DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.10

Перегуда О.В.

АПРОКСИМАЦІЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ОПТИМАЛЬНИМ КЕРУВАННЯМ РІВНЯНЬ БЕЗ ЗАПІЗНЕННЯ У НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

Вивчається задача оптимального керування функціонально-диференціальним рівнянням параболічного типу в банаховому просторі, шляхом його заміни апрксимаційною системою параболічних рівняннь без запізнення.

Ключові слова і фрази: C_0 -напівгрупа, слабка збіжність, мінімізатор, м'який розв'язок, оптимальне керування, апроксимаційна система. .

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: *perehudao@knu.ua (Перегуда О.В.)*

1 Вступ

Нехай X - банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$, яку в подальшому будемо позначати $\|\cdot\|$. Через $C_h = C([-h,0];X)$ позначимо простір X-значних, неперервних функцій $\varphi : [-h,0] \mapsto X$ з нормою

$$\|\varphi\|_C = \sup_{t\in[-h,0]} \|\varphi(t)\|,$$

де $h > 0$ - величина запізнення. Нехай $L(X,X)$ - простір лінійних обмежених операторів, що діють з X в X.

Нехай $A : X \mapsto X$ необмежений, замкнутий, лінійний оператор і $D(A)$ його область визначення, щільна в X. Також вважаємо, що A є генератором C_0 напівгрупи $S(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$ обмежених операторів. $S(t)$ є напівгрупою компактних операторів при $t > 0$.

Розглядається задача оптимального керування для нескінченновимірного функціонально-диференціального рівняння в банаховому просторі:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f_1(t,x(t),x(t-h)) + f_2(t,x(t),x(t-h))u(t), t \in [0,T], \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h,0] \end{cases} \tag{1}$$

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35R10, 35R60, 60H15..

із критерієм якості
$$J[u] = \int_0^T G(t, x(t), u(t))dt \to \inf . \qquad (2)$$
Задачі (1)-(2) ставиться у відповідність задача оптимального керування деякою системою рівнянь без запізнення (6)-(7) (див. нижче), що називається апроксимаційною.

Основним результатом роботи є встановлення варіаційних співвідношень між розв'язками вихідної задачі (1)-(2) та розв'язками апроксимаційної задачі (6)-(7). А саме, якщо m число рівнянь у системі (6), а (x^*, u^*, J^*) та (z^*_{0m}, u^*_m, J^*_m) розв'язки задач (1)-(2) та (6)-(7) відповідно, то:

1) $J^*_m \to J^*, \quad m \to \infty$,

2) по підпослідовності $u^*_{m_k} \xrightarrow{w} u^*$ в $L^p(0, T; X)$, $z^*_{0m} \to x_*$ в $C([0, T]; X)$.

Теорія оптимального керування такими рівняннями стосовно задач у нескінченновимірних просторах викладена у монографії [4], де викладені класичні питання: принцип максимуму, динамічне програмування та інше. Питання існування розв'язків задач типу (1) і більш загальних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу вивчалось в роботі [7]. В роботі [3] отримано достатні коефіцієнтні умови існування оптимальних керувань для функціонально-диференціальних рівнянь параболічного типу, а для рівнянь нейтрального типу в [6].

В данній роботі до дослідження задач оптимального керування застосовано новий підхід, що дозволяє звести дослідження задачі керування системою функціонально-диференціальних рівнянь до задачі керування рівнянням без запізнення, шляхом побудови спеціальної апроксимаційної системи.

Зазначимо, що метод дослідження функціонально-диференціальних рівнянь шляхом побудови апроксимаційної системи рівнянь без запізнення застосовувався в роботах [1], [5] при дослідженні стійкості та крайових задач у скінченновимірному випадку.

Робота складається з п'яти розділів. Перший розділ присвячений вступу. В 2 розділі ми даємо строгу постановку задачі та формулювання основного результату. Третій розділ містить деякі допоміжні результати. Доведення основного результату наведено в розділі 4. В розділі 5 ми демонструємо застосування отриманих теоретичних результатів.

2 Постановка задачі і основний результат

Стосовно задачі (1)-(2) припускаємо виконання наступних умов.

Умови на напівгрупу.

H1) Напівгрупа $S(t)$ є компактною при $t > 0$.

Тоді з Теореми 3.2 [2] випливає, що $S(t)$ є неперервною в рівномірній операторній топології для $t > 0$.

Умови на нелінійність.

