

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича  
Факультет математики та інформатики  
Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій



“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Деканка факультету  
математики та інформатики

Ольга Мартинюк

“25” червня 2025 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА**  
**навчальної дисципліни**

Математичне моделювання природничих процесів

(назва навчальної дисципліни)

Обов'язкова навчальна дисципліна

(вказати: обов'язкова / вибіркова)

Освітньо-професійна програма Технології програмування та комп'ютерне моделювання

Спеціальність 113 – Прикладна математика

Галузь знань 11 – Математика та статистика

Рівень вищої освіти перший (бакалаврський)

Факультет математики та інформатики

Мова навчання українська

Чернівці – 2025

Робоча програма із обов'язкової навчальної дисципліни  
**«Математичне моделювання природничих процесів»**  
складена відповідно до освітньо-професійної програми «Технології  
програмування та комп'ютерне моделювання»

**Розробник:** Бігун Ярослав Йосипович, завідувач кафедри ПМІТ, д-р фіз.-  
мат. наук, професор


**Викладачі**, що забезпечує читання даної навчальної дисципліни: Бігун  
Ярослав Йосипович, завідувач кафедри ПМІТ, д-р фіз.-мат. наук, професор,  
Українець Олег Захарович, асистент

(П.І.Б. викладача (ів), посада, науковий ступінь, вчене звання)

Погоджено з гарантом ОП  Василь МАЦЕНКО

**Затверджено** на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних  
технологій

Протокол № 13 від “24” червня 2025 року

Завідувач кафедри  Ярослав БІГУН  
(підпис) (прізвище та ініціали)

Схвалено методичною радою факультету математики та інформатики

Протокол № 13 від “25” червня 2025 року

Голова методичної ради

факультету математики та інформатики

 Віра СІКОРА  
(підпис) (прізвище та ініціали)

©Кафедра прикладної  
математики та інформаційних  
технологій, 2025 рік  
©Бігун Я.Й., 2025 рік

## 1. Мета та завдання навчальної дисципліни

**Мета курсу:** освоєння нового класу диференціальних рівнянь та застосування їх для математичного і комп'ютерного моделювання прикладних задач в екології, імунології, епідеміології та медицині.

**Завдання курсу є такі:**

- вивчення студентами базових понять теорії і методів диференціально-різницевого рівняння;
- оволодіння методами побудови математичних моделей ізольованих популяцій і взаємодії популяцій із фактором запізнення;
- розуміння процесу імунної відповіді при інфекційних захворюваннях та побудови відповідної математичної моделі;
- розуміння побудови математичних моделей поширення епідемій із фактором запізнення;
- дослідження математичних моделей (існування і додатність розв'язку, стійкість станів рівноваги);
- вміння комп'ютерного моделювання розглянутих математичних моделей в екології, імунології, епідеміології.

## 2. Результати навчання

У результаті вивчення дисципліни студент має набути таких **компетентностей:**

- **знати:** елементи теорії диференціально-різницевого рівняння (ДРР);
- критерії стійкості розв'язків лінійних та нелінійних ДРР;
- методи побудови математичних моделей з урахуванням ефекту запізнення в екології, імунології, епідеміології, медицині;
- методи числового розв'язування ДРР та їх програмну реалізацію.

**вміти:**

- формулювати початкову задачу для ДРР;
- застосовувати метод кроків для розв'язування ДРР із сталим запізненням;
- знаходити положення рівноваги математичних моделей та досліджувати їх на стійкість;
- будувати й досліджувати моделі ізольованих популяцій та взаємодії популяцій в екології із врахуванням післядії;
- здійснювати комп'ютерне моделювання процесів імунної відповіді організму людини при інфекційних захворюваннях;

- аналізувати моделі поширення епідемій з урахуванням втрати імунітету та інкубаційного періоду.

Під час вивчення дисципліни, відповідно до освітньо-професійної програми, формуються такі **загальні компетентності**:

ЗК1. Вміння виявляти, ставити та вирішувати проблеми.

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях. ЗК07.

Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

ЗК08. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК09. Здатність спілкуватися з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами з інших галузей знань/видів економічної діяльності).

#### **Фахові компетентності:**

ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

ФК06. Здатність розв'язувати професійні задачі за допомогою комп'ютерної техніки, комп'ютерних мереж та Інтернету, в середовищі сучасних операційних систем, з використанням стандартних офісних додатків.

