Bukovinian Math. Journal. 2025, **13**, 1, 92–99 Буковинський матем. журнал 2025, Т.13, №1, 92–99

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.08

Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ У КРАЙОВІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ $2B$-ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується задача оптимального керування системою, що описується загальною крайовою задачею для $2b$-еліптичних рівнянь. Розглянуто випадки обмеженого внутрішнього і межового керування. Критерій якості задається сумою об'ємного та поверхневого інтегралів. Використовуючи інтегральне зображення, за допомогою функції Гріна, розв'язків крайової задачі для $2b$-еліптичних рівнянь та формулу Тейлора, знайдено необхідні і достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується загальною крайовою задачею для еліптичних рівнянь.

Ключові слова і фрази: крайова задача, задача оптимізації, функція Гріна, $2b$-еліптичні рівняння, межове керування.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), b.yashan@chnu.edu.ua (Яшан Б.О.)*

Вступ

Теорія оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, багата результатами і активно розвивається в наш час. Її основи вперше систематично описано в монографії [1]. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема, гідро- і газодинаміки, фізики тепла, фільтрації, дифузії, теорії біологічних популяцій. Важливі результати цієї теорії у випадку еволюційних рівнянь отримані, зокрема, у працях [2], [3], [4], [5], [6].

Вивченню задачі розподілу ресурсів, яка полягає у максимізації чисельності певного виду, присвячена праця [7]. В ній популяційна модель являє собою рівняння для щільності популяції, яка залежить від керування, що є ресурсним коефіцієнтом. Доведено існування та єдиність оптимального розвитку, а також знайдено співвідношення, що його характеризують.

У [8] розглянуто задачу оптимального керування, яка регулюється напівлінійним еліптичним рівнянням, причому керування підлягає обмеженням; обґрунтовано умови оптимальності першого та другого порядку; апроксимовано задачу керування дискретними задачами; доведено збіжність дискретизації та отримано деякі оцінки похибок.

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.
Information on some grant ...

Дослідженню класичної векторної задачі неперервного граничного керування для нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу з граничним керуванням Неймана присвячено працю [9]. В ній доведено існування класичного неперервного граничного вектора оптимального керування, керованими нелінійними диференціальними рівняннями в частиних похідних еліптичного типу з обмеженнями рівності та нерівності.

Замінивши диференціальне рівняння в частиних похідних на еквівалентну задачу оптимального керування, у праці [10] обґрунтовано новий підхід для знаходження чисельного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь.

В [11] доведено теореми існування та єдиності розв'язку вектора стану лінійних еліптичних рівнянь у частинних похідних для фіксованого неперервного вектора оптимального керування. Отримано похідну Фреше від функції витрат, доведено теорему про необхідні умови оптимальності розглянутої задачі.

Встановленню необхідних і достатніх умов існування межового та внутрішнього оптимального керування системами, що описуються крайовими задачами для еліптичних рівнянь з виродженням другого порядку, присвячено праці [12, 13]. Функціонали якості визначаються об'ємними та поверхневими інтегралами.

У цій статті розглядається задача вибору оптимального керування системи, що описується загальною еліптичною крайовою задачею з обмеженим внутрішнім та межовим керуванням. Критерій якості задається сумою об'ємного та поверхневого інтегралів. Використовуючи інтегральне зображення, за допомогою функції Гріна розв'язків крайової задачі для $2b$-еліптичних рівнянь та формулу Тейлора, встановлено необхідні та достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується загальною крайовою задачею для еліптичних рівнянь.

