DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.01

Правдивий О.А., Станжицький О.М., Станжицький А.О, Мартинюк О.В.

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ІНВАРІАНТНИХ МІР СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ЗАПІЗНЕННЯМ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

У цій роботі вивчаються інваріантні міри для стохастичного еволюційного рівняння нейтрального типу з запізненням у гільбертовому просторі. Встановлено умови існування та єдиності інваріантних мір, та вивчена їх гранична поведінка при $h \longrightarrow 0$.

Ключові слова і фрази: Процес Вінера, запізнення, інваріантна міра, компактність, напівгрупа, м'який розв'язок.

Національний університет імені Тараса Шевченка,
Національний університет імені Тараса Шевченка,
Інститут математики НАН України,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *awxrvtb@gmail.com (Правдивий О.А.)*
stanzhytskyi@knu.ua (Станжицький О.М.)
a.stanzhytskyi@gmail.com (Станжицький А.О)
o.martynyuk@chnu.edu.ua (Мартинюк О.В.)

1 Вступ

Основною метою цієї роботи є дослідження граничної поведінки інваріантної міри для стохастичних рівнянь нейтрального типу з запізненням у гільбертовому просторі вигляду

$$d(u(t) - g(u(t-h))) = (Au(t) + f(u(t-h), u(t)))dt + \sigma(u(t-h), u(t))dW(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]. \quad (2)$$

Тут A - необмежений оператор, що є генератором сильно неперервної напівгрупи $\{S(t), t \geq 0\}$ обмежених лінійних операторів у сепарабельному гільбертовому просторі H. Випадковий шум $W(t)$ є Q-вінеровим процесом у сепарабельному гільбертовому просторі K. Для деякого $h > 0$ позначимо $C_h := C([-h, 0], H)$ простір неперервних H-значних функцій $\varphi : [-h, 0] \longrightarrow H$ з нормою

$$||\varphi||_{C_h} := \sup_{\theta \in [-h, 0]} ||\varphi(\theta)||_H.$$

УДК 517.925
2010 *Mathematics Subject Classification:* 37L55, 34F05, 60H15.
Information on some grant ...

Тут $||\cdot||_H$ - норма в просторі H. У цій роботі $||\cdot||_H$ будемо позначати як $||\cdot||$. Розв'язок $u(t)$ рівняння (1) розглядається у м'якому сенсі. Також позначимо $u_t := u(t+\theta)$, де $\theta \in [-h, 0)$. Функції f, g відображають $H \times H$ в H, а $\sigma : H \longrightarrow L_2^0$, де $L_2^0 = L(Q^{\frac{1}{2}}K, H)$ - простір операторів Гільберта-Шмідта з $Q^{\frac{1}{2}}K$ в H. Нарешті, $\varphi : [-h, 0] \times \Omega \longrightarrow H$ - початкова функція, де $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ повний ймовірнісний простір.

Результати цієї роботи базуються на результатах праці [5] щодо існування інваріантної міри μ^h для (1). Ми досліджуємо граничну поведінку сім'ї інваріантних мір $\{\mu^h\}$ при $h \longrightarrow 0$ у сенсі їх слабкої збіжності. Зокрема, доведено, що за певних умов сім'я $\{\mu^h\}$ є компактною, а також показано, що будь-яка гранична точка сім'ї $\{\mu^h\}$ є інваріантною мірою відповідної граничної системи (при $h = 0$)

$$d(u^0(t) - g(u^0(t))) = (Au^0(t) + f(u^0(t), u^0(t)))dt + \sigma(u^0(t), u^0(t))dW(t), t \in [0, T], \tag{3}$$

$$u^0(0) = \varphi(0). \tag{4}$$

Крім того, якщо система (1)-(2) має єдину інваріантну міру, яка є стійкою, тоді $\mu^{h_n} \longrightarrow \mu^0$ для довільної послідовності $h_n \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$.

Стохастичні функціонально-диференціальні рівняння нейтрального типу описують математичні моделі різних складних процесів, еволюція яких відбувається під дією випадкових сил, причому ця еволюція залежить також від попередніх станів об'єкта. У випадку розподілених параметрів такі процеси описуються рівняннями з частинними похідними або, у загальнішому випадку, еволюційними рівняннями в нескінченновимірних просторах.

Подібні ефекти пам'яті виникають у моделі Ходкіна—Хакслі, моделі Доусона—Флемінга з популяційної генетики [12]. Аналогічні задачі з'являються при частковому розподіленому моделюванні динаміки популяцій та в інших моделях.

Питання існування та єдиності розв'язків для рівнянь типу (1) розглядалися в роботах багатьох різних авторів. У [13] автори розглядали існування м'яких розв'язків за умовами Ліпшиця та лінійного зростання коефіцієнтів. Ці умови були дещо послаблені в [14]. Умови існування локального сильного розв'язку були отримані в [15]. У роботі [20] автори розглядали питання існування м'якого розв'язку для нейтральних стохастичних диференціальних рівнянь з дробовою похідною.

Для загального типу запізнення в [14] автори отримали умови існування та єдиності м'яких розв'язків. Крім того, в цій роботі було досліджено асимптотичну поведінку розв'язків у сенсі існування інваріантної міри. Питання асимптотичної поведінки стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з еліптичним оператором як в обмежених, так і в необмежених областях розглядалися в [16] і [17], а для скінченновимірного випадку - в [18] і [19].

Наша робота узагальнює результати робіт [2] та [21] для рівнянь нейтрального типу. У цих роботах автори досліджують поведінку вище згадані сім'ї $\{\mu^h\}$ при $h \longrightarrow 0$ для звичайних стохастичних рівнянь з запізненням. У цьому випадку автори розглядали оператор A як дискретний лапласіан або як p-лапласіан.

Слід зазначити, що наявність запізнення під похідною (нейтральний тип) значно ускладнює дослідження. Дійсно, у означенні м'якого розв'язку з'являються два додаткові члени: $g(u^h(t-h))$ і $\int_0^t AS(t-s)g(u^h(t-s))ds$. Напівгрупа $S(t)$ не діє на перший член. Ця напівгрупа зазвичай компактна при $t > 0$, тому встановлення компактності сім'ї функцій $g(u^h(t-h, \omega))$ в просторі $C([-h, 0], H)$ не є очевидним. Щодо інтегрального члена, то слід зазначити, що загалом кажучи, якщо $g(\varphi) \in H$, то цей член має неінтегровну сингулярність при $s = t$. Ми долаємо цю складність, вводячи дробові степені оператора $(-A)$. Зокрема показуємо, що якщо g достатньо регулярна, щоб $g(u^h(s-h)) \in D((-A)^\alpha)$, для $\alpha \in (0,1)$, то ця сингулярність стає інтегровною.

