів довжини i над заданим n -елементним алфавітом; $\varphi_i : \{1, 2, \dots, n\}^{i-1} \rightarrow S_n$; $i = 1, 2, \dots, r$) ставиться у відповідність таблиця $\varepsilon = [\varepsilon_1(p^1), \varepsilon_2(p^2), \dots, \varepsilon_r(p^r)]$, де $\varepsilon_i(p^i)$ — функція, задана

на множині $F(i-1, n)$ зі значеннями в S_2 , яка дорівнює $+1$, якщо $\varepsilon_i(p^i)$ — парна підстановка, та -1 , якщо $\varepsilon_i(p^i)$ — непарна підстановка. При цьому автор [2.3] твердить, що ε буде елементом групи $S(2, r)$. Насправді це не так, оскільки елементами $S(2, r)$ таблиці вигляду $[\bar{\varepsilon}_1(q^1), \bar{\varepsilon}_2(q^2), \dots, \bar{\varepsilon}_r(q^r)]$, в яких q^i — це слова довжини $(i-1)$ над двоелементним алфавітом, тобто $\bar{\varepsilon}_i(q^i)$ — це функції, визначені на множині $F(i-1, 2)$ зі значеннями в S_2 . Крім того, число всіх можливих функцій $\varepsilon_i(p^i): F(i-1, n) \rightarrow \{-1, +1\}$ дорівнює $2^{|F(i-1, n)|} = 2^{n^{i-1}}$ для всіх $i = 1, 2, \dots, r$. А тому кількість всіх можливих таблиць — образів $\varphi \in S(n, r)$ — вигляду $\varepsilon = [\varepsilon_1(p^1), \varepsilon_2(p^2), \dots, \varepsilon_r(p^r)]$ дорівнюватиме $2 \cdot 2^n \cdot 2^{n^2} \cdot \dots \cdot 2^{n^{r-1}} = 2^{n^{r-1}}$, що при $n > 2$ не збігатиметься з порядком групи $S(2, r)$, який дорівнює

$$|S(2, r)| = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{2^2} \cdot \dots \cdot 2^{2^{r-1}} = 2^{2^r - 1}.$$

Отже, вказане відображення не є відображенням на $S(2, r)$ при $n > 2$, як це стверджується в [2.3].

Можна довести, що при $n > 2$ взагалі не існує жодного епіморфізму групи $S(n, r)$ на групу $S(2, r)$ для кожного $r \geq 2$. Покажемо це при $r = 2$.

Якщо існує епіморфізм групи $S(n, 2)$ на групу $S(2, 2)$, то в $S(n, 2)$ існує нормальна підгрупа індекса $|S(2, 2)| = |S_2 \text{ Wr } S_2| = 2 \cdot 2^2 = 8$. Подивимося, який же вигляд мають власні нормальні підгрупи в групі $S(n, 2)$ і обчислимо їх індекс.

Власні нормальні дільники групи S_n при $n \neq 4$ вичерпуються знаковмінною групою A_n та одиничною підгрупою $\{\varepsilon\}$. А тому при $n \neq 4$ проєкція по першій координаті нормальної підгрупи H групи $S_n \in S_n$ може дорівнювати або A_n , або $\{\varepsilon\}$. Якщо вона дорівнює одиничній підгрупі, то тоді H складається з деяких таблиць вигляду $[\varepsilon; f(x)]$ (де $f(x) \in S_n^X$, $X = \{1, 2, \dots, n\}$), а тому її індекс є числом вигляду $n! \cdot c$, де $c \in \mathbb{N}$ — деяка константа. Але при $n > 2$ $n! \cdot c \neq 8$.

Якщо ж проєкція H по першій координаті дорівнює A_n , то нормальне замикання підгрупи $H = \{[\alpha; \varepsilon] \mid \alpha \in A_n\}$ – підгрупа

$$M = \left\{ [\alpha; f(x)] \mid \alpha \in A_n, \prod_x f(x) \in A_n \right\}.$$

Але індекс $[(S_n \text{ Wr } S_n) : M] = 4 \neq 8$.

Нехай $n = 4$. Тоді група S_4 містить три власні дільники — A_4 , V_4 (четвертна група Клейна) та $\{\varepsilon\}$. Отже, проєкція H по першій координаті дорівнюватиме або A_4 , або V_4 , або $\{\varepsilon\}$. У першому та третьому випадках всі міркування залишаються аналогічними попереднім, а в другому — для такого нормального дільника H маємо, що $[(S_4 \text{ Wr } S_4) : H] = 6c$, де $c \in \mathbb{N}$. Оскільки $6c \neq 8$, то цей випадок теж є неможливим.

Отримали суперечність з тим, що в групі $S_n \text{ Wr } S_n$ існує нормальна підгрупа індекса 8. Таким чином, епіморфізми $S_n \text{ Wr } S_n$ на $S_2 \text{ Wr } S_2$ не існують.

Доведені раніше твердження дають змогу навести коректне доведення нескінченно породжуваності групи автоматних підстановок.

Теорема 2.5. [2.8] *Групи $K(X), F(X)$ не є скінченно породженими. Група $A(X)$ не є скінченно породженою навіть у топологічному розумінні.*

Доведення. 1) Припустимо, що $K(X)$ чи $F(X)$ — скінченно породжені та мають системи твірних, що складаються з s елементів. Тоді їхні образи $K^{(r)}(X) = F^{(r)}(X) = A^{(r)}(X)$ будуть s -породженими для довільного $s \geq 2$. Але при $r > s$ це неможливо, оскільки, згідно з лемою 2.7, група $A^{(r)}(X)$ містить мінімальну (за кількістю елементів) базу, яка складається з r елементів. Отже, $K(X)$ та $F(X)$ — нескінченно породжені.

2) Припустимо, що $A(X)$ є скінченно породженою в топологічному розумінні. Тоді вона містить деяку скрізь щільну скінченно породжену підгрупу B . Оскільки B — скрізь щільна, то, за визначенням метрики на $A(X)$, це означає, що індукована дія $B^{(i)}$ групи B на множині слів довжини i збігається з

індукованою дією групи $A(X)$ на цій же множині, тобто $B^{(i)} = A^{(i)}(X)$ ($i \in \mathbf{N}$, $i \geq 2$). Якщо B породжується s елементами, то й $B^{(i)}$ при довільному i породжується s елементами, що неможливо при $i > s$ за лемою 2.7.

Теорему 2.5 доведено.

Одна з незвідних систем твірних групи всіх фінітарних автоматних перетворень була побудована раніше (див. [2.4]). Вона є незвідною в топологічному розумінні в групах $A(X)$ та $K(X)$. Доведені нами вище теореми 2.1, 2.3 і 2.4 дозволяють будувати цілі сім'ї таких систем.

Далі символом $\tilde{y}(k, \bar{x}_{k-1}^{0,l}, \pi_l)$ позначимо нескінченну таблицю, яка є продовженням таблиці (1) за допомогою дописування в її кінець нескінченної кількості одиничних координат. Перетворення, що визначається цією таблицею, діє на слова з X^* таким чином:

1) в образі \tilde{y} слова $y = y_1 y_2 \dots y_s$ може змінюватися тільки k -та літера (зокрема, слова довжини, меншої за k , не змінюються);

2) k -та літера образу \tilde{y} слова y відрізняється від y_k тільки в тому випадку, коли $y_i = x_{i,l}^0$, $1 \leq i \leq k-1$;

3) в останньому випадку, k -та літера образу \tilde{y}_k слова y визначається рівністю $\tilde{y}_k = y_k^{\pi_l}$.

Легко конструюється автомат $A(k, \bar{x}_{k-1}^{0,l}, \pi_l)$, що визначає таке перетворення. Нехай $\Pi = \{\pi_1 \dots \pi_s\}$ — незвідна система твірних групи S_n , і для довільного $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, фіксовано деякий набір $\Delta_{s,k-1}$, який складається з s не обов'язково різних кортежів довжини $k-1$ над алфавітом X .

Теорема 2.6. [2.8] Система автоматних підстановок, визначених автоматами вигляду $A(k, \bar{x}_{k-1}^{0,l}, \pi_l)$ ($\bar{x}_{k-1}^{0,l} \in \Delta_{s,k-1}$; $\pi_l \in \Pi$, $1 \leq l \leq s$, $k \in \mathbf{N}$), є незвідною системою твірних групи всіх фінітарних автоматних перетворень $F(X)$ і системою твірних групи $A(X)$ (або $K(X)$) в топологічному розумінні.

Доведення. Для цього досить перевірити, що вказана система елементів є незвідною системою твірних групи $F(X)$ (оскільки друга частина твердження теореми випливає з того, що $F(X)$ є скрізь щільною підгрупою в групах $A(X)$ та $K(X)$). А це безпосередньо випливає з лем 2.4, 2.6 та теореми 2.1. Теорему 2.6 доведено.

Побудована в [2.2] система перетворень є системою твірних в топологічному розумінні і для групи $K(X)$. Однак, оскільки група всіх скінченно автоматних перетворень є зліченною, вона містить зліченні системи твірних в алгебраїчному розумінні.

III. МАТЕМАТИКА БУКОВИНИ ЗА ЧАСІВ НЕЗАЛЕЖНОСТІ УКРАЇНИ

3.1. Система освіти Радянської Буковини напередодні незалежності України

За радянської доби систему освіти, науки і культури вважали важливим знаряддям духовного впливу на населення Чернівецької області, особливо на підростаюче покоління, з метою прищеплення комуністичної ідеології і тим самим виховання покірних громадян в майбутньому, лояльних до радянської влади. А тому при входженні краю до складу УРСР всі заклади освіти було переведено на українську мову викладання, а в місцях компактного проживання румунів (молдованів) дозволено використання румунської (молдавської) мови у відповідних закладах. Варто зауважити, що напередодні незалежності України в краї існували школи з російською мовою викладання (їх було значно більше при входженні краю до складу УРСР, оскільки зі східних регіонів України в школи області було відряджено 1009 вчителів, більшість з яких була російськомовною), а також в закладах вищої освіти окремі викладачі проводили заняття на російській мові.

Реалізація загального обов'язкового навчання супроводжувалася розвитком шкільної мережі в області та кількості учнів у ній. Проте, за укрупнення шкіл, відбулося їх скорочення (див. табл. 3.1 в якій відображено статистичні дані щодо кількості шкіл, учителів та учнів в краї напередодні незалежності України). При цьому було допущено певні помилки, в результаті чого в багатьох селах області закривали початкові школи, зокрема, у 1990 р. 89 населених пунктів краю залишилися без освітніх закладів.

Таблиця 3.1

Статистичні дані про навчальні заклади Чернівецької області

Тип школи	Навчальний рік
	1990/1991
Початкові	59
Неповносередні	142 (восьмирічні)
Середні	238
Інші	14
Робітничої і сільської молоді та дорослих	-
Всього	453
Всього вчителів (тис.)	11,576
Всього учнів (тис.)	143,011

У зв'язку зі зниженням народжуваності, урбанізацією, а також переходом частини учнів на навчання у професійно-технічні училища, у багатьох сільських школах кількість учнів різко скорочувалася, а наповнюваність класів ставала мінімальною.