A1) $f_1 : [0, T] \times X \times X \mapsto X$ є неперервне за сукупністю змінних;

$f_2 : [0, T] \times X \times X \mapsto L(X, X)$ є неперервне за сукупністю змінних;

A2) існує стала $K > 0$:
$$\|f_1(t, x, y)\| + \|f_2(t, x, y)\| \leq K(1 + \|x\| + \|y\|),$$
для довільних t, x, y з області визначення;

A3) існує стала $K > 0$:
$$\|f_1(t, x_1, y_1) - f_1(t, x_2, y_2)\| + \|f_2(t, x_1, y_1) - f_2(t, x_2, y_2)\| \leq K(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|),$$

для $t \in [0,T]$, t, x_1, x_2, y_1, y_2 з області визначення;

A4) початкова функція $\varphi : [-h, 0] \mapsto X$ є неперервною;

A5) керування $u(t)$ вважаються допустими, якщо $u \in L^p(0,T;X)$ $(p > 1)$ і $u(t) \in F$ м.с., де F - опукла і замкнена множина в X. Множину допустимих керувань позначимо U при цьому $\|u\|_p = \Big(\int_0^T \|u\|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$;

A6) Функція $G : [0,T] \times X \times X \mapsto [0, \infty)$ неперервна за сукупністю змінних та опукла по u при фіксованих x, t;

A7) існують $C_0 > 0$, $C > 0$, $\nu > 0$, такі, що для довільних x, x_1, $u \in X$, $t \in [0,T]$ маємо

$$|G(t,x,u) - G(t,x_1,u)| \le C_0\|x - x_1\|(1 + \|x\|^\nu + \|x_1\|^\nu + \|u\|^p); \tag{3}$$

$$G(t,x,u) \ge C\|u\|^p; \tag{4}$$

A8) похідна Фреше L_u неперервна за всіма змінними і існує додатні константи C_1, α такі, що

$$\|L_u(t,x,u)\|_* \le C_1(1 + \|x\|^\alpha + \|u\|^{p-1}),$$

де $\|\cdot\|_*$ - норма в спряженому просторі X^*.

Розв'язок початкової задачі (1) будемо розуміти у м'якому сенсі.

Означення 1. *Неперервну функцію* $x(t) \in X$ *назвемо м'яким розв'язком початкової задачі* (1) *на* $[0,T]$ *якщо:*

1) $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-h, 0]$;

2) $x(t) \in C([0,T], X)$;

3) $x(t)$ *задовольняє інтегральне рівняння*

$$\begin{aligned} x(t) = S(t)\varphi(0) &+ \int_0^t S(t-s)f_1(s, x(s), x(t-h))ds \\ &+ \int_0^t S(t-s)f_2\Big(s, x(s), x(t-h))u(s)ds. \end{aligned} \tag{5}$$

З роботи [9] випливає, що такий розв'язок існує і єдиний.

За задачею (1) побудуємо наступну систему еволюційних рівнянь без запізнень, яку назвемо апроксимаційною.

Зафіксуємо $m \in N$ і розіб'ємо інтервал $[-h, 0]$ точками $-\frac{h}{m}j$, $j = \overline{0,m}$ на m частин. Визначимо функції $z_j(t) \in X$ як розв'язки наступних задач Коші:

$$\begin{cases} \frac{dz_0}{dt} = Az_0 + f_1(t, z_0(t), z_m(t)) + f_2(t, z_0(t), z_m(t))u(t), \\ \frac{dz_j(t)}{dt}) = \frac{m}{h}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad t \in [0,T], \\ z_j(0) = \varphi(-\frac{hj}{m}), \quad j = \overline{0,m}. \end{cases} \tag{6}$$

Тут $z_0(t)$ - розв'язок першого рівняння розуміється у м'якому сенсі, а решта m рівнянь - у звичайному сенсі. Похідна $\frac{dz_j(t)}{dt}$ розглядається як сильна похідна за нормою простору X. Очевидно, що (6) має єдиний розв'язок.

Означення 2. *Система* (6) *називається апроксимуючою для* (1), *якщо*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|x(t - \frac{h}{m}j, u) - z_j(t,u)\| \to 0, \quad m \to \infty, \quad j = \overline{0,m}.$$

Для системи рівнянь (6) розглянемо критерії якості

$$J_m[u] = \int_0^T G(t, z_0(t), u(t))dt \to \inf . \tag{7}$$

Позначимо через $J^* = \inf\limits_{u \in U} J[u]$, $J^*_m = \inf\limits_{u \in U} J_m[u]$.

Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови H1), A1)-A8). Тоді задачі оптимального керування* (1)-(2) *і* (6)-(7) *мають розв'язки* $(x^*(t), u^*(t))$ *і* $(z^*_{0m}(t), u^*_m(t))$ *відповідно. При цьому:*

1)

$$J^*_m \to J^*, \quad m \to \infty; \tag{8}$$

2) для будь-якого $\eta > 0$ *існує* m_0 *таке, що для* $m > m_0$ *маємо*

$$\left| J^* - J[u^*_m] \right| < \eta, \tag{9}$$

тобто, оптимальне керування апрксимуючої системи є "майже оптимальним"для вихідної;

3) існує послідовність $m_k \to \infty$, $k \to \infty$, *така, що*

$$z^*_{om_k}(t) \rightrightarrows x^*(t) \tag{10}$$

рівномірно на $[0, T]$ *і* $u^*_m \overset{w}{\to} u^*$ *слабко в* $L^p(0, T)$.

Якщо при цьому задача (1)-(2) *має єдиний розв'язок, то збіжності* (9) *і* (10) *мають місце для всіх* $m \to \infty$.

3 Допоміжні твердження

В цьому розділі наведемо ряд допоміжних тверджень.

Позначимо через W множину допустимих керувань u, таких, що $\|u\|_p \leq B$ для деякої $B > 0$. Нехай $\{u_m\}$ - нескінчена послідовність керувань, така, що $u_m \in W$ для $m = 1, 2, \ldots$. $x(t, u_m)$ та $z_j(t, u_m)$ - розв'язки задач (1) та (6) відповідно. Зазначимо, що для кожного m u_m у системі (6) різні.

Теорема 2. *За виконання умов H1), A1)-A5) система* (6) *є апроксимуючою для початкової задачі* (1) *рівномірно по* $u_m \in A$, *тобто*

$$\sup_{t \in [0,T]} \|x(t - \frac{h}{m} j, u_m) - z_j(t, u_m)\| \to 0, \quad m \to \infty \tag{11}$$

рівномірно по $u_m \in W$.

Для доведення Теореми 2 необхідна наступна лема.

Лема 1. *За виконання умов Теореми 2 для розв'язку початкової задачі* (1) *справедлива нерівність*

$$\sup_{|t_1 - t_2| \leq l, t_1, t_2 \in [-h, T]} \|x(t_2, u_m) - x(t_1, u_m)\| \leq C(T, \|\varphi\|_C, h, l, B) \to 0, \quad l \to 0. \tag{12}$$

Доведення. В межах доведення $x(t,u_m)$ і $z_j(t,u_m)$ будемо позначати через $x(t)$ і $z_j(t)$ відповідно.

В силу умов H1), A2) і нерівності Гельдера отримаємо, що

$$\sup_{s\in[0,T]} \|x(s)\|^q \le C_1 + C_2(B)\int_0^t \sup_{s\in[0,T]} \|x(s)\|^q ds.$$

Отже, в силу нерівності Гронуолла отримуємо

$$\sup_{s\in[0,T]} \|x(s)\|^q \le C_3(T, \|\varphi\|_C, h, B). \tag{13}$$

рівномірно по $u_m \in W$.

Нехай $t_2 = t_1 + r, r \le l$. Розглянемо випадок $t_1 \ge 0$.

Так як напівгрупа $S(t)$ є напівгрупа класу C_0 і застосовуючи умови A2), A5), теорему Лебега про мажоровану збіжність і нерівність Гельдера, отримаємо, що

$$\sup_{|t_1-t_2|<l} \|x(t_2) - x(t_1)\|^q \to 0, \quad l \to 0.$$

Якщо ж t_1 та $t_1 + l$ належать $[-h, 0]$, то в силу означення розв'язку отримуємо, що:

$$\sup_{|t_2-t_1|\le l} \|x(t_2,u) - x(t_1,u)\| = \sup_{|t_2-t_1|\le l} \|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)\| \to 0, l \to 0$$

в силу рівномірної неперервності $\varphi(t)$ на $[-h, 0]$.

Якщо ж $t_1 \in [-h, 0]$, а $t_2 > 0$, то

$$\|x(t_2,u) - x(t_1,u)\| \le \|x(t_2,u) - \varphi(0)\| + \|\varphi(0) - x(t_1,u)\|. \tag{14}$$

Очевидно, що якщо $l \to 0$, то $t_1 \to 0$ і $t_2 \to 0$ і $\|x(t_2,u) - x(t_1,u)\| \to 0$.