Робота організована наступним чином. В розділі 2 ми вводимо необхідні позначення і попередні результати. Розділ 3 присвячений головному результату роботи: вивченню граничної поведінки сім'ї ін- варіантних мір $\{\mu^h\}$, при $h \longrightarrow 0$. В розділі 4 розглядається приклад використання головних результатів роботи.

2 Попередні відомості

Нехай K, H, V дійсні сепарабельні гільбертові простори, і:

$$V \subset H \subset V^{'},$$

є трійкою Гельфанда, де включення $V \subset H$ щільні і компактні, і $V^{'}$ є дуальним до V.

Норма в V позначається як $||\cdot||_V$. Внутрішній скалярний добуток в H позначається як $(\cdot,\cdot)$ а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означає спарку між V і $V^{'}$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - повний ймовірнісний простір, оснащений нормальною фільтрацією $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ що попроджується Q-вінерівським процесом W на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з лінійним обмеженим оператором коваріації так, що $trQ < \infty$.

Ми припускаємо існування повної ортонормованої системи $\{e_k\}$ в K і послідовності невід'ємних дійсних чисел λ_k таких, що $Qe_k = \lambda_k e_k, k = 1, 2, ...$, і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Тоді вінерівський процес допускає розвинення $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k$, де $\beta_k(t)$ дійснозначні броунівські процеси, взаємно незалежні на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Нехай $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(K)$ і $L_2^0 = L_2(U_0, H)$ є простором всіх операторів Гільберта-Шмідта з U_0 в H зі скалярним добутком $(\Phi, \Psi)_{L_2^0} = tr[\Phi Q \Psi^*]$ і нормою $||\Phi||_{L_2^0}$, відповідно.

A - необмежений лінійний оператор з $D(A) \to H$, що є генератором аналітичної напівгрупи операторів $S(t) = e^{At}$ - обмежених в H. З [1] це еквівалентно тому, що $(-A)$ секторіальний оператор.

Ми припускаємо, що $S(t)$ є напівгрупою компактних операторів, тому з Теореми 3.2 [3] напівгрупа є неперервною у рівномірній операторній топології.

З [3] також отримуємо, що для всіх $\alpha \in (0,1)$ дробова степінь оператора $(-A)$ є замкненим лінійним оператором в області визначення $D(-A^\alpha)$.

Позначимо H^α гільбертів простір $D(-A)^\alpha$ оснащений нормою

$$\|u\|_\alpha := \|(-A)^\alpha u\|$$

Для доведення існування і єдиності розв'язку накладемо наступні умови на оператор A та відображення f, σ, g.

1. Якщо $\sigma(-A)$ це спектр оператора $(-A)$, тоді маємо $\mathrm{Re}\sigma(-A) > \delta > 0$, і A утворює напівгрупу компактних операторів $S(t)$ в H.

2. Для всіх $u, v, u_1, v_1 \in H$ маємо

$$||f(u,v) - f(u_1,v_1)|| \le L(||u-u_1|| + ||v-v_1||),$$

і

$$||\sigma(u,v) - \sigma(u_1,v_1)||_{L_2^0} \le L(||u-u_1|| + ||v-v_1||),$$

3. Для всіх $u, v, u_1, v_1 \in H$ і для кожного $\alpha \in (0,1)$ функція g задовольняє

$$||g(u,v) - g(u_1,v_1)||_\alpha \le M_g(||u-u_1|| + ||v-v_1||)$$

для деякого $M_g \in (0,1)$

Нескладно помітити, що з умови 2 випливає лінійний ріст для f, σ в H а з умови 3 випливає лінійний ріст в H_α.

Нам знадобиться наступне твердження з [1]:

Твердження 1. *[1] [Th 1.4.3] Існує $C_\alpha > 0$ таке, що*

$$||(-A)^\alpha S(t)|| \le C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},$$

і

$$\|S(t)\| \le C_0 e^{\delta t},$$

для всіх $t > 0$.

Розв'язок задачі (1)-(2) будемо розуміти у м'якому сенсі:

Означення 1. *Неперервний $\mathcal{F}_t$-узгоджений стохастичний процес $u : [-h,T] \times \Omega \longrightarrow H$ називається м'яким розв'язком для (1)-(2) на $t \in [0,T]$ якщо він задовольняє наступне інтегральне рівняння*

$$u(t) = S(t)(\varphi(0) - g(\varphi(0))) + g(u(t-h)) - \int_0^t AS(t-s)g(u(s-h))ds$$

$$+ \int_0^t S(t-s)f(u(s),u(s-h))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(u(s),u(t-s))dW(s),$$

і $u(t) = \varphi(t)$ майже напевно для $t \in [-h,0]$

Нам знадобляться наступні теореми, що є наслідками відповідних теорем з [5]:

Теорема 1. *[5] [Th 2.6] (Існування і єдиність м'якого розв'язку): За виконання умов 1-3, для всіх $T > 0$ рівняння (1) має єдиний м'який розв'язок u на $[0,T]$*

Теорема 2. *[5] [Th 2.8] Нехай виконуються умови Теореми 1, та $u(t,\varphi)$ і $u(t,\psi)$ є двома розв'язками рівняння (1). Тоді*

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \left(\|u(t,\varphi) - u(t,\psi)\|^2 \right) \longrightarrow 0,$$

при $\mathbf{E}\|\varphi - \psi\|_{C_h}^2 \longrightarrow 0$.

Позначимо $B_b(C_h)$ - банахів простір обмежених дійсних борелівських функціоналів на C_h а $C_b(C_h)$ - простір обмежених неперервних функціоналів на C_h. Оскільки Теорема 1 гарантує існування та єдиність розв'язку для будь-якого $t \geq 0$ то, замінюючи
початковий інтервал $[-h, 0]$ на $[-h+s, s]$ для будь-якого $s \geq 0$ ми можемо гарантувати існування та єдиність розв'язку на будь-якому інтервалі $[s, t]$ з початковою $\mathcal{F}_s$ вимірною функцією φ, яка задовольняє умови на $[s-h, s]$. Такі розв'язки позначатимуться як $u(t, s, \varphi)$. Аналогічно, позначимо $u_t(s, \varphi) = u(t+\theta, s, \varphi)$, де $\theta \in [-h, 0]$ зсув розв'язку $u(t, \varphi)$ такий, що $u_s(s, \varphi) = u(s+\theta, s, \varphi) = \varphi(\theta)$.