Варто зазначити, що наприкінці 80-х років ХХ ст. стали сприятливими умови для розвитку національних шкіл, зокрема розроблено програму для зміни їх мовної мережі, що особливо було актуальним для чернівецьких шкіл. Крім того, у цей період простежується русифікація освіти, яскравим показником чого є те, що із 38 шкіл м. Чернівці 23 були російськомовними.

Забезпечення навчального процесу потребувало збільшення кількості вчителів, а тому їх підготовка була одним з головних завдань у галузі народної освіти краю та держави загалом. З наведених в таблиці 3.2 статистичних даних щодо кількості вчителів та їх освітнього рівня прослідковується відчутне збільшення чисельності вчителів у порівнянні з періодом входження краю до складу УРСР, проте намітилася й тенденція зменшення їх чисельності, що було пов'язано зі зменшенням учнівського контингенту, а також переходом учителів у інші сфери діяльності в зв'язку з економічною кризою в країні та відповідно не високою зарплатою. Водночас відбувалася якісна зміна складу вчителів, тобто збільшувалася їх кількість з вищою освітою (див. табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Статистичні дані про педагогічні кадри Чернівецької області

	Навчальний рік
	1990/1991
Всього працювало вчителів	11576
З вищою освітою	9411
З незакінченою вищою	344
З середньою спеціальною та педагогічною освітою	1806
З середньою освітою	15
З незакінченою середньою	-

Органи народної освіти регулярно організовували курси і семінарські заняття для вчителів, до проведення яких залучали викладачів Чернівецького державного університету, співробітники інституту вдосконалення вчителів та кращих учителів області. Зокрема у Чернівецькому державному університеті у зазначений період діяв факультет підвищення кваліфікації викладачів середніх спеціальних навчальних закладів.

Зазначимо, що покращенню рівня математичної освіти учнів сприяли добротні розроблені навчальні плани і програми¹⁴ з математики, які були однаковими для усіх загальноосвітніх навчальних закладів СРСР (на математику відводилося в середньому 6 год. на тиждень), позакласна робота з математики, вимірювальні роботи на місцевості, збільшення кількості математичних гуртків і централізований підхід щодо їх роботи. Це сприяло успішному навчанню майбутніх студентів ЗВО на спеціальностях, де вивчали математичні дисципліни.

Підготовка відповідних фахівців з природничо-математичного профілю та відкриті галузеві науково-дослідні лабораторії, інститути, були в основному пов'язані з існуючими в регіоні підприємствами військово-промислового комплексу, що в свою чергу потребувало розширення шкільної мережі та значної

¹⁴ Програми середньої загальноосвітньої школи: Математика 5-11 класи / Відповідальний за випуск Г.М. Литвиненко. Київ: Радянська школа, 1991. 97 с.

кількості вчителів, а тому їх підготовка була одним з головних завдань у галузі народної освіти наприкінці 80-х років ХХ ст.

Формування кадрів радянської інтелігенції через систему ЗВО було одним із важливих питань боротьби за соціалістичні перетворення у західних областях України. Завдання подальшого розвитку промисловості, сільського господарства, культури, науки, поставлені Комуністичною партією і Радянським урядом, визначили напрямок розвитку і мету вищої школи – основного джерела забезпечення народного господарства висококваліфікованими радянськими спеціалістами. Проте намітилася тенденція спаду зацікавленістю розвитком підприємств військово-промислового комплексу та тенденція роззброєння, що впливало з перебудовних процесів у країні.

Науково-технічний прогрес, потреби народного господарства регіону у кваліфікованих кадрах спонукали до розширення номенклатури спеціальностей, зокрема: економіка і управління виробництвом, біотехнічні й медичні апарати та системи, агрохімія та ґрунтознавство, математичне моделювання тощо. Кількість фахівців із вищою освітою зросла і становила біля 54,5 тис. осіб у 1989 р., а середньою – збільшилася майже в 7 разів і становила 101,7 тис. осіб [15, 16, 17], але водночас зменшувалася їх затребуваність у народному господарстві.

Відповідно збільшувалася кількість студентів у вищих навчальних закладах Чернівецької області, зокрема і вихідців з місцевого населення, що було запорукою підготовки національно свідомої місцевої інтелігенції. У 1990/1991 н. р. лише у Чернівецькому університеті їх було біля 12000 [18].

Для забезпечення навчального процесу Чернівецькому університету необхідні були кваліфіковані науково-педагогічні кадри. Професорсько-

¹⁵ Буковина: історичний нарис / [За ред. С.С. Костишина] В.М. Ботушанський (відп. ред.), О.В. Добржанський, Ю.І. Макар, О.М. Масан, Л.П. Михайлина. Чернівці: Зелена Буковина, 1998. 416 с.

¹⁶ Державний архів Чернівецької області (ДАЧО). Ф. Р-3: Чернівецький облвиконком, загальний відділ, 1989-1992 рр. Оп. 4. Т. 8. Спр. 2949: Документи про роботу органів статистики (інформації, довідки, 23 січня – 11 серпня 1989 р.). 100 арк.

¹⁷ Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. Імена славних сучасників / Редкол.: С.В. Мельничук (голова), В.М. Ботушанський та ін. Київ: Світ успіху, 2005. 287 с.

¹⁸ Житарюк І.В. Розвиток математичної освіти і науки Буковини та Північної Бессарабії (середина ХІХ – поч. ХХІ ст.): Дисертація на здобуття наукового ступеня д-ра іст. н.; спец. 09.00.12 – українознавство. Київ, 2010. 577 с.

викладацький склад поповнювався як за рахунок інших науково-навчальних закладів країни, так і підготовкою їх шляхом навчання в аспірантурі університету. У 1990/1991 н. р. науково-педагогічну роботу виконувало понад 600 науково-педагогічних і 450 наукових працівників, з яких 60 – докторів і майже 400 – кандидатів наук. Варто зазначити, що третина з них були уродженці Чернівецької області, близько чверті – вихідці із західних областей України, ще одна третина – з інших областей України, решта з поза меж області.

Напередодні часів незалежності України відбулися й помітні зміни в матеріально-технічному оснащенні процесу навчання, зокрема відкрито лінгафонні кабінети, поширювалося використання електронно-обчислювальних машин як у навчальному процесі, так і в наукових дослідженнях тощо. Водночас на етапі перебудови системи вищої освіти зусилля науково-педагогічних працівників спрямовували на подальшу розробку й теоретичне обґрунтування концепції оновлення й розвитку вищої професійної освіти, посилення фундаментальної підготовки випускників університету, на врахування регіонально-галузевих вимог, гуманітаризацію освіти й демократизацію педагогічного процесу, підвищення якості професійної підготовки фахівців.

Виробнича практика ставала важливою при підготовці майбутніх фахівців. Базовими підприємствами й установами були провідні галузеві науково-дослідні заклади, експериментальні лабораторії, конструкторські бюро виробничих об'єднань, а також кращі загальноосвітні й спеціальні середні школи.

У цей час Чернівецький університет став одним з провідних осередків науки і підготовки кадрів для різних сфер господарства й культури західного регіону та України.

У зв'язку з розвитком кібернетики, військово-промислового комплексу, появою комп'ютерної техніки виник попит на нові спеціальності, пов'язані з використанням електронно-обчислювальної техніки, набула актуальності потреба у базах практики, якими стали науково-обчислювальна лабораторія та Чернівецький філіал Київського інституту автоматичної, де студенти математичного факультету проходили практику, їх фахового зростання та

працевлаштування випускників. Назрівала потреба у створенні комп'ютерних класів.

Тематика наукових досліджень на математичному факультеті зазначеного періоду залежала, насамперед, від керівників структурних підрозділів і переважно стосувалася теорії диференціальних рівнянь і теорії функцій. Наприкінці 80-х років ХХ ст. зросла кількість науково-педагогічних кадрів пенсійного та передпенсійного віку, що свідчило про помітне «старіння» науково-викладацького колективу факультету. Крім того, для розвитку фундаментальних досліджень виділявся вкрай малий обсяг фінансування.

Підсумовуючи зазначимо, що освітня і наукова діяльність не може відбуватися ізольовано від соціально-політичних процесів України, а відношення науки й економіки, науки і влади завжди були і є проблематичними. Наука і освіта потребують значних інвестицій і не завжди стовідсотково прибуткових, їх вплив на суспільне життя є суперечливий, а тому важлива ще й гуманістична оцінка можливостей науки і освіти.

3.2. Система математичної освіти і науки на Буковині у перші роки незалежності України

Освіченість населення є наріжним каменем культурного й передумовою економічного і політичного розвитку кожної країни, певного регіону, людської спільноти, що переконливо доведено в період нової й новітньої історії. Події новітньої епохи, активна громадянська позиція більшості українського народу привели до того, що Україна отримала унікальний історичний шанс поставити владу на службу кожному громадянину, збудувати справедливу і заможну європейську державу, яку б шанували і цінували її власні громадяни, і до якої б з повагою ставилися у світі. Оскільки Буковина є одним з регіонів України, то в ньому система освіти і науки, зокрема й математичної, розвивалася відповідно до тих реформ, які проводили у перші роки незалежності в Україні. У демократичному суспільстві з ринковою економікою державна влада має брати на себе вирішення освітньо-наукових проблем та створювати умови щодо

здобуття громадянами освіти й водночас дбати про розвиток науково-технічного прогресу. Ринкові умови господарювання поставили ЗВО, особливо технічні, освітню систему в цілому і науку, зокрема, в надзвичайно складні умови. З одного боку, ЗВО і науково-дослідні заклади самі стали суб'єктами ринкових відносин, і, відповідно, повинні перебудувати свою діяльність, враховуючи закони ринку. А з іншого, – необхідно було за короткий термін реформувати систему підготовки фахівців з вищою освітою, бо перехід до ринку вимагає такої системи освіти, яка була б здатною витримати конкуренцію на ринку праці. Освітні реформи мають створювати умови для активної участі ЗВО, зокрема технічних, в процесі перетворення соціально-політичної, економіко-технічної й інших сфер життя суспільства. Реформування змісту освіти і науки за умов незалежності України позначено кардинальними змінами їх мети й цінностей. Українська педагогічна наука й практика, опановуючи нові цінності демократичного суспільства, почала переосмислювати попередні надбання вітчизняної педагогіки, детально вивчати зарубіжний досвід, вносити корективи в усі складові навчально-виховного процесу. Але в аксіологічному аспекті й на рівні предметного забезпечення потрібна розумна реалізація національної ідеї, системна гуманітаризація навчального змісту, підручників й методик, надання їм виразного культурологічного, розвивально-комунікативного спрямування. Концептуальні ж засади цього складного й тривалого процесу окреслює Державна національна програма «Освіта. Україна XXI століття» [19], Концепція гуманітаризації загальної середньої освіти [20], Концепція гуманітаризації вищої освіти тощо. Призначенням освіти стає зорієнтованість особистості у розмаїтті духовної та матеріальної культури людства і, насамперед, рідної. У суспільстві починає спостерігатися дисгармонія у розвитку моральної й інтелектуальної культури, постає необхідність змін у самосвідомості людей, активізації захисних функцій освіти і науки задля духовного та фізичного здоров'я народу. Зміст

¹⁹ Державна національна програма «Освіта. Україна XXI століття». – Київ: Райдуга, 1994. – 62 с.