Враховуючи, що усі отримані вище оцінки рівномірні по t_1, маємо доведення Леми 1. □

Перейдемо до доведення Теореми 2.

Доведення. Для будь-якого достатньо малого $\mu > 0$ покладемо

$$x_\mu(t,u) = \frac{1}{\mu}\int_t^{t+\mu} x(s)ds, \quad t \in [-h, T], \tag{15}$$

де для $t \ge T$ продовжимо функцію $x(s)$ за неперервністю сталою величиною.

Очевидно, що $x_\mu(t,u)$ є строго диференційовною і строга похідна дорівнює

$$\dot{x}_\mu(t) = \frac{1}{\mu}(x(t+\mu) - x(t)). \tag{16}$$

Неважко показати, що

$$\sup_{t\in[-h,T]} \|x(t) - x_\mu(t)\| \le C(T, \|\varphi\|_C, \mu, B) \to 0, \quad \mu \to 0 \tag{17}$$

в силу Леми 1.

Нехай $y_j(t) = x(t - \frac{h}{m}j)$ і введемо різниці $N_j(t) = \|y_j(t) - z_j(t)\|, j = \overline{0,m}$.

Розкладемо систему (6) на дві системи та представимо її розв'язок у вигляді суми

$$z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t),$$

де $z_j^{(1)}(t)$ - розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m}\dot{z}_1^{(1)} = x(t) - z_1^{(1)}(t), \\ \frac{h}{m}\dot{z}_j^{(1)} = z_{j-1}^{(1)}(t) - z_j^{(1)}(t), \quad j = \overline{1,m}, \\ z_j^{(1)}(0) = x(-\frac{hj}{m}), \end{cases} \tag{18}$$

а $z_j^{(2)}(t)$ - відповідний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m}\dot{z}_1^{(2)} = -z_1^{(2)}(t) + (z_0(t) - x(t)), \\ \frac{h}{m}\dot{z}_j^{(2)} = z_{j-1}^{(2)}(t) - z_j^{(2)}(t), \quad j = \overline{1,m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]} \|x(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)\| \le \sup_{t\in[0,T]} \|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\| + \sup_{t\in[0,T]} \|z_j^{(2)}(t)\|. \tag{20}$$

На наступному кроці оцінимо перший доданок у (20). Покажемо, що виконується нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\| \le C_1(T, \|\varphi\|, h, \frac{h}{m}, B) \to 0, m \to 0. \tag{21}$$

Подамо $x(t)$ у вигляді

$$x(t) = x_\mu(t) + x(t) - x_\mu(t) = x_\mu(t) - x_1(t),$$

$$y_j(t) = y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t).$$

Тут $y_j^{(1)}(t) = x_\mu(t - \frac{h}{m}j)$, а $y_j^{(2)}(t) = x_1(t - \frac{h}{m}j)$.

Тоді система (18) для $z_j^{(1)}(t) = \varphi_j(t) + v_j(t)$ розкладається на дві підсистеми, а саме: на підсистему

$$\begin{cases} \frac{h}{m}\dot{\varphi}_1 = -\varphi_1 + x_\mu, \\ \frac{h}{m}\dot{\varphi}_j = -\varphi_{j-1} - \varphi_j, \quad j = \overline{2,m}, \\ \varphi_j(0) = y_j^{(1)}(0) = x_\mu(-\frac{h}{m}j), \end{cases} \tag{22}$$

з відповідним розв'язком задачі Коші $\varphi_j(t,u)$ і підсистему

$$\begin{cases} \frac{h}{m}\dot{v}_1 = -v_1 + x_1, \\ \frac{h}{m}\dot{v}_j = v_{j-1} - v_j, \quad j = \overline{2,m}, \\ v_j(0) = y_j^{(2)}(0) = x_1(-\frac{hj}{m}) - x_\mu(-\frac{hj}{m}). \end{cases} \tag{23}$$

з відповідним розв'язком задачі Коші $v_j(t,u)$.

Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\| &\le \sup_{t\in[0,T]} \|y_j^{(1)}(t) - \varphi_j(t)\| \\ &+ \sup_{t\in[0,T]} \|y_j^{(2)}(t)\| + \sup_{t\in[0,T]} \|v_j(t)\|. \end{aligned} \tag{24}$$

Розглянемо кожен доданок у (24).

Оцінимо перший доданок цієї нерівності. Проведемо оцінки при $j = 1$.

Для цього позначимо $\varepsilon_1(t) = \varphi_1(t) - y_1^{(1)}(t)$, при цьому $\varepsilon_1(0) = 0$.