Далі, аналогічно до [10], визначимо сім'ю операторів зсуву

$$U_s^t \varphi := u(t+\theta, s, \varphi) = u_t(s, \varphi). \tag{5}$$

Позначимо $\mathcal{F}_s^t(dW)$ як мінімальну σ-алгебру, що містить множини $\{W(\tau) - W(s), \tau \in [s, t]\}$ і G^t як мінімальну σ-алебру, що містить $\{W(\tau) - W(t), \tau \geq t\}$. Для будь-якої невипадкової функції $\varphi \in C_h$, при $s \geq 0$ і $t \geq s$ розв'язок $U_s^t \varphi$ є $\mathcal{F}_s^t(dW)$-вимірною випадковою функцією зі значеннями в C_h. Зазначимо, що в цьому випадку, оскільки φ є невипадковою, то $u_t(s, \varphi)$ не залежить від σ-алгебри G^t. Наступне твердження було доведено в [11]:

Твердження 2. *[11] Оператор* (5) *задовольняє рівність*

$$U_\tau^t U_s^\tau \varphi = U_s^t \varphi,$$

для всіх $t \geq \tau \geq s \geq 0$, і $\varphi \in C_h$.

Нехай D є σ-алгеброю борелевих підмножин C_h. Для кожного $A \in D$ позначимо

$$\mu_t(A) = P\{u_t(s, t) \in A\} = P\{U_s^t \varphi \in A\} = P(s, \varphi, t, A). \tag{6}$$

Таким чином $u_t(s, \varphi)$ природно визначає міру на D. Формула (6) визначає напіврупу перехідних ймовірностей, що відповідає випадковому процесу $u_t(s, \varphi)$,$t \geq s \geq 0$.
Подібно до скінченновимірного випадку [10], можна показати, що ця функція
задовольняє властивості перехідних ймовірностей.
Таким чином, ми отримуємо теорему.

Теорема 3. *За припущень Теореми 2, процес $u_t(s, \varphi)$ є процесом Маркова на C_h з перехідною функцією* (6).

Твердження 3. *[5] [Pr 2.11] Для будь-якого $t \geq s \geq 0$ і для будь-якого $A \in D$ маємо*

$$P(s, \varphi, t, A) = P(0, \varphi, t-s, A)$$

Для будь-якого $g \in B_b(C_h)$, і для всіх $\varphi \in C_h$ і $t \geq s \geq 0$ позначимо:

$$P_{s,t}(g) := \mathbf{E} g(u_t(s, \varphi)).$$

З Твердження 3 тоді отримуємо, що $P_{s,t}(g) = P_{0,t-s}(g)$ і позначимо $P_t(g) = P_{0,t}(g)$. Наступне твердження говорить про феллеровість цієї напівгрупи.

Твердження 4. *[5] [Pr 2.12] За припущень Теореми 2 перехідна напіврупа P_t,$t \geq 0$ є стохастично неперервною і феллеровою:*

$$P_t : C_b(C_h) \longrightarrow C_b(C_h),$$

і

$$\lim_{t \longrightarrow 0} P_t g = g.$$

Теорема 4. *[5] [Th 2.13] Припустимо, що умови Теореми 1 виконуються, а рівняння* (1) *має розв'язок* $u(t)$ *обмежений за ймовірністю для* $t \geq 0$ *в* C_h, *тоді існує інваріантна міра* μ *в* C_h:

$$\int_{C_h} P_t g(x) d\mu(x) = \int_{C_h} g(x) d\mu(x),$$

для будь-яких $t \geq 0$ *і* $g \in C_b(C_h)$.

Відповідно, для будь-яких $h > 0$ існує інваріантна міра μ^h для (1).

Надалі будемо вважати початкові умови невипадковими. Щоб перейти до основних результатів, нам знадобиться допоміжний результат з [2], адаптований до нашої задачі.

Ми розглядаємо граничну поведінку інварінтних мір рівняння (1)-(2) коли $h \longrightarrow 0$ де h запізнення в (1).
Для кожного $h \in (0,1]$ і $\varphi \in C([-h,0],H)$, $u^h(t,\varphi)$ - розв'язок (1)-(2) і стохастичний процес в фазовому просторі $C([-h,0],H)$. Аналогічно, для кожного $u_0 \in H$, $u^0(t,u_0)$ - розв'язок (3)-(4), такий, що $u^0(0,u_0) = u_0$.

Для $h \in (0,1]$ визначимо оператор $T_h : C([-h,0],H) \longrightarrow H$ як $T_h(\varphi) := \varphi(0)$ для $\varphi \in C([-h,0],H)$ і $\mathcal{T}_h : C([-1,0],H) \longrightarrow C([-h,0],H)$ як $\mathcal{T}_h(\varphi)(s) := \varphi(s)$ для $\varphi \in C([-1,0],H)$.

Далі, припускаємо виконання наступної властивості

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_h K} P\{\|u^h(t,\varphi) - u^0(t, T_h\varphi)\| \geq \eta\} = 0, \tag{7}$$

для кожної компактної підмножини K з $C([-1,0],H)$ і для всіх $\eta > 0$ та $t \geq 0$.

Теорема 5. *[2] [Th 7.1] Нехай виконується умова* (7) *і* $h_n \subset (0,1]$. *Нехай* μ^{h_n} *інваріантна міра* u^{h_n} *в* $C([-h_n,0],H)$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$. *Припустимо, що* $\{\mu^{h_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *щільна, тобто для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує компактна множина* $K_1 \subset C([-1,0],H)$, *така, що для всіх* $n \in \mathbb{N}$

$$\nu^{h_n}(\mathcal{T}_{h_n} K_1) > 1 - \varepsilon. \tag{8}$$

Тоді:

1. *Послідовність* $\{\mu^{h_n} \circ T_{h_n}^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ *щільна.*

2. *Якщо* $h_n \longrightarrow 0$ *і* μ *ймовірнісна міра в* H *така, що* $\mu^{h_n} \circ T_{h_n}^{-1} \longrightarrow \mu$ *слабко, то* μ *буде інваріантною мірою для* u^0

3 Гранична поведінка інваріантних мір

З Теореми 5 випливає, що для отримання збіжності мір нам потрібно довести (7). Для того, щоб показати, що (7) справджується у нашому випадку нам знадобиться наступна лема.

