ISSN 2309-4001 e-ISSN 3083-7545 https://bmj.chnu.edu.ua

Bukovinian Math. Journal 2026, **14** (2) , 70–84 Буковинський матем. журнал 2026, Т.14, №2, 70–84

DOI: 10.31861/bmj2026.02.06

Пихнівський Р.О. [1D]

ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ СИСТЕМ З НЕГЛАДКОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ НА ОСНОВІ ГЕНЕТИЧНИХ АЛГОРИТМІВ ТА РОЗРІДЖЕНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Дослідження присвячено розв'язанню актуальної задачі якісної теорії диференціальних рівнянь – автоматизованій побудові функцій Ляпунова для багатокомпонентних динамічних систем із негладкою (локально ліпшицевою) правою частиною. Метою роботи є строге математичне обґрунтування існування поліноміальної функції Ляпунова для негладких систем та розробка чисельно-символьного методу її конструктивного синтезу, що долає обчислювальні труднощі високої вимірності.

У теоретичній частині роботи застосовано апарат негладкого аналізу та похідних Діні. На відміну від відомих результатів, що вимагають високого класу гладкості та будують апроксимацію на всьому компакті, у цій роботі строго доведено теорему про існування поліноміальної функції Ляпунова безпосередньо для систем із розривними частинними похідними векторного поля у виколотому околі нуля. Це дозволило встановити конструктивний зв'язок між параметрами експоненційної стійкості та точністю поліноміального наближення.

Для практичної реалізації розроблено гібридний метод, що поєднує генетичне програмування та розріджену оптимізацію. Генетичний алгоритм здійснює дискретний пошук символьної структури у вигляді бінарних дерев, де термінальними вузлами є змінні системи, а внутрішніми – операції додавання та множення. Для усунення синтаксичної надлишковості застосовано розгортання за канонічним поліноміальним базисом. На внутрішньому циклі числовий оптимізатор виконує регуляризацію методом мінімізації абсолютних відхилень з урахуванням штрафних функцій за порушення умов Ляпунова. Після відсікання коефіцієнтів, які за модулем не перевищують заданого чисельного допуску, здійснюється повторна оптимізація на зменшеній мономній опорі.

Результат чисельного експерименту підтвердив високу обчислювальну ефективність методу: для досліджуваної негладкої системи шукану поліноміальну функцію Ляпунова було знайдено вже після двох генерацій алгоритму. Незалежний комплекс перевірок, що охоплював випадкові, координатно-осьові, сіткові та граничні вибірки, підтвердив відсутність порушень умов експоненційної стійкості. Запропонований підхід створює підґрунтя для аналізу стійкості складних багатовимірних технічних і біологічних систем.

Ключові слова і фрази: функція Ляпунова, експоненційна стійкість, негладка система, генетичне програмування, розріджена оптимізація, багатокомпонентна система.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 60 Volodymyrska St., Kyiv 01601, Ukraine (Pykhnivskyi R.O.)
e-mail: *roman.pykhnivskyi@knu.ua (Pykhnivskyi R.O.)*

УДК 517.925.51
2020 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 68W50.

© Пихнівський Р.О., 2026

Вступ

Аналіз стійкості динамічних систем належить до фундаментальних проблем сучасної теорії керування, нелінійної динаміки та якісної теорії диференціальних рівнянь. Одним із найбільш універсальних інструментів її дослідження є прямий метод Ляпунова, який дає змогу встановлювати властивості стійкості без явного інтегрування диференціальної системи. Зокрема, існування додатно визначеної функції Ляпунова, похідна якої вздовж траєкторій системи є від'ємно визначеною, забезпечує достатні умови асимптотичної або експоненційної стійкості.

Значна частина класичних результатів теорії Ляпунова сформульована для гладких динамічних систем, у яких права частини мають необхідну диференційовність. Водночас математичні моделі реальних фізичних, технічних, біологічних та інформаційних процесів часто містять негладкі нелінійності, зумовлені сухим тертям, насиченням, релейними механізмами, обмеженнями, операціями взяття модуля та іншими нелінійними ефектами [2,3]. У таких випадках векторне поле може бути лише локально ліпшицевим, а його частинні похідні – не існувати або бути розривними на окремих підмножинах фазового простору. Це істотно ускладнює безпосереднє застосування класичного диференціального апарату та актуалізує розвиток методів аналізу стійкості, адаптованих до негладкої динаміки.

Принципове значення для конструктивного аналізу нелінійних систем мають результати щодо існування поліноміальних функцій Ляпунова. Зокрема, у роботі M. Peet [8] встановлено існування поліноміальної функції Ляпунова для експоненційно стійких нелінійних систем. Цей результат має важливе теоретичне значення, оскільки обґрунтовує достатність поліноміального класу функцій для представлення відповідних сертифікатів стійкості. Водночас характер представленого у роботі результату не визначає конструктивного механізму побудови конкретної функції Ляпунова, її мінімального або доцільного степеня, а також структури мономів, що мають важливе значення для опису стійкості конкретної системи.

Окрему проблему становить поширення відповідного теоретичного апарату на системи з негладкою правою частиною. У даній роботі отримано строгий математичний результат про існування поліноміальної функції Ляпунова для багатокомпонентних динамічних систем із локально ліпшицевою правою частиною. Запропоновано підхід, який передбачає аналіз функції Ляпунова у виколотому околі нуля, що дає змогу відокремити локальну структуру негладкості поблизу початку координат від властивостей поліноміального наближення на компактних підобластях фазового простору.

Отриманий теоретичний результат встановлює зв'язок між параметрами експоненційної стійкості вихідної системи та точністю поліноміального наближення відповідної функції Ляпунова. Відтак поліноміальна функція Ляпунова розглядається не лише як об'єкт теоретичного існування, а як конструктивно побудований аналітичний об'єкт, придатний для автоматизованого синтезу та незалежної чисельної верифікації стійкості.

На цій основі в роботі розроблено гібридний чисельно-символьний алгоритм автоматизованого синтезу розріджених поліноміальних функцій Ляпунова. Його ключовою особливістю є розмежування дискретного пошуку структури полінома та неперервної оптимізації його параметрів. На першому етапі генетичне програмування здійснює еволюційний пошук символьного скелета кандидата у вигляді бінарного дерева, формуючи структуру полінома без необхідності повного перебору всіх можливих мономів. На другому етапі ℓ_1-регуляризована оптимізація визначає числові коефіцієнти та одночасно забезпечує розрідження отриманої моделі шляхом вилучення структурно надлишкових членів.