ФК09. Здатність до проведення математичного і комп'ютерного моделювання, аналізу та обробки даних, обчислювального експерименту, розв'язання формалізованих задач за допомогою спеціалізованих програмних засобів. ФК12. Здатність до пошуку, систематичного вивчення та аналізу науковотехнічної інформації, вітчизняного й закордонного досвіду, пов'язаного із застосуванням математичних методів для дослідження різноманітних процесів, явищ та систем.

ФК15. Здатність брати участь у складанні наукових звітів із виконаних науково-дослідних робіт та у впровадженні результатів проведених досліджень і розробок.

#### **Отримуються наступні програмні результати навчання:**

ПРН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.

ПРН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.

ПРН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та

чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.

ПРН05. Уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми, пов'язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв'язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв'язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень.

ПРН06. Володіти основними методами розробки дискретних і неперервних математичних моделей об'єктів та процесів, аналітичного дослідження цих моделей на предмет існування та єдиності розв'язку.

ПРН12. Розв'язувати окремі інженерні задачі та/або задачі, що виникають принаймні в одній предметній галузі: в соціології, економіці, екології та медицині.

ПРН13. Використовувати в практичній роботі спеціалізовані програмні продукти та програмні системи комп'ютерної математики.

### 3. Опис навчальної дисципліни

#### 3.1. Загальна інформація

Форма навчання	Рік підготовки	Семестр	Кількість		Кількість годин						Вид підсумкового контролю
			кредитів	годин	лекції	практичні	семінарські	лабораторні	самостійна робота	індивідуальні завдання	
Денна	4	8	5	150	22	-	-	22	100	6	екзамен

#### 3.2. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	с.р.	
1	2	3	4	5	6	7
Змістовний модуль 1. Елементи та теорії диференціальних рівнянь із запізненням аргументу						
Тема 1. Основна початкова задача,						

класифікація і приклади диференціальних рівнянь із запізненням аргументу (ДРЗА)	16	2				14
Тема 2. Аналітичний і числові методи розв'язування ДРЗА	16	2		2		12
Тема 3. Стійкість розв'язків лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь із сталим запізненням	18	2		2	2	12
Разом за змістовним модулем 1	50	6		4	2	38
<b>Змістовний модуль 2. Математичні моделі із фактором запізнення в екології</b>						
Тема 4. Модель Хатчінсона та її узагальнення	20	4		4	2	10
Тема 5. Моделі взаємодії популяцій із факторами запізнення	14	2		2	2	8
Разом за змістовним модулем 2	34	6		6	4	18
<b>Змістовний модуль 3. Математичне моделювання імунної відповіді при інфекційних захворюваннях</b>						
Тема 6. Механізми і фактори імунної відповіді при інфекційному захворюванні	8	2		2		4
Тема 7. Математична модель імунної відповіді при інфекційному захворюванні	12	2				10
Тема 8. Стани тематична та їх стійкість в моделі імунної відповіді	12	2				10
Тема 9. Модель імунної відповіді з урахуванням екологічного фактору	8	2			2	4
Разом за змістовним модулем 3	40	8		2	2	28
<b>Змістовний модуль 4. Математичні моделі із запізненням в епідеміології, медицині, небесній механіці</b>						
Тема 10. Механізми і фактори імунної відповіді при інфекційному захворюванні	16	2		4		10
Тема 11. Математична модель імунної відповіді при інфекційному захворюванні	14	2		2		10
Тема 12. Стани тематична та їх стійкість в моделі імунної відповіді	10	2				8
Разом за змістовним модулем 3	40	6		6		28

<b>Усього годин за семестр</b>	150	22		22	6	100
--------------------------------	-----	----	--	----	---	-----

### 3.3. Теми семінарських занять

Семінарські заняття не передбачені навчальним планом

### 3.4. Теми практичних занять

Практичні заняття не передбачені навчальним планом

### 3.5. Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Математичні моделі динаміки ізольованої популяції та взаємодії популяцій із запізненням розвитку	8
2	Математичне моделювання імунної відповіді при інфекційних захворюваннях	6
3	Математичне моделювання поширення епідемій із фактором запізнення	6
4	Моделювання кровоутворення. Модель Маккея-Гласса	2
	Разом	22

### 3.6. Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання видаються студентам на лабораторних роботах та контрольних робіт за змістовими модулями навчальної дисципліни.