Лема 1. *Нехай виконані умови 1)-3). Тоді, для кожної компактної множини* $K \in C([-1,0],H)$, $t > 0$ *і* $\eta > 0$, *існує послідовність* $\{h_n | n \geq 1\}$, $h_n \longrightarrow 0$ *при* $n \longrightarrow \infty$ *така, що:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathcal{T}_{h_n} K} P(||u^{h_n}(t,\xi) - u^0(t, T_{h_n}\xi)|| \geq \eta) = 0. \tag{9}$$

Доведення. Маємо:

$$u^h(t,\xi) = S(t)(\xi(0) - g(\xi(-h))) + g(u^h(t-h,\xi)) - \int_0^t AS(t-s)g(u^h(s-h,\xi))ds+$$

$$\int_0^t S(t-s)f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))dW(s), \tag{10}$$

і

$$u^0(t,T_h\xi) = S(t)(T_h\xi - g(T_h\xi)) + g(u^0(t,T_h\xi)) - \int_0^t AS(t-s)g(u^0(s,T_h\xi))ds+$$

$$\int_0^t S(t-s)f(u^0(s,T_h\xi),u^0(s,T_h\xi))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(u^0(s,T_h\xi),u^0(s,T_h\xi))dW(s). \tag{11}$$

Тому

$$u^h(t,\xi) - u^0(t,T_h\xi) = S(t)(g(T_h\xi) - g(\xi(-h))) + (g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,T_h\xi)))+$$
$$\int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,T_h\xi)) - g(u^h(s-h,\xi)))ds+$$
$$\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - f(u^0(s,T_h\xi),u^0(s,T_h\xi)))ds+$$
$$\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - \sigma(u^0(s,T_h\xi),u^0(s,T_h\xi)))dW(s).$$

Відповідно

$$u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi(0)) = S(t)(g(\xi(0)) - g(\xi(-h))) + (g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,\xi(0))))+$$
$$\int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))ds+$$
$$\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds+$$
$$\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - \sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))dW(s).$$

Як наслідок отримуємо

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\|u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi(0))\|^2 \le \|S(t)(g(\xi(0)) - g(\xi(-h)))\|^2 \\ +\mathbf{E}\|S(t)(g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,\xi(0))))\|^2 \\ +\mathbf{E}\left\|\int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))ds\right\|^2 \\ +\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds\right\|^2 \\ +\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - \sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))dW(s)\right\|^2.\end{gathered} \tag{12}$$

Оцінимо всі доданки починаючи з останнього в (12).
Використавши [4] Теорему 6.10 отримуємо, що існує $K > 0$ таке, що:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - \sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))dW(s)\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}K\int_0^t ||\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-\sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0)))||^2_{L_2^0}ds$$

$$\leq \mathbf{E}KL^2\int_0^t ||u^h(s-h,\xi)-u^0(s,\xi(0))||^2+||u^h(s,\xi))-u^0(s,\xi(0))||^2ds.$$

Для оцінки першого доданку, використаємо [2] (7.14):

$$\int_0^t ||u^h(s-h,\xi)-u^0(s,\xi(0))||^2ds\leq$$

$$2\int_{-h}^0 \|u^h(s,\xi)-\xi(0)\|^2ds+2\int_0^h \|u^0(s,\xi(0))-\xi(0)\|^2ds+2\int_0^t \|u^h(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2ds \tag{13}$$

$$+2\int_0^t \|u^0(s,\xi(0))-u^0(s+h,\xi(0))\|^2dt.$$

Тому, використовуючи (13) отримуємо:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-\sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))dW(s)\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}KL^2\Big(2\int_{-h}^0 \|u^h(s,\xi)-\xi(0)\|^2ds+2\int_0^h \|u^0(s,\xi(0))-\xi(0)\|^2ds \tag{14}$$

$$+3\int_0^t \|u^h(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2ds+2\int_0^t \|u^0(s,\xi(0))-u^0(s+h,\xi(0))\|^2dt\Big).$$

Далі оцінюємо доданок:

$$\mathbf{E}\|\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds\|^2,$$

наступним чином:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^t \|S(t-s)\|^2ds\cdot\int_0^t \|f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0)))\|^2ds$$

$$\leq \mathbf{E}L^2\int_0^t \|u^h(s-h,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2+\|u^h(s,\xi))-u^0(s,\xi(0))\|^2ds.$$

Також маємо:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}L^2\Big(2\int_{-h}^0 \|u^h(s,\xi)-\xi(0)\|^2ds+2\int_0^h \|u^0(s,\xi(0))-\xi(0)\|^2ds \tag{15}$$

$$+3\int_0^t \|u^h(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2ds+2\int_0^t \|u^0(s,\xi(0))-u^0(s+h,\xi(0))\|^2dt\Big).$$

Далі, використавши нерівність Юнга для конволюцій отримуємо:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0)))-g(u^h(s-h,\xi)))ds\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^t \|AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^t \|A^{\alpha-1}S(t-s)\| \cdot \|A^{\alpha}(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^t \|A^{\alpha-1}S(\tau)\| d\tau \cdot \int_0^t \|A^{\alpha}(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E} M_\alpha \int_0^t \|(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))\|_\alpha^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E} M_\alpha \int_0^t ||u^h(s-h,\xi) - u^0(s,\xi(0))||^2 ds.$$

де $M_\alpha := \int_0^t C_{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1} e^{\delta(t-s)}$.
Тому:

$$\mathbf{E}\| \int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))ds\|^2$$

$$\leq 2\mathbf{E} M_\alpha L^2 \Big(\int_{-h}^0 \|u^h(s,\xi) - \xi(0)\|^2 ds + \int_0^h \|u^0(s,\xi(0)) - \xi(0)\|^2 ds \tag{16}$$

$$+ \int_0^t \|u^h(s,\xi) - u^0(s,\xi(0))\|^2 ds + \int_0^t \|u^0(s,\xi(0)) - u^0(s+h,\xi(0))\|^2 dt \Big).$$