²⁰ Гончаренко С.У., Мальований Ю.І. Гуманітаризація загальної середньої освіти: Проект концеп. – Київ: Освіта, 1994. – 34 с.

освіти при цьому надзвичайно значущий, оскільки масштабність й систематичність і тривалість його опанування не мають аналогів у житті людини. У ЗВО України навчають того, що потрібно знати в обсязі навчальної програми окремих дисциплін, й при цьому недостатньо вчать розв'язувати комплексні завдання. Проте насправді реальність виявилася далекою від гучних обіцянок й промов. А на рубежі ХХ-ХХІ ст. Україна, особливо в перші роки її незалежності, опинилася у глибокій соціально-економічній кризі. Нестримна «ломка» колишніх соціальних, економічних й політичних структур розхитала суспільство, змінила менталітет народу, відкинула країну назад. Як зазначав В. Ющенко у виступі на Всеукраїнському педагогічному форумі «Турбота про вчителя – надія на майбутнє» 24 травня 2005 р. в м. Полтаві « ... минулі здобутки не гарантують нації успіху в майбутньому. Світ навколо нас швидко змінюється. Стати повноцінним учасником глобальної економіки може лише та країна, в якій інтелектуальні професії стали масовими, а інвестиції у розвиток людського потенціалу – найвагомішими і найефективнішими. ... Настав час «економіки знань», у якій розумові ресурси приносять набагато більший прибуток, ніж природні. Наша велика проблема в тому, що Україна досі не реалізувала цю філософію. У цьому зв'язку освіта в Україні викликає все більше занепокоєння тих, кому не байдуже її майбутнє. ... Тривогу і фахівців, і батьків викликає помітний за останні роки відхід на задній план фундаментальних дисциплін. У класичній європейській школі рідна мова і література, математика, історія – це основи основ. Доповнені географією, фізикою, хімією, біологією та іноземними мовами вони становлять перевірений віками інструмент розвитку людського розуму. Чи виправдане їх розмивання «новомодними», методологічно необґрунтованими предметами?» Соціально-економічна криза 90-х років ХХ ст., ослаблення відповідальності держави за стан освіти та «забуття» владними структурами даних суспільству зобов'язань у сфері науки та освіти, невиправдане прагнення якнайшвидше перебудувати вітчизняну освітню систему і науку на кшталт західного зразка, незважаючи на власні національні традиції й багатовіковий досвід, безсистемність, а іноді й поспішність, щодо

реалізації освітніх реформ та низка інших явищ поставили вітчизняну освітню систему, вищу професійну та технічну освіту зокрема, в надзвичайно складне становище, що й призвело до відтоку наукових кадрів за кордон. Поки не буде досягнуто позитивних результатів реформ у сфері освіти та науки, доти буде відбуватися стихійне заміщення безкоштовних послуг платними. Освіта починає ділитися на освіту для «багатих» й «інших», а це загрожує зниженню загального рівня як у ЗЗСО, так і ЗВО. Після розпаду СРСР Україна мала одну з найкращих освітніх систем у світі. У першій половині 90-х років ХХ ст. було понад 1000 ЗВО I-IV рівнів акредитації. У ЗВО, що фінансувалися з державного бюджету, навчалось понад 1,5 млн. студентів. Крім того, студентський контингент України цього періоду перевищував чисельність студентів Великобританії, Німеччини, Франції та інших розвинених країн. Біля 60% загального контингенту студентів складала ті, що навчалися у ЗВО на природничих спеціальностях. У 1995 році ще функціонувало 1453 наукові організації за різними галузями наук, в яких працювало 179,8 тис. фахівців, котрі виконували різні науково-технічні завдання, серед них було 4,1 тис. докторів й 22,9 тис. кандидатів наук [21]. Досвід перших років незалежності України засвідчив про можливість подолання вітчизняними науковцями інформаційного вакууму, теоретичної самоізоляції філософської й соціологічної думки, що полягає, зокрема, в розробці проблематики загальнонаукових досліджень, методології системного підходу й аналізу, які уможливили забезпечення всебічного розгляду, об'єктивності вивчення й осмислення історичних проблем національних освітніх процесів. Значущість математичної освіти для суспільства має й певні труднощі щодо виховання майбутніх математиків, оскільки потрібно знати, на що акцентувати увагу в математичній освіті – на теоретичну підготовку, прикладне застосування, методичні принципи чи філософське й історичне бачення прогресу математичної думки? Ці питання є споконвічними й постають кожної епохи перед тими, хто бере на себе відповідальність за навчання і виховання молодого покоління.

²¹ Освіта за роки незалежності: стан, факти, події / За заг. ред. В.Г. Кременя. – Київ: Вища школа, 2001. – 159 с.

Висловлення що «математика є фундаментом сучасного природознавства й інженерної справи», але не підкріплене практичними застосуваннями, втрачає дію на суб'єктів навчання. А задачею освіти є виховання такого покоління, котре змогло б гідно долати складні випробування, які влаштує їм життя. Безумовно, наріжною проблемою на рубежі тисячоліть для математичної школи стала її наукова підтримка. Дослідження структури і параметрів науково-технічного потенціалу України до розпаду СРСР і в початковий період реформування економічного і політичного життя України та зміни, що відбулися в українській науці і техніці за перші роки реформування, вимагають особливої уваги. Вітчизняна вища технічна школа була найздатнішою щодо еволюційних перетворень, ніж наука в цілому, а тому знаменно, що на фоні швидкого зменшення кількості конструкторських бюро, проектно-дослідницьких організацій, експериментальних заводів за останні роки, кількість ЗВО, де виконують наукові дослідження, не зменшилася, а навпаки збільшується. Майбутній математик має бути добре підготовленим щодо педагогічної роботи як в абстрактно-теоретичному плані, так і в галузі прикладних досліджень, а тому зобов'язаний знати історію математики з її філософськими проблемами. Державі потрібно мати кваліфікованих математиків, які вміють ставити та розв'язувати інженерні й виробничі задачі. Розвал, який ми спостерігаємо сьогодні у промисловості й сільському господарстві, рано чи пізно закінчиться, а тоді виникнуть проблеми раціонального використання сировини, обладнання, робочої сили тощо та необхідність у виробництві якісної й надійної продукції.

Інакше кажучи, процес перебудови освіти, особливо загальноосвітньої в тому числі й математичної, є досить складним, а тому ставлення до нього в перші роки незалежності було обережним, детально продумували не лише формальний бік змісту навчання, а також і його наслідки, пам'ятаючи про те, що математичні знання будуть необхідними всім, але математиками стануть лише одиниці. Переконавання у важливості математики та її методів для сучасного суспільства лише на словах результатів не дасть. Потрібно, аби математичні поняття, теорії і методи започатковувалися не у результаті бажання вчених, а були затребуваними

в практичній діяльності. З цією метою потрібні як знання історії математичної науки, так і відповідні навчальні підручники. В цьому контексті показовими були підручники з математики, якими користувалися в австрійських, російських, румунських і радянських навчальних закладах буковинського краю. А у ЗВО важливим компонентом навчального процесу мала стати наукова складова, відповідний рівень якої покликані забезпечити їх науково-педагогічні кадри. Цьому має сприяти розвиток наукових шкіл і збереження їх традицій, чому й було присвячено в Чернівецькому університеті у перші роки незалежності. Вивчення історії розвитку й становлення математичної освіти та науки є складовою підготовки висококваліфікованих фахівців природничого профілю та необхідною умовою для правильного розуміння сутності даної науки й вибору напрямку та форм особистої діяльності. Майбутнє потребує подальшого зростання кількості спеціалізацій знання, створення освітньо-наукової системи, що, значною мірою, ніж теперішня, сприяла б різнобічності навчання, розвивала б евристичні здатності, утверджувала автономність особистості. Але, це вже питання освітньої політики. Зрозуміло, що «гуманізація» освіти не передбачає зниження інтенсивності навчальної праці, а навпаки, остання ставатиме дедалі складнішою і для тих, хто вчиться, і для тих, хто вчить. Як зазначає М.В. Працьовитий у [22], необхідною умовою прогресивного розвитку суспільства є високий і стабільний рівень його системи освіти. Без фундаментальної математичної підготовки сьогодні неможлива якісна економічна, фізична, технічна, інженерна освіти, яку забезпечують професійні математики (викладачі математики) – фахівці, які є продуктом тієї ж системи освіти. Водночас, суспільству потрібні талановиті і перспективні математики-науковці, які б розвивали фундаментальну і прикладну математику, брали участь у розробленні нових технологій, здатних забезпечити поступальний розвиток науки і виробництва, надійність систем і ефективність їх функціонування. Підготовка професійного математика (науковця, вчителя математики, викладача ЗВО)

²² Працьовитий М.В. До концепції розвитку математичної освіти. – Київ: НПУ, 2007. – 144 с., с. 116-121

принципово відрізняється від підготовки програміста, фізика, економіста, інженера тощо. Вона потребує особливої системи відбору обдарованої молоді, ранньої професіоналізації та ефективної системи формування функціональних й фахових якостей, підготовленості до професійної діяльності. З огляду на те, що математика є елементом загальнолюдської культури й ефективним засобом розвитку розумових якостей, передусім, мислення і просторової уяви, то кожен член цивілізованого суспільства повинен володіти принаймні елементарними математичними знаннями та навичками. Тому математику мають вивчати всі, але постає інше питання: як глибоко, інтенсивно і довго? З метою інтеграції математичної освіти й науки з європейським освітньо-науковим простором, у перші роки незалежності передбачалося досягнути: державного комплексного підходу щодо проблем математичної освіти і науки; високої компетентності та професіоналізму щодо розробки нормативних(державних) документів, котрі б регламентували зміст математичної освіти (галузевий стандарт, навчальні програми, типові навчальні плани, а відповідно посібники та підручники); усвідомленості специфіки математики та її значущості у житті, науці, суспільстві; розуміння математичної освіти як тотальної й невід'ємної складової базової освіти; забезпеченості системи математичної освіти високоякісними навчальними і навчально-методичними посібниками й підручниками; відповідності змісту математичної освіти сучасному розвитку науки, суспільним ідеалам та соціальним потребам; диференціації фундаментальної математичної освіти; структуризації змісту математичної освіти за цілями; високоефективної системи підготовки та підвищення кваліфікації фахівців: учителів математики і професорсько-викладацького складу ЗВО; престижності учительської професії й підвищення соціального статусу науковця та й педагога; ранньої професіоналізації як одного зі шляхів оптимізації процесу підготовки професійного математика; підтримки математичних талантів, учнівської й студентської молоді, молодих науковців; взаємодії, взаємозбагачення математики з іншими галузями науки, підтримки інтеграційних процесів у науці [22].

