

УДК 517.929, 519.711.3
№ держреєстрації 0120U105712
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ЧНУ ім. Ю. Федьковича
58002, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
тел. (0372) 58-48-18, nd-office@chnu.edu.ua



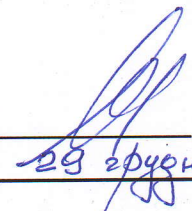
ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи,
д-р хім. наук

Юрій ХАЛАВКА
_____ 2025 р.

**ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ**

**МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ДЕТЕРМІНОВАНИМИ
І СТОХАСТИЧНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ТА
ЕВОЛЮЦІЙНИМИ РІВНЯННЯМИ, І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
(остаточний)**

Науковий керівник НДР
д-р ф.-м. наук, проф.


_____ Ігор ЧЕРЕВКО
_____ 29 грудня 2025 р.

2025

Рукопис закінчено 29 грудня 2025 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, завідувач кафедри, д-р фіз.-мат. наук, професор	_____	І. М. Черевко (реферат, вступ, розділи 1, 2, п. 5.1, 5.5, висновки)
Виконавці: Аспірант кафедри	_____	О. В. Осипова (розділ 1)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	_____	А. С. Перцов (п. 1.3)
Аспірант кафедри	_____	І. І. Візінська (розділ 2, п. 5.1)
Асистент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	_____	А. Б. Дорош (п. 2.2, п. 2.3.2)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	О. В. Матвій (п. 2.3.1)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	І. В. Юрченко (розділ 3)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	_____	М. Ю. Горбатенко (п. 3.5)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	Г. С. Пасічник (п. 4.1–4.5)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	Г. П. Івасюк (п. 4.6)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	Т. М. Фратавчан (п. 4.6)
Доцент кафедри, д-р фіз.-мат. наук, доцент	_____	І. І. Клевчук (п. 4.7, п. 5.3)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	Л. А. Піддубна (п. 5.1.1)
Асистент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	_____	С. А. Іліка (п. 5.1.1)

Аспірант кафедри	_____	О. С. Краснокутський (п. 5.1)
Асистент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	_____	В. С. Мельник (п. 5.2)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	І. В. Дорошенко (п. 5.4)
Аспірант кафедри	_____	І. Т. Косович (п. 5.5)
Асистент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	_____	Д. В. Шкільнюк (п. 5.5.2)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 185 с., 3 табл., 17 рис., 157 джерел.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ, ПАРАБОЛІЧНІ, СТОХАСТИЧНІ РІВНЯННЯ, СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ, ДЕКОМПОЗИЦІЯ, ІНТЕГРАЛЬНИЙ МНОГОВИД, ПРИНЦИП ЗВЕДЕННЯ, СТІЙКІСТЬ, ОБЛАСТЬ СТІЙКОСТІ, СХЕМА АПРОКСИМАЦІЇ, ЗАДАЧА КОШІ, КРАЙОВА ЗАДАЧА, КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК, МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО, БІФУРКАЦІЯ, ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ, МАРКОВСЬКІ ПЕРЕМИКАННЯ, МАШИННЕ НАВЧАННЯ, ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, SIR МОДЕЛІ.

Об'єкт дослідження – багатотемпові сингулярно збудені системи диференціальних рівнянь, диференціально-різницеви та диференціально-функціональні рівняння, стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними, ультрапараболічні рівняння з необмежено зростаючими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині, математичні моделі екологічних систем, SIR-моделі інфекційних захворювань.

Мета роботи – асимптотичне розщеплення лінійних сингулярно збудених диференціальних рівнянь, новий підхід до наближеного розв'язання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, дослідження властивостей сильних розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними під дією різних типів випадкових збудень, вивчення фундаментальних розв'язків задачі Коші для нових класів ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова, біфуркація циклів та торів для різних класів диференціальних рівнянь з частинними похідними, обґрунтування методів математичного та комп'ютерного моделювання задач з післядією та випадковостями, екологічних, економічних та фінансових процесів, імітаційне моделювання поширення епідемії.

Здійснено обґрунтування методу декомпозиції системи лінійних сингулярно збудених рівнянь з багатьма малими параметрами до сукупності не-

залежних підсистем. Розщеплююче перетворення будується із довільною точністю у вигляді асимптотичних розкладів за степенями малих параметрів.

Запропоновано новий підхід наближеного розв'язання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, що базується на схемах апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь.

Досліджено існування, єдиності, стійкості та асимптотичні властивості сильних розв'язків широкого класу стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними під дією різних типів випадкових збурень.

Для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова другого порядку з коефіцієнтами, які можуть зростати при $|x| \rightarrow \infty$ і не залежать від групи змінних виродження рівняння, досліджено властивості фундаментального розв'язку, здійснено аналіз коректності задачі Коші. Досліджено біфуркацію циклів та торів для різних класів диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Розглянуто алгоритми дослідження на стійкість систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями та запропоновано схему побудови області стійкості рівнянь із багатьма запізненнями. Досліджено методи математичного моделювання, машинного навчання та обробки природної мови для аналізу економічних процесів, розглянуто два підходи до моделювання поширення інфекцій: SIR моделі та навчання з підкріпленням.

Усі наведені в звіті результати є новими. Вони можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях так і при обґрунтуванні методик розв'язання та наближеній побудові розв'язків конкретних прикладних задач.

