Bukovinian Math. Journal. 2026, **14**, 1, 134–147 Буковинський матем. журнал 2026, Т.14, №1, 134–147

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.12

Гутік О., Золотар М., Лисецька О.

ПРО ТОПОЛОГІЗАЦІЮ РОЗШИРЕНОЇ БІЦИКЛІЧНОЇ НАПІВГРУПИ

На розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ побудовано такі недискретні T_1-топології: (i) напівгрупова інверсна; (ii) берівська лівонеперервна [правонеперервна]; (iii) локально компактна лівонеперервна [правонеперервна]. Доведено, що на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченно компактної лівонеперервної [правонеперервної] T_1-топології. Вказано умови за яких T_1-топологія на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна, Зокрема, (i) лівонеперервна [правонеперервна] T_1-топологія τ на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна тоді і лише тоді, коли існує послідовність $\{(i_n,j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ізольованих точок простору $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ така, що послідовність $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $[\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$ строго монотонно зростаюча; (ii) трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна тоді і лише тоді, коли простір $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ містить ізольовану точку; (iii) якщо T_1-простір топологічної інверсної напівгрупи $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ містить точку в якій він квазірегулярний, то топологія τ дискретна.

Ключові слова і фрази: розширена біциклічна напівгрупа, біциклічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, напівтопологічна напівгрупа, T_1-простір, берівський простір, квазірегулярний, дискретний.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Університецька 1, Львів, 79000, Україна (Гутік О., Золотар М., Лисецька О.)
e-mail: *oleg.gutik@lnu.edu.ua (Гутік О.), marharyta.zolotar@lnu.edu.ua (Золотар М.), oleksandra.lysetska@lnu.edu.ua (Лисецька О.)*

1 Вступ

У цій праці ми користуємося термінологією з монографій [7, 8, 24, 27]. Надалі у тексті множини натуральних, невід'ємних цілих і цілих чисел позначатимемо через $\mathbb{N}$, ω і $\mathbb{Z}$, відповідно. Надалі, якщо X – топологічний простір і Y – підпростір у X, то через $\operatorname{cl}_Y(A)$ й $\operatorname{int}_Y(A)$ будемо позначати замикання та внутрішність, відповідно, множини $A\subseteq Y$ у топологічному просторі Y.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножину ідемпотентів позначатимемо через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1}\in S$ такий, що $xx^{-1}x=x$ та $x^{-1}xx^{-1}=x^{-1}$ [27, 33]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x, а відображення $S\to S$, яке ставить кожному елементові

УДК 512.536
2010 *Mathematics Subject Classification:* 22A15, 54C08, 54D10, 54H10.

напівгрупи S інверсний до нього, називається *інверсією. В'язка* – це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e \preccurlyeq f$ тоді і лише тоді, коли $ef = fe = e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним.*

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S так: $s \preccurlyeq t$ тоді і лише тоді, коли $s = te$, для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [33]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Відображення $f\colon X \times Y \to Z$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, називається:

(i) *правонеперервним* [*лівонеперервним*], якщо f неперервне стосовно правої [лівої] змінної; тобто для кожної фіксованої точки $x_0 \in X$ [$y_0 \in Y$] відображення $Y \to Z$, $y \mapsto f(x_0, y)$ [$X \to Z$, $x \mapsto f(x, y_0)$] неперервне;

(ii) *нарізно неперервним*, якщо f одночасно правонеперервне та лівонеперервне;

(iii) *неперервним*, якщо f неперервне як відображення з добутку просторів $X \times Y$ у простір Z.

Означення 1 ([4, 30])**.** *Нехай S – топологічний простір з визначеною на ньому напівгруповою операцією $\mu\colon S \times S \to S$, $(x, y) \mapsto \mu(x, y) = xy$. Тоді пара (S, μ) називається:*

(i) правою [лівою] топологічною напівгрупою, *якщо відображення μ правонеперервне [лівонеперервне], тобто всі внутрішні ліві [праві] зсуви $\lambda_s\colon S \to S$, $x \mapsto sx$ [$\rho_s\colon S \to S$, $x \mapsto xs$], є неперервними відображеннями, $s \in S$;*

(ii) напівтопологічною напівгрупою, *якщо відображення μ нарізно неперервне;*

(iii) топологічною напівгрупою, *якщо відображення μ неперервне.*

Зазвичай ми опускаємо запис μ і пишемо просто S замість (S, μ). Очевидно, що кожна топологічна напівгрупа також є напівтопологічною, і кожна напівтопологічна напівгрупа є одночасно правою та лівою топологічною напівгрупою.

Топологія τ на напівгрупі S називається:

- *напівгруповою*, якщо (S, τ) – топологічна напівгрупа;
- *інверсною*, якщо інверсія в (S, τ) неперевна;
- *трансляційно-неперервною*, якщо (S, τ) – напівтопологічна напівгрупа;
- *лівонеперервною* [*правонеперервною*], якщо (S, τ) – ліва [права] топологічна напівгрупа.

Нагадаємо (див. [7, §1.12], що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(a, b)$ називається напівгрупа з одиницею , породжена двоелементною множиною $\{a, b\}$ і визначена єдиним співвідношенням $ab = 1$. Кожний елемент біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}(a, b)$ єдиним чином зображається у вигляді $b^i a^j$, $i, j \in \omega$, а напівгрупова операція на $\mathscr{C}(a, b)$ визначається за формулою

$$b^i a^j \cdot b^k a^l = \begin{cases} b^{i-j+k} a^l, & \text{якщо } j < k; \\ b^i a^l, & \text{якщо } j = k; \\ b^i a^{j-k+l}, & \text{якщо } j > k, \end{cases}$$

$i, j, k, l \in \omega$. Зауважимо, що елемент $b^0a^0 = 1$ є одиницею біциклічного моноїда $\mathscr{C}(a, b)$.

Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Так, зокрема, класична теорема О. Андерсена [1] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічного моноїда. Різні розширення та узагальнення біциклічного моноїда вводилися раніше багатьма авторами [21, 13, 14, 15, 22, 35]. Такими, зокрема, є конструкції Брука та Брука–Рейлі занурення напівгруп у прості та описання інверсних біпростих і 0-біпростих ω-напівгруп [3, 29, 34, 17].