Тепер математична освіта в Україні переживає не кращі часи. На жаль, вона починає здавати завойовані раніше позиції. Особливу стурбованість викликає втрата фундаментальності, культу знань й престижу вчительської професії, зростаюче відставання від сучасного рівня розвитку науки тощо. Водночас, освіта не втратила ще багато кращих традицій, ще існує потужний науково-педагогічний і кадровий потенціал, на базі якого можливий якісний розвиток і реформування. Освіта полінаціонального буковинського краю мала і має самобутні особливості, й ознаки, характерні для системи освіти України загалом. В краї у перші роки незалежності особливу увагу приділяли задоволенню освітніх потреб національних меншин. Після проголошення незалежності України поліпшилися умови для культурно-національного розвитку різних етносів буковинського краю, кращого задоволення національних запитів в освіті. У 1993/1994 н. р. в області діяло 433 заклади загальної середньої освіти, де навчалося 135800 учнів, з яких – 299 українською мовою викладання, 66 румунською, 20 молдавською, 9 російською та 1 єврейською, 28 українсько-російською, 6 українсько-румунською, 2 російсько-румунською та 2 українсько-російсько-румунською [23]. Навчання у ЗЗСО, зокрема з математики, здійснювалося у перші роки незалежності за тими ж підручниками, що були й до незалежності України. Починаючи з 1994 року, загальна чисельність населення у Чернівецькій області зменшувалася [23]. Центром математичної освіти і науки на Буковині був Чернівецький університет, а Чернівецький обласний науково-методичний інститут освіти нині Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області – виконував роль головної методичної установи з освітньої галузі в області. Зі здобуттям Україною незалежності Чернівецький університет вступив у нову смугу розвитку: відкрилися значно ширші можливості й свобода у навчальній, науковій і виховній діяльності, співпраці з вітчизняними та зарубіжними навчально-науковими закладами й установами. Зберігаючи усі цінні попередні нароби, професорсько-викладацький колектив математичного

²³ Буковина за роки незалежності: Статистичний огляд / За ред. А.В. Ротаря. – Чернівці: Головне управління статистики у Чернівецькій області, 2005. – 172 с.

факультету, за нетривалий час переглянув й докорінно змінив методологічні та концептуальні засади навчально-методичної й виховної роботи. У науковій діяльності взято за орієнтири актуальність проблематики, критичний й водночас зважений підхід щодо здобутків попередників та доведення власних наробків до логічного завершення на основі глибокого аналізу досліджуваної проблеми. Допомога з боку провідних учених інших ЗВО та академій наук (читання лекцій, проведення консультацій з аспірантами і співробітниками кафедр) сприяла поліпшенню математичних наукових досліджень кафедр факультету та підготовці викладачами кандидатських і докторських дисертацій. Якщо до незалежності на математичному факультеті працювало 5 докторів наук, то у перші роки незалежності їх кількість поповнилася ще 6 докторами наук: В.К. Ясинський, М.П. Ленюк, В.В. Городецький, Р.І. Петришин, Ф.О. Сопронюк, М.Л. Свердан і станом на 1998 рік серед сімдесяти викладачів факультету було 9 докторів наук (В.В. Городецький, С.Д. Івасишен, М.П. Ленюк, М.І. Матійчук, М.І. Нагнибіда, Р.І. Петришин, М.Л. Свердан, Ф.О. Сопронюк, В.К. Ясинський, середній вік яких становив 55 років) і лише 7 викладачів були без наукового ступеня [24]. На факультеті функціонувала спеціалізована вчена рада із захисту кандидатських дисертацій з двох спеціальностей: диференціальні рівняння, математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях. Це сприяло забезпеченню кафедр факультету висококваліфікованими фахівцями. У перші роки незалежності України на математичному факультеті було 6 кафедр: кафедра алгебри та геометрії (завідувачі кафедри: до 1996 р. – доц. Р.Ф. Домбровський, з 1996 р. – професор В.В. Городецький); диференціальних рівнянь (завідувач кафедри професор М.І. Матійчук; математичного аналізу (завідувач кафедри доц. П.П. Настасієв); математичного моделювання (завідувач кафедри професор С.Д. Івасишен); математичних проблем управління і кібернетики (завідувачі кафедри: по 1992 р – професор М.Ф. Кириченко, з 1992 р. – професор Ф.О. Сопронюк); прикладної

²⁴ Крехівський В.В. Математичний факультет / Крехівський В.В., Лавренчук В.П., Мартинюк В.Т. – Київ : Ін-т математики НАН України. – 152 с., с. 14-115

математики і механіки (завідувачі кафедри: по 1992 р. – професор В.І. Фодчук, з 10 травня 1992 р. по 1996 р. – професор Я.Й. Бігун, з 1996 р. – професор Р.І. Петришин) [25]. Викладачі факультету отримали загально визнані наукові результати з теорії диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, стохастичних диференціальних рівнянь і теорії керування. Кожна кафедра виконувала як бюджетну тему по міністерству освіти України, так і кафедральну наукову тему. Враховуючи тодішні тенденції світового розвитку інформатики й використання комп'ютерної техніки, математичний факультет ініціював створення класів персональних комп'ютерів і на 1998 рік їх було 5, котрі оснащено тодішніми комп'ютерами з виходом у міжнародну мережу Internet. Це в свою чергу посприяло збільшенню кількості студентів на спеціальності науково-виробничого профілю. Статистичні дані щодо кількості студентів на математичному факультеті у 1992/1993 навчальному році наведено у табл. 3.3 Звідси випливає, що переважна більшість студентів становили представники жіночої статі й така тенденція продовжувалася й надалі. Значно почав зменшуватися контингент на науково-педагогічні спеціальності у зв'язку з їх не престижністю в суспільстві.

Таблиця 3.3

Статистичні дані щодо кількості студентів на денній і заочній формах навчання математичного факультету 1992/1993 н. р.

Курс	Денна форма навчання			Заочна форма навчання			Всього		Всього
	Всього	Чол.	Жін.	Всього	Чол.	Жін.	Чол.	Жін.	
I	129	47	82	34	11	23	58	105	163
II	112	42	70	24	5	19	47	89	136
III	115	38	77	33	5	28	43	105	148
IV	100	22	78	37	4	33	26	111	137
V	130	49	81	23	2	21	51	102	153
VI	-	-	-	9	2	7	2	7	9
Всього	586	198	388	160	29	131	227	519	746
Всього	586			160			746		

²⁵ Житарюк І.В. Факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету – 50 / Житарюк І.В., Черевко І.М. // Буковинський математичний журнал. – 2018. Т. 6. -№ 3-4. – С. 63-76.

Співробітники кафедр підтримували зв'язки зі школами міста й області, брали активну участь у проведенні олімпіад з математики, учительських конференцій м. Чернівці та районах області.

Підсумовуючи зазначимо, що досвід національного державотворення в Україні у перші роки незалежності України переконливо довів, що технократичні підходи щодо вирішення проблем, котрі виникли перед Україною, є безплідними, а тому одним з головних завдань є акцентування уваги держави і суспільства в цілому на гуманітаризації знання, що надасть можливість перетворити й відвернути загальну деградацію і соціальні антагонізми. Задачі, які ставить суспільство перед освітою та наукою, ставлення до математичної освіти та науки й умови, створювані для неї, можливості реалізації її досягнень – залежить від досягнутого етапу суспільного розвитку, властивих йому засобів виробництва та виробничих відносин. В історії часто було так, що останні, які не відповідали рівню продуктивних сил, були гальмом подальшого розвитку математичної науки й освіти, перешкоджали впровадженню їх досягнень. І, навпаки, виробничі відносини, що відповідали продуктивним силам, стимулювали їх розвиток. Проте, досягнення науки й науково-технічний прогрес сприяють розвитку суспільства і освіти в цілому, а правильне розуміння предмету математики та математичного знання і його історії є необхідною умовою глибокого розуміння реального місця цієї науки в трудовій і суспільній діяльності людей та є запорукою розвитку суспільства. Підготовка ж висококваліфікованих фахівців-математиків науково-педагогічного і науково-виробничого профілів потребує й відповідної науково-педагогічної основи.

3.3. Математична освіта і наука у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича у період незалежності України

Чернівецький університет зі здобуттям Україною незалежності вступив у нову смугу розвитку: відкрилися значно ширші можливості й свобода у навчальній, науковій та виховній діяльності, співпраці з вітчизняними й зарубіжними навчально-науковими закладами та установами.

Професорсько-викладацький колектив математичного факультету, зберігаючи усі цінні попередні нароби, за нетривалий час було докорінно змінено методологічні й концептуальні засади навчально-методичної і виховної роботи.

У науковій діяльності орієнтиром були актуальність проблематики й доведення власних наробів до логічного завершення.

Допомога з боку провідних вчених інших ЗВО і академій наук сприяла покращенню математичних наукових досліджень кафедр факультету і підготовці викладачами кандидатських та докторських дисертацій. Якщо до незалежності на математичному факультеті працювало 5 докторів наук, то у перші роки незалежності їх кількість поповнилася ще 6 докторами наук: В.В. Городецький, М.П. Ленюк, Р.І. Петришин, М.Л. Свердан, Ф.О. Сопронюк, В.К. Ясинський і станом на 1998 рік серед сімдесяти викладачів факультету було 9 докторів наук (В.В. Городецький, С.Д. Івасишен, М.П. Ленюк, М.І. Матійчук, М.І. Нагнибіда, Р.І. Петришин, М.Л. Свердан, Ф.О. Сопронюк, В.К. Ясинський, середній вік яких становив 55 років) і тільки 7 викладачів були без наукового ступеня.

Враховуючи тенденції розвитку інформатики та використання комп'ютерної техніки у навчальному процесі, математичний факультет ініціював створення класів персональних комп'ютерів і на 1998 рік їх було 5, які було оснащено тодішніми комп'ютерами з виходом у мережу Internet. А це посприяло збільшенню кількості студентів на спеціальності науково-виробничого профілю.

У зв'язку з непрестижністю в суспільстві науково-педагогічних спеціальностей, намітилося зменшення набору студентів на них.

Наукові результати викладачів факультету з теорії диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, стохастичних диференціальних рівнянь і теорії керування були загальноновизнаним в суспільстві, а кожна кафедра виконувала як бюджетну тему по міністерству освіти України, так й кафедральну наукову тему.