Враховуючи те, що $T_h\xi = \xi(0)$ маємо:

$$||S(t) \cdot (g(\xi(0)) - g(\xi(-h)))||^2 \leq ||S(t)||^2 \cdot ||L(\xi(0) - \xi(-h))||^2.$$

Далі покажемо, що для всіх компактних множин K

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \sup_{\xi \in \mathcal{T}_h K} ||\xi(0) - \xi(-h)||^2 = 0,$$

тут внутрішній супремум існує з теореми Асколі-Арцела. Прийнявши до уваги, що функціонал $\varphi(\xi) := \mathbf{E}\|\xi(0) - \xi(-h)\|^2$ неперервний можемо зробити висновок, що існує деякий $\xi^h_{sup} \in C_h$ на якому супремум досягається, але

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \|\xi^h_{sup}(0) - \xi^h_{sup}(-h)\|^2 = 0,$$

що випливає з неперервності ξ^h_{sup}.
Оцінимо, нарешті, доданок $\mathbf{E}\|g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,\xi(0)))\|^2$. Маємо:

$$\mathbf{E}\|g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,\xi(0)))\|^2$$

$$\leq L^2 \mathbf{E}\|u^h(t-h,\xi) - u^0(t,\xi(0))\|^2$$

$$\leq L^2 \mathbf{E}\Big(\|u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi)\|^2 + \|u^h(t-h,\xi) - u^h(t,\xi)\|^2 \Big)$$

$$\leq L^2 \mathbf{E}\Big((\|u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi)\|^2 \Big) + L^2 \mathbf{E}\Big(\|u^h(t-h,\xi) - u^h(t,\xi)\|^2) \Big).$$

Перший доданок не перевищує $\|u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi)\|^2$ з оцінок на сталу L.
Покажемо що:

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \sup_{\xi \in \mathcal{T}_h K} L^2 \mathbf{E}\Big(\|u^h(t-h,\xi) - u^h(t,\xi)\|^2 \Big) \longrightarrow 0.$$

Враховуючи те, що з Теореми 2 ми маємо неперервну залежність від початкових даних для м'якого розв'язку і $\mathcal{T}_h K$ компакт, можемо зробити висновок, що існує деякий ξ^h_{sup}, залежний від h, такий, що:

$$\sup_{\xi\in\mathcal{T}_h K} L^2\mathbf{E}\Big(\|u^h(t-h,\xi)-u^h(t,\xi)\|^2\Big) = L^2\mathbf{E}\Big(\|u^h(t-h,\xi^h_{sup})-u^h(t,\xi^h_{sup})\|^2\Big)$$

З означення м'якого розв'язку випливає, що

$$u^h(t,\xi^h_{sup})-u^h(t-h,\xi^h_{sup}) =$$

$$(S(t)-S(t-h))(\xi^h_{sup}(0)-g(\xi^h_{sup}(-h)))$$

$$+g(u^h(t-h,\xi^h_{sup}))-g(u^h(t-2h,\xi^h_{sup}))$$

$$-\int_0^t (AS(t-s)-AS(t-h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds$$

$$+\int_{t-h}^t AS(t-h-s)g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds$$

$$+\int_0^t (S(t-s)-S(t-h-s))f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds$$

$$+\int_{t-h}^t S(t-h-s)f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds$$

$$+\int_0^t (S(t-s)-S(t-h-s))\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s)$$

$$+\int_{t-h}^t S(t-h-s)\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s),$$

Отже, після N кроків маємо

$$L^2\mathbf{E}\|u^h(t,\xi^h_{sup})-u^h(t-h,\xi^h_{sup})\|^2 \le$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\|(S(t-nh)-S(t-(n+1)h))(\xi^h_{sup}(0)-g(\xi^h_{sup}(-h))\|^2$$

$$+L^{2n}\mathbf{E}\|g(u^h(t-(N-1)h,\xi^h_{sup}))-g(u^h(t-Nh,\xi^h_{sup}))\|^2$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\left\|\int_0^{t-nh}(AS(t-nh-s)-AS(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1} L^{n}\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh} AS(t-(n+1)h-s)g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\left\|\int_0^{t-nh}(S(t-nh-s)-S(t-(n+1)h-s))f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh} S(t-(n+1)h-s)f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\Big\|\int_0^{t-nh}(S(t-nh-s)$$

$$-S(t-(n+1)h-s))\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s)\Big\|^2$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh}S(t-(n+1)h-s)\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s)\right\|^2.$$

Для того, щоб довести збіжність до 0 потрібно показати, що існує $C>0$ і деяка функція $\psi(h)\longrightarrow 0$, при $h\longrightarrow 0$, такі, що наступні нерівності справджуються:

$$\|(S(t-nh)-S(t-(n+1)h))(\xi^h_{sup}(0)-g(\xi^h_{sup}(-h))\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^{t-nh}(AS(t-nh-s)-AS(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh}AS(t-(n+1)h-s)g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\left|\int_0^{t-nh}(S(t-nh-s)-S(t-(n+1)h-s))f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2\le C\psi(h), \quad (17)$$

$$\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh}S(t-(n+1)h-s)f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\Big\|\int_0^{t-nh}(S(t-nh-s)$$

$$-S(t-(n+1)h-s))\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s)\Big\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh}S(t-(n+1)h-s)\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s)\right\|^2\le C\psi(h).$$

Беручи до уваги, що $\xi^h_{sup}\in\mathcal{T}_hK$, з сюр'єктивності $\mathcal{T}_h$ існує $\hat{\xi}^h_{sup}\in K$ таке, що

$$\mathcal{T}_h\hat{\xi}^h_{sup}=\xi^h_{sup}.$$

Позначимо множину всіх таких $\hat{\xi}$ для кожного h як $\Xi_K\subset K$. Із компактності K можна зробити висновок, що існує збіжна підпослідовність $\hat{\xi}_n$ яка збігається до деякого $\hat{\xi}_0\in\Xi_K$ в K. Із неперервності оператора $\mathcal{T}_h$ отримуємо, що $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|\xi^{h_n}_{sup}-g(\xi^{h_n}_{sup})\|^2$ існує для деякої послідовності $h_n\longrightarrow 0$. Таким чином, нерівність 1 з (17) справджується для деякої послідовності h_n.