1 Постановка задачі та основний результат

Нехай D обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$. Розглянемо в області D задачу знаходження функцій (u, p), $p = (p_1, p_2)$, на яких функціонал

$$I(p) = \int\limits_D F_1\left(x; u; p_1\right) dx + \int\limits_{\partial D} F_2\left(x; u; p_2\right) d_x S \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $p \in V = \{p | p_1 \in C^{\alpha}(D), p_2 \in C^{2b-r+\alpha}(\partial D)$, $\nu_{11}(x) \leq\ p_1(x) \leq \nu_{12}(x), \nu_{21}(x) \leq p_2(x) \leq \nu_{22}(x)\}$, r_i - порядки крайових операторів, $r = \min\limits_i r_i$, із яких $u\left(x; p_1(x), p_2(x)\right)$ задовольняє при $x \in D$ рівняння

$$L(u) \equiv \sum_{|k| \leq 2b} A_k(x) \partial_x^k u - \lambda u = f_0\left(x, p_1(x)\right), \tag{2}$$

а на межі області ∂D крайові умови

$$\lim_{x \to z \in \partial D} \left[\sum_{|k| \leq r_i} b_k^{(i)}(x) \partial_x^k u - f_i\left(x, p_2(x)\right) \right] = 0, \tag{3}$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, λ – параметр, $i \in \{1, 2, \ldots, b\}$.

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(x) \in C^{l+\alpha}(D)$, $l = 4b - 2r + 1$, $0 < \alpha < 1$, $A_0(x) < \lambda$, $0 < \lambda < \infty$ і оператор $L_0 = \sum\limits_{|k|=2b} A_k(x) \partial_x^k$ – рівномірно еліптичний ([14], с. 10);

б) коефіцієнти крайових умов $b_k^{(i)}(x) \in C^{2b+l-r_i+\alpha}(\partial D)$, $\partial D \in C^{2b+l+\alpha}$ і для операторів $B_i \equiv \sum\limits_{|k|=r_i} b_k^{(i)}(x)\partial_x^k$ виконуються умови доповняльності ([14], с. 22), $r_i \leq 2b-1$, $i \in \{1,\dots,b\}$;

в) функції $f_0\left(x,p_1(x)\right) \in C^{\alpha}(D)$, $f_i\left(x,p_2(x)\right) \in C^{2b-r_i+\alpha}(\partial D)$ і мають похідні другого порядку за змінними (p_1,p_2), які належать як функції змінних x відповідно просторам $C^{\alpha}(D)$, $C^{2b-r_i+\alpha}(\partial D)$;

г) функції $F_1\left(x;u,p_1\right)$, $F_2\left(x;u,p_2\right)$ мають похідні другого порядку за змінними $(u;p_1,p_2)$, які належать як функції змінних x відповідно просторам $C(D)$, $C(\partial D)$, $\nu_{1m} \in C^{\alpha}(D)$, $\nu_{2m} \in C^{2b-r_i+\alpha}(\partial D)$, $m \in \{1,2\}$.

При виконанні умов а)–в) існує єдиний розв'язок задачі (2), (3) в просторі $C^{2b+\alpha}(D)$ при $l \geq 0$ ([15], теорема 1.20, с. 120). Встановимо формулу зображення розв'язку задачі (2), (3) при $l = 4b-2r+1$.

За умов, накладених на гладкість коефіцієнтів рівняння (2), і крайових умов (3) існує функція Гріна $(G_0,G_1,\dots,G_b)$ крайової задачі ([16], теорема 1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{|k|\leq 2b} A_k(x)\partial_x^k v = f_0\left(x,p_1(x)\right),\ v(0,x)=\varphi(x),$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|\leq r_i} b_k^{(i)}(x)\partial_x^k v - f_i\left(x,p_2(x)\right)\right] = 0, \tag{4}$$

за допомогою якої розв'язок задачі (4) при $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $Q=[0,T)\times D$ визначається формулою

$$v(t,x;p) = \int_0^t d\tau \int_D G_0\left(t-\tau,x;\xi\right) f_0\left(\xi,p_1(\xi)\right) d\xi + \int_D G_0\left(t,x;\xi\right)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\int_0^t d\tau \int_{\partial D} G_i\left(t-\tau,x;\xi\right) f_i\left(\xi,p_2(\xi)\right) d_\xi S. \tag{5}$$