Таким чином для $\varepsilon_1(t)$ отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \psi(t), \\ \varepsilon_1(0) = 0, \end{cases} \tag{25}$$

де $\psi(t) = \frac{h}{m}(x_\mu - y_1^{(1)}) - \dot{y}_1^{(1)}$.

Для оцінки $\psi(t)$ використаємо властивість сильної диференційовності функції $x_\mu(t)$ і отримаємо, що для будь якого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\psi(t, u_m)\| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Таким чином для $\varepsilon_1(t)$ справедлива нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\varepsilon_1(t)\| \le \frac{h}{m} C(T, \|\varphi\|_C, \frac{h}{m}, B).$$

Далі оцінимо $y_1^{(2)}(t)$. З (17) маємо, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \|y_1^{(2)}(t)\| = \sup_{t\in[0,T]} \|x(t - \frac{h}{m}) - x_\mu(t - \frac{h}{m})\| \le C(T, \|\varphi\|_C, \mu, B|).$$

Для оцінки $v_1(t)$ у системі (23) маємо:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v_1(t)\| \le C(T, \|\varphi\|, \mu, B).$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]} \|y_1(t) - z_1^{(1)}(t)\| \le \frac{h}{m\mu} C(T, \|\varphi\|, \frac{h}{m}, B) + C(T, \|\varphi\|, \mu, B).$$

Провівши аналогічну оцінку при $j = 2$, маємо нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\| \le C_1(T, \|\varphi\|, h, \frac{h}{m}, B) \to 0, \quad m \to \infty.$$

Таким чином доведено виконання нерівності (21).

Для оцінки другого доданку в (20) застосуємо метод варіації сталих. Отримаємо, що

$$\|z_j^{(2)}(t)\| \le \sup_{t\in[0,T]} N_0(t).$$

Для оцінки $\|z_0(t) - x(t)\|$ скористаємося умовою A3) і нерівністю Гельдера.

Застосовуючи лему Гронуолла до оцінки різниці $\|z_0(t) - x(t)\|^q$, отримуємо, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z_0(t) - x(t)\|^q \le C_2^*(\frac{h}{m}) \exp(C_1^* T) \to 0, \quad m \to \infty,$$

що і завершує доведення Теореми 2. $\square$

Лема 2. *Нехай виконуються умови H1) та A1) - A5). Тоді якщо послідовність* $u_m \overset{w}{\to} u_0$ *в* $L^p(0,T)$ *при* $m \to \infty$, *то розв'язок задачі Коші* (1) *з* $u(t) = u_m(t)$ *збігається рівномірно на* $[0,T]$ *до розв'язку задачі Коші* (1) *з керуванням* $u(t) = u_0(t)$, *тобто*

$$x(t,u_m) \rightrightarrows x(t,u_0), \quad m \to \infty. \tag{26}$$

Доведення. Відзначимо, що згідно (13), маємо рівномірну обмеженість розв'язків $x(t,u_m)$ на відрізку $[0,T]$. Для спрощення викладок позначимо $x_m(t) = x(t,u_m)$. Лема 1 гарантує рівностепеневу неперервність сім'ї $\{x_m(t)\}$ на $[0,T]$.

Застосовуючи умови A2), A5) і наслідок [[8], Prop. 8.1] отримаємо компактність $\{x(t,u_m)\}$ при кожному $t \in [0,T]$ і можемо виділити збіжну підпослідовність $x_{m_k}(t)$, що збігається до функції $x_0(t)$ в $C([0,T],X)$.

Здійснивши граничний перехід при $m_k \to \infty$, отримаємо, що

$$\begin{aligned} x_0(t) &= S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s)f_1(s,x_0(s),x_0(s-h))ds \\ &+ \int_0^t S(t-s)f_2(s,x_0(s),x_0(s-h))ds. \end{aligned} \tag{27}$$

Так як розв'язок (27) єдиний, то вся послідовність x_m прямує до x_0.

Лема 3. *Нехай виконуються умови A1)-A5). Тоді якщо послідовність* $u_m \overset{w}{\to} u_0$ *в* $L^p(0,T;X)$ *при* $m \to \infty$, *то розв'язок задачі Коші* (6) $z_0(t,u_m)$ *з* $u(t) = u_m(t)$ *збігається рівномірно на* $[0,T]$ *до розв'язку задачі Коші* $x(t,u_0)$ *з керуванням* $u(t) = u_0(t)$, *тобто*

$$z_0(t,u_m) \rightrightarrows x(t,u_0), \quad m \to \infty.$$

Доведення Леми 3 випливає з результату твердження Теореми 2 та Леми 1. □

4 Доведення основного результату

Існування оптимального розв'язку (z^*_{0m}, u^*_m) для кожного m здійснюється стандартним способом з виділенням слабко збіжної мінімізуючої послідовності $u^{(n)}_m(t)$ до $u^*_m(t)$ з наступним граничним переходом. При цьому використовуються умови A6)-A8).