Зауваження 1. *Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(a, b)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\boldsymbol{B}_\omega = \omega \times \omega$ з напівгруповою операцією*

$$(i, j) \cdot (k, l) = \begin{cases} (i - j + k, l), & \text{якщо } j \leqslant k; \\ (i, j - k + l), & \text{якщо } j \geqslant k \end{cases} = (i + k - \min\{j, k\}, j + l - \min\{j, k\}) \qquad (1)$$

стосовно відображення $\mathfrak{I}\colon \mathscr{C}(a, b) \to \boldsymbol{B}_\omega$, $b^ia^j \mapsto (i, j)$, $i, j \in \omega$.

Загальновідомо, що топологічна алгебра вивчає вплив топологічних властивостей своїх об'єктів на їхні алгебраїчні властивості та вплив алгебраїчних властивостей своїх об'єктів на їхні топологічні властивості. У топологічній алгебрі є дві основні задачі: задача недискретної топологізації та задача вкладення в об'єкти з деякими топологічно-алгебраїчними властивостями.

У математичній літературі питання про недискретну (гаусдорфову) топологізацію було поставлене Марковим [25]. Понтрягін навів добре відомі умови бази в одиниці групи для її недискретної топологізації (див. теорему 3.9 у [28]). Різні автори уточнили питання Маркова: *чи можна ізоморфно занурити задану нескінченну групу G, наділену недискретною груповою топологією, у компактну топологічну групу?* Знову ж таки, для довільної абелевої групи G відповідь ствердна, але існує неабелева топологічна група, яку не можна ізоморфно занурити в жодну компактну топологічну групу (див. розділ 9 у [9]).

Також, Ольшанський [26] побудував нескінченну зліченну групу G таку, що кожна групова гаусдорфова топологія на G дискретна. Тайманов у 1973 році побудував комутативну напівгрупу $\mathfrak{T}$, яка допускає лише дискретну напівгрупову гаусдорфову топологію [31], та вказав у [32] достатні умови на комутативну напівгрупу, щоб на ній існувала недискретна гаусдорфова напівгрупова топологія. У [16] доведено, що кожна T_1-топологія з неперервними зсувами на $\mathfrak{T}$ є дискретною. Однак, вперше напівгрупу на якій кожна гаусдорфова напівгрупова топологія є дискретною було опубліковано в праці Ебергарта та Селдена [10], і нею виявилась біциклічна напвгрупа $\mathscr{C}(a, b)$. Бертман і Вест у [2] довели, що кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на $\mathscr{C}(a, b)$ дискретна. У [5] побудовано приклади недискретних інверсних напівгрупових і трансляційно-неперервних T_1-топологій на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(a, b)$ та вказано умови за виконання яких напівгрупова (трансляційно-неперервна) T_1-топологія на $\mathscr{C}(a, b)$ є дискретною. Недискретна топологізація піднапівгруп біциклічного моноїда досліджувалася в праці [6]. У [18] доведено, що кожна лівонеперервна (правонеперервна) гаусдорфова топологія на верхній піднапівгрупі $\mathscr{C}_+(a, b)$ (нижній піднапівгрупі $\mathscr{C}_-(a, b)$) біциклічного моноїда дискретна, а також побудовано на $\mathscr{C}_+(a, b)$ ($\mathscr{C}_-(a, b)$) правонеперервну (лівонеперервну) гаусдорфову топологію. Крім того в [19] доведено, що напівгрупа $\mathscr{C}_+(a, b)$ ($\mathscr{C}_-(a, b)$) містить континуум неізоморфних піднапівгруп S_α ($\alpha \in \mathfrak{c}$) з такими властивостями: (*i*) кожна гаусдорфова лівонеперервна (правонеперервна) топологія на S_α дискретна; (*ii*) на S_α існує недискретна гаусдорфова правонеперервна (лівонеперервна) топологія; (iii) існує компактна гаусдофова топологічна напівгрупа, яка містить напівгрупу $\mathscr{C}_+(a,b)$ ($\mathscr{C}_-(a,b)$).

Ворн у [35], досліджуючи структуру біпростих інверсних напівгруп, піднапівгрупа ідемпотентів яких ізоморфна напівґратці $(\mathbb{Z}, \max)$, ввів *розширену біциклічну напівгрупу* як множину $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ з напівгруповою операцією, визначеною за формулою (1).

Очевидно, що біциклічний напівгрупа $\mathscr{C}(a,b)$ і розширена біциклічна напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є неізоморфними, хоча б тому, що $\mathscr{C}(a,b)$ є моноїдом, а $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ – ні. Проте напівгрупи $\mathscr{C}(a,b)$ і $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ мають багато спільних алгебричних властивостей. Зокрема вони біпрості й інверсні, а їхна піднапівгрупи ідемпотентів є лінійно впорядкованими нещільними множинами стосовно природного часткового порядку. Тому виникає природне запитання: *які топологічні властивості схожі до біциклічного моноїда має розширена біциклічна напівгрупа як тополого-алгебрична структура?* Перший результат у цьому напрямку було отримано в праці [12], де було доведено, що кожна трансл\-цiйно-неперервна гаусдорфова топологія на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна.

Ця праця частково відповідає на поставлене вище запитання. На $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ побудовано недискретну локально компактну T_1-топологію, а також лівонеперервну (правонеперервну) берівську T_1-топологію. Також вказано умови, за виконання яких T_1-топологія на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є дискретною.

2 Приклади недискретних топологій на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$

Приклад 1. *Визначимо топологію τ_1 на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ так. Нехай (i,j) – довільний елемент напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Для кожного натурального числа n позначимо $U_n(i,j) = \{(i,j)\} \cup \{(s,t) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \colon s,t \geqslant n\}$ і $\mathscr{B}_1(i,j) = \{U_n(i,j) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Тоді сім'я $\mathscr{B}_1 = \bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_1(i,j)$ задовольняє умови (BP1)–(BP3) з [11], а отже, породжує деяку топологію на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Позначимо цю топологію через τ_1.*

Очевидно, що τ_1 – недискретна T_1-топологія на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.

