DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.02

Капустян О.В., Краснєєва А.О.

РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО АТРАКТОРУ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЩОДО ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

В роботі доводиться робастна оцінка типу Asymptotic Gain, що характеризує відхилення розв'язків нелінійної параболічної задачі зі збуреннями на межі просторової області від глобального атрактору незбуреної системи в термінах величини збурень.

Ключові слова і фрази: Диференціальне рівняння, параболічне рівняння, атрактор, стійкість, збурення.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: *kapustyan@knu.ua (Капустян О.В.), krasnyeyeva@gmail.com (Краснєєва А.О.)*

Вступ

Добре відомо, що глобально асимптотично стійкий стан рівноваги лінійної системи є робастним в тому сенсі, що для будь-яких обмежених збурень розв'язок з часом опиняється в околі точки рівноваги і розмір цього околу залежить лише від норми збурень. В нелінійних системах це, взагалі кажучи, не так [1] і є предметом вивчення в межах теорії ISS (Input to State Stability) [2]. Основним інструментом як в скінченновимірному, так і в нескінченновимірному випадку виступає ISS функція Ляпунова, в термінах якої і одержуються шукані робастні оцінки [2, 3]. Проте для багатьох нескінченновимірних дисипативних динамічних систем характерною властивістю є наявність в фазовому просторі нетривіальної притягуючої множини – глобального атрактору [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Перенесення основних конструкцій ISS на параболічні та гіперболічні системи з нетривіальним атрактором було здійснено в роботах [11, 12, 13]. При цьому для доведення властивості AG (Asymptotic Gain) виявився продуктивним підхід, пов'язаний з аналізом рівномірних атракторів неавтономних динамічних систем (напівпроцесів) і їх залежністю від збурень.

В даній роботі цей підхід застосовується до нелінійного параболічного рівняння зі збуренням на межі просторової області. Побудовано відповідну сім'ю напівпроцесів, доведено існування рівномірного атрактору, і на основі факту його збіжності до атрактору незбуреної системи встановлено робастну оцінку типу AG.

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55.
Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт № 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою".

1 Постановка задачі та основний результат

Розглянемо наступну задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = f(y(t,x)), (t,x) \in Q = (0,+\infty) \times (0,l), \\ y(t,0) = d_1(t), y(t,l) = d_2(t), \\ y(0,x) = y_0(x), x \in (0,l), \end{cases} \tag{1}$$

де функція $d := \{d_1, d_2\} \in \mathcal{U} \subset \left(L^\infty(0,+\infty)\right)^2$ визначає збурення, початкова функція y_0 належить фазовому простору $X = L^2(0,l)$ з нормою $\|.\|$, задана нелінійна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:

$$\begin{gathered} f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 0, \exists C \geq 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0, p \geq 2, \lambda \in \mathbb{R}, \\ -C - \alpha_1 |s|^p \leq f(s) \cdot s \leq C - \alpha_2 |s|^p, \\ f'(s) \leq \lambda. \end{gathered} \tag{2}$$

Позначимо $y(t, y_0, d)$ розв'язок (1) в момент часу $t \geq 0$ (точне означення розв'язку буде дано в частині 3 роботи). Відомо [4], що при $d_1 \equiv 0$, $d_2 \equiv 0$ слабкі розвязки (1) породжують дисипативну динамічну систему $\{S(t) : X \longmapsto X\}_{t \geq 0}; S(t)y_0 = y(t, y_0, 0)$, що має у фазовому просторі X глобальний атрактор Θ - компактну інваріантну множину, що притягує $S(t)y_0$ при $t \to \infty$. При цьому, наприклад, для рівняння Чафе-Інфанте з $f(s) = \lambda(s - s^3)$ при великих $\lambda > 0$ атрактор Θ є нетривіальною зв'язною підмножиною $L^2(0,l)$ зі складною структурою [4]. За наявності неавтономних збурень $d(t)$ ми не можемо стверджувати, що точка $y(t, y_0, d)$ притягується до Θ при $t \to \infty$. Проте виявляється, що оцінка відхилення $y(t, y_0, d)$ від Θ залежить лише від $\|d\|_\infty = max\{\|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty\}$.