Таке поєднання символьного пошуку та розрідженої оптимізації дає змогу зменшити складність простору пошуку та частково подолати обмеження, пов'язані з комбінаторним зростанням кількості можливих мономів зі збільшенням розмірності системи. Водночас спеціально сформовані функції пристосованості та критерії оцінювання порушень

умов Ляпунова враховують негладкість досліджуваного векторного поля, що робить запропонований алгоритм придатним для класу систем, для яких стандартні градієнтні процедури можуть бути некоректними або недостатньо ефективними.

Метою роботи є розроблення та математичне обґрунтування конструктивного підходу до синтезу поліноміальних функцій Ляпунова для багатокомпонентних динамічних систем із локально ліпшицевою правою частиною, а також створення та чисельна верифікація гібридного чисельно-символьного алгоритму їх автоматизованої розрідженої побудови.

Основними завданнями дослідження є: формулювання та доведення умов існування поліноміальної функції Ляпунова для негладких динамічних систем; встановлення кількісного зв'язку між параметрами експоненційної стійкості системи та точністю поліноміального наближення відповідної функції Ляпунова; розроблення процедури структурного пошуку полінома на основі генетичного програмування; інтеграція розрідженої ℓ_1-оптимізації для визначення його коефіцієнтів; а також проведення незалежної чисельної перевірки виконання умов Ляпунова.

Запропонований підхід поєднує фундаментальний апарат негладкого аналізу з методами автоматизованого символьного синтезу та розрідженої оптимізації, створюючи математично обґрунтовану основу для конструктивного аналізу експоненційної стійкості складних нелінійних систем.

1 Постановка задачі та основні поняття стійкості

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

де $f(0) = 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицева, тобто для кожного $r > 0$ існує $L(r) > 0$:

$$\|x\| \le r, \quad \|y\| \le r \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| \le L(r)\|x - y\|. \tag{2}$$

Ми будемо працювати в $O_r(0) = \{x : \|x\| < r\}$.

Означення 1. *Положення рівноваги $x = 0$ системи (1) називають стійким за Ляпуновим, якщо:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \|x(0)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \ge 0.$$

Зауважимо, що з означення 1 автоматично слідує, що $x(t)$ існує на $[0, +\infty)$.

Означення 2. *Положення рівноваги системи (1) $x = 0$ називається асимптотично стійким, якщо $x = 0$ є стійким та існує $\delta > 0$ такі, що:*

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Означення 3. *Положення рівноваги системи (1) $x = 0$ називається експоненційно стійким, якщо $\exists \delta > 0$, $\exists C > 0$, $\exists \lambda > 0$ таке, що:*

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x(t)\| \le C\|x(0)\|e^{-\lambda t}, \quad \forall t \ge 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що означення стійкості і асимптотичної стійкості можна дати в еквівалентній формі через $\mathcal{K}$-функції порівняння, які також зручні при роботі з функціоналами Ляпунова.

Означення 4. *Будемо говорити, що неперервна функція $\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ належить класу $\mathcal{K}$, якщо α строго зростає і $\alpha(0) = 0$.*

Означення 5. *Будемо говорити, що неперервна функція $\beta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ належить класу $\mathcal{KL}$, якщо $\beta(\cdot, s) \in \mathcal{K}$, $\beta(r, \cdot)$ – спадає і $\beta(r, s) \to 0$ при $s \to \infty$.*

Приклад 1. $\alpha(r) = r^a \in \mathcal{K}$ *для* $\forall a > 0$. $\beta(r, s) = r^a e^{-bs} \in \mathcal{KL}$ *для* $\forall a > 0$, $\forall b > 0$.

2 Формулювання стійкості через функції порівняння та гладкі функції Ляпунова

Згідно робіт Х. Халіла (H. Khalil), критерії стійкості мовою функцій порівняння записуються у компактному вигляді, а саме.

Лема 1 ([4]). *$x = 0$ – стійке тоді і тільки тоді, коли $\exists \delta > 0$ та $\exists \alpha \in \mathcal{K}$ такі, що*

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x(t)\| \leq \alpha(\|x(0)\|), \quad \forall t \geq 0.$$

Положення рівноваги системи (1) $x = 0$ – асимптотично стійке тоді і тільки тоді, коли $\exists \delta > 0$ та $\exists \beta \in \mathcal{KL}$ такі, що

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t), \quad \forall t \geq 0.$$

Зауваження 1. *Якщо $\beta(r, s) = r^a \cdot e^{-bs}$, $a, b > 0$, то $x = 0$ – експоненційно стійке.*

Спочатку розглянемо випадок, коли права частина $f(x)$ системи (1) є гладкою функцією.

Якщо в системі (1) $f(x) \in C^1(O_r(0))$, то критерії асимптотичної і експоненційної стійкості в термінах гладких функцій Ляпунова визначаються наступними теоремами.

Теорема 1 ([4]). *Нехай $f(x) \in C^1(O_r(0))$. Тоді $x = 0$ є асимптотично стійким положення рівноваги системи (1) тоді і тільки тоді, коли $\exists r_0 < r$, $\exists V(x) \in C^1(O_{r_0}(0))$, $\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{K}$ такі, що для всіх $\|x\| < r_0$:*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \tag{4}$$

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq -\alpha_3(\|x\|). \tag{5}$$

Теорема 2 ([4]). *Нехай $f(x) \in C^1(O_r(0))$. Тоді $x = 0$ – експоненційно стійке рівноваги системи (1) тоді і тільки тоді, коли $\exists r_0 < r$, $\exists V(x) \in C^1(O_{r_0}(0))$, $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$ такі, що для всіх $\|x\| < r_0$:*

$$c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2, \tag{6}$$

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq -c_3\|x\|^2. \tag{7}$$

Зауваження 2. *У випадку умов теореми 2 ($f(x) \in C^1(O_r(0))$) експоненційна стійкість положення рівноваги системи (1) $x = 0$ також еквівалентна тому, що*

$$A = \frac{\partial f(0)}{\partial x} \tag{8}$$

є гурвіцевою матрицею.