Твердження 1. *$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_1)$ – топологічна інверсна напівгрупа.*

Доведення. Зафіксуємо довільне натуральне число n. З визначення напівгрупової операції на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що для довільних елементів (i_1,j_1) та (i_2,j_2) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ виконуються включення

$$U_m(i_1,j_1) \cdot U_m(i_2,j_2) \subseteq U_n(k,l) \qquad \text{і} \qquad (U_n(i_1,j_1))^{-1} \subseteq U_n(j_1,i_1),$$

де $(k,l) = (i_1,j_1) \cdot (i_2,j_2)$ і $m \geqslant 2n + |i_1| + |j_1| + |i_2| + |j_2|$. Отже, напівгрупова операція та інверсія неперервні в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_1)$. $\square$

Для природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і для довільного елемента $(i,j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ означимо:

$$\begin{aligned}
{\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j) &= \{(s,t) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \colon (i,j) \preccurlyeq (s,t)\}\,;\\
{\downarrow_{\preccurlyeq}}(i,j) &= \{(s,t) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \colon (s,t) \preccurlyeq (i,j)\}\,;\\
{\updownarrow_{\preccurlyeq}}(i,j) &= {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j) \cup {\downarrow_{\preccurlyeq}}(i,j);\\
{\downarrow^{\circ}_{\preccurlyeq}}(i,j) &= {\downarrow_{\preccurlyeq}}(i,j) \setminus \{(i,j)\}\,.
\end{aligned}$$

Наступне твердження описує природний частковий порядок $\preccurlyeq$ на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і випливає з означення відношення $\preccurlyeq$ і твердження 2.1(vi) з праці [12].

Твердження 2. *Для елементів (i,j) і (s,t) розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ такі умови еквівалентні:*

(i) $(i,j) \preccurlyeq (s,t)$*;*

(ii) $i \geqslant s$ *та* $i-j = s-t$*;*

(iii) $j \geqslant t$ *та* $i-j = s-t$*.*

Надалі нам часто буде потрібний такий простий результат:

Лема 1. *Нехай S – інверсна ліва (права) T_1-топологічна напівгрупа. Тоді для довільного елемента x напівгрупи S множина $\uparrow_{\preccurlyeq} x$ є замкненою в просторі S .*

Доведення. З леми 1.4.6 з [24] випливає, що

$$\uparrow_{\preccurlyeq} x = \{s \in S \colon s \cdot xx^{-1} = x\} = \{s \in S \colon xx^{-1} \cdot s = x\},$$

а отже, $\uparrow_{\preccurlyeq} x = \rho^{-1}_{xx^{-1}}(x) = \lambda^{-1}_{xx^{-1}}(x)$. Позаяк праві (ліві) зсуви в S неперервні і S – T_1-простір, то множина $\uparrow_{\preccurlyeq} x = \rho^{-1}_{xx^{-1}}(x)$ ($\uparrow_{\preccurlyeq} x = \lambda^{-1}_{xx^{-1}}(x)$) – замкнена в S. □

Приклад 2. *Визначимо топологію τ_2 на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ так. Для довільного елемента (i,j) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і для довільного невід'ємного цілого числа n позначимо $V_n(i,j) = \{(i,j)\} \cup {\downarrow}^{\circ}_{\preccurlyeq}(i+n, j+n)$ і $\mathscr{B}_2(i,j) = \{V_n(i,j) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Тоді сім'я $\mathscr{B}_2 = \bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_2(i,j)$ задовольняє умови (BP1)–(BP3) з [11], а отже, породжує деяку топологію на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Позначимо цю топологію через τ_2.*

Із побудови топології τ_2 на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_2)$ – T_1-простір. Очевидно, що кожний елемент $V_n(i,j)$ сім'ї $\mathscr{B}_2(i,j)$ є компактною множиною в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_2)$.

Твердження 3. $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_2)$ *– топологічна інверсна напівгрупа.*

Доведення. З визначення напівгрупової операції на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що для довільних елементів (i_1, j_1) та (i_2, j_2) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, для довільного невід'ємного цілого числа n і натурального числа $m \geqslant 2n + |j_1| + |i_2|$ виконуються включення

$$V_m(i_1,j_1) \cdot V_m(i_2,j_2) \subseteq V_n(k,l) \qquad \text{і} \qquad (V_n(i_1,j_1))^{-1} \subseteq V_n(j_1,i_1),$$

де $(k,l) = (i_1,j_1) \cdot (i_2,j_2)$. Отже, $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_2)$ – топологічна інверсна напівгрупа. □

Нагадаємо [11], що топологічний простір X називається *зліченно компактним*, якщо кожне зліченне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття.

У [5] доведено, що на біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(a,b)$ коскінченна топологія є трансляційно-неперервною та інверсія стосовно неї на $\mathscr{C}(a,b)$ також є неперервною, а отже, на біциклічній напівгрупі існує компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія. З твердження 4 випливає, що аналогічне твердження не виконується для розширеної біциклічної напівгрупи.

Твердження 4. *Не існує зліченно компактної лівонеперервної (правонеперервної) T_1-топології на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.*

Доведення. Нехай τ – лівонеперервна T_1-топологія на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Для довільного елемента (i,j) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ позначимо через $\rho_{(i,j)}$ правий внутрішній зсув у напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ на елемент (i,j), тобто $\rho_{(i,j)}(x,y) = (x,y) \cdot (i,j)$ для всіх $(x,y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Оскільки $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ – T_1-простір, то за лемою 1, $\uparrow_{\preccurlyeq}(i,i) = \rho^{-1}_{(i,i)}(i,i)$ – замкнена множина в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$, для довільного ідемпотента (i,i) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Тоді $\mathscr{U} = \{U_i = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \setminus \uparrow_{\preccurlyeq}(i,i) \colon i \in \mathbb{Z}\}$ – зліченне відкрите покриття простору $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$, яке не містить скінченного підпокриття.

У випадку правонеперервної топології на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ доведення аналогічне. □

Лема 2. *Для довільних елементів* (i, j) *і* (k, l) *розширеної біциклічної напівгрупи* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *виконуються такі включення*

$$\uparrow_{\preccurlyeq}(i, j) \cdot (k, l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m, n) \qquad \text{і} \qquad (i, j) \cdot \uparrow_{\preccurlyeq}(k, l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m, n),$$

де $(m, n) = (i, j) \cdot (k, l)$.

Доведення. З твердження 2 випливає рівність

$$\uparrow_{\preccurlyeq}(a, b) = \{(p - s, q - s) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \colon s \in \omega\}, \tag{2}$$

для довільного елемента $(a, b) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.

Зафіксуємо довільні елементи (i, j) і (k, l) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.

Розглянемо можливі випадки.