ЗМІСТ

ВСТУП		11
1 ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОТЕМПОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ		13
1.1	Вступ	13
1.2	Схема розщеплення системи з багатьма малими параметрами. .	14
1.3	Невироджена розщеплююча заміна змінних системи лінійних сингулярно збурених рівнянь з багатьма малими параметрами .	17
1.3.1	Існування розв'язків допоміжних систем інтегральних рівнянь	17
1.3.2	Існування невиродженої розщеплюючої заміни змінних .	19
1.4	Асимптотичні розклади розщеплюючого перетворення	22
2 АПРОКСИМАЦІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ		31
2.1	Вступ	31
2.2	Існування та єдиність розв'язку	31
2.3	Схеми апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями	34
2.3.1	Апроксимація простішої крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння із запізненням	34
2.3.2	Апроксимація загальної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння із запізненням	39
2.4	Приклад	42
3 ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ СПЕЦІАЛЬНОГО ТИПУ ТА ЇХ КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ		45

3.1	Вступ	45
3.2	Існування та єдиність розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння з частинними похідними спеціального вигляду та методи його комп'ютерного моделювання	47
3.2.1	Постановка задачі	47
3.2.2	Єдиність розв'язку задачі Коші СДФРЧР (3.1)-(3.3)	51
3.2.3	Алгоритм побудови наближеного розв'язку для СДФРЧП (3.1)-(3.3)	52
3.2.4	Візуалізація траєкторій розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з пуассоновими збуреннями та запізненнями з аналізом стійкості розв'язку з використанням Python	55
3.3	Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних	60
3.3.1	Постановка задачі	60
3.3.2	Про попередні результати та основні означення	61
3.3.3	Основне твердження	63
3.4	Критерії стійкості та нестійкості в середньому квадратичному дифузійних стохастичних диференціально-функціональних системах Гіхмана–Іто під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин	65
3.4.1	Постановка задачі	65
3.4.2	Перехід до інтегрального розв'язку задачі (3.30)-(3.31) за допомогою фундаментального розв'язку скороченої задачі	66
3.4.3	Необхідні та достатні умови належності розв'язків системи лінійних СДФР до простору сумовних за часом в середньому квадратичному випадкових процесів	68

3.4.4	Асимптотична стійкість та нестійкість в середньому квадратичному (l.i.m.) розв'язків систем лінійних СДФР . . .	70
3.4.5	Асимптотична поведінка на безмежності другого моменту розв'язку систем лінійних СДФР загального вигляду під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин . . .	71
3.4.6	Стохастична задача стабілізації курсу океанського лайнера під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин	74
3.5	Про існування оптимального керування для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь під дією зовнішніх збурень	76
3.5.1	Постановка задачі	76
3.5.2	Теорема порівняння для розв'язків СДФР	76
3.5.3	Задача існування оптимального керування розв'язків СДФР серед допустимих керувань	78
4	ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОВОРА З ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА БІФУРКАЦІЯ ЦИКЛІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ	84
4.1	Вступ	84
4.2	Фундаментальний розв'язок задачі Коші для дисипативного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з коефіцієнтами, які не залежать від змінних виродження	86
4.3	Зображення розв'язків одного ультрапараболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині	98
4.4	Властивості об'ємного потенціалу для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів . .	105
4.5	Задача Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами	108

4.6	Про властивості операторів Гріна і спряжених з ними операторів, породжених задачею Коші для параболічних за Ейдельманом систем довільного порядку	113
4.7	Біфуркація циклів параболічних систем із малою дифузією	116
4.7.1	Біжучі хвилі параболічних рівнянь із малою дифузією	116
4.7.2	Періодичні режими рівняння спінового горіння та їх стійкість	117
4.7.3	Біфуркація торів у параболічних системах диференціальних рівнянь із малою дифузією	117
5	МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ПРОЦЕСІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ	121
5.1	Дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь	121
5.1.1	Алгоритми дослідження стійкості	121
5.1.2	Опис використаних інформаційних технологій	127
5.2	Сучасні методи математичного моделювання, машинного навчання та обробки природної мови для аналізу економічних процесів і текстових даних	132
5.2.1	Вступ	132
5.2.2	Моделювання економічних та фінансових процесів. Аналіз часових рядів	132
5.2.3	Обробка природної мови та нечітка логіка	135
5.2.4	Автоматизація освітнього процесу на платформі GitHub Classroom	136
5.3	Побудова областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями	137
5.3.1	Вступ	137
5.3.2	Рівняння із двома запізненнями	139
5.3.3	Рівняння із двома запізненнями та доданком без запізнення	143

5.3.4	Рівняння із трьома запізненнями	144
5.4	Математичні моделі екстремальних режимів в екологічних системах	145
5.4.1	Вступ	145
5.4.2	Побудова екологічно-математичних моделей	146
5.4.3	Аналіз часового ряду	148
5.5	Імітаційне моделювання SIR моделей методом клітинних автоматів	153
5.5.1	Вступ	153
5.5.2	Імітаційне моделювання SIR моделей	154
5.5.3	Дослідження соціального дистанціювання за допомогою навчання з підкріпленням	160
5.5.4	Висновки та перспективи подальших досліджень	163
	ВИСНОВКИ	165
	ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ	167

ВСТУП

У звіті наведені результати, які одержані протягом 2021-2025 рр. співробітниками кафедри математичного моделювання ЧНУ при виконанні НДР "Математичне та комп'ютерне моделювання динамічних процесів, що описуються детермінованими і стохастичними диференціально-функціональними та еволюційними рівняннями, і їх застосування". Ці дослідження є продовженням виконаної в 2016-2020 рр. кафедрою математичного моделювання НДР "Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних та еволюційних рівнянь і моделювання детермінованих та стохастичних прикладних процесів". Звіт складається з 5 розділів.

Результати, що представлені в першому розділі, стосуються методу декомпозиції системи лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь з багатьма малими параметрами до сукупності незалежних підсистем. Такий підхід є результативним, якщо вдається знайти коефіцієнти розщеплюючого перетворення. Запропонована в роботі методика поєднує в собі як асимптотичні, так і якісні методи аналізу. Розщеплююче перетворення будується із довільною точністю у вигляді асимптотичних розкладів за степенями малих параметрів.

Другий розділ містить результати про дослідження крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. Відомо, що не існує універсальних методів побудови їх точних розв'язків. У даному розділі запропоновано новий підхід наближеного розв'язання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, що базується на схемах апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь.

Отримані результати третього розділу охоплюють питання існування, єдиності та стійкості розв'язків широкого класу стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними під дією різних типів випадкових збурень, запропоновано інструменти для аналізу складних стохастичних моделей та продемонстровано практичну реалізацію стохастичних

процесів у вигляді чисельних алгоритмів і симуляцій.

У четвертому розділі розглядаються ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова другого порядку зі зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами. Досліджено властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова та розглядається питання існування і єдиності класичного розв'язку задачі Коші для нелінійного параболического рівняння другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами лінійної частини. Для систем нелінійних гіперболічних рівнянь досліджено існування зліченного числа циклів, а у системах параболических рівнянь з малою дифузійною вивчено біфуркацію циклів (феномен буферності).