Раніше, в роботі [14] для задачі (1) за даних додаткових умов на f та y_0 була одержана властивість local ISS:

$$\begin{gathered} \exists \beta \in KL, \exists \gamma \in K, \exists r > 0, \forall y_0 \in X, \|y_0\|_\Theta \leq r, \\ \forall t \geq 0 \quad \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \end{gathered} \tag{3}$$

де класи функцій порівняння K і KL визначаються рівностями [1]

$$K = \{\gamma \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_1) | \gamma(0) = 0, \gamma \text{ строго зростає}\},$$

$$KL = \{\beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_+ \cdot \mathbb{R}_+) | \beta(\cdot, t) \in K, \beta(s, \cdot) \searrow 0\}.$$

Тут і надалі позначаємо для $A, B, \Theta \subset X$

$$dist(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \ \|A\|_\Theta = dist(A, \Theta).$$

Оцінка (3) була виведена шляхом побудови в околі Θ ISS функції Ляпунова і носить локальний характер.

В даній роботі ми лише за умов (2) встановимо нелокальну властивість AG:

$$\begin{gathered} \exists \gamma \in K, \forall y_0 \in X \\ \overline{\lim_{t \to \infty}} \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \gamma(\|d\|_\infty). \end{gathered} \tag{4}$$

Для доведення (4) ми використаємо техніку напівпроцесів: погрузимо задачу (1) в сім'ю задач $\{(1)_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, де $(1)_{\{0\}} = (1)$, Σ - спеціально побудований простір параметрів, який залежить від збурення d. Далі ми доведемо, що сім'я напівпроцесів $\{(1)_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ має рівномірний атрактор Θ_Σ, причому

$$dist(\Theta_\Sigma, \Theta) \to 0, \ \|d\|_\infty \to 0.$$

Остання збіжність дозволить нам довести оцінку (4).

2 Напівпроцеси та їх атрактори

Нехай Σ - деяка транскрипційно-інваріантна множина функціональних параметрів, тобто

$$\forall h \geq 0, \forall \sigma(\cdot) \in \Sigma, \sigma(\cdot + h) \in \Sigma.$$

Нехай задано сім'ю $S_\sigma(t, \tau, x),$ де $\sigma \in \Sigma, t \geq \tau \geq 0, x \in X.$

Означення 1. *Сім'я $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ називається сім'єю напівпроцесів, якщо для всіх $\sigma \in \Sigma, x \in X$ виконуються наступні властивості:*

$$S_\sigma(\tau, \tau, x) = x, \forall \tau \geq 0,$$
$$S_\sigma(t, s, S_\sigma(s, \tau, x)) = S_\sigma(t, \tau, x), \forall t \geq s \geq \tau \geq 0,$$
$$S_\sigma(t + h, \tau + h, x) = S_{\sigma(\cdot+h)}(t, \tau, x), \forall t \geq \tau \geq 0, \forall h \geq 0.$$

Зауваження 1. *При $\sigma = 0$ (незбурений випадок) ми маємо*

$$S_0(t_1 + t_2, 0, x) = S_0(t_1, 0, S_0(t_2, 0, x)).$$

Тобто S_0 задовольняє напівгрупову властивість.

Покладемо

$$S_\Sigma(t, 0, x) := \underset{\sigma\in\Sigma}{\cup} S_\sigma(t, 0, x).$$

Означення 2. *Компактна множина $\Theta_\Sigma \subset X$ називається рівномірним атрактором $\{S_\sigma\}_{\sigma\ \in\Sigma}$, якщо для довільного обмеженого $B \subset X$*

$$dist(S_\Sigma(t, 0, B), \Theta_\Sigma) \to 0, \ t \to \infty,$$

і Θ_Σ є мінімальною замкненою множиною, що задовольняє цю властивість.

Лема 1. *Нехай Σ є компактною множиною і виконуються властивості:*

1) існує обмежена $B_0 \subset X$ така, що для $\forall$ обмеженої $B \subset X$

$$\exists T = T(B), \forall t \geq T, S_\Sigma(t, 0, B) \subset B_0;$$

2) для будь-яких $\{\sigma_n\} \subset \Sigma$, обмеженої $\{x_n\} \subset X, \{t_n \nearrow \infty\}$

$$\text{послідовність } \{S_{\sigma_n}(t, 0, x_n)\} \text{ є предкомпактною в } X.$$

Тоді $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ має рівномірний атрактор $\Theta_\Sigma \subset B_0$.

Якщо, крім того виконується умова:

3) $\forall t > 0$ відображення $(x, \sigma) \to S_\sigma(t, 0, x)$ є неперервним,

то Θ_Σ є інваріантним в наступному сенсі:

$$\Theta_\Sigma \subset S_\Sigma(t, 0, \Theta_\Sigma), \forall t \geq 0.$$

Зауваження 2. *Для* $\Sigma = \{0\}$ *умови 1)-3) гарантують існування глобального атрактора* Θ *у напігрупи* S_0.