Якщо $k \geqslant j$, то $(i, j) \cdot (k, l) = (i - j + k, l)$ і для довільного невід'ємного цілого числа s маємо, що

$$\begin{aligned}(i - s, j - s) \cdot (k, l) &= (i - s - (j - s) + k, l) = \\ &= (i - j + k, l) = (m, n),\end{aligned}$$

а отже, з рівності (2) випливає, що $\uparrow_{\preccurlyeq}(i, j) \cdot (k, l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m, n)$.

Якщо $k < j$, то $(i, j) \cdot (k, l) = (i, j - k + l)$ і для довільного невід'ємного цілого числа s маємо, що

$$\begin{aligned}(i - s, j - s) \cdot (k, l) &= \begin{cases} (i - s - (j - s) + k, l), & \text{якщо } j - s \leqslant k; \\ (i - s, j - s - k + l), & \text{якщо } j - s > k \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i - j + k, l), & \text{якщо } j - s \leqslant k; \\ (i - s, j - s - k + l), & \text{якщо } j - s > k. \end{cases}\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}(i - j + k, l) \cdot (j - k + l, j - k + l) &= (i - j + k - l + (j - k + l), j - k + l) = \\ &= (i - j + k - l + j - k + l, j - k + l) = \\ &= (i, j - k + l)\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}(i - s, j - s - k + l) \cdot (j - k + l, j - k + l) &= (i - s - (j - s - k + l) + j - k + l, j - k + l) = \\ &= (i - s - j + s + k - l + j - k + l, j - k + l) = \\ &= (i, j - k + l)\end{aligned}$$

для довільного невід'ємного числа s. З леми 1.4.6 з [24] випливає, що $(i - s, j - s) \cdot (k, l) \in \uparrow_{\preccurlyeq}(m, n)$, а отже, скориставшись рівністю (2), отримуємо включення $\uparrow_{\preccurlyeq}(i, j) \cdot (k, l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m, n)$.

Доведення включення $(i, j) \cdot \uparrow_{\preccurlyeq}(k, l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m, n)$ аналогічне. □

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *берівським*, якщо для довільної послідовності $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ щільних відкритих підмножин простору X перетин $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ є щільною підмножиною простору X [23].

У праці [6] доведено, що кожна лівонеперевна (правонеперервна) гаусдорфова топологія на біциклічний напівгрупі дискретна. З прикладу 3 випливає, що для розширеної біциклічної напівгрупи аналогічне твердження не виконується.

Приклад 3. *Топологія τ_{B} на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ породжується передбазою $\mathscr{P}_{\mathrm{B}} = \mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2 \cup \mathscr{P}_3$, де:*

- $\mathscr{P}_0 = \{\{(i,j)\}\colon i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$;
- $\mathscr{P}_1 = \{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \setminus \{(i,j)\}\colon i,j \in \mathbb{Z}\}$;
- $\mathscr{P}_2 = \{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \setminus {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j)\colon i,j \in \mathbb{Z}\}$;
- $\mathscr{P}_3 = \left\{O(i,j) = \bigcup_{k\in\omega} {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i+k,j)\colon i,j \in \mathbb{Z}\right\}$.

Очевидно, що τ_{B} – недискретна топологія на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Також усі точки множини

$$\mathrm{IZ} = \{(i,j)\colon i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$$

є ізольованими в просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}})$, а оскільки $\mathscr{P}_1 \subseteq \mathscr{P}_{\mathrm{B}}$, то τ_{B} – T_1-топологія. З визначення передбази $\mathscr{P}_{\mathrm{B}}$ випливає, що для довільних $i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ і $j \in \mathbb{Z}$ сім'я $\mathscr{B}_{\mathrm{B}}(i,j) = \{U_p(i,j)\colon p \in \mathbb{N}\}$, де $U_p(i,j) = \{(i,j)\} \cup \bigcup_{s=p}^{\infty} {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i+s,j)$, визначає базу топології τ_{B} у точці (i,j). За твердженням 1.3.5 з [11], IZ – відкрита, щільна підмножина в просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}})$, а отже, за твердженням 1.18 і теоремою 1.15 з монографії [23] цей топологічний простір є берівським.

Твердження 5. *$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}})$ – ліва топологічна напівгрупа.*

Доведення. Зафіксуємо довільні елементи (i,j) і (k,l) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. З визначення топології τ_{B} випливає, що достатньо розглянути елементи вигляду $(i,j)\cdot(k,l)$, де $i \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо довільний відкритий базовий окіл $U_p(m,n)$ точки

$$(m,n) = (i,j)\cdot(k,l) = \begin{cases} (i-j+k,l), & \text{якщо } j \leqslant k; \\ (i,j-k+l), & \text{якщо } j > k \end{cases}$$

у топологічному просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}})$. Оскільки для довільного натурального числа s виконується рівність

$$(i+s,j)\cdot(k,l) = \begin{cases} (i+s-j+k,l), & \text{якщо } j \leqslant k; \\ (i+s,j-k+l), & \text{якщо } j > k \end{cases} = \\ = (m+s,n),$$

то з леми 2 випливає, що ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(i+s,j)\cdot(k,l) \subseteq {\uparrow_{\preccurlyeq}}(m+s,n)$. Звідси отримуємо, що для довільного натурального числа p виконується включення $U_p(i,j)\cdot(k,l) \subseteq U_p(m,n)$, а отже, праві зсуви в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}})$ неперервні. □

Приклад 4. *Визначимо топологію τ_{lc} на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ так. Для довільного елемента (i,j) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і для довільного невід'ємного цілого числа n позначимо $W_n(i,j) = \{(i,j)\} \cup \{(i,j+p)\colon |p| \geqslant n\}$ і $\mathscr{B}_{\mathrm{lc}}(i,j) = \{W_n(i,j)\colon n \in \mathbb{N}\}$. Тоді сім'я $\mathscr{B}_{\mathrm{lc}} = \bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_{\mathrm{lc}}(i,j)$ задовольняє умови (BP1)–(BP3) з [11], а отже, породжує деяку топологію на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Позначимо цю топологію через τ_{lc}.*

Із побудови топології τ_{lc} на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{lc}})$ – T_1-простір. Очевидно, що кожний елемент $W_n(i,j)$ сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{lc}}(i,j)$ є компактною підмножиною в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{lc}})$. Більше того замикання множини $W_n(i,j)$ у просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{lc}})$ збігається з множиною $W(i,j) = \{(i,j+p)\colon p \in \mathbb{Z}\}$, яка очевидно є компактною множиною в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{lc}})$. Отже, топологічний простір $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{lc}})$ локально компактний.