П'ятий розділ містить результати математичного та комп'ютерного моделювання ряду прикладних задач. Зокрема запропонована ефективна методика дослідження стійкості розв'язків лінійних стаціонарних систем із сталим запізненням, а також розроблено конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями. Досліджено інтеграцію методів обробки природної мови та розроблено алгоритм автоматичного виявлення емоційного контексту. Здійснено математичне моделювання екологічних ризиків і прогнозування екстремальних явищ у природному середовищі під дією антропогенних і природних факторів. Розглянуто імітаційне моделювання за допомогою мультиагентного методу для моделювання процесів у епідеміології.

Дослідження, результати яких увійшли до звіту, використовуються при виконанні студентами курсових і кваліфікаційних робіт. За їх матеріалами захищені кандидатська дисертація О.В. Осипової (2021 р., науковий керівник І.М. Черевко) [1] та дві дисертації на здобуття наукового ступеня доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика І.І. Візінської (2023 р., науковий керівник І.М. Черевко) [2], І.Т. Косовича (2023 р., науковий керівник І.М. Черевко) [3].

Виконавці НДР брали активну участь у роботі міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій. Ними зроблено 108 доповідей.

1 ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОТЕМПОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ

1.1 Вступ

Теорія сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь інтенсивно розвивається, а її методи широко використовуються для різних задач науки і техніки. Сингулярно збурені моделі описують динамічні процеси у фізиці, хімічній кінетиці, теорії автоматичного керування, гіроскопічних системах, економічних та біологічних процесах [4, 5]. Сингулярно збуреним системам притаманна наявність примежового шару та властивість жорсткості при чисельних обчисленнях. У зв'язку з цим, основні результати дослідження систем високої розмірності із швидкими та повільними змінними зводились до побудови асимптотичних розкладів початкових та крайових задач. Відзначимо огляди [6]-[8], де проаналізовано значну кількість праць, що присвячені даній тематиці.

Для якісного дослідження не окремих траєкторій, а всієї системи, доцільно застосовувати декомпозиційні алгоритми. Ефективні методи декомпозиції сингулярно збурених систем, що базуються на ідеях методу інтегральних многовидів, запропоновано в роботах [9, 10]. Для лінійних сингулярно збурених систем такий підхід дозволяє здійснити розщеплення вихідної системи на незалежні швидко і повільну підсистеми [11, 12].

Лінійні неавтономні трьохтемпові та багатотемпові системи вивчались в працях [13]-[17].

У даному розділі здійснено обґрунтування методу декомпозиції системи лінійних сингулярно збурених рівнянь з багатьма малими параметрами до сукупності незалежних підсистем. Такий підхід є результативним, якщо вдається знайти коефіцієнти розщеплюючого перетворення. Запропонований в роботі підхід поєднує в собі як асимптотичні, так і якісні методи аналізу. Розщеплююче перетворення будується із довільною точністю у вигляді асимптотичних розкладів за степенями малих параметрів.

1.2 Схема розщеплення системи з багатьма малими параметрами.

Розглянемо лінійну сингулярно збурену систему

$$\prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{x}_i = \sum_{j=0}^k A_{ij} x_j, \quad i = \overline{0, k}, \quad (1.1)$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{0, k}$, $A_{ij} = A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0, k}$, – матриці розмірностей $n_i \times n_j$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ – малі додатні параметри.

Припустимо, що:

1) матриці $A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0, k}$, неперервні та рівномірно обмежені для $t \in \mathbb{R}$;

2) власні значення $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n_k}$, матриці $A_{kk}(t)$ задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq -2\beta < 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Розщеплення системи (1.1) буде здійснюватися за k років. Здійснимо в системі (1.1) заміну змінних

$$\begin{cases} x_i = y_i^1 + \prod_{j=i+1}^k \varepsilon_j H_i^1 y_k^1, & i = \overline{0, k-1}, \\ x_k = y_k^1 + \sum_{j=0}^{k-1} P_j^1 x_j, \end{cases} \quad (1.2)$$

де H_i^1, P_j^1 , $i, j = \overline{0, k-1}$ – матричні функції відповідних розмірностей.

В результаті система (1.1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{y}_i^1 &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(A_{ij} + A_{ik} P_j^1 - H_i^1 (A_{kj} + A_{kk} P_j^1 - \right. \\ &- \left. \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{n=m+1}^k \varepsilon_n P_m^1 (A_{mj} + A_{mk} P_j^1) - \prod_{m=1}^k \varepsilon_m \dot{P}_j^1 \right) y_j^1 + \\ &+ \left(A_{ik} - H_i^1 \left(A_{kk} - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m P_j^1 A_{jk} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m \left(A_{kj} + A_{kk} P_j^1 - \prod_{m=1}^k \varepsilon_m \dot{P}_j^1 - \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{n=m+1}^k \varepsilon_n P_m^1 (A_{mj} + A_{mk} P_j^1) \Big) H_j^1 \Big) - \prod_{m=1}^k \varepsilon_m \dot{H}_i^1 + \\
& + \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{n=m+1}^k \varepsilon_n (A_{im} + A_{ik} P_m^1) H_m^1 \Big) y_k^1, \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (1.3) \\
& \prod_{j=0}^k \varepsilon_j \dot{y}_k^1 = \sum_{j=0}^{k-1} \left(A_{kj} + A_{kk} P_j^1 - \prod_{m=1}^k \varepsilon_m \dot{P}_j^1 - \right. \\
& \left. - \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{n=m+1}^k \varepsilon_n P_m^1 (A_{mj} + A_{mk} P_j^1) \right) y_i^1 + (A_{kk} - \\
& - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m P_j^1 A_{jk} + \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m (A_{kj} + A_{kk} P_j^1 - \\
& - \prod_{m=1}^k \varepsilon_m \dot{P}_j^1 - \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{n=m+1}^k \varepsilon_n P_m^1 (A_{mj} + A_{mk} P_j^1) \Big) H_j^1 \Big) y_k^1.
\end{aligned}$$