Лема 2. *[13] Нехай* $\Sigma = \Sigma(\omega), \|\omega\|_\infty \leq R$ *задовольняє умови Леми 1 з однією і тією самою множиною* B_0, $\Sigma(0) = \{0\}, \omega \in \Sigma(\omega)$ *і виконуються наступні умови:*

1) $\forall \|\omega_n\|_\infty \to 0, \forall \{x_n\} \subset B_0, \forall t_n \nearrow \infty, \forall \sigma_n \subset \Sigma(\omega_n)$

$$\text{послідовність } \{S_{\sigma_n}(t_n, 0, x_n)\} \text{ - предкомпактна в } X;$$

2) $\forall t > 0, \forall \|\omega\|_\infty \to 0, \forall \sigma_n \in \Sigma(\omega_n), \forall x_n \to x$ *по підпослідовності*

$$S_{\sigma_n}(t, 0, x_n) \to S_0(t, 0, x).$$

Тоді $\exists \gamma \in K, \forall x \in X, \forall \|\omega\|_\infty \leq R$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} dist(S_{\Sigma(\omega)}(t, 0, x), \Theta) \leq \gamma(\|\omega\|_\infty). \tag{5}$$

Зауваження 3. *Оскільки* $\omega \in \Sigma(\omega)$, *то з (5) випливає*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|S_\omega(t, 0, x)\|_\Theta \leq \gamma(\|\omega\|_\infty). \tag{6}$$

3 Основні результати

Бедемо розглядати задачу (1) для наступного класу збурень U: множина U складається з тих $d = d\{d_1, d_2\} \in (L^\infty(\mathbb{R}_+))^2$, для яких d_1, d_2 є абсолютно неперервними $d_1(0) = d_2(0) = 0, \dot{d}_1, \dot{d}_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ і

$$\|d\|_\infty = max\{\|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty\} \leq R. \tag{7}$$

Тоді U є трансляційно інваріантною:

$$\forall h \geq 0 \ \|d(\cdot + h)\|_\infty \leq \|d\|_\infty \leq R. \tag{8}$$

Нехай ω є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} = 0, (t, x) \in Q, \\ w(t, 0) = d_1(t), w(t, l) = d_2(t), t > 0, \\ w(0, x) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В силу принципу максимуму [16] $w \in L^\infty(Q)$ і

$$\|w\|_\infty \leq \|d\|_\infty. \tag{10}$$

Більше того, переходячи заміною $\overline{w} = w - \frac{x}{l} d_2(t) - \frac{l-x}{l} d_1(t)$ до задачі з нульовими початковими і крайовими умовами і правою частиною $-\frac{x}{l}\dot{d}_2 - \frac{l-x}{l}\dot{d}_1$ з класу $L^\infty(Q)$, ми в силу [5] одержуємо, що $w \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_+; H_0^1(0, l))$ і існує $L = L(\dot{d}) > 0$:

$$\sup_{t\geq 0} \|w(t)\|_{H_0^1} \leq L; \tag{11}$$

$$\|w(t_1) - w(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|. \tag{12}$$

Розв'язком (1) на $(0, T)$ будемо називати $y = v+w$, де w - розв'язок (9), $v = v(t, x)$ - слабкий розв'язок задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = f(v(t,x)) + w(t,x)), \ (t,x) \in Q, \\ v(t,0) = 0, v(t,l) = 0, \ t > 0, \\ v(0,x) = y_0(x), \ x \in (0,l). \end{cases} \tag{13}$$

Тобто $\forall T > 0, v \in L^2(0, T; H_0^1(0, l)), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, l))$

$$v|_{t=0} = y_0 \ i \ \forall \eta \in C_0^\infty(0, l), \ \forall \theta \in C_0^\infty(0, T),$$

$$-\int_0^T (v, \eta)\theta_t + \int_0^T (v_x, \eta_x)\theta = \int_0^T (f(v + w), \eta)\theta. \tag{14}$$

Зауважимо, що для будь-якої функції $w \in L^\infty(Q)$, що задовольняє (10), зокрема і для розв'язку (9), функція $\overline{f}(t, x, s) := f(s+w(t, x))$ задовольняє (2) з додатними сталими $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{C}$, що залежать лише від R. Тому згідно з [4], [15] маємо, що $\forall y_0 \in X$ задача (13) має єдиний слабкий розв'язок $v \in \mathbb{C}([0, \infty) : X$ і $\forall t \geq \tau \geq 0$ виконуються оцінки

$$\|v(t)\|^2 \leq \|v(\tau)\|^2 e^{-\delta(t-\tau)} + K, \tag{15}$$

$$\|v(t)\|^2 + \int_\tau^t \|v_x(s)\|^2 ds + \int_\tau^t \|v(s)\|_{L^p}^p ds \leq \|v(\tau)\|^2 + K(t - \tau), \tag{16}$$

де додатні константи δ, K залежать лише від R.