В області $(0,\infty)\times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|\leq 2b} A_k(x)\partial_x^k u - \lambda u = f_0\left(x,p_1(x)\right), \tag{6}$$

початкову умову за змінною t

$$u(0,x)=\varphi(x),\ x\in D, \tag{7}$$

а на межі області крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|\leq r_i} b_k^{(i)}(x)\partial_x^k u - f_i\left(x,p_2(x)\right)\right] = 0. \tag{8}$$

Цій задачі відповідає еліптична задача ([15], с. 230)

$$\sum_{|k|\leq 2b} A_k(x)\partial_x^k u - \lambda u = f_0\left(x,p_1(x)\right),$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|\le r_i} b_k^{(i)}(x)\partial_x^k u - f_i\left(x, p_2(x)\right)\right] = 0.$$

Розв'язок задачі (6)–(8) з параметром λ згідно з формулою (5) має вигляд

$$\omega(t,x) = \int_D E_0\left(t,x;\xi;\lambda\right)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau\int_D E_0\left(t-\tau,x;\xi;\lambda\right) f_0\left(\xi,p_1(\xi)\right)d\xi +$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\int_0^t d\tau\int_{\partial D} E_i\left(t-\tau,x;\xi;\lambda\right) f_i\left(\xi,p_2(\xi)\right)d_\xi S, \tag{9}$$

де $E_i\left(t,x;\xi;\lambda\right) = G_i\left(t,x;\xi\right)e^{-\lambda t}$, $j\in\{0,1,\dots,b\}$.

Якщо у формулі (9) поміняти порядок інтегування і перейти до границі при $t\to\infty$, вважаючи що $\lambda>0$, то приходимо до формули зображення єдиного розв'язку задачі (2), (3)

$$u(x) = \int_D Z_0\left(x,\xi\right) f_0\left(\xi,p_1(\xi)\right)d\xi + \sum_{i=1}^{b}\int_{\partial D} Z_i\left(x,\xi\right) f_i\left(\xi,p_2(\xi)\right)d_\xi S, \tag{10}$$

у якій

$$Z_j\left(x,\xi\right) = \int_0^\infty G_j(t,x;\xi)e^{-\lambda t}dt.$$

При виконанні умов а)–в) згідно з теоремою 1 [17] існує єдиний розв'язок задачі (2)–(3) в просторі $C^{2b+\alpha}(D)$ при довільних $p\in V$ і для нього правильна оцінка

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(D)} \le c\left(\|f_0\|_{C^\alpha(D)} + \sum_{i=1}^{b}\|f_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\partial D)}\right).$$

2 Задача оптимального керування

В області D розглянемо задачу (1)–(3). Будемо вважати, що виконані умови а) – г).

Позначимо через

$$\lambda_1(\xi) = \int_D \frac{\partial F_1(x;u;p_1)}{\partial u}Z_0(x,\xi)dx + \int_{\partial D}\frac{\partial F_2(x;u;p_2)}{\partial u}Z_0(x,\xi)d_xS,$$

$$\mu_i(\xi) = \int_D \frac{\partial F_1(x;u;p_1)}{\partial u}Z_i(x,\xi)dx + \int_{\partial D}\frac{\partial F_2(x;u;p_2)}{\partial u}Z_i(x,\xi)d_xS,$$

$$H_1(\xi,u,\lambda_1,p_1) = \lambda_1(\xi)f_0\left(\xi;p_1(\xi)\right) + F_1(\xi;u;p_1),$$

$$H_2(\xi,u,\mu,p_2) = \sum_{i=1}^{b}\mu_i(\xi)f_i\left(\xi;q_2(\xi)\right) + F_2(\xi;u;p_2),$$

$p^{(0)} = \left(p_1^{(0)},p_2^{(0)}\right)$ – оптимальне керування, $u(x;p^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (1)–(3).