Якщо матриці H_i^1, P_j^1 , $i, j = \overline{0, k-1}$ вибрати як обмежені розв'язки відповідних систем

$$\prod_{m=1}^k \varepsilon_m \dot{P}_j^1 = A_{kj} + A_{kk} P_j^1 - \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{n=m+1}^k \varepsilon_n P_m^1 (A_{mj} + A_{mk} P_j^1), \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
\prod_{m=1}^k \varepsilon_m \dot{H}_i^1 &= A_{ik} - H_i^1 \left(A_{kk} - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m P_j^1 A_{jk} \right) + \\
& + \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{n=m+1}^k \varepsilon_n (A_{im} + A_{ik} P_m^1) H_m^1, \quad (1.5)
\end{aligned}$$

тоді система (1.1) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{y}_i^1 = \sum_{j=0}^{k-1} B_{ij}^1 y_j^1, & i = \overline{0, k-1}, \\ \prod_{j=0}^k \varepsilon_j \dot{y}_k^1 = B_{kk}^1 y_k^1, \end{cases} \quad (1.6)$$

де $B_{ij}^1 = A_{ij} + A_{ik} P_j^1$, $i, j = \overline{0, k-1}$, $B_{kk}^1 = A_{kk} - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m P_j^1 A_{jk}$.

Щоб здійснити другий крок розщеплення, зробимо наступне припущення:

3) власні значення матриці $B_{k-1,k-1}^1$ задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda_i (B_{k-1,k-1}^1) \leq -2\gamma < 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді за допомогою заміни змінних

$$\begin{cases} y_i^1 = y_i^2 + \prod_{j=i+1}^{k-1} \varepsilon_j H_i^2 y_{k-1}^2, \quad i = \overline{0, k-2}, \\ y_{k-1}^1 = y_{k-1}^2 + \sum_{j=0}^{k-2} P_j^2 y_j^1 \end{cases} \quad (1.7)$$

одержуємо дві незалежні підсистеми із системи (1.6)

$$\begin{cases} \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{y}_i^2 = \sum_{j=0}^{k-2} B_{ij}^2 y_j^2, \quad i = \overline{0, k-2}, \\ \prod_{j=0}^k \varepsilon_j \dot{y}_{k-1}^2 = B_{k-1,k-1}^2 y_{k-1}^2, \end{cases} \quad (1.8)$$

де $B_{ij}^2 = B_{ij}^1 + B_{i,k-1}^1 P_j^2$, $i, j = \overline{0, k-2}$, $B_{k-1,k-1}^2 = B_{k-1,k-1}^1 - \sum_{j=0}^{k-2} \prod_{m=j+1}^{k-1} \varepsilon_m P_j^2 B_{j,k-1}^1$.

Матриці P_i^2 , H_i^2 , $i = \overline{0, k-2}$, є рівномірно обмеженими розв'язками систем

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{k-1} \varepsilon_m \dot{P}_j^2 &= B_{k-1,j}^1 + B_{k-1,k-1}^1 P_j^2 - \\ &\quad - \sum_{m=0}^{k-2} \prod_{n=m+1}^{k-1} \varepsilon_n P_m^2 (B_{mj}^1 + B_{m,k-1}^1 P_j^2), \\ \prod_{m=1}^k \varepsilon_m \dot{H}_i^2 &= B_{i,k-1}^1 + \sum_{m=0}^{k-2} \prod_{n=m+1}^{k-1} \varepsilon_n (B_{im}^1 + B_{i,k-1}^1 P_m^2) H_m^2 - \\ &\quad - H_i^2 \left(B_{k-1,k-1}^1 - \sum_{j=0}^{k-2} \prod_{m=j+1}^{k-1} \varepsilon_m P_j^2 B_{j,k-1}^1 \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Продовжуючи цей процес, на $(k-1)$ -ому кроці отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{y}_0^{k-1} = B_{00}^{k-1} y_0^{k-1} + B_{01}^{k-1} y_1^{k-1}, \\ \varepsilon_1 \dot{y}_1^{k-1} = B_{10}^{k-1} y_0^{k-1} + B_{11}^{k-1} y_1^{k-1}, \\ \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{y}_i^{k+1-i} = B_{ii}^{k+1-i} y_i^{k+1-i}, \quad i = \overline{2, k}, \end{cases} \quad (1.10)$$

де $B_{ij}^{k-1} = B_{ij}^{k-2} + B_{i2}^{k-2}P_j^{k-1}$, $i, j = 0, 1$, $B_{22}^{k-1} = B_{22}^{k-2} - \varepsilon_1\varepsilon_2P_0^{k-1}B_{02}^{k-2} - \varepsilon_2P_1^{k-1}B_{12}^{k-2}$.

Тепер за допомогою заміни змінних у системі (1.10)

$$\begin{cases} y_0^{k-1} = y_0^k + \varepsilon_1 H_0^k y_1^k, \\ y_1^{k-1} = y_1^k + P_0^k y_0^{k-1}, \end{cases} \quad (1.11)$$

отримаємо "блочно-діагональну" систему

$$\begin{cases} \dot{y}_0^k = B_{00}^k y_0^k, \\ \varepsilon_1 \dot{y}_1^k = B_{11}^k y_1^k, \\ \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{y}_i^{k+1-i} = B_{ii}^{k+1-i} y_i^{k+1-i}, i = \overline{2, k}, \end{cases} \quad (1.12)$$

де $B_{00}^k = B_{00}^{k-1} + B_{01}^{k-1}P$, $B_{11}^k = B_{11}^{k-1} - \varepsilon_1 P B_{01}^{k-1}$.

Тут H_0^k, P_0^k – матричні функції, які задовольняють рівняння

$$\varepsilon_1 \dot{P}_0^k = B_{10}^{k-1} + B_{11}^{k-1}P_0^k - \varepsilon_1 P_0^k (B_{00}^{k-1} + B_{02}^{k-1}P_0^k), \quad (1.13)$$

$$\varepsilon_1 \dot{H}_0^k = B_{01}^{k-1} - H_0^k (B_{11}^{k-1} - \varepsilon_1 P_0^k B_{01}^{k-1}) + \varepsilon_1 (B_{00}^{k-1} + B_{02}^{k-1}P_0^k) H_0^k. \quad (1.14)$$

На кожному кроці декомпозиції ми припускаємо, що:

3_i) власні значення матриці B_{ii} , $i = \overline{1, k-1}$, задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda_j (B_{ii}) \leq -2\gamma < 0.$$

1.3 Невироджена розщеплююча заміна змінних системи

лінійних сингулярно збурених рівнянь з багатьма малими параметрами

1.3.1 Існування розв'язків допоміжних систем інтегральних рівнянь

Покажемо, що існує неvirоджена заміна змінних, яка приводить вихідну систему (1.1) до "блочно-діагональної" системи (1.9).