Для забезпечення спеціальності «Статистика» 27 грудня 2000 року відкрито кафедру математичної та прикладної статистики (наказ по ЧНУ № 91 від 27 грудня 2000 року; *завідувачі кафедри*: по 2001 рік – професор М.Л. Свердан, з

2001 року – професор В.К. Ясинський, за наказом № 204 від 06.09.2017 по ЧНУ кафедру математичного моделювання і кафедру системного аналізу і страхової та фінансової математики об'єднано в кафедру математичного моделювання). З 2004 року по 2007 рік кафедра перебувала у складі факультету комп'ютерних наук.

У 2004 році математичний факультет перейменовано на факультет прикладної математики, а 2013 – математики та інформатики.

За вказаний період проведено:

- ✓ Всеукраїнську конференцію «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування» (1996).
- ✓ Міжнародну конференцію «Диференціальні рівняння і нелінійні коливання» (2001).
- ✓ Міжнародну конференцію «Шості Боголюбівські читання» (2003).
- ✓ Міжнародні конференції, присвячені пам'яті Ганса Гана (1994, 2004).
- ✓ Міжнародну конференцію «Диференціальні рівняння та їх застосування» (2006).
- ✓ Міжнародну наукову конференцію, присвячену 90-річчю від дня народження С.Д. Ейдельмана (2011).
- ✓ Всеукраїнську конференцію «Диференціальні рівняння та їх застосування у прикладній математиці» до 50-ти річчя заснування кафедри ПММ.
- ✓ Міжнародну наукову конференцію «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування», присвячену 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука (1936-1992) (28-30 вересня 2016 р.).
- ✓ Міжнародну наукову конференцію «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках й інформаційних

технологіях», присвячену 50-річчю факультету математики та інформатики (17-19 вересня 2018 р.).

✓ Міжнародну наукову конференцію, присвячену 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка (28-30 жовтня 2021 р.).

Упродовж зазначеного періоду викладачами факультету захищено 18 докторських дисертацій (М.П. Ленюк, В.К. Ясинський, Р.І. Петришин, В.В. Городецький, Ф.О. Сопронюк, В.К. Маслюченко, І.М. Черевко, М.М. Попов, І.Д. Пукальський, В.В. Михайлюк, Я.Й. Бігун, В.А. Літовченко, І.В. Житарюк, О.В. Маслюченко, В.В. Нестеренко, О.О. Карлова, О.В. Мартинюк, І.І. Клевчук).

Випускника факультету 1970 року (кафедра ПММ) Слюсарчука Василя Юхимовича обрано членом-кореспондентом НАН України.

Статистичні дані щодо студентів факультету математики та інформатики у 2013/2014 н. р. наведено у табл. 3.4, у порівнянні з 1992/1993 н. р. їх кількість зменшилася.

Таблиця 3.4

Статистичні дані щодо кількості студентів на денній і заочній формах навчання факультету математики та інформатики (2013/2014 н. р.)

Курс	Денна форма навчання		Заочна форма навчання		Всього		Всього
	Чол.	Жін.	Чол.	Жін.	Чол.	Жін.	
I	52	48	7	6	59	54	113
II	50	35	12	3	62	38	100
III	45	35	32	10	77	45	122
IV	63	36	38	7	101	43	144
V	60	24	50	15	110	39	149
VI			15	7	17	7	24
Всього	270	178	156	48	426	226	652
Всього	448		204		652		

Колектив факультету має загально визнані наукові досягнення у теорії диференціальних рівнянь з частинними та звичайними похідними, диференціально-функціональних рівнянь, функціональному аналізу, теорії

функцій, математичному моделюванні та застосуванні сучасних інформаційних технологій.

На факультеті діє спеціалізована рада із захисту кандидатських дисертацій зі спеціальностей: диференціальні рівняння, математичний аналіз, математичне моделювання та обчислювальні методи. За 1990-1921 рр. на спеціалізованій вченій раді К 76.051.02 захищено 124 дисертації здобувачами із 13 міст України.

Нині факультет здійснює підготовку за спеціальностями першого (бакалаврського), другого (магістерського) рівнями:

- ✓ 111 «Математика», освітня програма «Математика»;
- ✓ 014.09 «Середня освіта (Інформатика)», освітні програми: «Інформатика та математика», «Інформатика та інформаційні технології в освіті»;
- ✓ 014.04 «Середня освіта (Математика)», освітня програма: «Математика та інформатика»;
- ✓ 113 «Прикладна математика», освітня програма: «Технології програмування та комп'ютерне моделювання»;
- ✓ 122 «Комп'ютерні науки», освітня програма «Інформаційні технології та управління проектами»,
- ✓ 124 «Системний аналіз», освітня програма «Системний аналіз». Крім того на факультеті здійснюється підготовка доктора філософії за відповідними спеціальностями.

За 15 освітніми програмами факультету нині навчається понад 700 здобувачів вищої освіти (див. табл. 3.5).

Таблиця 3.5

**Статистичні дані щодо кількості студентів на денній і заочній формах
навчання факультету математики та інформатики
(2022/2023 н. р.)**

Рівень вищої освіти	Курс	Денна форма навчання		Заочна форма навчання		Всього		Всього
		Чол.	Жін.	Чол.	Жін.	Чол.	Жін.	
Перший (бакалаврський)	I	85	69	2	7	87	76	163
	II	76	45	-	5	76	50	126
	III	63	35	4	6	67	41	108
	IV	51	23	3	18	54	41	95
	Всього	275	172	9	36	15	78	492
Другий (магістерський)	I	101	20	3	28	104	48	152
	II	33	26	2	22	35	48	83
	Всього	134	46	5	50	20	45	235
Всього		627		100		727		

Досягнення науки й науково-технічний прогрес сприяють розвитку суспільства і освіти в цілому, а правильне розуміння предмету математики та математичного знання і його історії є необхідною умовою глибокого розуміння реального місця цієї науки в трудовій і суспільній діяльності людей та є запорукою розвитку суспільства.

На факультеті функціонують 5 комп'ютерних класів і 3 лабораторії з інформаційних та комп'ютерних технологій, 3D-графіки та 3D-друку, які обладнані сучасною комп'ютерною технікою з ліцензійним програмним забезпеченням, 3D принтерами; а також – кабінет математики, де зберігається понад 10000 книг та журналів.

Факультет підтримує наукові зв'язки з ІМ НАНУ, КНУ імені Тараса Шевченка, ІППММ (м. Львів), Інститутом кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (м. Київ), університетом м. Саскатун (Канада), інститутом прикладної математики та механіки Варшавського університету, Ризьким технічним університетом (Рига, Латвія), факультетом математики та фізики Сілезького технологічного університету (Польща), факультетом математики, фізики та інформаційних технологій Тираспольського університету (Кишинів,

Молдова), фахівцями з інформаційних технологій і комп'ютерного моделювання з Канади, Польщі, Румунії, Молдови та з комп'ютерними компаніями SharpMinds, MobiDev, Svitla System, SoftServe, ТЗОВ Юкон Софтваре, DeSyde, АМС Bridge, шведсько-українським медичним центром Angelholm та іншими установами, на яких працюють чимало випускників і студентів факультету й іншими.

Випускники факультету працюють на посадах:

- ✓ програміста,
- ✓ розробника web-додатків,
- ✓ розробника комп'ютерних ігор та мобільних додатків,
- ✓ тестувальника програмного забезпечення,
- ✓ системного адміністратора,
- ✓ менеджера проектів,
- ✓ аналітика або архітектора програмної системи,
- ✓ розробника або адміністратора баз даних,
- ✓ вчителя математики та інформатики.

Викладачі факультету беруть активну участь у підготовці учнів до олімпіад і проведенні математичних олімпіад з математики районного, міського й обласного рівнів, роботі Малої академії наук Буковини, керують написанням наукових робіт учнями – членами БМАН тощо.

3.4. Впровадження сучасних інноваційних технологій навчання у навчальний процес ЗО

Реформування, які відбуваються в Україні на початку ХХІ ст. у системі освіти та глобалізаційні виклики, передбачають побудову такої системи математичної освіти в ЗО України з використанням сучасних інноваційних підходів, яка б стала основою її процвітання в майбутньому. В умовах постійного оновлення інформації відбувається «прийом» учнями значного обсягу інформації, зокрема і з математики, який вони мають опрацювати з метою набуття нових знань, щоб

стати успішними у своїй індивідуальній освітній траєкторії, що зумовлює необхідність формування навичок читання і роботи з текстом – розуміння змісту прочитаного матеріалу, вміння оцінити й інтерпретувати прочитане, а це в свою чергу постійно потребує нових способів його засвоєння.

Процес перебудови математичної освіти є доволі складним, а тому ставлення до нього має бути продуманим не лише з формального боку змісту навчання, а й щодо його наслідків, тобто з акцентом на затребуваність математичної освіти в суспільстві

Однією з проблем сучасного закладу загальної середньої освіти є те, що нинішні учні, особливо основної школи, губляться у потоці інформації з математики у порівнянні з початковою школою, їм буває складно запам'ятати й зрозуміти значні обсяги інформації з математики і, як наслідок, втрачається інтерес до її вивчення. Саме тому набуває популярності у математиці метод сторітелінгу, при якому пояснення нової інформації, необхідної для запам'ятовування, відбувається за допомогою захоплюючих емоційних історій.

Нині для підвищення рівня внутрішньої і зовнішньої мотивації учнів основної школи щодо вивчення математики значне місце, на нашу думку, має посідати інноваційна педагогічна технологія *сторітелінг*. Мова є складним психологічним процесом, який неможливо оцінити, розвинути окремо від мислення чи сприймання, а навчальний матеріал, який подається у вигляді унікальної цікавої захоплюючої історії, на нашу думку, дозволяє проявити активність і творчість, сприятиме розвитку особистісних якостей та демонструватиме унікальність уяви кожного учня. Сучасні учні значну частину часу проводять в онлайн спілкуванні, а тому реальна міжособистісна взаємодія має стати мистецтвом, якому потрібно навчати і цьому власне й підходить метод «сторітелінгу». *Сторітелінг* (*story* – історія, *telling* – розповідати) – мистецтво захоплюючої розповіді й передачі за допомогою неї необхідної інформації задля

впливу на мотиваційну, емоційну й когнітивну сфери учня [26; 27].

Зазначимо, що застосування *сторітелінгу* в освітньому процесі можна розглядати в контексті поняття «едьютеймент» (*education* – навчання і *entertainment* – розвага) та аналізу ефективності його застосування. Сторітелінг можна розглядати і як спосіб передачі інформації та знань, а також спонукання до бажаних дій за допомогою певних історій, метод управління шляхом трансляції цінностей, інструмент впливу, який виконує пропагандистські, комунікативні та мотивуючі функції.