З того, що відображення f,g,σ і напівгрупа S обмежені, випливає, що (17) справжується для нерівностей 3,5,7.

З умов на напівгрупу S можемо довести, що (17) справджуєтсья також для нерівностей 1, 4, 6.

Розлянемо ліву частину нерівності 2 з (17) детальніше:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^{t-nh}(AS(t-nh-s)-AS(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^{t-nh}\|(AS(t-nh-s)-AS(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$= \mathbf{E}\int_0^{t-nh}\|A(S(t-nh-s)-S(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$= \mathbf{E}\int_0^{t-nh}\|A(S(t-(n+1)h-s+h)-S(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$= \mathbf{E}\int_0^{t-nh}\|A(S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2})\right)$$

$$\cdot S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^{t-nh}\|S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2$$

$$\cdot\|AS\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^{t-nh}\|S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2$$

$$\cdot\|A^{\alpha-1}S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2||A^{\alpha}g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$\leq C_{\alpha,g}\mathbf{E}\int_0^{t-nh}\|S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2$$

$$\cdot\|A^{\alpha-1}S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2 ds,$$

де $C_{\alpha,g} > \int_0^{t-nh}\|g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2_{\alpha} ds$, що випливає з лінійного росту g.
Позначимо $\frac{t-(n+1)h-s}{2} =: s_1$

$$C_{\alpha,g}\mathbf{E}\int_0^{t-nh}\|S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2$$

$$\cdot\|A^{\alpha-1}S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2 ds$$

$$= C_{\alpha,g}\mathbf{E}\int_0^{h}\|S\left(s_1+h\right)-S\left(s_1\right)\|^2\cdot\|A^{\alpha-1}S\left(s_1\right)\|^2 ds_1,$$

що збігається до 0, коли $h \longrightarrow 0$.
Після цього з (17) отримуємо, що $\mathbf{E}\|u^{h_n}(t-h_n,\xi)-u^{h_n}(t,\xi)\|^2$ збігається до 0, коли h_n приямує до 0.
Тому з (14), (15), (16), отримуємо, що:

$$\mathbf{E}\|u^{h_n}(t,\xi)-u^0(t,\xi(0))\|^2 \leq C\psi(h_n)$$

$$+\mathbf{E}L^2\|u^{h_n}(t,\xi)-u^0(t,\xi(0))\|^2$$

$$+3\mathbf{E}(2L^2+M_\alpha L^2+KL^2)\Big(\int_{-h_n}^0\|u^{h_n}(s,\xi)-\xi(0)\|^2 ds+\int_0^{h_n}\|u^0(s,\xi(0))-\xi(0)\|^2 ds \qquad (18)$$

$$+\int_0^t \|u^{h_n}(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2ds+\int_0^t \|u^0(s,\xi(0))-u^0(s+h_n,\xi(0))\|^2dt\Big),$$

або, беручи до уваги, що $h_n \longrightarrow 0$:

$$\mathbf{E}\|u^{h_n}(t,\xi)-u^0(t,\xi(0))\|^2 \le C_L C\psi(h_n)$$

$$+3\mathbf{E}C_L(2L^2+M_\alpha L^2+KL^2)\Big(\int_0^t \|u^{h_n}(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2ds\Big),$$

де $C_L := \frac{1}{1-L^2}$.
Тому, з нерівності Гронуола отримуємо, що:

$$\lim_{n\longrightarrow 0}\sup_{\xi\in\mathcal{T}_{h_n}K}\mathbf{E}\|u^{h_n}(t,\xi)-u^0(t,T_{h_n}\xi)\|^2=0.$$

Останнє, разом з нерівністю Чебишева, доводить твердження теореми. □

Використовуючи Лему 1 ми можемо провести аналогічні міркування до [2] Теореми 7.3:

Теорема 6. *Нехай умови на оператор A і на функції f, g, σ справджуються, тоді:*

1. *Об'єднання $\bigcup_{h\in[0,1]}\mathcal{M}^h$ щільне*
2. *Якщо $h_n \longrightarrow 0$ і $\mu^{h_n}\in\mathcal{M}^{h_n}$, тоді існує підпослідовність $h_{n(k)}$ і інваріантна міра $\mu^0\in\mathcal{M}^0$ такі, що $\mu^{h_{n(k)}}\circ T^{-1}_{h_{n(k)}} \longrightarrow \mu^0$ слабко.*

Для отримання наступного результату, нам знадобиться наступне означення:

Означення 2. *Назвемо розв'язок* (1)-(2) *стійким за розподілом, якщо існує $K,\gamma>0$, таке, що для всіх $t_0\in\mathbb{R}$ і для кожного $t>t_0+h$ і для будь-якого іншого розв'язку рівняння $\eta(t)$ такого, що $\mathbf{E}\|\eta(t_0)\|^2<\infty$, маємо:*

$$\mathbf{E}\|u_t-\eta_t\|^2_{C_h}\le Ke^{-\gamma(t-t_0)}\mathbf{E}(\|u(t_0)-\eta(t_0)\|^2+\|u(t_0-h)-\eta(t_0-h)\|^2) \tag{19}$$

Тоді, якщо ми маємо стійкість за розподілом і єдину інваріантну міру, то, як прямий наслідок Теорем 1, 2, 4, 5, 6 отримуємо теорему.

Теорема 7. *Нехай умови Теореми 5 справджуються і $h_n\longrightarrow 0$. Тоді $\mu^{h_n}\longrightarrow\mu^0$ слабко.*

4 Застосування

Нехай D обмежена область в $\mathbb{R}^d$ з ∂D що задовольняє умову Ляпунова, $H=L^2(D)$, і

$$Au=\sum_{i,j=1}^d (a_{i,j}(x)u_{x_i})_{x_j}=div(a(x)\nabla u).$$

Тут $a_{i,j}$ неперервні за Гельдером коефіцієнти показником Гельдера $\beta\in(0,1)$, що є симетричними, обмеженими і задовольняють умову рівномірної еліптичності:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}\eta_i\eta_j\ge C_0\|\eta\|^2,\eta\in\mathbb{R}^d,$$