Позначимо $Q(t, s, \varepsilon)$ фундаментальну матрицю рівняння

$$\prod_{j=0}^k \varepsilon_j \dot{x}_k = A_{kk} x_k. \quad (1.15)$$

Рівномірною обмеженістю матриці A_{kk} і умова 2) забезпечує оцінку:

$$\|Q(t, s, \varepsilon)\| \leq K e^{-\frac{3\beta}{k}(t-s)}, \quad (1.16)$$

для деякого $K > 0$ при будь-яких $-\infty < s \leq t < \infty$.

Запишемо систему (1.4) в еквівалентній формі системи інтегральних рівнянь:

$$P_i(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\prod_{j=0}^k \varepsilon_j} \int_{-\infty}^t Q(t, s, \varepsilon) \left(A_{ki}(s, \varepsilon) - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m P_j(s, \varepsilon) \times \right. \\ \left. \times (A_{ji}(s, \varepsilon) + A_{jk}(s, \varepsilon) P_i(s, \varepsilon)) \right) ds, \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (1.17)$$

За допомогою принципу стискаючих відображень покажемо, що система (1.17) має єдиний обмежений на всій числовій осі розв'язок. Будемо шукати розв'язок системи (1.17) методом послідовних наближень:

$$P_i^{n+1} = \frac{1}{\prod_{j=0}^k \varepsilon_j} \int_{-\infty}^t Q \left(A_{ki} - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m P_j^n (A_{ji} + A_{jk} P_i^n) \right) ds, \quad (1.18) \\ i = \overline{0, k-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Покладемо $P_i^0 = 0$, $i = \overline{0, k-1}$. Використовуючи нерівність (1.16) і умови 1)-2), легко показати, що існує $\varepsilon_k^* > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon_k^*)$ послідовності $P_i^n(t, \varepsilon)$, $i = \overline{0, k-1}$, є рівномірно збіжними при $n \rightarrow \infty$ і обмеженими для $t \in \mathbb{R}$.

Покладемо $P_i(t, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_i^n(t, \varepsilon)$, $i = \overline{0, k-1}$.

Перепишемо систему (1.5), враховуючи позначення для матриць B_{ij} , $i, j = \overline{0, k}$ у вигляді

$$\prod_{j=1}^k \varepsilon_j \dot{H}_i^1 = A_{ik} + \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m B_{ij} H_j^1 - H_i^1 B_{kk}, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (1.19)$$

Позначимо через $Q_{H_i}(t, s, \varepsilon)$ фундаментальні матриці рівнянь

$$\prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{x}_i = B_{ij}(t, \varepsilon) x_i, \quad i = \overline{0, k-1},$$

а через $\bar{Q}(t, s, \varepsilon)$ – фундаментальну матрицю рівняння

$$\prod_{i=1}^k \varepsilon_i y_k^1 = \left(A_{kk} - \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i+1}^k \varepsilon_j P_i^1 A_{ik} \right) y_k^1. \quad (1.20)$$

Систему (1.19) можна представити у вигляді системи інтегральних рівнянь

$$H_i^1 = -\frac{1}{\prod_{j=1}^k \varepsilon_j} \int_{-\infty}^t \bar{Q} \left(A_{ik} + \sum_{j=0, j \neq i}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m B_{ij} H_j^1 \right) Q_{H_i} ds, \quad (1.21)$$

$$i = \overline{0, k-1}.$$

Якщо виконуються умови 1)-2) і параметр ε_k достатньо малий, то для фундаментальної матриці $\bar{Q}(t, s, \varepsilon)$ справедлива оцінка

$$|\bar{Q}(t, s, \varepsilon)| \leq K e^{-\frac{\beta}{\prod_{i=1}^k \varepsilon_i} (t-s)}. \quad (1.22)$$

Використовуючи нерівність (1.23) можна довести існування обмеженого для $t \in \mathbb{R}$ розв'язку системи (1.21) аналогічно як і для (1.17).

Наведені вище міркування запишемо у вигляді твердження.

Лема 1.1. *Нехай виконуються умови 1) і 2). Тоді існує $\varepsilon_k^* > 0$ таке, що при $0 < \varepsilon_k < \varepsilon_k^*$ система (1.4)-(1.5) має єдиний обмежений розв'язок при $t \in \mathbb{R}$.*

Аналогічним чином обґрунтовуються твердження, про існування для наступних кроків розщеплюючих перетворень.

1.3.2 Існування невідродженої розщеплюючої заміни змінних

Виражаючи старі змінні x_i , $i = \overline{0, k}$ через нові y_0^k, y_i^{k+1-i} , $i = \overline{1, k}$, одержуємо наступну теорему.

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови 1)-3). Тоді для достатньо малих ε_i , $i = \overline{1, k}$, існує невідроджена заміна змінних*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} y_0^k \\ y_1^k \\ y_2^{k-1} \\ \vdots \\ y_k^1 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

за допомогою якої система (1.1) зводиться до послідовності незалежних підсистем

$$\begin{cases} \dot{y}_0^k = B_{00}^k y_0^k, \\ \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{y}_i^{k+1-i} = B_{ii}^{k+1-i} y_i^{k+1-i}, i = \overline{1, k}. \end{cases}$$

Вигляд розщеплюючого перетворення

$$\Phi [i, j] = \begin{cases} R_j^{k-j} + \sum_{m=0}^{j-1} \prod_{n=m+1}^j \varepsilon_n R_m^{k-j+1} H_m^{k-j+1}, & (i \geq j) \wedge (i > 1), \\ R_i^{k-i} = E, R_m^{k-i+1} = P_m^{k-i+1}, \\ R_m^{n+1} = R_m^n + R_{k-n}^n P_m^{n+1}, \\ \prod_{m=i+1}^j \varepsilon_m H_i^{k+1-j} y_j^{k+1-j}, & (i < j) \wedge (j > 1), \\ E, i = j = 0, \\ \varepsilon_1 H_0^k, i = 0, j = 1, \\ P_0^k, i = 1, j = 0, \\ E + \varepsilon_1 P_0^k H_0^k, i = j = 1. \end{cases}$$

впливає із структури замін змінних на кожному кроці. Для доведення теореми треба показати, що перетворення Φ невиврожене, тобто існує обернене перетворення Φ^{-1} . Виразимо змінні $y_0^k, y_i^{k+1-i}, i = \overline{1, k}$ через змінні $x_i, i = \overline{0, k}$.