Зафіксуємо функцію $w \in \mathbb{C}([0, +\infty), H_0^1(0, l))$, що задовольняє оцінки (10)–(12) і розглянемо множину

$$\Sigma(w) = cl_{\mathbb{C}(\mathbb{R}_+;X)}\{w(\cdot + h)|h \geq 0\},$$

де збіжність в $\mathbb{C}(\mathbb{R}; X)$ – це рівномірна збіжність на кожному $[a, b] \subset [0, +\infty)$.

В силу компактності вкладення $H_0^1(0, l) \subset X$ з [15] виводимо, що $\Sigma(w)$ – трансляційно-інваріантна, компактна в $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+; X)$, $w \in \Sigma(w), \Sigma(0) = \{0\}$.

Більше того, оскільки $\forall \sigma \in \Sigma(w), \exists h_n \geq 0$ таке, що

$$\forall T > 0, \max_{t \in [0,T]} \|w(t + h_n) - \sigma(t)\| \to 0, \ n \to \infty,$$

то

$$\|\sigma\|_\infty \leq \|w\|_\infty \leq \|d\|_\infty. \tag{17}$$

Тепер для фіксованого $w \in \mathbb{C}([0, +\infty); H_0^1(0, l))$, що задовольняє (10)-(12), для $t \geq \tau \geq 0$ і $y_\tau \in X$ розглядаємо сукупність $\{S_\sigma(t, \tau, y_\tau)\}, \sigma \in \Sigma(w)$, де $v(0) = S_\sigma(0, \tau, y_\tau)$ – це розв'язок задачі (13) на $[\tau, +\infty)$ з правою частиною

$$f(v(t, x) + \sigma(t, x)) \tag{18}$$

і початковими умовами $v|_{t=\tau} = y_\tau$.

Легко показати, що $\{S_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(w)}$ є сім'єю напівпроцесів.

Тоді для розв'язку (1) маємо

$$y(t, y_0, d) = S_\omega(t, 0, y_0) + \omega(t), \tag{19}$$

де ω - розв'язок (9) зі збуренням d.

Основним результатом роботи є

Теорема 1. *Нехай для задачі (1) виконуються умови (2), збурення d належать класу U і виконуються співвідношення (7). Нехай $\Theta \subset X = L^2(0,l)$ є глобальним атрактором незбуреної задачі ($d \equiv 0$). Тоді $\exists \gamma \in K$ така, що для довільних $y_0 \in X$, $d \in U$ для розв'язку (1) $y(t, y_0, d)$ виконується оцінка*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \le \gamma(\|d\|_\infty). \tag{20}$$

Доведення. Достатньо довести (20) для S_ω з (19). Дійсно, якщо для деякого $\overline{\gamma} \in K$ $\forall y_0 \in X$ $\forall d \in U$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|S_\omega(t, 0, y_0)\|_\Theta \le \overline{\gamma}(\|d\|_\infty), \tag{21}$$

то з (20) виводимо

$$\|y(t, y_0, d)\|_\Theta = dist(S_\omega(t, 0, y_0) + \omega(t), \Theta) \le$$

$$dist(S_\omega(t, 0, y_0), \Theta) + \|\omega(t)\| \le \|S_\omega(t, 0, y_0)\| + l^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_\infty \le \gamma(\|d\|_\infty),$$

де $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s) + l^{\frac{1}{2}} s$.

Якщо ми покажемо, що для $\{S_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(\omega)}$ з (18) виконуються умови лем 1, 2 то одержимо, що $\exists \gamma \in K$ $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \|S_\omega(t, 0, y_0)\|_\Theta \le \gamma(\|\omega\|_\infty)$ і з (17) одержимо шукану оцінку (21).

Отже, перевіримо умови Леми 1 та Леми 2.