Дійсно, за умови $f(x) \in C^1(O_r(0))$ за лемою Адамара [9] в деякому околі нуля $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = Ax + g(x), \tag{9}$$

де

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \to 0, \quad x \to 0.$$

Отже, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, такі, що $\forall \|x\| < \delta$ виконується

$$\|g(x)\| < \varepsilon\|x\|.$$

При $\|x\| < \delta$ покладемо:

$$V(x) = (Px, x), \tag{10}$$

де $P > 0$ – розв'язок рівняння Ляпунова

$$PA + A^T P = -E, \quad E = E^T \succ 0$$

який існує і єдиний в силу (8).

Тоді $V(x)$ задовольняє (6) і справедливою є така оцінка:

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x), Ax + g(x)\rangle &= ((PA + A^T P)x, x) + (Pg(x), x) + (Px, g(x)) \\ &\leq -\|x\|^2 + 2\|P\| \cdot \varepsilon \|x\|^2 < -\frac{1}{2}\|x\|^2\end{aligned}$$

при

$$\varepsilon < \frac{1}{4\|P\|},$$

тобто виконується оцінка (7). Власне це й означає експоненційну стійкість положення рівноваги системи (1) $x = 0$.

Наслідок 1. *За умови $f(x) \in C^1(O_r(0))$ експоненційна стійкість положення рівноваги системи (1) $x = 0$ еквівалентна існуванню квадратичної функції Ляпунова $V(x)$, що задовольняє оцінки (6), (7).*

3 Випадок негладкої локально ліпшицевої динаміки

Тепер перейдемо до загального випадку, коли права частина $f(x)$ системи (1) є локально ліпшицевою функцією.

Нехай $f(x) : O_r(0) \to \mathbb{R}^n$ задовольняє (2) з константою L. В цьому випадку відомо [6], що Теорема 1 залишається вірною, тобто положення рівноваги $x = 0$ системи (1) є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли в деякому околі нуля існує $V(x) \in C^1$, що задовольняє оцінки (4), (5).

Зауважимо, що основною проблемою в цьому випадку є те, що без умови $f(x) \in C^1(O_r(0))$ немає результату про гладкість відображення $x \to x(t, x)$, де тут і надалі $x(t, x)$ позначає розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x), \\ x(0) = x.\end{cases}$$

Сформулюємо наш перший результат щодо узагальнення Теореми 2, який власне стосується існування локально ліпшицевої функції Ляпунова.

Теорема 3. *Нехай $f(x) : O_r(0) \to \mathbb{R}^n$ – ліпшицева з константою L. Тоді положення рівноваги $x = 0$ системи (1) є експоненційно стійким тоді і тільки тоді, коли $\exists r_0 < r$ та існує ліпшицева функція Ляпунова $V(x) : O_{r_0}(0) \to \mathbb{R}_+$, $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$ такі, що:*

$$c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2, \quad \forall x \in O_{r_0}(0), \tag{11}$$

$$\langle \nabla V(x), f(x)\rangle \leq -c_3\|x\|^2 \quad \text{для майже всіх } x \in O_{r_0}(0). \tag{12}$$

Зауваження 3. *З теореми Радемахера [1] ліпшицева фунція диференційовна майже скрізь, тому (12) має сенс.*

Proof. Доведемо достатність умов (11), (12). Розглянемо функцію $f(t) = V(x(t, x))$, $x \in O_{r_0}(0)$.

Оскільки $t \to x(t,x)$ належить класу C^1, а $x \to V(x)$ – локально ліпшицева, то за правилом ланцюга Кларка (Clarke's chain rule) [1] для ліпшицевих функцій для верхньої правої похідної Діні $D^+f(t)$ справедлива оцінка:

$$\begin{aligned} D^+f(t) &= \overline{\lim_{s\to 0+}} \frac{V(x(t+s,x)) - V(x(t,x))}{s} \\ &\le \max_{\xi\in\partial V(x(t))} \langle \xi, \dot{x}(t)\rangle = \max_{\xi\in\partial V(x(t))} \langle \xi, f(x(t))\rangle. \end{aligned} \tag{13}$$

Тут для $y \in O_{r_0}(0)$ через $\partial V(y)$ позначено субдиференціал Кларка [1] для локально ліпшицевої функції:

$$\partial V(y) = \operatorname{co}\left\{ \lim_{j\to\infty} \nabla V(y_j) \;\middle|\; y_j \to y,\ \exists \nabla V(y_j) \right\}$$

де co – опукла оболонка.

Тепер для $\forall y \in O_{r_0}(0)$ і для $\forall \xi \in \partial V(y)$ нехай

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i,$$

де

$$\alpha_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \quad \xi_i = \lim_{j\to\infty} \nabla V(y_j^{(i)}), \quad y_j^{(i)} \to y.$$

Для $\forall i \in \overline{1,m}$ і $\forall j \ge 1$ в силу (12):

$$\left\langle \nabla V(y_j^{(i)}), f(y_j^{(i)}) \right\rangle \le -c_3 \cdot \|y_j^{(i)}\|^2.$$

Переходячи до границі при $j \to \infty$, з лінійності скалярного добутку виводимо $\forall \xi \in \partial V(y)$:

$$\langle \xi, f(y)\rangle \le -c_3 \|y\|^2.$$

Таким чином, з (13) і (11) для $\forall x \in O_{r_0}(0)$ для функції $f(t) = V(x(t,x))$, $t \ge 0$ одержуємо оцінку:

$$D^+f(t) \le -\frac{c_3}{c_2} f(t).$$

З останньої нерівності, використовуючи лему порівняння [4, Lemma 3.4], виводимо:

$$f(t) \le f(0) e^{-\frac{c_3}{c_2}t}, \quad t \ge 0,$$

тобто $\forall t \ge 0$:

$$V(x(t,x)) \le V(x) e^{-\frac{c_3}{c_2}t}. \tag{14}$$

Тоді з (14) і (11) можемо вивести (3).

Тепер доведемо необхідність умов (11), (12). Нехай $x = 0$ – експоненційно стійке, тобто виконується (3).