На сьогодні виокремлюють два основні види *педагогічного сторітелінгу*: *класичний сторітелінг* – класична розповідь для трансляції явного знання й *активний сторітелінг* – практична діяльність, що представляє неявне знання. А розвиток інформаційних технологій спонукає поширенню *цифрового сторітелінгу*, тобто такого формату сторітелінгу, в якому розповідь доповнюється певною візуалізацією – *відео*; *скрайбінг* (*scribe* – робити ескіз, нарис) – метод розповіді чи пояснення, який супроводжується графічною ілюстрацією головного змісту сказаного, тобто учні слухають розповідь й одночасно бачать графічну відповідність почутого; *майнд меп* – одна із ефективних технік структурування інформації за допомогою її графічного представлення; *інографіка* (візуальне графічне подання інформації, даних або знань, які призначені для швидкого й чіткого відображення певної комплексної інформації) [26; 28].

Сторітелінг в математиці слугує для передачі знань через розповіді або сценарії з використанням персонажів, конфліктів, сюжетів тощо задля покращення засвоєння матеріалу. При цьому психолого-педагогічними аспектами постає вплив емоційного залучення щодо запам'ятовування, розвиток

²⁶ Бондаренко Н. Storytelling як комунікаційний тренд і всепредметний метод навчання // Молодь і ринок. – 2019. – № 7 (174). – С. 130-135

²⁷ Соколюк О.М. Вплив VR/AR на технології навчання й освітянські практики // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід. – 2021. – Вип. 60. – С. 108-116.

²⁸ Фещенко Г.В. Сторітеллінг як інновація в сучасному освітньому процесі // Інноваційна діяльність педагога в сучасному освітньому просторі. – Умань: ВПЦ «Візаві», 2017. – С. 32-35

аналітичного мислення через історії, використання метафор для пояснення складних понять, а типами сторітелінгу можуть слугувати: *класичний* – розповідь вчителя, *інтерактивний* – учні самостійно формують сюжет, наприклад, «що буде, якщо змінити умову задачі?», *гейміфікований* – поєднання історій з елементами гри, *цифровий* – використання мультимедіа (анімації, інтерактивні презентації).

Вчителю математики можна розказати *деяку реальну проблему* і про те, як за допомогою певних математичних знань її можна розв'язати; чи *історію про певну проблемну побутову ситуацію* й запропонувати учням самим її розв'язати; *здивувати учнів*, розказавши учням не «сухі факти» з біографії відомих математиків, а «кохання на усе життя»; *перетворити геометричні фігури або цифри на персонажі певної історії* та розказати як вони можуть взаємодіяти.

Застосування сторітелінгу при навчанні математики в основній школі, на нашу думку, сприяє: *підвищенню мотивації*, тобто захоплюючі історії залучають учнів основної школи до процесу навчання; *полегшенню розуміння* – складні абстрактні поняття можна пояснити через реальні ситуації; *розвитку критичного мислення* – учні вчаться аналізувати й знаходити розв'язки через *контекстні задачі* (практично-зорієнтовані) – задачі, які зустрічаються у певній реальній життєвій ситуації; *формуванню міжпредметних зав'язків* – інтеграція математики з історією, інформатикою, літературою тощо [28].

Враховуючи вікові особливості учнів основної школи виокремлюють *застосування сторітелінгу* при навчанні математики:

а) В 5-6 класах, тобто учні 10-12 років ще мислять образами та мають розвинену уяву, а тому важливо використовувати яскраві метафори, казкові сюжети та персонажі. Крім того, учні цього віку легко сприймають гру та пригодницькі історії, зокрема історія про подорож до скарбів для пояснення координатної площини, казка про чарівні дробі для навчання основних дій з дробами чи «математичні детективи» – розв'язування задач через розслідування, де потрібно встановити, наприклад, вік підозрюваного.

Методичними підходами щодо застосування сторітелінгу може бути:

використання у задачах знайомих з початкової школи персонажів; побудова уроку у формі казки, коміксу або театралізованого дійства; поєднання математики з іншими предметами (літературою, історією, природознавством). Це можуть бути *сюжетні задачі*, тобто задачі, подані у вигляді історій з персонажами, проблемами та розв'язками, *наприклад*, учням наводиться історія про мандрівника, який шукає скарб і для того, щоб відкрити карту учням потрібно правильно розв'язати задачу щодо знаходження координат точок на площині; *математичні казки* – вигадування або адаптація відомих казок з математичним змістом, *наприклад*, казка про гномів, які ділять золоті монети між собою, допоможе пояснити поняття дробу та дій з ними; *комікси та ілюстрації* – візуалізація математичних концепцій через графічні історії, *наприклад*, комікс про персонажі, які використовують масштаб і пропорції для побудови міста; *інтерактивні історії та ігри* – використання цифрових технологій для створення навчальних сюжетів, *наприклад*, онлайн-квест, де учні проходять певні рівні, розв'язуючи задачі з використанням дій множення та ділення.

б) В 7-9 класах, тобто учні 12-15 років краще сприймають історії, пов'язані з реальним життям; важливий акцент робиться на логіку, взаємозв'язки, практичні застосування; добре працюють історії, які демонструють значущість математики у технологіях, науці, фінансах. Це можуть бути комікси про математичних детективів, які розв'язують рівняння; інтерактивна гра «Математична експедиція», де учні розв'язують задачі, задля проходження рівнів; «Математика у світі фінансів» – історія про підлітка, який хоче відкрити власну справу, де учні через розрахунок прибутку, відсотків і податків опановують тему відсоткових розрахунків; «Алгебра як мова програмування» – пояснення функцій та рівнянь через розробку простих алгоритмів у Python чи Scratch; «Параболічний детектив» – розслідування, де злочинця знаходять за допомогою квадратних рівнянь.

Методичними підходами щодо застосування сторітелінгу може бути: використання реальних історій відомих вчених; застосування інтерактивних технологій: відео, анімацій, VR (віртуальна реальність) і AR (доповнена

реальність) дозволяють створювати неймовірні світи та знаходити інноваційні рішення для реальних проблем; гейміфікація математичних задач у стилі рольових ігор [26, 27, 28].

Це можуть бути *проектні роботи*, тобто учні створюють власні історії, що включають математичні розрахунки та моделювання ситуацій, *наприклад*, учні розробляють сюжет для бізнес-проєкту щодо відкриття кафе, у якому вони підраховують прибуток, витрати та прогнозують доходи; *математичні детективи* – історії з елементами розслідування, де потрібно застосувати математичні навички, *наприклад*, учні розв'язують «таємничі рівняння», щоб розкрити зникнення дорогоцінного каменя; *гейміфікація та рольові ігри* – створення сценаріїв з використанням алгебраїчних або геометричних задач, *наприклад*, гра «Математична битва», у якій учні використовують рівняння для перемоги над суперником; *історичний сторітелінг* – розгляд розвитку математичних ідей через біографії відомих математиків, *наприклад*, учні досліджують життя Піфагора та відтворюють його математичні відкриття через історичні реконструкції.

Підсумовуючи зазначимо, що метод сторітелінгу є потужним засобом навчання математики в основній школі, особливо у 5-6 класах, у яких акцент робиться на казкових історіях, а у 7-9 класах – на реальних ситуаціях. Він сприяє підвищенню мотивації учнів, робить навчальний процес ефективнішим і захопливішим, а завдяки історіям учні краще розуміють матеріал, розвивають уяву та логічне мислення. Для успішного впровадження цього методу, на нашу думку, необхідна адаптація навчального матеріалу до запитів і потреб учня та відповідна підготовка вчителя, а поєднання сторітелінгу з інтерактивними технологіями робить уроки математики цікавими та ефективними.

Вважаємо, що метод сторітелінгу доцільно інтегрувати у різні аспекти навчання, включаючи не лише уроки, а й позакласні заходи, конкурси та проектну діяльність. На нашу думку, важливо використовувати сучасні ІКТ технології для створення інтерактивних історій та залучення учнів до активного навчального процесу.

ВИСНОВКИ

1. Досліджено простори $S_{a_k}^{b_n}$, які є узагальненнями просторів типу S і будуються за певними послідовностями $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел (дослідження топологічної структури, властивостей функцій, основних операцій, властивостей перетворення Фур'є функцій з просторів типу S' , згортки, згортувачів та мультиплікаторів);
2. досліджено нелокальну багатоточкову за часом задачу у півпросторі $t > 0$ для диференціально-операторного рівняння $\partial u / \partial t + Au = 0$, де $A = |D_x|^\alpha$, $D_x = d/dx$, $\alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$ – дробовий степінь модуля оператора диференціювання. Такий оператор можна розуміти як аналог оператора дробового диференціювання Вейля, який використовується у теорії періодичних функцій. Встановлено, що кожний псевдодиференціальний оператор (у випадку однієї незалежної змінної), побудований за однорідною функцією порядку α , не диференційовною у точці 0, збігається із звуженням оператора $|D_x|^\alpha$ на деякій локально-опуклий топологічний простір, який є проективною границею банахових просторів, неперервно вкладених один в одний. Це дозволило застосувати перетворення Фур'є при дослідженні нелокальної багатоточкової задачі для зазначеного рівняння з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів. Така постановка задачі дозволяє розширити клас початкових функцій, оскільки кожну функцію, яка має степеневу особливість у точці 0, можна регуляризувати у просторі розподілів Шварца (тобто таку функцію можна розуміти як регулярний функціонал). Доведено коректну розв'язність зазначеної задачі, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, при цьому досліджені властивості фундаментального розв'язку, встановлено, що при виконанні певного обмеження на початкову функцію розв'язок задачі стабілізується до нуля рівномірно на \mathbb{R} при $t \rightarrow +\infty$;

3. досліджено нелокальну багатоточкову за часом задачу у півпросторі $t > 0$ для еволюційного рівняння $\partial u / \partial t + Bu = 0$, де $B := \sqrt{I + |iD_x|^\alpha} = \sqrt{I + |D_x|^\alpha}$, $\alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$. Такий оператор можна розуміти як певний аналог оператора $\sqrt{I + (iD_x)^2} = \sqrt{I - D_x^2}$, який використовується в теорії дробового інтегродиференціювання і називається оператором Бесселя дробового диференціювання.
4. Вивчено простори узагальнених елементів, які ототожнюються з формальними рядами Фур'є і будуються за невід'ємним самоспряженим оператором з суто дискретним спектром. У даних просторах розглянуто диференціально-операторне рівняння $u'(t) + \varphi(A)u(t) = 0$, $t \in (0, T]$, $\varphi(A)$ - функція від оператора A , розвинута теорія нелокальної багатоточкової за часом задачі у випадку, коли відповідна умова задовольняється в позитивному або негативному просторі, які побудовані за оператором A . Встановлена коректна розв'язність такої задачі, при цьому будується фундаментальний розв'язок, досліджуються його структура та властивості. Розв'язок $u(t)$ дається у вигляді абстрактної згортки $G(t) * g$, де граничний елемент є лінійним неперервним функціоналом, заданим на просторі основних елементів (позитивному просторі H_+ , побудованому за оператором A), при цьому $\{G(t), u(t)\} \subset H_+$ при кожному $t \in (0, T]$, але згортка $G(t) * g$ задовольняє багатоточкову умову в негативному просторі H_- .
5. побудовано аналог оператора узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонт'єва у просторах типу W без спеціальних обмежень на послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, тобто такі оператори не породжуються, взагалі кажучи, деякою цілою функцією із спеціальними властивостями (елементами цього класу операторів можуть бути і оператори Гельфонда–Леонт'єва). Досліджено задачу Коші для еволюційних рівнянь з такими операторами у просторах типу W .
6. описано алгоритми побудови систем твірних груп автоматних підстановок, котрі занурюються у вінцевий добуток симетричних груп скінченного рангу та які діють на множині всіх слів над даним алфавітом або на множині слів