1. Програмна реалізація математичної моделі імунної відповіді при біінфекції.
2. Математичне моделювання епідемії грипу.
3. Математичне моделювання гепатиту С.
4. Програмна реалізація моделі кровоутворення Маккея-Гласса.  
<https://demonstrations.wolfram.com/MackeyGlassEquation/>
5. Дослідження стійкості хронічної форми захворювання в моделі імунної відповіді.
6. Вплив фактору запізнення на динаміку взаємодії популяцій при конкуренції.

### 3.7. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин

1	Опрацювання матеріалу теми 1. Початкова задача для диференціальних рівняння із змінним запізненням аргументу та рівнянь нейтрального типу. Числові методи розв'язування ДРР в комп'ютерних системах.	14
2	Опрацювання матеріалу теми 2. Коливні властивості розв'язку рівняння Хатчінсона. Модель Хатчінсона із двома запізненнями.	12
3	Опрацювання матеріалу теми 3. Модель Колесова із групами хижаків і жертв.	10
4	Опрацювання матеріалу теми 4. Стійкість хронічної форми захворювання. Математичне моделювання імунної відповіді із впливом температурної реакції. Математичне моделювання імунної відповіді при біінфекції.	24
5	Опрацювання матеріалу теми 5. Математичні моделі епідемій SIR і SEIR із врахуванням запізнення (втрати імунітету, інкубаційний період та ін.). Фазові портрети та їх інтерпретація	22
6	Математичні моделі розвитку епідемії коронавірусу COVID-19.	2
7	Моделювання кровоутворення. Модель Маккея-Гласса. Стаціонарні та періодичні розв'язки моделі.	6
8	Ознайомлення з математичними моделями в небесній механіці із врахуванням запізнення поширення гравітації.	10
	Усього	100

#### **4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

Оцінювання знань студентів здійснюється на основі результатів поточного, модульного та підсумкового контролю за програмним матеріалом навчальної дисципліни, засвоєння якого перевіряється пропонованими видами контролю.

Поточний контроль здійснюється під час проведення лабораторних занять і перевірки самостійної роботи студентів, а також під час читання лекцій. Модульний контроль здійснюється за результатами виконаних модульних контрольних робіт та перевірки лабораторних робіт. Завданнями поточного та модульного контролю є перевірка рівня розуміння та засвоєння лекційного матеріалу, набуття практичних навичок і досвіду виконання

індивідуальних і комплексних задач. Максимальна оцінка кожного з індивідуальних завдань – 5 балів, не більше двох завдань для студента.

Завданням підсумкового контролю (екзамену) є перевірка розуміння студентом програмного матеріалу в цілому, здатності успішно розв'язувати поставлені практичні задачі та комплексно використовувати отримані знання.

Оцінювання знань здійснюється за 100-бальною шкалою. Результати роботи впродовж навчального семестру оцінюються в ході поточного та модульного контролю на інтервалі оцінок від 0 до 60 балів, а результати підсумкового контролю (екзамену) оцінюються максимум у 40 балів.

Загальна **підсумкова оцінка** з навчальної дисципліни виставляється за загальною сумою балів поточного та модульного.

### Розподіл балів з навчальної дисципліни

Модульний контроль											Екза- мен	Всього	
Модуль 1			Модуль 2		Модуль 3				Модуль 4			40	100
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12		
5	5	5	6	4	2	7	7	4	6	6	3		

Загальна підсумкова оцінка з навчальної дисципліни виставляється за загальною сумою балів, набраних студентом, згідно з наступною таблицею:

### Шкала оцінювання: національна та ЄКТС

Оцінка за національною шкалою	Оцінка за шкалою ЄКТС	
	Оцінка (бали)	Пояснення за розширеною шкалою
<b>Відмінно</b>	A (90-100)	відмінно
<b>Добре</b>	B (80-89)	дуже добре
	C (70-79)	добре
<b>Задовільно</b>	D (60-69)	задовільно
	E (50-59)	достатньо
<b>Незадовільно</b>	FX (35-49)	(незадовільно) з можливістю повторного складання
	F (1-34)	(незадовільно) з обов'язковим самостійним опрацюванням освітнього компоненту до перескладання

## 5. ЗАСОБИ ОЦІНЮВАННЯ

Засобами оцінювання є:

- поточні опитування;
- модульні контрольні роботи;
- лабораторні роботи;
- індивідуальні завдання;
- підсумковий контроль є екзамен, білет містить 2 теоретичних і 2 практичне завдання.