Покладемо

$$V(x) = \frac{1}{C^2} \int_0^a \|x(t,x)\|^2 \, dt, \quad \|x\| < \delta.$$

Виберемо $\delta > 0$ так, щоб $C\delta < r$. Тоді з (3) для $\forall t \ge 0$ справедлива оцінка:

$$\|x(t,x)\| \le C\|x\| e^{-\lambda t} < r. \tag{15}$$

Крім того,

$$V(x) \le \frac{C^2}{C^2}\|x\|^2 \int_0^a e^{-2\lambda t}\,dt = \frac{1}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda a})\cdot\|x\|^2. \tag{16}$$

Оскільки для $\|x\| < r$ $\|f(x)\| \le L\|x\|$, то в силу оцінки (15) та [4, p. 107] для $\|x\| < \delta$ $\forall t \ge 0$ справедлива оцінка:

$$\|x(t,x)\| \ge \|x\|e^{-Lt}.$$

Тоді

$$V(x) \ge \frac{1}{C^2}\|x\|^2 \int_0^a e^{-2Lt}\,dt = \frac{1}{C^2 2L}(1-e^{-2La})\cdot\|x\|^2. \tag{17}$$

Нерівності (16), (17) гарантують для функції $V(x)$ виконання нерівностей (11) з:

$$c_2 = \frac{1}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda a}), \quad c_1 = \frac{1}{2LC^2}(1-e^{-2La}).$$

Далі, оскільки для $\|x\| < \delta$, $\|y\| < \delta$ для всіх $t \ge 0$:

$$\|x(t,x) - x(t,y)\| \le e^{Lt}\cdot\|x-y\| \tag{18}$$

то

$$\begin{aligned} |V(x)-V(y)| &= \frac{1}{C^2}\int_0^a \left(\|x(t,x)\|^2 - \|x(t,y)\|^2\right)dt \\ &\le \frac{1}{C^2}\int_0^a 2re^{Lt}\,dt\cdot\|x-y\| \\ &= \frac{2r}{C^2L}(e^{La}-1)\cdot\|x-y\|. \end{aligned} \tag{19}$$

звідси $V(x) : O_\delta(0) \to \mathbb{R}_+$ – ліпшицева функція.

Крім того, для $\|x\| < \delta$ для $\tau > 0$ маємо:

$$\begin{aligned} V(x(\tau,x)) &= \frac{1}{C^2}\int_0^a \|x(t,x(\tau,x))\|^2\,dt \\ &= \frac{1}{C^2}\int_0^a \|x(\tau,x(t,x))\|^2\,dt \\ &\le e^{-2\lambda\tau}\int_0^a \|x(t,x)\|^2\,dt = e^{-2\lambda\tau}\cdot V(x). \end{aligned}$$

Звідси для майже всіх $x \in O_\delta(0)$:

$$\begin{aligned} \langle\nabla V(x), f(x)\rangle &= \overline{\lim_{\tau\to 0+}}\frac{1}{\tau}\big(V(x(\tau,x)) - V(x)\big) \\ &\le \overline{\lim_{\tau\to 0+}}\frac{1}{\tau}(e^{-2\lambda\tau}-1)\cdot V(x) \\ &= -2\lambda\cdot V(x) \le -2\lambda c_1\cdot\|x\|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким чином, маємо виконання (12) з:

$$c_3 = 2\lambda\cdot\frac{1}{2LC^2}(1-e^{-2La}).$$

Вибираючи $r_0 = \delta$, закінчуємо доведення теореми. □

4 Гладкі C^∞ та поліноміальні апроксимації функцій Ляпунова

Для практичних застосувань важливо мати не просто ліпшицеву, а гладку або поліноміальну функцію Ляпунова. Наступний результат дає можливість говорити про гладкість функції Ляпунова.

Лема 2 ([6, 11]). *Нехай $U \subset \mathbb{R}^n$ – деяка відкрита множина і задані функції:*

- $V(x) : U \to \mathbb{R}$ *– локально ліпшицева;*
- $f(x) : U \to \mathbb{R}^n$ *– локально ліпшицева;*
- $\alpha(x) : U \to \mathbb{R}$ *– неперервна;*
- $\mu(x), \delta(x) : U \to (0, +\infty)$ *– неперервні такі, що*

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \le \alpha(x) \quad \text{для майже всіх } x \in U.$$

Тоді існує $\psi \in C^\infty(U)$ така, що:

$$\begin{aligned} &|V(x) - \psi(x)| < \mu(x), \quad \forall x \in U, \\ &\langle \nabla \psi(x), f(x) \rangle \le \alpha(x) + \delta(x), \quad \forall x \in U. \end{aligned} \tag{21}$$

Безпосереднім наслідком Теореми 3 та Леми 2 є наступний результат.

Теорема 4. *Нехай функція $f(x) : O_r(0) \to \mathbb{R}^n$ – ліпшицева з константою L. Тоді положення рівноваги $x = 0$ системи (1) – експоненційно стійке тоді і тільки тоді, коли існує $r_0 < r$, $\exists \overline{V}(x) \in C^\infty(O_{r_0}(0) \setminus \{0\})$ та $\exists \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3 > 0$ такі, що:*

$$\forall x \in O_{r_0}(0) \quad \bar{c}_1 \|x\|^2 \le \overline{V}(x) \le \bar{c}_2 \|x\|^2, \tag{22}$$

$$\forall x \in O_{r_0}(0) \setminus \{0\} \quad \langle \nabla \overline{V}(x), f(x) \rangle \le -\bar{c}_3 \|x\|^2. \tag{23}$$

Зауваження 4. *Неперервність функції $\overline{V}(x)$ на $O_{r_0}(0) \setminus \{0\}$ і (22) тягнуть за собою неперервність $\overline{V}(x)$ на $O_{r_0}(0)$ і рівність $\overline{V}(0) = 0$.*

Proof. Для $x \in O_{r_0}(0) \setminus \{0\}$ справедлива оцінка

$$\frac{d}{dt} \overline{V}(x(t,x)) = \langle \nabla \overline{V}(x(t,x)), f(x(t,x)) \rangle \le -\frac{\bar{c}_3}{\bar{c}_2} \overline{V}(x(t,x)).$$

Звідси

$$\|x(t,x)\|^2 \le \frac{1}{\bar{c}_1} \overline{V}(x(t,x)) \le \frac{1}{\bar{c}_1} \overline{V}(x) e^{-\frac{\bar{c}_3}{\bar{c}_2} t} \le \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \|x\|^2 e^{-\frac{\bar{c}_3}{\bar{c}_2} t}$$

і маємо достатність умов (22), (23).