Доведення. Належність u^*_m до множини F для кожного $t \in [0,T]$ випливає з леми Мазура, а також із опуклості і замкненості множини F.

Існування оптимальної пари $(x^*(t), u^*(t))$ задачі (1)-(2) випливає, наприклад з [3].

Отже,

$$J^*_m = J_m(u^*_m) = \int_0^T G(t, z^*_{0m}(t), u^*_m(t))dt.$$

Нехай $\overline{u}$- довільний сталий вектор з U. Очевидно, що керування $u(t) \equiv \overline{u}$ є допустимим для задачі (6)-(7). Тоді

$$J^*_m = J_m(u^*_m) \le J_m(\overline{u}). \tag{28}$$

Отже, для довільного m маємо:

$$\int_0^T G(t, z^*_{0m}(t), u^*_m(t))dt \le \int_0^T G(t, z_{0m}(t,\overline{u}), \overline{u}(t))dt,$$

де $z_{0m}(t,\overline{u})$ - розв'язок першого рівняння в (6) з керуванням $\overline{u}$.

Але з Теореми 2 маємо, що

$$\sup_{t\in[0,T]} |z_{0m}(t,\overline{u}) - x(t,\overline{u})| \to 0, m \to \infty.$$

Тоді з (3) отримуємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big| G(t, z_{0m}(t,\overline{u}), \overline{u}) - G(t, x(t,\overline{u}), \overline{u}) \Big| \to 0, m \to \infty.$$

Отже, існує константа $\gamma > 0$, що не залежить від m така, що

$$\int_0^T G(t, z^*_{0m}(t), u^*_m) dt \leq \gamma.$$

Тоді з (3) маємо

$$\|u^*_m\|^p_p \leq \frac{\gamma}{C}. \tag{29}$$

Тоді множина u^*_m є слабко компактною в $L^p(0,T,X)$.

Нехай $u^*_{m_n}$ - підпослідовність оптимальних керувань, яка слабко збіжна до u_0. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що u^*_m є послідовністю оптимальних керувань, що слабко збіжна до $u_0(t)$. З леми Мазура випливає, що $u_0(t) \in U$ при $t \in [0,T]$, а отже $u_0(t)$ - допустиме керування.

Нехай $x_0(t)$ - розв'язок задачі Коші (1)-(2) з керуванням $u(t) = u_0(t)$. З Леми 2 випливає, що розв'язок задачі Коші (6)-(7) $z_{0m}(t)$ рівномірно за $t \in [0,T]$ збігається до $x(t,u_0)$ при $m \to \infty$.

Доведемо, що $J^*_m \to J^*$ при $m \to \infty$. З (3) маємо, що при $m \to \infty$

$$\Big| J_m(u^*) - J(u^*) \Big| \leq \int_0^T \Big| G(t, z_{0m}(t,u^*), u^*) - G(t, x^*(t,u^*), u^*)) \Big| dt \to 0.$$

Отже, для довільного $\eta > 0$ існує m_0 таке, що якщо $m > m_0$, то

$$\Big| J_m(u^*) - J(u^*) \Big| < \eta. \tag{30}$$

Звідки маємо, що для $m > m_0$.

$$J_m(u^*) < J(u^*) + \eta. \tag{31}$$

З іншої сторони маємо, що

$$J^* \leq J(u^*_m) = J^*_m + J(u^*_m) - J_m(u^*_m). \tag{32}$$

Розглянемо наступний вираз

$$\begin{aligned} \Big| J_m(u^*_m) - J(u^*_m) \Big| &= \Big| \int_0^T G(t, z^*_{0m}(t,u^*_m), u^*_m) dt - \int_0^T G(t, x(t,u^*_m), u^*_m) dt \Big| \\ &\leq \int_0^T \Big| G(t, z^*_{0m}(t,u^*_m), u^*_m) dt - G(t, x(t,u^*_m), u^*_m) \Big| dt \to 0, m \to \infty \end{aligned} \tag{33}$$

в наслідок Теореми 2, умови (3) та (29).