Твердження 6. $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\text{lc}})$ – *права топологічна напівгрупа.*

Доведення. З рівності (1) випливає, що

$$(i,j) \cdot W_n(k,l) = \begin{cases} W_n(i-j+k,l), & \text{якщо } j \leqslant k; \\ W_n(i,j-k+l), & \text{якщо } j \geqslant k, \end{cases}$$

для кожного натурального числа n і довільних $(i,j),(k,l) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, а отже, напівгрупова операція правонеперервна в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\text{lc}})$. □

Будемо говорити, що простір X є *квазірегулярним* у точці $x \in X$, якщо для довільного відкритого околу $U(x)$ точки x у просторі X існує відкрита непорожна підмножина V у X така, що $\operatorname{cl}_X(V) \subseteq U(x)$. Топологічний простір X називається *квазірегуляним*, якщо X – квазірегулярний у кожній своїй точці.

Зауваження 2. 1. *За твердженням 1.30 з [23] кожний зліченний берівський T_1-простір містить нескінченну підмножину ізольованих у ньому точок, а отже, є квазірегулярним. Із вище сказаного випливає, що топологічний простір $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\text{B}})$ є квазірегулярним.*

2. *Кожна лівонеперервна інверсна T_1-топологія на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є правонеперервною, а отже, за теоремою 1 з [20] є дискретною.*

3. *Оскільки інверсія $\operatorname{inv}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, $(i,j) \mapsto (j,i)$ є антиізоморфізмом розширеної біциклічної напівгрупи, то дуальна топологія $\tau_{\text{B}}^{\text{d}} = \{U \subseteq \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \colon \operatorname{inv}(U) \in \tau_{\text{B}}\}$ до топології τ_{B} є правонеперервною берівською T_1-топологією на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, а також дуальна топологія $\tau_{\text{lc}}^{\text{d}} = \{U \subseteq \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \colon \operatorname{inv}(U) \in \tau_{\text{lc}}\}$ до топології τ_{lc} є лівонеперервною локально компактною T_1-топологією на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$,.*

3 Коли топологія на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна?

Лема 3. *(i) Для довільних елементів (i,j), (k,l), (m,n) і (a,b) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ з умови $(a,b) = (i,j) \cdot (k,l) \cdot (m,n)$ випливає рівність $p-q = i-j+k-l+m-n$.*

(ii) Елементи (i,j) і (k,l) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ порівняльні стосовно природного часткового порядку на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ тоді і лише тоді, коли $i-j = k-l$.

(iii) Якщо (i_0,i_1), (j_1,j_0) та (i_0,j_0) – фіксовані елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то $(x,y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є розв'язком рівняння

$$(i_0,i_1) \cdot (x,y) \cdot (j_1,j_0) = (i_0,j_0) \tag{3}$$

тоді і лише тоді, коли $(x,y) \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_1,j_1)$.

(iv) Якщо (j_1,j_0) та (i_0,j_0) – фіксовані елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то $(x,y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є розв'язком рівняння $(x,y) \cdot (j_1,j_0) = (i_0,j_0)$ тоді і лише тоді, коли $(x,y) \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_0,j_1)$.

(v) Якщо (i_0,i_1) та (i_0,j_0) – фіксовані елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то $(x,y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є розв'язком рівняння $(i_0,i_1) \cdot (x,y) = (i_0,j_0)$ тоді і лише тоді, коли $(x,y) \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_1,j_0)$.

Доведення. (i) За твердженням 2.1(iv) з [12] з умови $(a,b)=(k,l)\cdot(m,n)$ випливає рівність $a-b=k-l+m-n$. Оскільки $(a,b)=(i,j)\cdot(a,b)$, то за твердженням 2.1(iv) з [12] маємо, що

$$p-q=i-j+a-b=i-j+k-l+m-n.$$

(ii) випливає з твердження 2.

(iii) $(\Leftarrow)$ Припустимо, що $(x,y)\in{\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_1,j_1)$. За твердженням 2 існує невід'ємне ціле число a таке, що $(x,y)=(i_1-a,j_1-a)$. Тоді

$$\begin{aligned}(i_0,i_1)\cdot(i_1-a,j_1-a)\cdot(j_1,j_0)&=(i_0,i_1-(i_1-a)+(j_1-a))\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0,i_1-i_1+a+j_1-a)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0,j_1)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0,j_0),\end{aligned}$$

а отже, (x,y) є розв'язком рівняння (3).

$(\Rightarrow)$ Припустимо, що (x,y) є розв'язком рівняння (3). З твердження (i) випливає, що

$$i_0-j_0=i_0-i_1+x-y+j_1-j_0,$$

а отже, $x-y=i_1-j_1$. Тоді за твердженням (ii) елементи (x,y) і (i_1,j_1) порівняльні стосовно природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Отже, виконується хоча б одна з умов: $(x,y)\preccurlyeq(i_1,j_1)$ або $(i_1,j_1)\preccurlyeq(x,y)$. Якщо $(x,y)\preccurlyeq(i_1,j_1)$, то за твердженням 2 існує невід'ємне ціле число a таке, що $(x,y)=(i_1+a,j_1+a)$. Тоді

$$\begin{aligned}(i_0,i_1)\cdot(i_1+a,j_1+a)\cdot(j_1,j_0)&=(i_0-i_1+(i_1+a),j_1+a)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0-i_1+i_1+a,j_1+a)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0+a,j_1+a)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0+a,j_0+a),\end{aligned}$$

а отже, $a=0$ і $(x,y)=(i_1,j_1)\in{\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_1,j_1)$. Якщо $(i_1,j_1)\preccurlyeq(x,y)$, то $(x,y)\in{\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_1,j_1)$.

Доведення тверджень (iv) і (v) аналогічні доведенню твердження (iii). □

Множину ізольованих точок лівої (правої) топологічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ з ізольованою точкою описує наступне твердження.