З рівностей (1.2) випливає

$$\begin{cases} y_i^1 = x_i - \prod_{j=i+1}^k \varepsilon_j H_i^1 y_k^1, & i = \overline{0, k-1}, \\ y_k^1 = x_k - \sum_{j=0}^{k-1} P_j^1 x_j, \end{cases}$$

З цієї та наступних заміни дістаємо, що y_0^k, y_i^{k+1-i} , $i = \overline{1, k}$, можна виразити через змінні x_i , $i = \overline{0, k}$ за такими формулами

$$y_0^k = \sum_{j=0}^k D_{0j}^{k+1} x_j,$$

$$y_i^{k+1-i} = \sum_{j=0}^k D_{ij}^{k+1-i} x_j,$$

де для $n = \overline{0, k-1}$, $j = \overline{0, k}$

$$D_{k-n,j}^{n+1} = D_{k-n,j}^n - \sum_{m=0}^{k-n-1} P_m^{n+1} D_{k-n,j}^{n+1},$$

$$D_{ij}^{n+1} = D_{ij}^n - \prod_{m=i+1}^{k-n} \varepsilon_m H_i^{n+1} D_{k-n,j}^{n+1}, \quad i = \overline{0, k-n-1},$$

$$D_{ij}^0 = 0, \quad i \neq j,$$

$$D_{ii}^0 = E,$$

$$D_{0j}^{k+1} = (E + \varepsilon_1 H_0^k P_0^k) D_{0j}^{k-1} - \varepsilon_1 H_0^k D_{1j}^{k-1}.$$

Отже, обернена матриця існує

$$\Phi^{-1}[i, j] = D_{ij}^{k+1-i}, \quad i = \overline{0, k},$$

що підтверджує істинність теореми 1.1.

Зауваження 1.1. Умова \mathcal{Z}_i) є складною для перевірки, тому що матриці P_j^i та H_j^i можна знайти лише у найпростіших випадках. Легко переконатися, що умова \mathcal{Z}_i) буде виконуватись для малих параметрів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}$, якщо система (1.1) має наступний вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \sum_{j=0}^k A_{0j} x_j, \\ \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{x}_i = \sum_{j=0, j \neq i+1}^k A_{ij} x_j + \varepsilon_i A_{i, i+1} x_{i+1}, \quad i = \overline{1, k}, \end{cases} \quad (1.24)$$

i власні значення матриць A_{ii} , $i = \overline{1, k}$, задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A_{ii}) \leq -2\gamma < 0.$$

1.4 Асимптотичні розклади розщеплюючого перетворення

Точний вигляд коефіцієнтів розщеплюючого перетворення вдається знайти тільки у найпростіших випадках, тому представляє інтерес вписати відповідні розщеплені системи при наближеному знаходженні асимптотичних розкладів цих коефіцієнтів.

Нехай виконується умова:

4) матриці $A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0, k}$, A_{kk}^{-1} рівномірно обмежені для $t \in \mathbb{R}$ разом зі своїми похідними до $(n + 1)$ порядку включно.

Розглянемо диференціальний вираз

$$T^0(u) = \sum_{i=0}^{k-1} A_{ki}x_i + A_{kk}u - \prod_{i=0}^k \varepsilon_i \frac{d}{dt}u. \quad (1.25)$$

Покажемо, що існує функція $u(t, x_0(t), x_1(t), \dots, x_{k-1}(t), \varepsilon_k)$, яку можна представити у вигляді

$$u = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{P}_i^1(t, \varepsilon_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_k^j P_{i,j}^1(t) \right) x_i, \quad (1.26)$$

де матриці $P_{i,j}^1(t)$, $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, k-1}$, – рівномірно обмежені разом зі своїми $(n - j + 1)$ похідними, така, що на обмежених розв'язках системи (1.1)

$$T(u) = o(\varepsilon_k^{n+1})$$

Підставимо співвідношення (1.26) у рівність (1.25) і підберемо функції $P_{i,j}^1(t)$, $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, k-1}$, так, щоб в рівності (1.25) перетворились в нуль всі члени, що містять ε_k в степені меншій, ніж $(n + 1)$. Обґрунтування можливості такого вибору неважко провести методом математичної індукції. Для коефіцієнтів у представленні (1.26) одержуємо такі алгебраїчні співвідношення

$$\begin{aligned} P_{i,0}^1(t) &= -A_{kk}^{-1}(t)A_{ki}(t), \\ P_{i,j}^1(t) &= A_{kk}^{-1}(t) \left(\prod_{m=1}^{k-1} \varepsilon_m \dot{P}_{i,j-1}^1(t) + \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{l=m+1}^{k-1} \varepsilon_l P_{m,j-1}^1 A_{mi} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{l=m+1}^{k-1} \varepsilon_l \sum_{l=0}^{j-1} P_{m,l}^1 A_{mk} P_{i,j-l-1}^1 \right), \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Обмеженість $P_{i,j}^1$, $i = \overline{0, k-1}$, $j = \overline{0, n}$, та їх частинних похідних до $(n - j + 1)$ порядку випливає із умови 4). Якщо функції $P_{i,j}^1$ вибрані за формулами (1.27), то диференціальне співвідношення (1.25) набуде вигляду

$$T^0(u^0) = \varepsilon_k^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \eta_i^0(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}) x_i \right),$$

де η_i^0 , $i = \overline{0, k-1}$, – рівномірно обмежені функції.