Отже, для довільного $\eta > 0$ з (33) випливає існування m_0 такого, що при $m > m_0$ отримуємо

$$\Big| J_m(u^*_m) - J(u^*_m) \Big| < \eta. \tag{34}$$

Тоді $J^* \leq J_m^* + \eta$. Тому з урахуванням нерівності (31) для $m > m_0$ маємо

$$\left| J_m^* - J^* \right| < \eta. \tag{35}$$

Отже, отримуємо

$$J_m^* \to J^*, \qquad m \to \infty, \tag{36}$$

що доводить твердження 1 Теореми 1.

Доведемо твердження 2). Ми маємо, що

$$\left| J^* - J(u_m^*) \right| \leq \left| J_m^* - J^* \right| + \left| J_m(u_m^*) - J(u_m^*) \right|.$$

З (34) і (36) отримуємо тепер твердження 2) теореми 1.

Для доведення твердження 3) покажемо, що $(x_0(t), u_0(t))$ - оптимальний розв'язок задачі (1) - (2).

Так як $J_m^* = \int_0^T G(t, z_{0m}^*(t), u_m^*(t))dt$, то в силу (36), маємо

$$J_0^* = \lim_{n\to\infty} inf \int_0^T G(t, z_{0m}^*(t), u_m^*)dt. \tag{37}$$

Покажемо інтегровність $G(t, x_0(t), u_m^*)$. Нехай a є константа і $a \in U$. Використовуючи умову A8), отримуємо

$$\begin{aligned} &|G(t, x_0(t), u_m^*) - G(t, x_0(t), a)| \\ &\leq \sup_{\lambda\in(0,1)} \|L_u(t, x_0(t), a + \lambda(u_m^*(t) - a))\|_* \|u_m^*(t) - a\|. \end{aligned}$$

Тоді, знову враховуючи умову A8), маємо

$$\begin{aligned} &G(t, x_0(t), u_m^*(t)) \leq G(t, x_0(t), a) \\ &C_1(1 + \|x_0(t)\|^\alpha + \|u_m^*(t) - a\|^{p-1})\|u_m^*(t) - a\|. \end{aligned}$$

З умови A8) випливає інтегрованість $G(t, x_0(t), u_m^*)$.

Нехай χ_R буде індикаторна функція множини $\{t \in [0, T] : \|u_0(t)\| \leq R\}$.

З опуклості $G(t, x, u)$ по u і гладкості, отримаємо

$$\begin{aligned} &\int_0^T G(t, x_0(t), u_m^*(t))\chi_R(t)dt \\ &\geq \int_0^T G(t, x_0(t), u_0(t))\chi_R(t)dt + \int_0^T G_u(t, x_0(t), (u_m^*(t) - u_0(t)))\chi_R(t)dt. \end{aligned} \tag{38}$$

Так як другий вираз в (38) прямує до нуля, то маємо

$$\lim_{n\to\infty} inf \int_0^T G(t, x_0(t), u_m^*(t))\chi_R(t)dt \geq \int_0^T G(t, x_0(t), u_m^*(t))\chi_R(t)dt. \tag{39}$$

З того, що $G \geq 0$, $\chi_R \leq 1$, $\chi_R(t) \to 1$, $R \to \infty$ і (39), отримуємо

$$\int_0^T G(t, x_0(t), u_0(t))dt \leq \lim_{m\to\infty} \inf \int_0^T G(t, x_0(t), u_m^*(t))dt. \tag{40}$$

Отже, пара $(x_0(t), u_0(t))$ є оптимальною.

Якщо задача (1) - (2) має єдиний розв'язок, то з доведенного вище маємо, що довільна збіжна послідовність $(z_{0m}^*(t), u_m^*(t))$ збігається до однієї і тієї ж границі. Це доводить останнє твердження Теореми 1. $\square$

5 Приклад застосування

Нехай Q - обмежена область в R^d з ∂Q, що задовольняє умову Ляпунова. В заданій області розглянемо еліптичний оператор A

$$Ax = A(y)x = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{y_j}(a_{ij}(y))\partial_{y_i}(x(y)) = div(a(y), \nabla x(y)),$$

де $a_{ij}(y)$ є неперервними за Гельдером з показником степеня $\beta \in (0,1)$, симетричні та задовольняють умову еліптичності $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(y)\eta_i\eta_j \geq C_0|\eta|^2, \eta \in R^d$, для де якої $C_0 > 0$, де $|\cdot|$ евклідова норма у R^d.