Твердження 7. *Нехай τ – лівонеперервна (правонерерервна) T_1-топологія на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Якщо (i_0,j_0) – ізольована точка в просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$, то кожна точка множини $\mathrm{IZ}_{i_0}=\{(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon i\leqslant i_0\}$ (відповідно $\mathrm{IZ}^{j_0}=\{(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon j\leqslant j_0\}$) є ізольованою в просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$.*

Доведення. Оскільки праві зсуви в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ неперервні та (i_0,j_0) – ізольована точка в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$, то повний прообраз $\rho^{-1}_{(j_0,j_0)}(i_0,j_0)$ правого зсуву $\rho_{(j_0,j_0)}\colon\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, $(k,l)\mapsto(k,l)\cdot(j_0,j_0)$ одноточкової множини $\{(i_0,j_0)\}$ є відкрито-замкненою множиною в просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$, адже $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ – T_1-простір.

З твердження 2 випливає, що

$$\rho^{-1}_{(j_0,j_0)}(i_0,j_0)={\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_0,j_0)=\{(i_0-k,j_0-k)\colon k\in\omega\}.$$

З того, що $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ – T_1-простір, то з вищесказаного випливає, що кожна точка вигляду (i_0-k, j_0-k) є ізольованою в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$, оскільки

$$\{(i_0-k,j_0-k)\} = {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_0,j_0) \setminus \left({\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_0{-}k{-}1,j_0{-}k{-}1) \cup \{(i_0,j_0),\ldots,(i_0{-}k{+}1,j_0{-}k{+}1)\}\right).$$

Зафіксуємо довільний елемент (i,j) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ такий, що $i \leqslant i_0$, тобто $i = i_0-k$ для деякого числа $k\in\omega$. Тоді

$$(i_0-k,j_0-k) = (i_0-k,j_0)\cdot(j_0,j_0-k) = \rho_{(j_0,j_0-k)}(i_0-k,j_0).$$

З припущення твердження та вище наведених міркувань випливає, що повний прообраз

$$\rho^{-1}_{(j_0,j_0-k)}(i_0-k,j_0-k) = {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i_0-k,j_0) = \{(i_0-k-p,j_0-p)\colon p\in\omega\}$$

є відкрито-замненою підмножиною в топологічному просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$, яка складається з ізольованих у $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ точок. Звідси випливає твердження.

Доведення дуального твердження аналогічне. □

Наступна теорема дає необхідні та достані умови, за виконання яких лівонеперервна (правонеперервна) T_1-топологія на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна.

Теорема 1. *Лівонеперервна (правонеперервна) T_1-топологія τ на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна тоді і лише тоді, коли існує послідовність $\{(i_n,j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ізольованих точок простору $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ така, що послідовність $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) строго монотонно зростаюча.*

Доведення. Імплікація $(\Rightarrow)$ очевидна.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що існує послідовність $\{(i_n,j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ізольованих точок простору $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ така, що послідовність $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) строго монотонно зростаюча. Зафіксуємо довільний елемент (i,j) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Тоді існує елмент (i_k,j_k), $k\in\mathbb{N}$, послідовності $\{(i_n,j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ такий, що $i<i_k$ ($j<j_k$). За твердженням 7, (i,j) – ізольована точка в топологічному просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$. З вибору точки (i,j) випливає, що топологія τ дискретна. □

Зауваження 3. *З прикладу 3 випливає, що умова теореми 1 про існування послідовності $\{(i_n,j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ізольованих точок простору $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ суттєва навіть у випадку, коли напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ берівський.*

У випадку T_1-напівтопологічних напівгруп твердження теореми 1 послаблюється до такої теореми.

Теорема 2. *Трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна тоді і лише тоді, коли простір $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ містить ізольвану точку.*

Доведення. Імплікація $(\Rightarrow)$ очевидна.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що простір $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ містить ізольвану точку (i_0,j_0). Зафіксуємо довільну точку $(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Тоді $(i_0,i)\cdot(i,j)\cdot(j,j_0)=(i_0,j_0)$. За лемою 3$(iii)$ множина розв'язків рівняння $(i_0,i)\cdot(x,y)\cdot(j,j_0)=(i_0,j_0)$ збігається з множиною ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j)$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ непервні, то множина ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j)$ є відкритою в просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$, як повний прообраз відкритої множини $\{(i_0,j_0)\}$ стосовно неперервного відображення, яке є композицією правого $\rho_{(j,j_0)}$ та лівого $\lambda_{(i_0,i)}$ зсувів. За твердженням 2, $(i,j)\preccurlyeq(i-1,j-1)$ і ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j)\setminus{\uparrow_{\preccurlyeq}}(i-1,j-1)=\{(i,j)\}$. Оскільки τ — T_1-топологія на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то за лемою 1 множина ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(i-1,j-1)$ замкнена в просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$. Отже, (i,j) – ізольована точка в просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$. Із вищевикладеного випливає, що $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ – дискретний простір. □

За твердженням 1.30 з [23] кожний зліченний берівський T_1-простір містить нескінченну підмножину ізольових у ньому точок, а отже, з теореми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Трансляційно-неперервна берівська T_1-топологія τ на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна.*

Лема 4. *Нехай τ – трансляційно-неперервна T_1-топологія на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ така, що відображення $\varphi\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$, $x \mapsto xx^{-1}$ і $\psi\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$, $x \mapsto x^{-1}x$ неперервні. Якщо для деякого ідемпотента $(i,i) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ існує відкритий окіл $U(i,i)$ точки (i,i) у просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ такий, що множина $U(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ скінченна, то τ – дискретна топологія.*

Доведення. Позаяк τ – T_1-топологія на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то не зменшуючи загальності можемо вважати, що існує відкритий окіл точки (i,i) у топологічному просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ такий, що $U(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) = \{(i,i)\}$. З того, що τ – трансляційно-неперервна топологія випливає, що для довільного ідемпотента (j,j) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ існує його відкритий окіл $V(j,j)$ у просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ такий, що

$$(i,j) \cdot V(j,j) \cdot (j,i) \subseteq U(i,i).$$

З леми 3(iii) випливає, що $V(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \subseteq {\uparrow_{\preccurlyeq}}(j,j)$, оскільки окіл $U(i,i)$ містить єдиний ідемпотент (i,i). Позаяк τ – трансляційно-неперервна T_1-топологія, то за лемою 1 множина ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(j-1,j-1)$ замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$. Отже, відкритий окіл $W(j,j) = V(j,j) \setminus {\uparrow_{\preccurlyeq}}(j-1,j-1)$ містить єдиний ідемпотент напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Із вищедоведеного випливає, що кожний ідемпотент (k,k) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ має окіл $W(k,k)$, який містить єдиний ідемпотент .