## 6. ФОРМИ ПОТОЧНОГО ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ

Формами поточного контролю є:

- перевірка виконання домашніх завдань;
- оцінки за усні поточні опитування;
- перевірка письмових модульних контрольних робіт;
- перевірка виконаних лабораторних робіт; • перевірка виконаних індивідуальних завдань.

.Формою підсумкового контролю є письмовий екзамен із обговоренням й аналізом виконаних у білеті завдань.

**Академічна доброчесність:** Роботи студентів мають бути їх самостійними та оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування, втручання в роботу інших студентів є прикладами академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в практичній (письмовій) роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від обсягу плагіату.

**Відвідання занять** є важливою складовою навчання. Пропуски занять мають бути обґрунтованими. Студенти зобов'язані дотримуватися встановлених термінів виконання усіх видів робіт, передбачених програмою навчального курсу.

**Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем в освітніх цілях без права копіювання. Студенти заохочуються до використання інформаційних джерел, відкритих для доступу і яких немає серед рекомендованих.

## 7. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

**Основна**

1. Регулярно і сингулярно збудені диференціально-функціональні рівняння / Фодчук В.І., Бігун Я.Й., Клевчук І.І. та ін. Київ: Ін-т математики АН України, 1996. 210 с.
2. Hal Smith An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. Springer Science+Business Media, 2011. 172 p.
3. Bellen A., Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations/ Clarendon Press. Oxford, 2005. 395 p.
4. Marchuk G.I. Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases. Springer-Science+Business Media, 1997. 350 с.

#### **Додаткова**

1. Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 528 p.
2. Lakshmanan M., Senthilkumar D.V. Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010. 313 p.
3. Murray E.D. Mathematical Biology: I. An Introduction. Springer, 2002. 551 p.
4. Thomas Erneux Applied Delay Differential Equations. Springer, 2009. 116 p.
5. Ляшенко І.М., Коробова М.Д., Столяр Л.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів. Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006. 304 с.
6. Бігун Я.Й. Числові методи: навч. посібник. Чернівці: Рута, 2019. 436 с.  
[https://drive.google.com/drive/folders/1\\_A\\_Qzr5b2v9Y9ZzsPyR\\_fNDtCmE8klX](https://drive.google.com/drive/folders/1_A_Qzr5b2v9Y9ZzsPyR_fNDtCmE8klX)
7. Маценко В.Г. Математичне моделювання: навч. посібник. Чернівці: Чернівецький національний університет, 2013. 519 с.
8. Jerome K. Percus Mathematical methods in immunology. American Mathematical Society, 2012. 116 p.
9. Thomas Erneux Applied Delay Differential Equations. Springer, 2009. 116 p.
10. Слюсарчук В.Ю. Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації. Нелінійні коливання, 2021. Т.21. №21. С.238-261.
11. Bihun Ya.I, Ukrainets O.Z. Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. Acta et Coomentationes. Exact and Natural Sciences, 2024. Vol. 4(11). P. 11-21.
12. Constantin Corduneanu, Yizeng Li, Mehran Mahdavi. Functional Differential Equations: Advances and Applications: John Wiley and Sons, 2016. 368 p.

### **13. Зарахування результатів неформальної освіти**

Можуть бути зараховані з відповідною оцінкою окремі теми або модулі дисципліни «Математичне моделювання природничих процесів», які студент успішно пройшов на освітніх платформах або виконав індивідуальне завдання.

#### 14. ПОЛІТИКА ЩОДО АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ

Дотримання політики щодо академічної доброчесності учасниками освітнього процесу при вивченні навчальної дисципліни регламентовано такими документами:

- ✓ Етичний кодекс Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

<https://www.chnu.edu.ua/universytet/normatyvni-dokumenty/etychnyikodekschernivetskoho-natsionalnoho-universytetu-imeni-yuriia-fedkovycha>

- ✓ Положення про виявлення та запобігання академічного плагіату у Чернівецькому національному університету імені Юрія Федьковича»

<https://www.chnu.edu.ua/universytet/normatyvni-dokumenty/polozhenniaprovyavlennia-ta-zapobihannia-akademichnomu-plahiatu-u-chernivetskomunatsionalnomu-universyteti-imeni-yuriia-fedkovycha/>