Позначимо $X = L^2(D) = H$ з нормою $\|x\|^2 = \int_Q x^2(y)dy$, $D(A) = H^2(Q) \bigcap H_0^1(Q)$.

Розглянемо задачу оптимального керування

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x(t,y)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{y_j}((a_{ij)}\partial_{y_i} x(t,y)) + f_1(t, x(t,y), x(t-h,y) \\
&+ f_2(t, x(t,y), x(t-h,y))u(t,y), \\
&x(t,y) = \varphi(t,y), t \in [-h,0], y \in Q, \\
&x(t,y) = 0, y \in \partial Q, t \in [0,T),
\end{aligned} \tag{41}$$

$$J[u] = \int_0^T \Big[\Big(\int_Q x^2(t,y)dy\Big)^{\frac{p}{2}} + \Big(\int_Q u^2(t,y)dy\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]dt \to inf, \tag{42}$$

де $p \geq 2$, $p \in Z$. Допустимими керуваннями є функції $u \in L^2(Q_T)$, $Q_T = (0,T) \times Q$, такі, що $u(t,\cdot) \in F$ м.с. для $t \in (0,T)$, F є опуклою та замкненою множиною в $L^2(Q)$.

Дійснозначні Функції $f_1 : [0,T] \times R^1 \times R^1 \mapsto R^1$, $f_2 : [0,T] \times R^1 \times R^1 \mapsto R^1$ є неперервними за сукупністю аргументів та задовольняють за другою і третьою змінною глобальну умову Ліпшиця і умову лінійного росту. Очевидно оператор A є генератором компактної напівгрупи операторів $S(t) : X \mapsto X$.

Відповідна апроксимаційна система рівнянь без запізнення для (41) має вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z_0(t,y)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{y_j}((a_{ij)}\partial_{y_i} z_0(t,y)) + f_1(t, z_0(t,y), z_m(t,y)) \\
&+ f_2(t, z_0(t,y), z_m(t,y))u(t,y), \\
&\frac{\partial z_j(t,y)}{\partial t} = \frac{m}{h}(z_{j-1}(t,y) - z_j(t,y)); \\
&z_j(0,y) = \varphi(\frac{-ht}{m}, y), \quad y \in Q; \\
&z_j(t,y) = 0, \quad y \in \partial Q, \quad j = \overline{0,m}.
\end{aligned}$$

Неважко бачити, що умови H1), A1-A8) для рівняння (41) виконані, а тому для задачі (41)-(42) і відповідної апрксимуючої системи справедливе твердження Теореми 1.

Список літератури

[1] I. Cherevko and L. Piddubna. Approximations of differential difference equations and calculation of nonasymptotic roots of quasipolinomial //Revue d'Analise numèrique et de thèorie de L'approximation,1999 T.28, № 1, pp.15-21.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[3] A. Latysh, O. Kichmarenko. Optimal control of functional-differential equations of parabolic type in Banach spaces // Journal of Math. Scien., 2024, V.278, pp. 1034-1054.

[4] X. Li, J. Yong. Optimal control theory for infinite dimentional. Birkhäuser, 2012.

[5] O.V. Matvii, I.M. Cherevko. On approximation of systems with delay and their stability // Nonlinear Oscilations, 2004, T.7, № 2, pp.207-215.

[6] O.V. Perehuda, O.M. Stanzhytskiy, T.V.Klimchuk, M.N.Ospanov. Optimal Control for Functional-Differential Equation of Neutral Type in Banach Spaces // Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications, 33(1):182-207, 2025.

[7] Perehuda O.V., Stanzhytsky A.O., Martynyuk O.V. On existence and continuation of mild solutions of functional-differential equations of neutral type in Banach spaces // Carpathian Math. Publ. 2025,17(2), pp. 631-646.

[8] G. Da Prato and J. Zabczyk. Ergodicity for Infinite-Dimensional Systems. Cambridge University Press. Cambridge (1992).

[9] A. Stanzhytskyi, O. Misiats, O. Stanzhytskyi. Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non-lipschts coefficients // Evolution Equations and Control Theory, 2022, Vol.11, №5, pp. 1929-1953.

Надійшло 05.01.2026

Perehuda O.V. *Approximation of optimal control for functional differential equations by optimal control of equations without delay in infinite-dimensional spaces*, Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 112–123.

This paper studies an optimal control problem for a parabolic-type functional differential equation in a Banach space. The system with delay is approximated by delay-free parabolic equations. Convergence of the approximating solutions and optimal controls is established.