Якщо у вихідній системі (1.1) зробити заміну

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{P}_i^1 x_i + \varepsilon_k^{n+1} z,$$

то для змінних $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, z$ одержимо систему

$$\begin{cases} \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{x}_i = \sum_{j=0}^{k-1} (A_{ij} + A_{ik} \bar{P}_j^1) x_j + \varepsilon_k^{n+1} A_{ik} z, & i = \overline{0, k-1}, \\ \prod_{j=0}^k \varepsilon_j \dot{z} = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j^0(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}) x_j + A_{kk} z. \end{cases} \quad (1.28)$$

Система (1.28) – це система типу (1.1), для якої існує інтегральний многовид [14]

$$z = \sum_{i=0}^{k-1} P_{i,*}^1(t, \varepsilon_k) x_i, \quad (1.29)$$

де $P_{i,*}^1$, $i = \overline{0, k-1}$, – рівномірно обмежені функції.

Якщо система (1.28) має інтегральний многовид (1.29), тоді система (1.1) має інтегральний многовид

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\bar{P}_i^1 + \varepsilon_k^{n+1} P_{i,*}^1 \right) x_i = \sum_{i=0}^{k-1} P_i x_i,$$

для якого справедливий асимптотичний розклад

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^n \varepsilon_k^j P_{i,j}^1 + \varepsilon_k^{n+1} P_{i,*}^1 \right) x_i. \quad (1.30)$$

Здійснимо в системі (1.1) заміну змінних

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} P_i x_i + y_k^1,$$

одержимо систему

$$\begin{cases} \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{x}_i = \sum_{j=0}^{k-1} (A_{ij} + A_{ik} P_j^1) x_j + A_{ik} y_k^1, & i = \overline{0, k-1}, \\ \prod_{j=0}^k \varepsilon_j \dot{y}_k^1 = \left(A_{kk} - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m P_j^1 A_{jk} \right) y_k^1. \end{cases} \quad (1.31)$$

Розглянемо тепер диференціальні вирази

$$\begin{aligned} T_i^0(u_0^0, u_1^0, \dots, u_{k-1}^0) &= \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m (A_{0j} + A_{0k} P_j^1) u_j^0 - \\ &- \prod_{j=1}^k \varepsilon_j \frac{d}{dt} u_i^0 + A_{ik} y_k^1, \quad i = \overline{0, k-1}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Покажемо, що існують функції u_i^0 , $i = \overline{0, k-1}$, які можна представити у вигляді

$$u_i^0 = \overline{H}_i^1 y_k^1 = \sum_{j=0}^n \varepsilon_k^j H_{i,j}^1 y_k^1, \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (1.33)$$

де матриці $H_{i,j}^1$, $j = \overline{0, n}$, – рівномірно обмежені разом зі своїми $(n - j + 1)$ похідними, такі, що

$$T_i^0(u_0^0, u_1^0, \dots, u_{k-1}^0) = o(\varepsilon_k^{n+1}), \quad i = \overline{0, k-1}.$$

Підставимо співвідношення (1.33) у рівності (1.32) і підберемо функції $H_{i,j}^1$, $j = \overline{0, n}$, так, щоб в рівностях (1.32) перетворились в нуль всі члени, що містять ε_k в степені меншій, ніж $(n + 1)$. Для коефіцієнтів $H_{i,j}^1$ одержуємо алгебраїчні співвідношення

$$\begin{aligned} H_{i,0}^1(t) &= A_{ik} A_{kk}^{-1}, \\ H_{i,j}^1(t) &= \left(\sum_{m=0}^{k-1} \prod_{l=m+1}^{k-1} \varepsilon_l A_{im} H_{m,j-1}^1 + \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{l=m+1}^{k-1} \varepsilon_l A_{ik} \sum_{l=0}^{j-1} P_{m,l}^1 H_{m,j-l-1}^1 + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=0}^{k-1} \left(\prod_{l=m+1}^{k-1} \varepsilon_l \right) \sum_{l=0}^{j-1} H_{i,l}^1 P_{m,j-l-1}^1 A_{mk} - \prod_{m=0}^{k-1} \varepsilon_m \dot{H}_{i,j-1}^1 \right) A_{kk}^{-1}, \\ &j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Обмеженість $H_{i,j}^1$ та їх частинних похідних впливає із умови 4). У цьому випадку диференціальні вирази (1.32) набувають вигляду

$$T_i^0(u_0^0, u_1^0, \dots, u_{k-1}^0) = \varepsilon_k^{n+1} \mu_i^0(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k) y_k^1,$$

де μ_i^0 , $i = \overline{0, k-1}$, – рівномірно обмежені функції.

Якщо тепер у системі (1.31) зробити заміну

$$x_i = \varepsilon_k^{n+1} y_i^1 + \prod_{j=i+1}^k \varepsilon_j \overline{H}_i^1 y_k^1, \quad i = \overline{0, k-1},$$

то для змінних y_i^1 , $i = \overline{0, k}$, одержимо систему

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^i \varepsilon_j y_i^1 &= \sum_{j=0}^{k-1} (A_{ij} + A_{ik} P_j^1) y_j^1 + \mu_i^0 y_k^1, \quad i = \overline{0, k-1}, \\ \prod_{j=0}^k \varepsilon_j y_k^1 &= \left(A_{kk} - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^k \varepsilon_m P_j^1 A_{jk} \right) y_k^1, \end{aligned} \quad (1.35)$$

типу (1.1), для якої існують інтегральні многовиди

$$y_i^1 = \prod_{j=i+1}^k \varepsilon_j H_{i,*}^1 y_k^1, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (1.36)$$

Якщо система (1.35) має інтегральні многовиди (1.36), тоді система (1.31) має інтегральні многовиди

$$x_i = \prod_{j=i+1}^k \varepsilon_j \left(\overline{H}_i^1 + \varepsilon_k^{n+1} H_{i,*}^1 \right) y_k^1 = \prod_{j=i+1}^k \varepsilon_j H_i^1 y_k^1, \quad i = \overline{0, k-1},$$

для яких справедливі асимптотичні розклади

$$x_i = \prod_{j=i+1}^k \varepsilon_j \left(\sum_{j=0}^n \varepsilon_k^j H_{i,j}^1 + \varepsilon_k^{n+1} H_{i,*}^1 \right) y_k^1, \quad i = \overline{0, k-1}.$$

Здійснивши в системі (1.31) заміну змінних

$$x_i = y_i^1 + \prod_{j=i+1}^k \varepsilon_j H_i y_k^1,$$

одержимо систему (1.6) і завершуємо перший етап розщеплення системи (1.1).