Нехай (m,n) – довільний елемент напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Позаяк відображення $\varphi\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$, $x \mapsto xx^{-1}$ і $\psi\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$, $x \mapsto x^{-1}x$ неперервні, то з вищевикладеного випливає, що існує відкритий окіл $O(m,n)$ точки (m,n) у топологічному просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ такий, що

$$(m_1,n_1) \cdot (m_1,n_1)^{-1} = (m_1,m_1) \in \{(m,m)\}$$

і

$$(m_1,n_1)^{-1} \cdot (m_1,n_1) = (n_1,n_1) \in \{(n,n)\}$$

для всіх $(m_1,n_1) \in O(m,n)$. Звідси випливає, що множина $O(m,n)$ містить лише елемент (m,n), а отже, виконується твердження леми. □

Лема 5. *Нехай τ – трансляційно-неперервна T_1-топологія на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Якщо існує елемент $(i,j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ такий, що простір ${\updownarrow_{\preccurlyeq}}(i,j)$ – квазірегулярний у точці (i,j), то для кожного елемента (m,n) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ простір ${\updownarrow_{\preccurlyeq}}(m,n)$ – квазірегулярний у точці (m,n).*

Доведення. Позаяк $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ – T_1-простір, то для довільного елемента $(k,l) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ множина ${\downarrow_{\preccurlyeq}}(k,l)$ – відкрита в підпросторі ${\updownarrow_{\preccurlyeq}}(k,l)$, бо за лемою 1 множина ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(k-1,l-1)$ замкнена в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$. Відображення $\mathfrak{f}_{(i,j)}^{(m,n)}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, $(a,b) \mapsto (i,m)\cdot(a,b)\cdot(n,j)$ неперервне як композиція лівого та правого зсувів. За твердженням 2, $(m+k,n+k) \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}(m,n)$ для довільного $k \in \omega$, і з визначення напівгрупової операції на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}_{(i,j)}^{(m,n)}(m+k,n+k) &= (i,m)\cdot(m+k,n+k)\cdot(n,j) = \\
&= (i-m+m+k,n+k)\cdot(n,j) = \\
&= (i+k,n+k-n+j) = \\
&= (i+k,j+k)
\end{aligned}$$

для довільного $k \in \omega$. Отже, звуження $\mathfrak{f}^{(m,n)}_{(i,j)}|_{\downarrow_{\preccurlyeq}(m,n)} \colon \downarrow_{\preccurlyeq}(m,n) \to \downarrow_{\preccurlyeq}(i,j)$ і $\mathfrak{f}^{(i,j)}_{(m,n)}|_{\downarrow_{\preccurlyeq}(i,j)} \colon \downarrow_{\preccurlyeq}(i,j) \to \downarrow_{\preccurlyeq}(m,n)$ відображень $\mathfrak{f}^{(m,n)}_{(i,j)}$ і $\mathfrak{f}^{(i,j)}_{(m,n)}$, відповідно, є взаємно оберненими відображеннями, а з неперервності зсувів у $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ випливає, що $\mathfrak{f}^{(m,n)}_{(i,j)}|_{\downarrow_{\preccurlyeq}(m,n)}$ і $\mathfrak{f}^{(i,j)}_{(m,n)}|_{\downarrow_{\preccurlyeq}(i,j)}$ є гомеоморфізмами просторів $\downarrow_{\preccurlyeq}(i,j)$ і $\downarrow_{\preccurlyeq}(m,n)$. Позаяк для довільного елемента (a,b) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ множина $\downarrow_{\preccurlyeq}(a,b)$ відкрита в просторі $\updownarrow_{\preccurlyeq}(a,b)$, то отримуємо твердження леми. □

Лема 6. *Нехай τ – інверсна напівгрупова T_1-топологія на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Якщо існує ідемпотент $(i,i) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ такий, що топологічний простір $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ квазірегулярний у точці (i,i), то τ – дискретна топологія.*

Доведення. Нехай $U(i,i)$ – відкритий окіл точки (i,i) в просторі $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$. Якщо τ – недискретна топологія на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то з леми 4 випливає, що $U(i,i)$ – нескінченна множина. Позаяк τ – T_1-топологія, то $U_{(i,i)} = U(i,i) \setminus \{(i,i)\}$ – відкрита непорожня підмножина в просторі $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$. Тоді існує непорожня відкрита підмножина $W_{(i,i)} \subseteq U_{(i,i)}$ така, що $\operatorname{cl}_{E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})}(W_{(i,i)}) \subseteq U_{(i,i)}$. Очевидно, що $O(i,j) = U(i,j) \backslash \operatorname{cl}_{E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})}(W_{(i,i)})$ – відкритий окіл точки (i,i) в просторі $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що множина $W_{(i,i)}$ нескічення. Справді, у протилежному випадку існує ідемпотент $(j,j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, який має відкритий окіл $U(j,j)$, що задовольняє умову $U(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) = \{(j,j)\}$, а тоді, за лемою 4, τ – дискретна топологія.

За лемою 1 множина $\uparrow_{\preccurlyeq}(i,i)$ замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$, а отже, і в просторі $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$. Звідси випливає, що існує ідемпотент $(j,j) \in W_{(i,i)}$ такий, що $(j,j) \in \downarrow^{\circ}_{\preccurlyeq}(i,i)$. Тоді $(i,i) \cdot (j,j) = (j,j)$ і з неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ випливає, що існують відкриті околи $W_1(i,i)$ й $W_1(j,j)$ точок (i,i) та (j,j), відповідно, в просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ такі, що

$$(W_1(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})) \cdot (W_1(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})) \subseteq W_{(i,i)}, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} W_1(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \subseteq O(i,i), \\ W_1(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \subseteq W_{)i,i)}, \end{gathered}$$

і множини $W_1(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ та $W_1(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ нескінченні. Отже, для довільного ідемпотента $(k,k) \in W_1(j,j)$ існує ідемпотент $(l,l) \in W_1(i,i)$ такий, що $(k,k) \cdot (l,l) = (l,l) \cdot (k,k) = (l,l)$, а це суперечить умові (4). Звідси випливає, що хоча б одна з множин $W_1(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ або $W_1(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ скінченна. Далі скористаємося лемою 4. □

З лем 5 і 6 випливає теорема 3.