для деякого $C_0 > 0$. Нехай $e_n(x)$ - ортонормований базис в H, такий, що $e_n \in L^\infty(D)$. Введемо оператор коваріації $Q \in \mathcal{L}(H)$, такий, що Q невід'ємний, $Tr(Q) < \infty$, і $Qe_n = \lambda_n e_n$. Це дозволяє визначити випадковий процес

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\beta_i(t)e_i(x), t \geq 0,$$

що є Q-вінерівським процесом для $t \geq 0$ зі значеннями в $L^2(D)$. Позначимо $U := Q^{\frac{1}{2}}(L^2(D))$. Із [6] Лема 2.2, випливає, що $U \in L^\infty(D)$. Аналогічно до [6] введемо мультиплікативний оператор $\Psi : U \longrightarrow H$ наступним чином. Для фіксованого $\varphi \in L^2(D)$, $\Psi(\varphi) := \varphi \cdot \psi$ при $\psi \in U$. Оскільки $\varphi \in L^2(D)$ і $\psi \in L^\infty(D)$, оператор Ψ визначений, тому $\Psi \circ Q^{\frac{1}{2}} : L^2(D) \longrightarrow L^2(D)$ визначає оператор Гільберта-Шмідта з

$$\|\Psi \circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2^0} \leq Tr(Q) \sup_{n \geq 1} \|e_n\|^2_\infty \|\varphi\|^2_{L^2(D)}.$$

Розглянемо наступне рівняння з запізненням:

$$\begin{aligned} &d\Big[u(t,x) + \int_D b(x, u(t-h,y), y)dy\Big] \\ &= \Big[div(a(x)\nabla u(t,x)) + f(u(t-h,x))\Big]dt + \sigma(u(t-h,x))dW(t), \end{aligned} \tag{20}$$

для $t > 0$, з $u(t,x) = \varphi(t,x)$ при $t \in [-h, 0]$, і $u(t,x) = 0$ для $x \in \partial D$,$t \geq 0$. Тут $b(x,z,y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ і $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Введемо відображення:

$$g(\varphi)(x) := \int_D b(x, \varphi(-h), y)dy,$$

як відображення з $C([-h,0], \mathbb{R})$ в $L^2(D)$. Тоді рівняння (20) можна записати в абстрактній формі (1)-(2), з $D(A) := H^2(D) \cap H_0^1(D)$. Припустимо, що виконані наступні умови:

1. Функції f, σ задовольняють умову Ліпшиця з константою Ліпшиця L.

2. Функція b неперервна відносно всіх її змінних і існує $A > 0$ таке, що

   $$|b(x,0,y)| + |\nabla_x b(x,z,y)| \leq A,$$

   і

   $$|b(x,z_1,y) - b(x,z_2,y)| + |\nabla_x b(x,z_1,y) - \nabla_x b(x,z_2,y)| \leq L|z_1 - z_2|,$$

   для всіх $x, y \in D$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

3. Нехай також

   $$2L^2(\mu(D))^2 < 1.$$

Перевіримо, що умови Теореми 1 справджуються. Для будь-якого $\varphi \in C_h$ маємо:

$$\|f(\varphi)\|^2 = \int_D |f(\varphi(-h,x))|^2 dx \leq \int_D L^2 |\varphi(-h,x)|^2 dx + \int_D |f(0,x)|^2 dx$$

$$\leq L^2 \sup_{\theta \in [-h,0]} \int_D |\varphi(\theta,x)|^2 dx + \int_D |f(0,x)|^2 dx < \infty,$$

і
$$\|\sigma(\varphi)\|^2_{L_2^0} \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sup_n \|e_n\|^2_\infty \int_D |\sigma(\varphi(-h,x))|^2 dx < \infty.$$
Окрім того:
$$\|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\|^2 \le L^2 \int_D |\varphi_1(-h,x) - \varphi_2(-h,x)|^2 dx \le L^2 \sup_{\theta\in[-h,0]} \int_D |\varphi_1(\theta,x) - \varphi_2(\theta,x)|^2 dx,$$
і
$$\|\sigma(\varphi_1) - \sigma(\varphi_2)\|^2_{L_2^0} \le L^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sup_n \|e_n\|^2_\infty \sup_{\theta\in[-h,0]} \int_D |\varphi_1(\theta,x) - \varphi_2(\theta,x)|^2 dx.$$
Оскільки $(-A)$ секторіальний самоспряжений оператор, то з [7] ст.335, випливає, що $\sigma(-A) > \delta > 0$, і $(-A)^{-1}$ компактний та утворює компактну напівгрупу $S(t)$. Далі, аналогічно [8] введемо інтерполяційний простір $D_A(\frac{1}{2}, 2) = H_0^1$. Але, з Твердження А.17 [9] випливає, що $D_A(\frac{1}{2}, 2)$ ізоморфний до $D((-A)^{\frac{1}{2}})$.
Нехай існує $C_{1/2} > 0$, з Твердження 1, таке що:
$$2L^2 + L^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k + L^2 C < \frac{1}{2},$$
і
$$36L^4(C_{1/2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k)^2 < \frac{3}{\pi},$$
де $C := \frac{C_{1/2}^2}{2\delta^2}$.
Далі
$$\|g(\varphi)\|^2_{\frac{1}{2}} = \|g(\varphi)\|^2_{H_0^1} = \int_D |g(\varphi(x))|^2 dx + \int_D |\nabla g(\varphi(x))|^2 dx.$$
Тому
$$\int_D |g(\varphi(x))|^2 dx = \int_D dx \left(\int_D b(x, \varphi(-h,y), y) dy \right)^2$$
$$\le L^2 \mu(D)^2 \left(\int_D |\varphi(-h,y)| dy + 1 \right) < \infty.$$
З теореми Лебега про диференціювання інтеграла за параметром маємо, що
$$\nabla g(\varphi(x)) = \int_D \nabla_x b(x, \varphi(-h,y), y) dy,$$
тому
$$\int_D |\nabla g(\varphi(x))|^2 dx < \infty.$$
Нарешті
$$\|g(\varphi_1) - g(\varphi_2)\|^2_{\frac{1}{2}} = \int_D |g(\varphi_1(x)) - g(\varphi_2(x))|^2 dx + \int_D |\nabla_x g(\varphi_1(x)) - \nabla_x g(\varphi_2(x))|^2 dx$$
$$\le \int_D dx \left(\int_D |b(x, \varphi_1(-h,y), y) - b(x, \varphi_2(-h,y), y)|^2 dy \right)$$
$$+ \int_D dx \left(\int_D |\nabla_x b(x, \varphi_1(-h,y), y) - \nabla_x b(x, \varphi_2(-h,y), y)|^2 dy \right)$$

$$\leq 2\mu(D)^2 L^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2_{C_h}.$$