довжини r ($r \in \mathbb{N}$) над цим алфавітом; встановлено, що група, індукована автоматними підстановками на множині слів довжини r має мінімальну (за кількістю елементів) базу, яка складається рівно з r елементів, побудовано коректне доведення нескінченної породжуваності основних груп автоматних підстановок, наведено приклади нових систем твірних для груп автоматних підстановок;

7. досліджено питання, що стосуються системи математичної освіти і науки Буковини у перші роки незалежності України. Зазначено, що значно підвищився рівень якості навчання й підготовки висококваліфікованих фахівців різних галузей народного господарства і науки, зокрема і математики. Встановлено, що освітня і наукова діяльність не може відбуватися ізольовано від соціально-політичних процесів України, а відношення науки й економіки, науки і влади завжди були і є проблематичними. Наука і освіта потребують значних інвестицій і не завжди стовідсотково прибуткових, ба більше, вплив їх на суспільне життя є суперечливий, а тому важлива ще й гуманістична оцінка можливостей математичної освіти і науки;
8. вивчено питання, що стосуються формування системи математичної освіти і науки у ЗО Чернівецької області на тлі інтеграції у світовий освітньо-науковий простір. Зазначено, що за умов глобалізації сучасного світу та інтеграції українського освітнього-науково простору у світовий актуальним постає застосування сучасних інноваційних технологій при навчанні математики у ЗО, зокрема, методу сторітеллінгу, кейс-методу, інтегрованого підходу при викладанні окремих тем тощо;
9. досліджено питання, що стосуються формування системи математичної освіти і науки на Буковині у роки незалежності України. Зазначено, що на математичному факультеті Чернівецького університету функціонували й функціонують потужні національні математичні школи як фундаментального, так і прикладного спрямування, де готували й готують добротних фахівців для педагогічної роботи, науково-дослідних установ й виробництва краю та держави. Основні напрямки наукових досліджень переважно стосувалися й

стосуються теорії диференціальних й диференціально-функціональних рівнянь та теорії функцій, а також методики навчання математики;

- 10.** вивчено питання, що стосувалися оновлення навчально-методичного забезпечення загальноосвітнього курсу математики, розширено спектр навчальних матеріалів, посібників, завдань для підготовки до ЗНО (НМТ). Значну частину цих напрацювань створено буковинськими науковцями й учителями-методистами. Важливою складовою розвитку стало запровадження інформаційних технологій у навчання в ЗВО та ЗЗСО, організація олімпіадних рухів, різного роду математичних турнірів, зокрема турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, подальше вдосконалення роботи БМАН, що стимулювало й стимулює талановиту молодь до наукової діяльності;
- 11.** встановлено, що у регіоні створено низку посібників, збірників задач, методичних рекомендацій, які відображають локальний досвід, кращі педагогічні практики та інноваційні підходи щодо навчання математики. Розвитку зазнала й підготовка майбутніх вчителів: в університеті і педагогічному коледжі посилилися практико орієнтовані компоненти, цифрова грамотність, інтеграція математики й інформатики, підготовка до роботи в умовах компетентнісного та STEM-орієнтованого навчання. За період незалежності України математика Буковини трансформувалася в потужний науково-освітній сегмент, що забезпечує підготовку висококваліфікованих фахівців, підтримує розвиток наукових досліджень та сприяє формуванню інтелектуального потенціалу краю. Її досягнення є важливим внеском у розвиток української науки й освіти загалом та підтверджують значущість регіону у формуванні математичної культури сучасної України.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

До розділу 1

- 1.1. Горбачук В.І., Горбачук М.Л. Граничні задачі для диференціально-операторних рівнянь. К. : Наукова думка, 1984. 283 с.
- 1.2. Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I. On behavior of weak solutions of operator differential equations on $(0, +\infty)$. *Advances and Applications*. 2009. P. 116-126.
- 1.3. Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1988. 219 с.
- 1.4. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1998. 225 с.
- 1.5. Городецький В.В. Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку. Чернівці: Рута, 2005. 291 с.
- 1.6. Городецький В.В. Еволюційні рівняння в зліченно нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. Чернівці: Рута, 2008. 400 с.
- 1.7. Літовченко В.А. Задача Коші для сингулярних псевдодиференціальних систем параболічного типу. *Укр. матем. вісник*. 2007. Т. 4, № 1. С. 21-56.
- 1.8. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1998. 225 с.
- 1.9. Городецький В.В. Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку. Чернівці: Рута, 2005. 291 с.
- 1.10. Дрінь Я.М. Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1974. № 1. С. 19-21.

- 1.11. Городецький В.В., Мартинюк О.В., Колісник Р.С. Диференціально-операторні рівняння в зліченно-нормованих просторах: Монографія. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю.Федьковича, 2025. 276 с.
- 1.12. Городецький В., Колісник Р., Мартинюк О. Аналітичний вигляд розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з початковою узагальненою функцією // Матеріали міжнародної конференції, присвяченої 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка, 25-27 вересня 2025 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2025. – С.32
- 1.13. Horodets'kyi, V., Martynyuk, O. & Kolisnyk, R. Time-Nonlocal Problem for Evolutionary Equations with Pseudodifferential Operators in Spaces of Type S . *J Math Sci* 282, 912–934 (2024).
- 1.14. V. V. Horodets'kyi, R. S. Kolisnyk, and N. M. Shevchuk NONLOCAL (IN TIME) PROBLEM FOR THE EVOLUTIONARY EQUATION WITH FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATOR //Journal of Mathematical Sciences, Vol. 273, No. 2, June, 2023.- pp. 181-205
- 1.15. V. V. Horodets'kyi, R. S. Kolisnyk & N. M. Shevchuk MULTIPOINT (IN TIME) PROBLEM FOR SINGULAR PARABOLIC EQUATIONS IN SPACES OF TYPE S // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 277, No. 2, December, 2023.- P.181-205
- 1.16. V.Horodets'kyi, R.Petryshyn, O.Martynyuk EVOLUTIONARY PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMOOTH SYMBOLS IN S -TYPE SPACES//Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 75, No. 6, November, 2023, P. 861–888 (Ukrainian Original Vol. 75, No. 6, June, 2023 P.753-776)
- 1.17. Городецький В.В., Мартинюк О.В., Мартинюк С.В., Колісник Р.С. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ АБЕЛЯ–ПУАССОНА ФОРМАЛЬНИХ РЯДІВ ЕРМІТА Буковинський матем. журнал 2023, Т.11, No1, 80–93

- 1.18.** Gorodetskiy V.V., Kolisnyk R.S., Shevchuk N.M. GENERALIZED SPACES OF S AND S' TYPES Bukovinian Math. Journal. 2023,11, 1, 7–25
- 1.19.** Городецький В.В., Мартинюк С.В. Перетворення Абеля–Пуассона формальних рядів Ерміта та його властивості // Матеріали міжнародної наукової конференції «Математика та інформаційні технології», присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28-30 вересня 2023 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. – С. 174.
- 1.20.** [Horodets'kyi, V.V.](#), [Martynyuk, O.V.](#), [Kolisnyk, R.S.](#) Generalized Spaces of Type S and Evolutionary Pseudodifferential Equations // [Journal of Mathematical Sciences](#), 2022, 265(4), pp. 589–621
- 1.21.** [Horodets'kyi, V.V.](#), [Martynyuk, O.V.](#), [Petryshyn, R.I.](#) On the Generalized Cauchy Problem for the Evolutionary Equation with Operator of Fractional Differentiation // [Journal of Mathematical Sciences](#), 2022, 263(2), pp. 215–237
- 1.22.** [В. В. Городецький](#), [Р. С. Колісник](#) та [Н. М. Шевчук](#) Багатоточкова за часом задача для сингулярних параболічних рівнянь у просторах типу S.// Нелінійні коливання. – 2022. – Т.25, № 4.– С. 291-324
- 1.23.** [В. В. Городецький](#), [Р. С. Колісник](#) та [Н. М. Шевчук](#) Багатоточкова за часом задача для сингулярних параболічних рівнянь у просторах типу S.// Нелінійні коливання. – 2022. – Т.25, № 4.– С. 291-324
- 1.24.** Городецький В. В., Колісник Р. С., Шевчук Н. М. Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних рівнянь у просторах типу S// Буковинський матем. журнал. 2022, Т.10, №2, С.90-110
- 1.25.** Городецький В. В., Мартинюк О.В. Властивості розв'язків рівняння теплопровідності з дисипацією // Буковинський матем. журнал. – 2022, Т.10, №2, С.77-89
- 1.26.** Городецький В.В., Мартинюк О.В., Колісник Р.С. Про розв'язність нелокальної за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдо диференціальними операторами у просторах типу S. Матеріали

- міжнародної наукової конференції «Прикладна математика та інформаційні технології», присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (22-24 вересня 2022 р., Чернівці). – Чернівці, С. 111.
- 1.27.** Петришин Р.І., Городецький В.В., Мартинюк О.В. Про нелокальну за часом задачу для сингулярного параболічного рівняння. Матеріали міжнародної наукової конференції «Прикладна математика та інформаційні технології», присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (22-24 вересня 2022 р., Чернівці). – Чернівці, С. 112.
- 1.28.** Horodets'kyi V.V., Martynyuk O.V. Approximate Solutions of One Abstract Cauchy Problem // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2021. – Volume 253, Issue 2. P. 230-241.
- 1.29.** Horodets'kyi V.V., Martynyuk O.V. Evolutionary Pseudodifferential Equations in the Spaces of Generalized Periodic Functions // *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, 256(5), p. 604–627
- 1.30.** Horodets'kyi, V.V., Martynyuk, O.V. Evolution pseudodifferential equations with analytic symbols in spaces of s type // *Carpathian Math. Publ.* 2021, 13 (1), 160-179.
- 1.31.** С.Б. Боднарук, В.В. Городецький, Р.С. Колісник, Н.М. Шевчук Нелокальна за часом задача для деякого диференціально-операторного рівняння в просторах типу S та S' // *Буковинський матем. журнал.* – 2021, 9(2), 53-69
- 1.32.** Городецький В.В., Колісник Р.С., Мартинюк О.В. Нелокальна за часом задача для одного класу псевдодиференціальних рівнянь з гладкими символами // *Буковинський матем. журнал.* – 2021, 9(1), 107–127
- 1.33.** Городецький В.В., Колісник Р.С., Мартинюк О.В. Про коректну розв'язність нелокальної задачі для диференціально-операторного рівняння першого порядку // *Міжнародна наукова конференція,*

присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. - Чернівці, 2021. – С. 65-66.