Умова 1) леми 1 випливає з оцінок (15), (17) з множиною

$$B_0 = \{v \in X \mid \|v\| \le \sqrt{K+1}\}.$$

Далі для $\forall \|\omega_n\|_\infty \le R$, $\forall \sigma_n \in \Sigma(\omega_n)$, $\forall \|y_n\| \le r$, $\forall t_n \to \infty$ для достатньо великих n маємо:

$$\xi_n = S_{\sigma_n}(t_n, 0, y_n) = S_{\sigma_n}(t_n - \bar{t} + \bar{t}, t_n - \bar{t}, S_{\sigma_n}(t_n - \bar{t}, 0, y_n)) =$$

$$= S_{\sigma_n(t_n - \bar{t} + \cdot)}(\bar{t}, 0, S_{\sigma_n}(t_n - \bar{t}, 0, y_n)) = S_{\overline{\sigma}_n}(\bar{t}, 0, \overline{y}_n),$$

де $\{\overline{y}_n\} \subset B_0$, $\overline{\sigma}_n \subset \Sigma(\omega_n)$. Вважаємо, що по підпослідовності $\overline{y}_n \to \overline{y}$ слабо в X. Розглянемо два випадки, що відповідають умові 2) леми 1 та умові 1) леми 2.

I) $\omega_n \equiv \omega$. Тоді з компактності $\Sigma(\omega)$ в $\mathbb{C}([0, +\infty); X)$ маємо, що $\overline{\sigma}_n \to \overline{\sigma} \in \Sigma(\omega)$ і $\xi_n = v_n(\bar{t})$, де v_n розв'язок задачі (13) з правою частиною $f(v + \overline{\sigma}_n)$ і початковим даним $\overline{y}_n$.

З оцінки(16) виводимо, що $\forall T \ge \bar{t}$

$$\{v_n\} \text{ - обмежена в } L^\infty(0, T; X) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, l)) \cap L^p(Q_T),$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} \text{ - обмежена в } L^2(0, T; H^{-1}(0, l)) + L^q(Q_T),$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді згідно з теоремою про компактність [2] по послідовності одержуємо збіжності

$$\begin{cases} v_n \to v \text{ слабо в } L^2(0, T; H_0^1(0, l)), \\ v_n \to v \text{ сильно в } L^2(0, T, X) \text{ і м.с. в } Q_T, \\ v_n(t) \to v(t) \text{ слабо в } X \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \tag{22}$$

Тоді $f(v_n(t,x)+\overline{\sigma_n}(t,x)) \to f(v(t,x)+\overline{\sigma}(t,x))$ майже скрізь в Q_T.

Оскільки

$$\|f(v_n(t,x)+\overline{\sigma_n}(t,x))\| \le C(R)(1+|v_n(t,x)|^{p-1}),$$

то з обмеженості $\{v_n\}$ в $L^P(Q_T)$ і леми Ліонса виводимо, що $f(v_n+\overline{\sigma}_n) \to f(v+\overline{\sigma})$ слабо в $L^q(Q_T)$.

Цей факт і збіжності (22) дозволяють перейти до границі в рівності (14), записаній для $v_n, \overline{\sigma}_n$ і одержати, що $v \in \mathbb{C}([0,+\infty);X)$ – розв'язок (13) з правою частиною $f(v+\overline{\sigma})$ і початковим даним $\overline{y}$.

Для доведення сильної збіжності

$$v_n(\overline{t}) \to v(\overline{t}) \text{ в } X \tag{23}$$

зауважимо, що в силу (16) функція

$$J_n(t) = \|v_n(t)\|^2 - Kt, J(t) = \|v(t)\|^2 - Kt$$

є монотонною, неперервною на $[0,T]$ і в силу (22) збігається майже скрізь на $[0,T]$.

Тоді з теореми Діні [6] маємо, що

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in [\varepsilon, T]\ J_n(t) \to J(t).$$

Звідси і зі слабкої поточкової збіжності v_n до v в X (див. (22)) випливає, що

$$\xi_n = v_n(\overline{t}) \to \xi := v(\overline{t}) = S_{\overline{\sigma}}(\overline{t}, 0, \overline{y}). \tag{24}$$

Це, зокрема, означає виконнання умови 2) Леми 1.