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови а)–в). Тоді для задачі (1) – (3)*

1) якщо $\partial_{p_m} H_m > 0$, $m \in \{1,2\}$, то оптимальне керування $p^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{21})$;

2) якщо $\partial_{p_1} H_1 < 0$, $D_{p_2} H_2 > 0$, то оптимальне керування $p^{(0)} = (\nu_{12}, \nu_{21})$;

3) якщо $\partial_{p_1} H_1 > 0$, $D_{p_2} H_2 < 0$, то оптимальне керування $p^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{22})$;

4) якщо $\partial_{p_m} H < 0$, $m \in \{1,2\}$, то оптимальне керування $p^{(0)} = (\nu_{12}, \nu_{22})$,
де $p_m \in \{p_1, p_2\}$.

Доведення. Розглянемо випадок 1. Нехай $\Delta p = (\Delta p_1, \Delta p_2)$ – допустимий приріст керування $p = (p_1, p_2)$. Через $\Delta u = \Delta_{p_1} u + \Delta_{p_2} u$ позначимо приріст функції $u(x; p_1, p_2)$. Тоді $\Delta_{p_m} u$ в області D будуть розв'язками відповідних крайових задач

$$L\left(\Delta_{p_m} u\right)(x) = \delta_{1m} \Delta f_0(x, p_1),$$

$$B_i\left(\Delta_{p_m} u\right)(x)\big|_{\partial D} = \delta_{2m} f_i(x, p_2), \tag{11}$$

де δ_{im} – символ Кронекера, $m \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2\}$.

Використовуючи функцію Гріна $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_b)$ задачі (2), (3) і формулу (10), одержимо зображення приростів $\Delta_{p_m} u$ формулами

$$\Delta_{p_1} u = \int\limits_D Z_0(x,\xi) \Delta_{p_1} f_0\left(\xi, p_1(\xi)\right) d\xi,$$

$$\Delta_{p_2} u = \sum_{i=1}^{b} \int\limits_{\partial D} Z_i(x,\xi) \Delta_{p_2} f_i\left(\xi; p_2(\xi)\right) d_\xi S. \tag{12}$$

Розглянемо приріст функціоналу:

$$\Delta I(p) = \Delta_{p_1} I(p) + \Delta_{p_2} I(p). \tag{13}$$

Скориставшись формулою Тейлора, маємо

$$\Delta_{p_1} I = \int\limits_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial u} \Delta_{p_1} u + O\left(|\Delta_{p_1} u|^2\right) + \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \Delta p_1 + O\left(|\Delta p_1|^2\right)\right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\partial D} \left[\frac{\partial F_2}{\partial u} \Delta_{p_1} u + O\left(|\Delta p_1|^2\right)\right] d_x S,$$

$$\Delta_{p_2} I = \int\limits_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial u} \Delta_{p_2} u + O\left(|\Delta p_2|^2\right)\right] dx + \int\limits_{\partial D} \left[\frac{\partial F_2}{\partial u} \Delta_{p_2} u + O\left(|\Delta p_2|^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F_2}{\partial p_2} \Delta p_2 + O\left(|\Delta p_2|^2\right)\right] d_x S. \tag{14}$$

Підставляючи (12), (14) у (13) і змінюючи при цьому порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(p) = \int\limits_D \left[\partial_{p_1} H_1(\xi, u, \lambda_1, p_1) \Delta p_1 + O\left(|\Delta p_1|^2\right)\right] d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\partial D} \left[\partial_{p_2} H_2(\xi, u, \mu, p_2) \Delta p_2 + O\left(|\Delta p_2|^2\right)\right] d_\xi S.$$

Якщо $p_1(x) = \nu_{11}(x)$, $p_2(x) = \nu_{21}(x)$ і $\partial_{p_1} H_1 > 0$, $\partial_{p_2} H_2 > 0$, то при досить малих Δp_1, Δp_2 маємо $\Delta I(p) > 0$.