З іншого боку, застосуємо Лему 2 для $U = O_{r_0}(0) \setminus \{0\}$, локально ліпшицевої функції $V(x)$ з Теореми 3,

$$\alpha(x) = -c_3 \|x\|^2, \quad \delta(x) = \frac{c_3}{2} \|x\|^2, \quad \mu(x) = \frac{1}{2} V(x).$$

Тоді за Лемою 2 існує $\overline{V}(x) \in C^\infty(O_{r_0}(0) \setminus \{0\})$ така, що:

$$\begin{aligned} &|\overline{V}(x) - V(x)| < \frac{1}{2} V(x), \\ &\langle \nabla \overline{V}(x), f(x) \rangle \le -\frac{c_3}{2} \|x\|^2. \end{aligned} \tag{24}$$

З оцінок (24), (11) і неперервності функцій $V(x)$ і $\overline{V}(x)$ маємо виконання умов (22), (23) з

$$\bar{c}_2 = \frac{3}{2} c_2, \quad \bar{c}_1 = \frac{1}{2} c_1, \quad \bar{c}_3 = \frac{c_3}{2}.$$

□

Наступна лема дозволяє говорити про існування нескінченно диференційовної функції Ляпунова у $O_{r_0}(0)$.

Лема 3 ([5,6]). *Нехай задана функція*

$$V(x) \in C^\infty(O_{r_0}(0) \setminus \{0\}) \cap C(O_{r_0}(0)), \quad V(0) = 0, \quad V(x) > 0$$

для $x \in O_{r_0}(0) \setminus \{0\}$. *Тоді існує* $\beta \in \mathcal{K}$, $\beta \in C^\infty(0, +\infty)$, $\beta^{(k)}(t) \to 0$, $t \to 0+$, $k = 0, 1, \ldots$, $\beta'(t) > 0$ $\forall t > 0$ *така, що функція* $W(x) = \beta(V(x))$ *належить* $C^\infty(O_{r_0}(0))$.

Теорема 5. *Нехай функція* $f(x) : O_r(0) \to \mathbb{R}^n$ *– ліпшицева з константою* L *і положення рівноваги системи* (1) $x = 0$ *– експоненційно стійке. Тоді* $\forall \varepsilon > 0$ *існує поліноміальна функція Ляпунова* $V(x)$ *така, що при* $\varepsilon < \|x\| < r_0$ *виконуються умови* (11), (12).

Зауваження 5. *Константи в* (11), (12) *залежать від* ε.

Proof. Візьмемо $\overline{V}(x)$ з Теореми 4, β з Леми 3 і покладемо:

$$W(x) = \beta(\overline{V}(x)), \quad x \in O_{r_0}(0).$$

Тоді за Лемою 3 $W \in C^\infty(O_{r_0}(0))$. Далі з оцінки (22) маємо:

$$\beta(\overline{c}_1 \cdot \|x\|^2) \le W(x) \le \beta(\overline{c}_2 \cdot \|x\|^2).$$

За теоремою про середнє:

$$\beta(c \cdot \|x\|^2) = \beta'(\theta(x)) \cdot c\|x\|^2,$$

де $\theta(x) \in (0, c \cdot \|x\|^2)$. Далі з (23) отримуємо:

$$\begin{aligned} \langle \nabla W(x), f(x) \rangle &= \beta'(\overline{V}(x)) \cdot \langle \nabla \overline{V}(x), f(x) \rangle \\ &\le -\beta'(\overline{V}(x)) \cdot \overline{c}_3 \cdot \|x\|^2 \\ &\le -\beta'(\overline{c}_1 \cdot \|x\|^2) \cdot \overline{c}_3 \cdot \|x\|^2. \end{aligned}$$

Тоді для $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon < r_0$, покладемо:

$$c_1^\varepsilon = \overline{c}_1 \cdot \min_{\varepsilon \le \|x\| \le r_0} \beta'(\theta(x)), \quad c_2^\varepsilon = \overline{c}_2 \cdot \beta'(\overline{c}_2 \cdot r_0)$$

$$c_3^\varepsilon = \overline{c}_3 \cdot \beta'(\overline{c}_1 \cdot \varepsilon)$$

Тоді для функції $W(x) \in C^\infty(O_{r_0}(0))$, $W(0) = 0$, для всіх x, $\varepsilon < \|x\| < r_0$ одержуємо:

$$\begin{aligned} c_1^\varepsilon \|x\|^2 \le W(x) \le c_2^\varepsilon \|x\|^2, \\ \langle \nabla W(x), f(x) \rangle \le -c_3^\varepsilon \|x\|^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Далі використаємо наступний результат.

Лема 4 ([7]). *Нехай* $W(x) \in C^2(O_{r_0}(0))$. *Тоді для* $\forall \delta > 0$ *існує поліном* $p(x)$ *такий, що:*

$$\max_{\|x\| < r_0} \frac{|W(x) - p(x)|}{\|x\|^2} < \delta, \tag{26}$$

$$\max_{\|x\| < r_0} \frac{\|\nabla W(x) - \nabla p(x)\|}{\|x\|^2} < \delta. \tag{27}$$

Для закінчення доведення теореми, виберемо

$$\delta = \frac{1}{2}\min\left\{c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon, \frac{1}{2}c_3^\varepsilon\frac{1}{Lr_0}\right\}$$