II) $\|w_n\|_\infty \to 0$. Тоді $\forall \sigma_n \in \Sigma(w_n)$ в силу (17)

$$\|\sigma_n\|_\infty \to 0,\ n \to \infty. \tag{25}$$

Тоді для $\overline{\sigma}_n(\cdot) = \sigma_n(t_n - \overline{t} + \cdot)$ маємо $\overline{\sigma}_n \to 0$ в $\mathbb{C}([0,+\infty);X)$ і, повторюючи міркування пункту I) з $\overline{\sigma} = 0$, одержуємо виконання умови 1) Леми 2.

Тепер перевіримо умови 3) Леми 1 і умови 2) Леми 2. Нехай $||\omega_n||_\infty \le R$, $\overline{\sigma}_n \in \Sigma(\omega_n)$ $\overline{y_n} \to \overline{y}$, $\overline{t} > 0$, і розглянемо $\xi_n = S_{\overline{\sigma}_n}(\overline{t}, 0, \overline{y}_n)$.

Знову маємо два випадки: або $\omega_n \equiv \omega$ і $\overline{\sigma}_n \to \overline{\sigma} \in \Sigma(\omega)$, або $||\omega_n||_\infty \to 0$ і $\overline{\sigma}_n \to \sigma = 0$.

В обох випадках ми можемо повторити міркування (22)-(25)), і стверджувати, що принаймні по підпослідовності $\xi_n \to \xi = S_{\overline{\sigma}}(\overline{t}, 0, \overline{y})$.

Звідси ми одержуємо виконання умов Леми 1 і Леми 2, що і доводить теорему.

□

Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт № 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою".

Список літератури

[1] Khalil, Hassan K.. Nonlinear systems. Нью-Йорк: Macmillan Publishing Company, 1992.

[2] Sontag E.D. Mathematical control theory: deterministic finite-dimensional systems // Springer. 1998.

[3] Dashkovskiy S., Mironchenko A. Input-to-state stability of infinite dimensional control systems // Mathematics of Control, Signals and Systems. 2013. Vol. 25, no 1. P. 1–35.

[4] Robinson J.C. Infinite-Dimensional Dynamical Systems // Cambridge University Press. 2001.

[5] R. Temam. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series, Springer, 1997.

[6] A.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, J. Valero. Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation. Appl. Math. Inform. Sciences, 2015, 9, 2257-2264.

[7] O.V. Kapustyan, N.V Gorban, P.O. Kasyanov. Uniform trajectory attractor for non-autonomous reaction-diffusion equations with Caratheodory's nonlinearity. Nonlinear Analysis, 2014, 98, 13-26

[8] P.O. Kasyanov, L. Toscano, N.V. Zadoianchuk. Long-time behaviour of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional reaction-displacement law. Abstract and Applied Analysis, 2012, 450984.

[9] О.В. Капустян, М.О. Перестюк Глобальні атрактори імпульсних нескінченновимірних систем, Укр. мат. журн., 68, №4, 517-528 (2016); English translation: Ukr. Math. J., 68, №4, 517-528 (2016)

[10] S. Dashkovskiy, O.A. Kapustian, O.V. Kapustyan, N.V. Gorban. Attractors for Multi-valued Impulsive Systems: Existence and Applications to Reaction-Diffusion System. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 7385450

[11] S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, J. Schmid A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations. Mathematics of Control, Signals and Systems 80г-є б , 2020, 32, 309–326.

[12] O. Kapustyan, S. Dashkovskiy, J. Schmid. Asymptotic gain results for global attractors of semilinear systems. Mathematical Control and Related Fields, 2022, 12(3), 763–788

[13] O. Kapustyan, S. Dashkovskiy. Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equation. Evolution Equations and Control Theory, 2022, 11(5), 1565-1577

[14] Капустян О.В., Краснєєва А.О. Стійкість глобального атрактора рівняння реакції-дифузії щодо збурень на границі області // Нелінійні коливання, 2024, Т. 27, № 2, с. 229-237.

[15] Vishik M.I., Chepyzhov V.V. Averaging trajectory attractors of evolutionary equations with rapidly oscillating terms // Sb. Math. 2001. Vol. 192, no 11. P. 13–50.

[16] L.C. Evans. Partial differential eqations. AMS, 1997.

Надійшло 21.03.2025

Kapustyan O.V., Krasnieieva A.O. *Robust stability of the global attractor of a nonlinear parabolic equation with respect to external disturbances.*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 25–33.

In the paper we prove a robust estimate of the Asymptotic Gain type, which characterizes the deviation of solutions of a nonlinear parabolic problem with perturbations on the boundary of the spatial domain from the global attractor of the unperturbed system in terms of the magnitude of the perturbations.