Нехай $p^{(0)}$ – оптимальне керування, тобто $\Delta I(q) > 0$. Перевіримо виконання умови 1) теореми 1. Якщо вирази $\partial_{p_1} H_1$, $\partial_{p_2} H_2$ – знакозмінні величини, тобто $\partial_{p_1} H_1 > 0$ в $D_1 \subset D$, $\partial_{p_2} H_2 > 0$ в $\partial D_2 \subset \partial D$ і $\partial_{p_1} H_1 < 0$ в $D \setminus D_1$, $\partial_{p_2} H_2 < 0$ в $\partial D \setminus \partial D_2$, то, використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(p) = \partial_{p_1} H_1(x^+, u^+, \lambda_1^+, p_1^+) \int\limits_{D_1} \Delta p_1 dx - \left|\partial_{p_1} H_1(x^-, u^-, \lambda_1^-, p_1^-)\right| \int\limits_{D \setminus D_1} \Delta p_1 dx +$$

$$+\partial_{p_2} H_2(x^+, u^+, \mu^+, p_2^+) \int\limits_{\partial D_2} \Delta p_2 d_x S - \left|\partial_{p_2} H_2(x^-, u^-, \mu^-, p_2^-)\right| \int\limits_{\partial D \setminus \partial D_2} \Delta p_2 d_x S +$$

$$+ \int\limits_{D} O\left(|\Delta p_1|^2\right) dx + \int\limits_{\partial D} O\left(|\Delta p_2|^2\right) d_x S.$$

При досить малих Δp_1, Δp_2 знак $\Delta I(p)$ визначається першими чотирма доданками суми. Різниця перших двох і наступної пари двох доданків змінює знак $\Delta I(p)$ в залежності від величин $\text{mes} D_1$, $\text{mes} D \setminus D_1$, $\text{mes} \partial D_2$, $\text{mes} \partial D \setminus \partial D_2$, Δp_1, Δp_2.

При досить малих величинах $\text{mes} D_1$, $\text{mes} \partial D_2$, $\Delta p_1 > 0$, $\Delta p_2 > 0$ маємо $\Delta I(p) < 0$ і навпаки $\Delta I(p) > 0$, якщо малі величини $\text{mes} D \setminus D_1$, $\text{mes}(\partial D \setminus \partial D_2)$ і $\Delta p_1 > 0$, $\Delta p_2 > 0$. Отже, функціонал $I(p)$ не досягає мінімуму. Знаходження оптимального керування $p^{(0)}$ у інших випадках, які залежать від знаку величин $\partial_{p_1} H_1$, $\partial_{p_2} H_2$ доводяться аналогічно. □

Нехай умови теореми 1 не виконані.

Тоді правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконані умови а)–г). Для того, щоб керування $p^{(0)} = \left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}\right)$, для задачі (1) – (3), було оптимальним, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:*

1) функції $H_1(\xi, u, \lambda_1, p_1)$, $H_2(\xi, u, \mu, p_2)$ за аргументами p_1, p_2 мають в точці $\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}\right)$ мінімальні значення;

2) для довільного вектора $\left(l_m^{(1)}, l_m^{(2)}\right) \neq 0$ виконувалась нерівність

$$\partial_u^2 F_m\left(x, u, p_m^{(0)}\right)\left(l_m^{(1)}\right)^2 - 2\partial_u \partial_{p_m} F_m\left(x, u, p_m^{(0)}\right) l_m^{(1)} l_m^{(2)} +$$

$$+\partial_{p_m}^2 F_m\left(x, u, p_m^{(0)}\right)\left(l_m^{(2)}\right)^2 > 0, \ m \in \{1, 2\}.$$

Доведення теореми 2 проводиться за допомогою методики доведення теореми 2.14 [18].