і відповідний поліном $p(x)$ з Леми 4. Тоді з (25)–(27) виводимо для $\varepsilon < \|x\| < r_0$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{p(x)-W(x)}{\|x\|^2}\cdot\|x\|^2 + W(x) \\ &\le \delta\cdot\|x\|^2 + c_2^\varepsilon\cdot\|x\|^2 \le \frac{3}{2}c_2^\varepsilon\cdot\|x\|^2. \end{aligned}$$

$$p(x) \ge -\delta\cdot\|x\|^2 + c_1^\varepsilon\cdot\|x\|^2 \ge \frac{1}{2}c_1^\varepsilon\cdot\|x\|^2.$$

$$\begin{aligned} \langle\nabla p(x), f(x)\rangle &= \left\langle\frac{\nabla p(x)-\nabla W(x)}{\|x\|^2}, f(x)\right\rangle\cdot\|x\|^2 + \langle\nabla W(x), f(x)\rangle \\ &\le \delta\cdot\|f(x)\|\cdot\|x\|^2 - c_3^\varepsilon\|x\|^2 < -\frac{c_3^\varepsilon}{2}\|x\|^2. \end{aligned}$$

Звідси слідує, що $p(x)$ і є шукана поліноміальна функція Ляпунова. □

5 Приклад та чисельна верифікація поліноміальної функції Ляпунова

Для ілюстрації практичної реалізації запропонованого теоретичного підходу розглянемо конкретну динамічну систему з локально ліпшицевою правою частиною. Власне акцент зробимо на обчислювальній апробації запропонованого підходу та як підтвердження здатності автоматично відновлювати аналітичну структуру функції Ляпунова для негладкої динамічної системи.

Приклад 2. *Розглянемо систему диференціальних рівнянь*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - |y|\cdot x, \\ \dot{y} = -y - |x|\cdot y, \end{cases} \tag{28}$$

Тут $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Крім того*

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -x - |y|x \\ -y - |x|y \end{pmatrix}$$

є локально ліпшицевою функцією. При цьому $f(x,y) \notin C^1(O_r(0))$. *Дійсно,*

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \begin{cases} -x, & y > 0, \\ x, & y < 0 \end{cases}$$

і ця функція не є неперервною в будь-якій точці $(x_0, 0) \in O_r(0)$.

Але функція Ляпунова $V(x,y) = x^2 + y^2$ *задовольняє умови* (6), (7), *і положення рівноваги* $x = 0$ *для цієї системи – експоненційно стійке.*

Знайдемо функцію Ляпунова для системи (28) на області $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \le 1\}$, використористовуючи метод генетичного програмування та розрідженої оптимізації запропонований в [10].

Функцію Ляпунова шукатимемо в класі поліномів вигляду

$$V(x;c) = \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} c_\alpha x^\alpha,$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ - мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{M}$ – скінченна множина допустимих мультиіндексів, $c_\alpha \in \mathbb{R}$ – коефіцієнти полінома.

Задача побудови функції Ляпунова розкладається на дві взаємопов'язані підзадачі. Генетичне програмування здійснює дискретний пошук символьної структури полінома, тобто визначає, які змінні, їхні добутки та степені мають входити до функції-кандидата. На окремому етапі розрідженої оптимізації визначаються числові коефіцієнти вибраних мономів і водночас вилучаються надлишкові члени.

Такий поділ дає змогу розмежувати два різні типи пошуку: еволюційному алгоритму не потрібно точно налаштовувати дійсні коефіцієнти, тоді як чисельному оптимізатору не доводиться перебирати всі можливі поліноміальні структури.

На структурному рівні функція-кандидат подається у вигляді бінарного дерева. Термінальними вузлами дерева є змінні $x_1, \ldots, x_n$, а внутрішнім вузлам відповідають операції додавання та множення. Після кожної структурної операції символьний вираз розгортається за впорядкованим поліноміальним базисом: однакові мономи об'єднуються, члени з нульовими коефіцієнтами вилучаються, а сталий і лінійні члени не включаються до допустимої опори. Унаслідок цього синтаксично різні дерева, що визначають однаковий поліном, зводяться до одного канонічного поліноміального подання.

Для фіксованого набору мономів коефіцієнти $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{M}}$ визначаються на скінченній навчальній вибірці $X_N = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}\} \subset D$. Функції порушення умов експоненційної стійкості визначаються як

$$\varphi_1(x; c) = k_1 \|x\|^2 - V_d(x; c),$$
$$\varphi_2(x; c) = V_d(x; c) - k_2 \|x\|^2,$$
$$\varphi_3(x; c) = k_3 \|x\|^2 + \langle \nabla V(x), f(x) \rangle,$$

де $0 < k_1 < k_2$ і $k_3 > 0$ – задані параметри.

Легко бачити, що $V(x; c)$ задовольняє достатні умови експоненційної стійкості, коли $\varphi_l(x; c) \leq 0$ для $l = 1, 2, 3$.

Внутрішня задача визначення коефіцієнтів має вигляд

$$\min_c \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{3} \rho\big(\varphi_l(x^{(i)}; c)\big) + \gamma R(c) \right\},$$

де $\rho(z)$ – невід'ємна штрафна функція, яка враховує додатну частину порушення, $R(c)$ – розріджувальний регуляризатор, а $\gamma > 0$ визначає інтенсивність розрідження.

Регуляризатор сприяє зануленню несуттєвих коефіцієнтів і, відповідно, спрощенню остаточного полінома. Після відсікання коефіцієнтів, модулі яких не перевищують заданого чисельного допуску, виконується повторна оптимізація на зменшеній опорі.

У зовнішньому циклі кожне дерево оцінюється після оптимізації його коефіцієнтів. Функція пристосованості поєднує величину порушень умов Ляпунова зі штрафом за структурну складність виразу. Зокрема, враховуються кількість ненульових мономів, степінь полінома та висота синтаксичного дерева.

Найкращі кандидати переходять до наступної генерації відповідно до елітарного механізму відбору. Нові структури утворюються шляхом турнірного відбору, схрещування піддерев, структурної мутації та випадкової регенерації кандидатів.

Для чисельного експерименту використано такі параметри алгоритму:

- розмір початкової популяції: $P = 100$;
- максимальна кількість генерацій: $G_{\max} = 25$;
- кількість кандидатів, відібраних до наступної генерації: $\mu = 50$;

- кількість згенерованих нащадків: $\lambda = 25$;
- ймовірність схрещування: $p_c = 0{,}2$;
- ймовірність мутації: $p_m = 0{,}1$;
- кількість точок у навчальній вибірці: $N = 10\,000$;
- коефіцієнти k_1, k_2, k_3: $k_1 = 0{,}5$, $k_2 = 1{,}5$, $k_3 = 1$;
- коефіцієнт розрідження γ: $\gamma = 0{,}01$;
- чисельний допуск відсікання: $\varepsilon = 10^{-6}$.