До розділу 2

2.1. Hall Marshall Jr. The Theory of Groups.– AMS Chelsea Publishing, 1976.– 434 p.

2.2. Суцанський В.І. Групи автоматних підстановок // Доповіді НАН України.– 1998.–№6.– С.47–50.

2.3. Chillag D., Herzog M., Mann A. On the Diameter of a Graph Related to Conjugacy Classes of Groups // Bull. London Math.Soc.– 1993.– Vol.25.– P.255–262.

2.4. Sikora V.S., Sushchanskii V.I. Systems of generators of automaton permutations groups // Cybernetics and Systems Analysis.– 2000.– Vol.36.– P.415–425.– <https://doi.org/10.1007/BF02732992>

2.5. Сікора В.С. Мінімальні системи твірних скінченних гіпероктаедральних, мономіальних, метасиметричних та автоматних груп підстановок. Монографія.– Чернівці: Технодрук, 2018.– 168 с.

2.6. Sikora V.S. Minimal Generators Systems for Groups of Automatic Permutations // International Scientific Periodical Journal "SWorldJournal".– 2021.– Issue 7, Part 2.– P.48-55.– Published by: SWorld & D.A. Tsenov Academy of Economics – Svishtov, Bulgaria.– DOI: 10.30888/2663-5712.2021-07-02-014.

2.7. Sikora V.S. On Systems Of Generators Of Automaton Permutation Groups // International Scientific Periodical Journal "SWorldJournal".– 2022.– Issue 11, Part 2.– P.38–44.– Published by Academy of Economics named after D.A. Tsenov jointly with SWorld.– Svishtov, Bulgaria.– DOI: 10.30888/2663-5712.2022-11-02-006.

2.8. Sikora V.S. On The Generability And Series Of Generators Systems For Automaton Permutation Groups // ScientificWorld Journal.– 2025.– Iss.31, Part 2.– P.3-13. – DOI: 10.30888/2663-5712

До розділу 3

3.1. Житарюк І.В., Лучко, В.М., Лучко, В.С. Система освіти Радянської Буковини (50-91 роки ХХ ст.). *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, VIII (94), Issue: 236, 2020. P. 87-90.

<https://doi.org/10.31174/SEND-PP2020-236VIII94-01>

3.2. Петришин Р.І., Житарюк І.В., Колісник Р. С. Математика для випускників ЗЗСО. Частина І. Числа. Вирази. Повторювальний курс: Навч. посібник. 2-ге вид., виправ. і доп. Київ: Видавництво «Людмила», 2021. 440 с.

3.3. Житарюк І., Колісник Р., Шевчук Н. Сторітелінг – ефективний метод комунікації на уроках математики в основній і старшій школі. *Математика та інформаційні технології* / Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики 28-30 вересня 2023 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. – 369 с. – С. 195-197.

3.4. Лучко В.С., Житарюк І.В., Лучко В.М. Система освіти Радянської Буковини напередодні незалежності України. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, IX (101), Issue: 259, 2021 Nov. С. 52-54.

3.5. Скоролітня А.І., Житарюк І.В. Застосування проблемного підходу при вивченні ірраціональних рівнянь у старшій школі. *Фізико-математична освіта*. 2021. Випуск 4(30). С. 82-87. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-030-4>.

3.6. Житарюк І.В., Мартинюк О.В. Симіон Стоїлов (1887-1961): штрихи до наукової біографії. *Буковинський математичний журнал*. 2021. 9(1). С. 152-163. <http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/1039>

3.7. Житарюк І.В., Колісник Р.С., Мартинюк О.В. До 80-річного ювілею Домбровського Романа Федоровича: штрихи біографії. *Буковинський математичний журнал*. 2021. 9(2) С. 131-134. <https://doi.org/10.31861/bmj2021.02.04>.

3.8. Петришин, Р.І., Житарюк І.В., Мартинюк О.В., Колісник, Р.С. Задачі з параметрами. Практикум. Частина 1. Навч. посібник. Київ: Видавництво «Людмила», 2021. 544 с. ISBN 978-617-7974-77-1

3.9. Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С. Міжпредметні зв'язки математики та інформатики при розв'язуванні олімпіадних задач. *Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка*, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 73.

3.10. Житарюк І.В., Колісник Р.С., Мартинюк О.В., Собчук О.В. До 90-річного ювілею Собчука Василя Степановича: штрихи біографії. *Буковинський математичний журнал*. 2022. 10(1). С. 129–131.

3.11. Житарюк І.В. Елементарна математика і методика викладання математики. Конспект лекцій. Ч. 2. Загальні питання методики навчання математики. Вид. 2-ге, стереотипне. Київ: Людмила, 2022. 416 с. ISBN 978-617-7828-00-0

3.12. Петришин Р.І., Житарюк І.В., Мартинюк О.В., Колісник Р.С. Задачі з параметрами. Практикум. Частина 1. Навч. посібник. 2-ге вид., виправ. і доп. Київ: Видавництво «Людмила», 2022. 544 с. ISBN 978-617-555-036-6

3.13. Петришин Р.І., Житарюк І.В., Мартинюк О.В., Колісник Р.С. Технології навчання математики у закладах освіти. Конспект лекцій: Навчальний посібник. Київ: Видавництво «Людмила», 2022. 632 с. ISBN 978-617-555-056-4

3.14. Житарюк І.В. Філософія освіти, науки та її окремих галузей. Навч. посіб. Вид. 2-ге, стереотипне. Київ: Людмила, 2022. 620 с. ISBN 978-617-555-041-0

3.15. Петришин Р.І., Житарюк І.В., Мартинюк О.В., Колісник Р.С. Технології навчання математики у закладах освіти. Конспект лекцій. Навчальний посібник. Київ: Видавництво «Людмила», 2023. 648 с. ISBN 978-617-555-137-0

3.16. Мартинюк Ольга, Житарюк Іван. Факультет математики та інформатики: історія та сьогодення. *Математика та інформаційні технології* / Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-

річчю факультету математики та інформатики 28-30 вересня 2023 р. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. 369 с. С. 3-6.

3.17. Житарюк І., Колісник Р., Шевчук Н. Сторітелінг – ефективний метод комунікації на уроках математики в основній і старшій школі. *Математика та інформаційні технології* / Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики 28-30 вересня 2023 р. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. 369 с. С. 195-197.

3.18. Лучко В.С., Житарюк І.В., Лучко В.М. Система математичної освіти і науки на Буковині у перші роки незалежності України. *Актуальні питання у сучасній науці*. № 2(20). 2024. С. 746-759. [https://doi.org/10.52058/2786-6300-2024-2\(20\)-746-759](https://doi.org/10.52058/2786-6300-2024-2(20)-746-759)

3.19. Лучко В.М., Житарюк І.В. Методичні особливості проведення інтегрованих уроків з використанням ІКТ в основній і старшій школі. *Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*: Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 5 квітня, 2024 р. Тернопіль: ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2024. 260 с. С. 57-59. URL: http://conf.fizmat.tnpu.edu.ua/media/arhive//17_04_24.pdf

3.20. Лучко В.С., Житарюк І.В. Коучинг-технологія в освітньому процесі сучасного закладу освіти. *Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*: Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 5 квітня, 2024 р. Тернопіль: ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2024. 260 с. С. 60-61. URL: http://conf.fizmat.tnpu.edu.ua/media/arhive//17_04_24.pdf

3.21. Петришин Р.І., Житарюк І.В., Колісник Р.С. Математика для випускників ЗЗСО. Частина II.1. Функції. Повторювальний курс: навч. посібник. Київ: Людмила, 2024. 396 с. ISBN 978-617-7530-00-1

3.22. Мартинюк О.В., Житарюк І.В., Кушнірчук В.Й. Факультет математики та інформатики: історія та сьогодення / Факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія

Федьковича – 55: монографія / Мартинюк О.В., Житарюк І.В., Кушнірчук В.Й. та ін. За загальною редакцією О.В. Мартинюк. Київ: Видавництво «Людмила», 2024. 228 с. С. 6-39. ISBN 978-617-7828-00-0

3.23. Мартинюк О.В., Житарюк І.В., Колісник Р.С. Кафедра алгебри та інформатики: минуле й сьогодення / Факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича – 55: монографія / Мартинюк О.В., Житарюк І.В., Кушнірчук В.Й. та ін. За загальною редакцією О.В. Мартинюк. Київ: Видавництво «Людмила», 2024. 228 с. С. 40-96 ISBN 978-617-7828-00-0

3.24. Лучко В.С., Житарюк І.В., Лучко В.М. Міжпредметна інтеграція математики та інформатики як чинник підвищення якості навчання у старшій школі при розв'язуванні задач підвищеної складності. *Актуальні питання у сучасній науці*. № 11(29). 2024. С. 949-960 [https://doi.org/10.52058/2786-6300-2024-11\(29\)-949-960](https://doi.org/10.52058/2786-6300-2024-11(29)-949-960)

3.25. Лучко В.М., Житарюк І.В. Метод скрайбінгу та його застосування при навчанні математики в основній школі. *Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*: Матеріали XV Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 10 квітня, 2025 р. Тернопіль: ТНПУ ім. Володимира Гнатюка, 2025. 328 с. С. 81-83.

3.26. Мартинюк О.В., Житарюк І.В., Колісник Р.С. Застосування методу сторітелінгу при навчанні математики в основній школі. *Актуальні питання у сучасній науці*. № 5(35). 2025. С. 1218-1228. [https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-5\(35\)-1218-1228](https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-5(35)-1218-1228)

3.27. Лучко В.С., Житарюк І.В., Шевчук Н.М. Георге Вринчану: науковий шлях і досягнення (з нагоди 125-річчя від дня народження). *Актуальні питання у сучасній науці*. № 9(39). 2025. С. 1372-1385. [https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-9\(39\)-1372-1385](https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-9(39)-1372-1385)

3.28. Лучко В.С., Житарюк І.В. Метод фрірайтингу та його застосування при навчанні математики у базовій школі. *Сучасні цифрові технології та*

інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи: Матеріали XVI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 6-7 листопада, 2025 р. Тернопіль: ТНПУ ім. Володимира Гнатюка, 2025. 345 с. С. 128-130.

3.29. Житарюк І.В. Методичні аспекти реалізації фрагментів інтегрованих уроків в основній школі. *Актуальні питання у сучасній науці*. № 11(41). 2025. С. 1554-1562. <https://perspectives.pp.ua/index.php/sn/issue/view/417/520>