Список літератури

[1] Lions J.-L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Mir. Moscow. 1972. 416. (in Russian)

[2] Zgurovsky M. Z., Melnik V.S., Novikov A. N. Applied methods of analysis and control of nonlinear processes and fields. Naukova dumka. Kiev. 2004. 588. (in Russian)

[3] Bermudez A. Some applications of optimal control theory of distributed systems. Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2002. 8. 195-218.

[4] Casas E., Vexler B., Zuazua E. Sparse initial data identification for parabolic PDE and its finite element approximations. Mathematical Control and Related Fields. 2015. 5(3). 377-399.

[5] Feiyue He, Leung A., Stojanovic S. Periodic optimal control for parabolic Volterra–Lotka type equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1995. 18. 127–146.

[6] Homberg D., Krumbiegel K., Rehberg J. Optimal control of a Parabolic Equation with Dynamic Boundary Condition. Applied Mathematics and Optimization. 2013. 67(1). 3-31.

[7] Bintz J., Finotti H., Lenhart S. Optimal control of resourse coefficient in a parabolic population model, edited by R. Mondaini. BIOMAT 2013 International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Press. Singapure. 2013. 121–135.

[8] Casas E., Mateos M. Optimal control of partial differential equations. Computational Mathematics, Numerical Analysis and Applications. SEMA SIMAI Springer Series. 2017. 13. Springer, Cham.

[9] Jamil Al-Hawasy, Nabeel A., Thyab Al-Ajeeli. The Continuous Classical Boundary Optimal Control of Triple Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations with State Constraints. Iraqi Journal of Science. 2021. 62(9). 3020-3030. Mathematics

[10] Zarepour M., Loghmani G.B. Numerical solution of arbitrary-order linear partial differential equations using an optimal control technique. Mathematical and Computers in Simulation. 187. September 2021. 77-96.

[11] Al-Hawasy J.A., Jasim D.K. The Continuous Classical Optimal Control Problems for Triple Elliptic Partial Differential Equations. Ibn Al-Haitham Journal for Pure and Applied Sciences. 2020. 33, 1. 143-151.

[12] Pukal'skyi I.D., Yashan B.O. Optimal control in the boundary value problem for elliptic equations with degeneration. Matematychni Studii. 2023. 59(1). 76-85.

[13] Pukal'skyi I.D., Yashan B.O. Optimal control in the Dirichlet problem for elliptic equations with degeneration. Bukovinian Math. Journal. 2023. 11(1). 115-125.

[14] Agmon S., Douglas A., Nirenberg L. Estimates near the boundary of solutions of elliptic equations in partial derivatives under common boundary conditions. M. : IL, 1962. 205 p.

[15] Matiychuk M. I. Parabolic and elliptic problems in Dini spaces: – Chernivtsi, 2010 – 248 p.

[16] Ivasishen S.D. Green's matrices of general inhomogeneous boundary value problems for parabolic ones according to I.G. Petrovsky systems. Preprint of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Kiev, 1968, 2-52. (in Russian)

[17] Luste I.P., Pukal's'kyi I.D. Boundary-Value Problem for Nonuniformly Elliptic Equations with Power Singularities. J. Math. Sci. 2024. 278. 748–760.

[18] Pukalskyi I.D., Luste I.P. Boundary value problems for parabolic equations of the second order. Tutorial Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2021, 284. (in Ukrainian)

Надійшло 08.05.2025

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. *Optimal control in a boundary value problem for* $2b$*-elliptic equations*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 92–99.

The problem of an optimal control system describing a general boundary value problem for $2b$-elliptic levels is investigated. The cases of constrained internal and boundary control are considered. The quality criterion is given by the sum of the volume and surface integrals. Using the integral representation, with the help of the Green's function, solutions of the boundary value problem for $2b$-elliptic levels and the Taylor formula, the provided and sufficient conditions for ensuring the optimal solution of the system describing the general boundary value problem for elliptic levels are found.