Після двох генерацій алгоритму було знайдено функцію Ляпунова $V(x, y) = x^2 + y^2$, яка співпадає з початковим припущенням. Явний вираз знайденої функції забезпечує навіть сильнішу оцінку для похідної, ніж вимагають обмеження з коефіцієнтами k_1, k_2 і k_3.

На рис. 1 наведено поверхню та лінії рівня знайденої функції $V(x, y)$, також рис. 2 показує відповідну похідну в силу системи, значення якої є від'ємними поза початком координат.

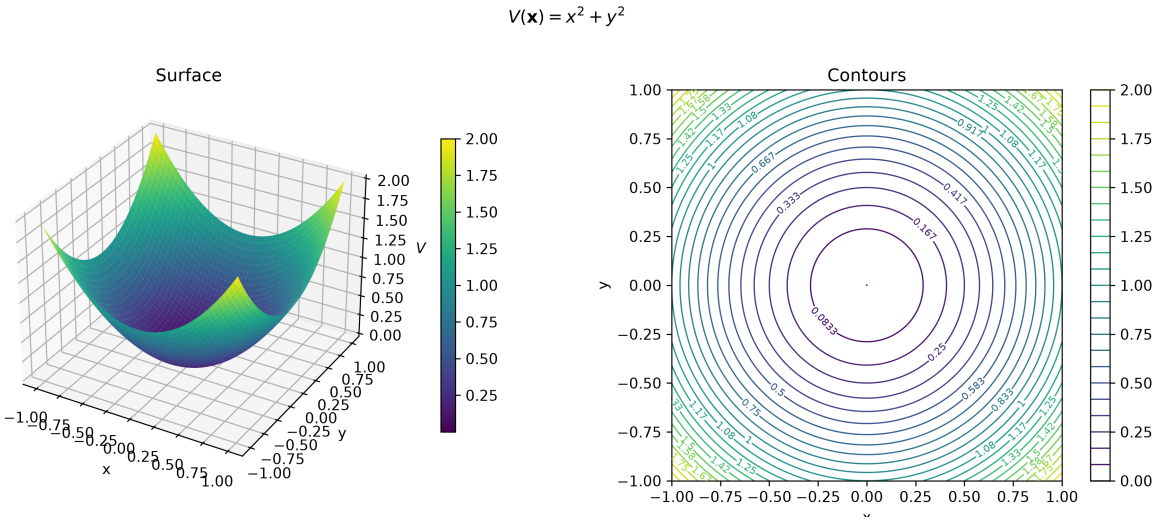

Figure 1: Поверхня та лінії рівня вибраної функції Ляпунова

Також незалежний комплекс вибіркових перевірок завершився успіхом: за допуску $\varepsilon = 10^{-6}$ порушень умов експоненційної стійкості не виявлено. Перевірка охоплювала випадкові, координатно-осьові, напрямлені, сіткові, граничні та навколонульові вибірки, а також перевірку на випадкових траєкторіях.

Висновок

У роботі розроблено та теоретично обґрунтовано комплексний підхід до конструктивного аналізу експоненційної стійкості багатокомпонентних динамічних систем із негладкою, зокрема локально ліпшицевою, правою частиною. Запропонований підхід поєднує строгий математичний апарат негладкого аналізу з чисельно-символьними методами автоматизованого синтезу поліноміальних функцій Ляпунова.

Основним теоретичним результатом роботи є доведення теореми про існування поліноміальної функції Ляпунова для досліджуваного класу негладких динамічних систем. На відміну від відомих результатів існування, зокрема результату M. Peet, у роботі

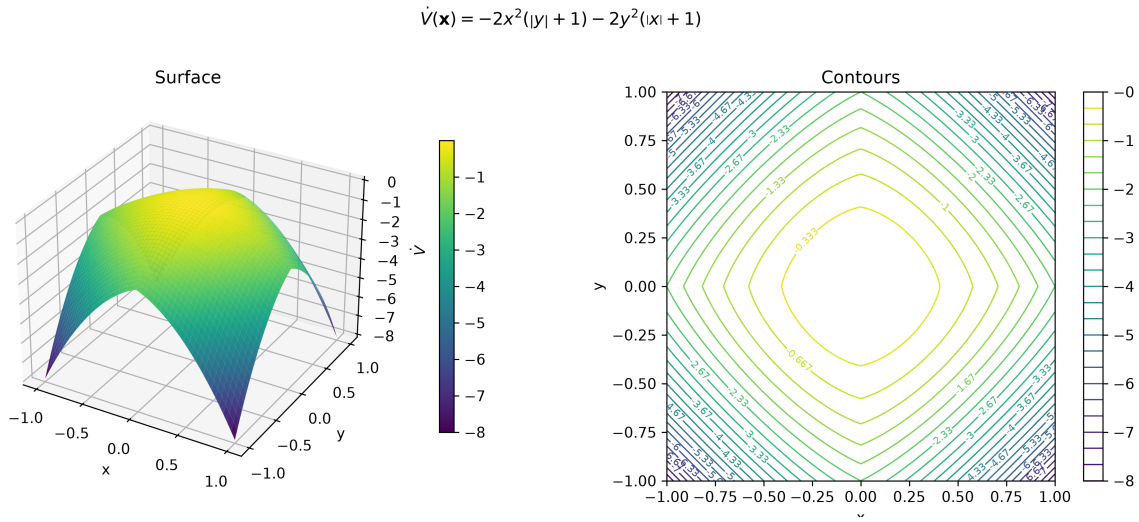

Figure 2: Поверхня та лінії рівня похідної в силу системи

розглянуто поліноміальне наближення на кільцевих областях $\varepsilon < \|x\| < r_0$, що дає змогу відокремити локальні особливості векторного поля поблизу початку координат від властивостей поліноміального наближення на компактних підобластях фазового простору. Застосування апарату негладкого аналізу, зокрема узагальнених похідних Кларка та похідних Діні, забезпечує коректне обґрунтування умов спадання функції Ляпунова за відсутності класичної диференційовності правої частини. Установлено також кількісний зв'язок між параметрами експоненційної стійкості та допустимою точністю поліноміального наближення, що формує теоретичну основу для подальшого конструктивного синтезу.