Зазаначимо, що з спектральної умови на A випливає, що напівгрупа експоненційно стискаюча

$$\|S(t)\| \leq Ke^{\delta t}, t \geq 0.$$

Тепер, доведемо, що розв'язок глобально обмежений. Маємо:

$$\mathbf{E}\|u(t)\|^2 \leq 2\mathbf{E}\|S(0)(\varphi(0) + g(\varphi))\|^2 + 2\mathbf{E}\|g(u_t)\|^2 + 4\mathbf{E}\left\|\int_0^t AS(t-s)g(u_s)ds\right\|^2$$

$$+4\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)f(u_s)ds\right\|^2 + 4\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\sigma(u_s)dW(s)\right\|^2$$

$$\leq 4K^2 e^{-2\delta t}\mathbf{E}\|\varphi(0) + g(\varphi)\|^2 + C^2\mu(D)^2$$

$$+\mathbf{E}\left(\int_0^t \|A^{\frac{1}{2}}S(t-s)\| \cdot \|g(u_s)\|_{\frac{1}{2}}ds\right)^2 + K^2 C + K^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k,$$

тому з $\|g(u_s)\|_{\frac{1}{2}} < \infty$, і з експоненційної оцінки на напівгрупу маємо глобальну обмеженість.

Отже, з теореми 4 випливає існування інваріантної міри.

Дослідження частково підтримано грантом Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України 3М-2024 "Якісний аналіз та керування в нелінійних інтегро-диференціальних рівняннях із імпульсними та стохастичними збуреннями державний реєстраційний номер:
0124U002140.

Список літератури

[1] Henry D. Geometric theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer-Verlag. Berlin-New York (1981).

[2] Dingshi Li, Bixiang Wang, Xiaohu Wang. Limiting Behavior of Invariant Measures of Stochastic Delay Lattice Systems// Journal of Dynamics and Differential Equations, 2022, 34:1453–1487.

[3] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag. New York (1983).

[4] G. Da Prato and J. Zabczyk. Ergodicity for Infinite-Dimensional Systems. Cambridge University Press. Cambridge (1992).

[5] Stanzhytsky A.O., Misiats O.O., Stanzhytskyi O.M. Invariant measure for neutral stocahstic functional differential equations with non-Lipshitz coefficients// Evolution equations and control theory,2022,Vol 11(6). P.1029-1953.

[6] Ralf Manthey and Thomas Zausinger. Stochastic evolution equations in $L^{2\nu}_{\rho}$// Stochastics Stochastics Rep., 66(1-2):37–85, 1999.

[7] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[8] P. Grisvald. Commutativite de deux foncteurs d'interpolation et applications// J. Math. Pures.Appl., 45:193–290, 1966.

[9] K. Kenzhebaev, O. Stanzhytskyi, and A. Tsukanova. Existence and uniqueness results, the markovian property of solutions for a neutral delay stochastic reaction-diffusion equation in entire space// Dynamic Systems and Applications, 28(1):19–46, 2019.

[10] E. F. Tsarkov. Random Perturbations of Functional Differential Equations. "Zinatne", Riga (1989).

[11] Oleksandr Misiats, Vikotria Mogilova, and Oleksandr Stanzhytskyi. Invariant measure for stochastic functional differential equations in hilbert spaces. arXiv:2011.07034, 2020.

[12] D. Dawson. Stochastic evolution equations// Mach. Biosci.,15(1972),287-316.

[13] Luo J. Exponental stability for stochastic neutral partial functional differential equations// J. Math. Anal. Appl. , 355(2009), 414-425 p.

[14] Samoilenko A.M. Mahmudov N.I. and Stanzhytsky A.M., Existence , uniqueness and controllability results for neutral ESDES in Hilbert Spaces// Dynam. Syst. Appl., 17(2008),53-70.

[15] A.O.Stanzhytsky. On weak and strong solutions of paired stochastic functional differential equations in infinite–dimentional spaces // Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications,Vol. 29 (2),pp.48–75, (2021).

[16] J. Clark, O. Misiats, V. Mogylova, O. Stanzhytskyi. Asymptotic behaviour of stochastic funtional differential evolution equation// Electr. Journal of Differential Equations, v. 2023(2023), No 35, pp 1-21.

[17] O. Misiats, O. Stanzhytskyi, N.K. Yip. Asymptotic analysis and homogenization of invariant measure// Stochastics and Dynamics, Vol. 19, No. 2, 28 p, (2019).

[18] G.O.Petryna, M.V. Hrysenko, O.M. Stanzhytskyi. On the asymptotic equivalenct of ordinary and functional stochastic differential equations Journal of Optimization// Differential Equations and their Applicationsthis, 31(1), pp. 125–142, (2023).

[19] O. M. Stanzhytskyi. Investigation of exponential dichotomy of ito stochastic systems by using quadratic forms// Ukrainian Mathematical Journal, 53(11), pp. 1882–1894, (2001).

[20] Saifullah S., Shahid S., Zada A. Analysis of Neutral Stochastic Fractional Differential Equations Involving Riemann–Liouville Fractional Derivative with Retarded and Advanced Arguments// Qual. Theory Dyn. Syst. 23, 39 (2024). https://doi.org/10.1007/s12346-023-00894-w.

[21] Mengtao Wu, Shaoyue Mi and Dingshi Li. Limiting behaviour of Invariant Measures for Stochastic Delay Nonlocal lattice Systems// Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, 2024, Volume 29, Issue 10: 4171-4193. Doi: 10.3934/dcdsb.2024039

Надійшло 26.05.2025

Pravdyvyi O., Stanzhytskyy O., Stanzhytskyy A., Martynyuk O. *Invariant measures and their limiting behaviour for neutral type stochastic delay equations in Hilbert space*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 7–24.

In this work we consider invariant measures for neutral type stochastic delay evolution equation in Hilbert space. Established conditions on existence and uniqueness of invariant measures for neutral type stochastic delay evolution equation in Hilbert space. Established limiting behaviour of invariant measures if length of delay interval $h \longrightarrow 0$.