Теорема 3. *Нехай τ – інверсна напівгрупова T_1-топологія на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Якщо існує елемент $(i,j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ такий, що топологічний простір $\updownarrow_{\preccurlyeq}(i,j)$ квазірегулярний у точці (i,j), то τ – дискретна топологія.*

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку рецензентові за цінні поради та зауваження.

Список літератури

[1] Andersen O., *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen.* PhD Thesis. Hamburg, 1952.

[2] Bertman M.O., West T.T., *Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups.* Proc. Roy. Irish Acad. 1976, **A76** (21–23), 219–226.

[3] Bruck R.H., A survey of binary systems. Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

[4] Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J., The theory of topological semigroups. Vol. I. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.

[5] Chornenka A., Gutik O., *On topologization of the bicyclic monoid*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2023, **95**, 46–56. doi:10.30970/vmm.2023.95.046-056

[6] Chornenka A., Gutik O., *On topologization of subsemigroups of the bicyclic monoid*, Preprint (arXiv: 2601.02100).

[7] Clifford A.H., Preston G.B., The algebraic theory of semigroups. Vol. I. Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.

[8] Clifford A.H., Preston G.B., The algebraic theory of semigroups. Vol. II. Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.

[9] Comfort W.W., *Topological groups.* In: Handbook of set-theoretic topology, Kunen K., Vaughan J. (eds.) Elsevier, 1984, pp. 1143–1263.

[10] Eberhart C., Selden J., *On the closure of the bicyclic semigroup.* Trans. Amer. Math. Soc. 1969, **144**, 115–126. doi:10.1090/S0002-9947-1969-0252547-6

[11] Engelking R., General topology. 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.

[12] Fihel I.R., Gutik O.V., *On the closure of the extended bicyclic semigroup.* Carpathian Math. Publ. 2011, **3** (2), 131–157.

[13] Fortunatov V.A., *Congruences on simple extensions of semigroups.* Semigroup Forum 1976, **13**, 283–295. doi:10.1007/BF02194949

[14] Fotedar G.L., *On a semigroup associated with an ordered group.* Math. Nachr. 1974, **60**, 297–302. doi:10.1002/mana.19740600128

[15] Fotedar G.L., *On a class of bisimple inverse semigroups.* Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1978, **4**, 49–53.

[16] Gutik O., *Topological property of the Taimanov semigroup.* Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. 2016, **13**, 1–5.

[17] Gutik O., *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse* ω*-semigroups.* Topol. Algebra Appl. 2018, **6**, 77–101. doi:10.1515/taa-2018-0008

[18] Gutik O., *On non-topologizable semigroups.* Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2024, **96**, 25–36. doi:10.30970/vmm.2024.96.025-036

[19] Gutik O., *On semigroups which admit only discrete left-continuous Hausdorff topology.* Proc. Int. Geom. Cent. (accepted), 2026 (arXiv:2601.19881).

[20] Gutik O.V., Maksymyk K.M., *On semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups.* J. Math. Sc. 2019, **238** (1), 32–45. doi:10.1007/s10958-022-06058-6

[21] Gutik O., Mykhailenych M., *On some generalizations of the bicyclic monoid.* Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2020, **90**, 5–19. doi:10.30970/vmm.2020.90.005-019 (in Ukrainian)

[22] Gutik O., Pagon D., Pavlyk K., *Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group.* Acta Comment. Univ. Tartu. Math. 2011, **15** (2), 61–80. doi:10.12697/ACUTM.2011.15.10

[23] Haworth R.C., McCoy R.A., Baire spaces. Dissertationes Math. Vol. **141**, Warszawa, PWN, 1977.

[24] Lawson M.V., Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. World Scientific, Singapore, 1998. doi:10.1142/3645

[25] Markov A.A., *On free topological groups.* Transl. Amer. Math. Soc. 1962, **8** (1), 195—272.

[26] Ol'shanskiy A. Yu., *Remark on counatable non-topologized groups.* Vestnik Moscow Univ. Ser. Mech. Math. 1980, **39**, 1034. (in Russian).

[27] Petrich M., Inverse semigroups. John Wiley & Sons, New York, 1984.

[28] Pontryagin L.S., Topological groups. Gordon & Breach, New York ets, 1966.

[29] Reilly N.R., *Bisimple ω-semigroups.* Proc. Glasgow Math. Assoc. 1966, **7** (3), 160–167. doi:10.1017/S2040618500035346

[30] Ruppert W., Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory. Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984. doi:10.1007/BFb0073675

[31] Taimanov A.D., *An example of a semigroup which admits only the discrete topology.* Algebra Logic 1973, **12** (1), 64–65. doi:10.1007/BF02218642

[32] Taimanov A.D., *The topologization of commutative semigroups.* Math. Notes 1975, **17** (5), 443–444. doi:10.1007/BF01155800

[33] Vagner V.V., *Generalized groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 1952, **84**, 1119–1122. (in Russian)

[34] Warne R.J., *A class of bisimple inverse semigroups.* Pacif. J. Math. 1966, **18** (3), 563–577. doi:10.2140/pjm.1966.18.563

[35] Warne R.J., *Bisimple inverse semigroups mod groups.* Duke Math. J. 1967, **34** (4), 787–812. doi:10.1215/S0012-7094-67-03481-3

Надійшло 19.01.2026

Gutik O., Zolotar M., Lysetska O. *On topologization of the extended bicyclic semigroup*, Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 134–147.

On the extended bicyclic semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ the following non-discrete T_1-topologies are constructed: (i) a semigroup inverse topology; (ii) a Baire left-continuous [right-continuous] topology; (iii) a locally compact left-continuous [right-continuous] topology. We prove that, on $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ does not exist a countably compact left-continuous [right-continuous] T_1-topology. We give conditions under which a T_1-topology on $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ is discrete. In particular, (i) a left-continuous [right-continuous] T_1-topology τ on $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ is discrete if and only if there exists a sequence $\{(i_n, j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ of isolated points in $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ such that the sequence $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $[\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$ is strictly increasing; (ii) a shift-continuous T_1-topology τ on $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ is discrete if and only if the space $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ contains an isolated point; (iii) if the T_1-space of a topological inverse semigroup $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ has a point x such that $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ is quasi-regular at x, then τ is discrete.