Другим вагомим результатом є розроблення гібридного чисельно-символьного механізму побудови поліноміальних функцій Ляпунова. Генетичне програмування використано для дискретного пошуку структури полінома, тоді як ℓ_1-регуляризована оптимізація забезпечує визначення його коефіцієнтів і формування розрідженої структури. Така декомпозиція структурного та параметричного пошуку істотно скорочує простір пошуку та зменшує обчислювальну складність, пов'язану з комбінаторним зростанням кількості можливих мономів у багатовимірних системах.

Для врахування негладкості правої частини сформовано спеціальні регуляризовані функції пристосованості та штрафні критерії, орієнтовані на оцінювання порушень умов Ляпунова. Запропоновані процедури не потребують існування класичного градієнта в усіх точках фазового простору, що забезпечує їх застосовність до систем із точками та поверхнями недиференційовності.

Чисельний експеримент підтвердив працездатність і ефективність запропонованого алгоритму. У досліджуваному прикладі необхідна структура та коефіцієнти поліноміальної функції Ляпунова були відновлені вже після двох поколінь генетичного пошуку. Незалежна чисельна верифікація із використанням випадкових, сіткових, граничних і траєкторних вибірок підтвердила виконання умов додатної визначеності функції Ляпунова та необхідного характеру її спадання із заданою чисельною точністю.

Отримані результати свідчать, що запропонований підхід поєднує фундаментальну теорію існування поліноміальних функцій Ляпунова з конструктивною процедурою їх автоматизованої побудови для класу негладких багатокомпонентних систем. Це відкриває можливості для подальшого розвитку методології у напрямі розширення класу символьних представлень за рахунок дробово-раціональних функцій, а також автоматизованого визначення гарантованих оцінок областей притягання (Region of Attraction) для нелінійних

систем великої вимірності.

Список літератури

[1] Clarke F.H. Optimization and Nonsmooth Analysis. Wiley, New York, 1983.

[2] Corless M., Glielmo L. *New converse Lyapunov theorems and related results on exponential stability.* Math. Control Signals Systems 1998, **11** (1), 79–100. doi:10.1007/BF02741886

[3] Guiver C., Logemann H. *The exponential input-to-state stability property: characterisations and feedback connections.* Math. Control Signals Systems 2023, **35** (2), 375–398. doi:10.1007/s00498-023-00344-7

[4] Khalil H.K. Nonlinear Systems, 3rd ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.

[5] Kurzweil J. *On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion.* Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 1963, **24**, 19–77.

[6] Lin Y., Sontag E.D., Wang Y. *A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability.* SIAM J. Control Optim. 1996, **34** (1), 124–160. doi:10.1137/S0363012993259981

[7] Peet M.M. *Exponentially stable nonlinear systems have polynomial Lyapunov functions on bounded regions.* IEEE Trans. Automat. Control 2009, **54** (5), 979–987. doi:10.1109/TAC.2009.2017116

[8] Peet M.M., Bliman P.A. *Polynomial Lyapunov functions for exponential stability of nonlinear systems on bounded regions.* IFAC Proc. Vol. 2008, **41** (2), 1111–1116. doi:10.3182/20080706-5-KR-1001.00192

[9] Pichkur V.V., Kapustian O.V., Sobchuk V.V. Stability and Attractors of Evolutionary Equations. Kyiv University, Kyiv, 2023. (in Ukrainian)

[10] Sobchuk V.V., Pykhnivskyi R.O. *Construction of polynomial Lyapunov functions using genetic programming and sparse optimization.* J. Optim. Differ. Equ. Appl. 2026, **34** (1), 111–133. doi:10.15421/142607

[11] Wilson F.W. *Smoothing derivatives of functions and applications.* Trans. Amer. Math. Soc. 1969, **139**, 413–428. doi:10.1090/S0002-9947-1969-0251747-9

Надійшло 27.08.2026

Прийнято 23.11.2026

Опубліковано 27.11.2026

Pykhnivskyi R.O. *Construction of Lyapunov functions for multicomponent systems with a nonsmooth right-hand side based on genetic algorithms and sparse optimization*, Bukovinian Math. Journal **14** (2) (2026), 70–84.

This study addresses an important problem in the qualitative theory of differential equations: the automated construction of Lyapunov functions for multicomponent dynamical systems with a nonsmooth (locally Lipschitz) right-hand side. The aim of the study is to provide a rigorous mathematical justification for the existence of a polynomial Lyapunov function for nonsmooth systems and to develop a numerical-symbolic method for its constructive synthesis that overcomes the computational challenges associated with high-dimensional problems.

The theoretical part of the study employs tools from nonsmooth analysis and Dini derivatives. In contrast to existing results that require a high degree of smoothness and construct an approximation over the entire compact set, this paper rigorously proves a theorem on the existence of a polynomial Lyapunov function directly for systems whose vector fields have discontinuous partial derivatives, with the approximation performed on annular domains. This establishes a constructive relationship between the exponential-stability parameters and the accuracy of polynomial approximation.

For practical implementation, a hybrid method combining genetic programming and sparse optimization is developed. The genetic algorithm performs a discrete search for symbolic structures represented as binary trees, in which the terminal nodes are the system variables and the internal nodes correspond to addition and multiplication operations. To eliminate syntactic redundancy, expressions are expanded in a canonical polynomial basis. In the inner loop, the numerical optimizer performs regularization by minimizing absolute deviations while accounting for penalty functions associated with violations of the Lyapunov conditions. After coefficients whose absolute values do not exceed a prescribed numerical tolerance are pruned, the optimization is repeated over the reduced monomial support.

The numerical experiment confirmed the high computational efficiency of the method: for the nonsmooth system under consideration, the required polynomial Lyapunov function was found after only two generations of the algorithm. An independent suite of tests comprising random, coordinate-axis, grid-based, and boundary samples confirmed the absence of violations of the exponential-stability conditions. The proposed approach provides a foundation for analysing the stability of complex high-dimensional engineering and biological systems.

© Видавець Буковинський матем. журнал, 2026.
Це стаття відкритого доступу за ліцензією CC BY 4.0.
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/