Теорема 1.2. *Нехай виконуються умови 1), 2) і 4). Тоді для достатньо малих ε_k існує заміна змінних (1.2), за допомогою якої система (1.1) зводиться до вигляду (1.6), і коефіцієнти асимптотичних розкладів перетворення (1.3) можна однозначно знайти із алгебраїчних співвідношень (1.27), (1.34).*

Розглянемо тепер $l + 1$ ($l \geq 1$) крок розщеплення системи

$$\prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{y}_i^l = \sum_{j=0}^{k-l} B_{ij}^l y_j^l, \quad i = \overline{0, k-l}, \quad (1.37)$$

$$\prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{y}_l^{k-i+1} = B_{ii}^{k-i+1} y_i^{k-i+1}, \quad i = \overline{k-l+1, k}. \quad (1.38)$$

Припустимо, що виконується наступна умова:

5_l) матриці $B_{ij}^l(i, j = \overline{0, k-l})$, $(B_{k-l, k-l}^l)^{-1}$ разом з їх $(n + 1)$ похідними є рівномірно обмеженими для $t \in \mathbb{R}$.

Розглянемо диференціальний вираз

$$T^l(u^l) = \sum_{i=0}^{k-l-1} B_{k-l, i}^l y_i^l + B_{k-l, k-l} u^l - \prod_{i=0}^{k-l} \varepsilon_i \frac{d}{dt} u^l. \quad (1.39)$$

Покажемо, що функція $u^l(t, y_0^l(t), y_1^l(t), \dots, y_{k-l-1}^l(t), \varepsilon_{k-l})$, яка може бути представлена у вигляді

$$u^l = \sum_{i=0}^{k-l-1} \bar{P}_i^{l+1}(t, \varepsilon_{k-l}) = \sum_{i=0}^{k-l-1} \left(\sum_{j=0}^n \varepsilon_{k-l}^j P_{i,j}^{l+1}(t) \right) y_i^l, \quad (1.40)$$

де матриці $P_{i,j}^{l+1}(t)$, $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, k-l-1}$, є рівномірно обмеженими разом зі своїми $(n - j + 1)$ похідними, є такою, що для обмеженого розв'язка системи (1.37) маємо

$$T^l(u^l) = o(\varepsilon_{k-l}^{n+1}).$$

Підставимо (1.40) в (1.39) і виберемо функції $P_{i,j}^{l+1}(t)$, $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, k-l-1}$, так, щоб в (1.39) всі доданки, які містять степені малого параметра ε_{k-l} менші, ніж $(n + 1)$, перетворюються в нуль. Для коефіцієнтів у

представленні (1.26) одержуємо

$$\begin{aligned}
P_{i,0}^{l+1}(t) &= - (B_{k-l,k-l}^l)^{-1}(t) B_{k-l,i}^l(t), \\
P_{i,j}^{l+1}(t) &= (B_{k-l,k-l}^l)^{-1}(t) \left(\prod_{m=1}^{k-l-1} \varepsilon_m \dot{P}_{i,j-1}^{l+1}(t) + \right. \\
&\quad + \sum_{m=0}^{k-l-1} \prod_{s=m+1}^{k-l-1} \varepsilon_s \sum_{s=0}^{j-1} P_{m,s}^{l+1} B_{m,k-l}^l P_{i,j-s-1}^{l+1} + \\
&\quad \left. + \sum_{m=0}^{k-l-1} \prod_{s=m+1}^{k-l-1} \varepsilon_s P_{m,j-1}^{l+1} B_{mi}^l \right), \quad j = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Зазначимо, що $5_l)$ означає, що $P_{i,j}^{l+1}(t)$, $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, k-l-1}$, є обмеженими разом зі своїми похідними до $(n-j+1)$ порядку. Якщо функції $P_{i,j}^{l+1}$ вибирати за формулами (1.41), тоді (1.39) буде мати вигляд

$$T^l(u^l) = \varepsilon_{k-l}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{k-l-1} \eta_i^l(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-l-1}) y_i^l \right),$$

де η_i^l , $i = \overline{0, k-l-1}$, – рівномірно обмежені функції.

Якщо ми зробимо у вихідній системі (1.37) заміну

$$y_{k-l}^l = \sum_{i=0}^{k-l-1} \bar{P}_i^{l+1} y_i^l + \varepsilon_{k-l}^{n+1} z,$$

тоді для змінних $y_0^l, y_1^l, \dots, y_{k-l-1}^l, z$ одержимо систему

$$\begin{cases} \prod_{j=0}^i \varepsilon_j y_i^l = \sum_{j=0}^{k-l-1} (B_{ij}^l + B_{i,k-l}^l \bar{P}_j^{l+1}) y_j^l + \varepsilon_{k-l}^{n+1} B_{i,k-l}^l z, \\ i = \overline{0, k-l-1}, \\ \prod_{j=0}^{k-l} \varepsilon_j \dot{z} = \sum_{j=0}^{k-l-1} \eta_j^l(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-l-1}) y_j^l + B_{k-l,k-l}^l z. \end{cases} \tag{1.42}$$

Система (1.42) – це система типу (1.37), для якої існує інтегральний МНОГОВИД

$$z = \sum_{i=0}^{k-l-1} P_{i,*}^{l+1}(t, \varepsilon_{k-l}) y_i^l, \tag{1.43}$$

де $P_{i,*}^{l+1}$, $i = \overline{0, k-l-1}$ – рівномірно обмежені функції.

Якщо система (1.42) має інтегральний многовид (1.43), тоді система (1.37) має інтегральний многовид

$$y_{k-l}^l = \sum_{i=0}^{k-l-1} (\bar{P}_i^{l+1} + \varepsilon_{k-l}^{n+1} P_{i,*}^{l+1}) y_i^l = \sum_{i=0}^{k-l-1} P_i^{l+1} y_i^l,$$

для якого справедливий асимптотичний розклад

$$y_{k-l}^l = \sum_{i=0}^{k-l-1} \left(\sum_{i=0}^{k-l-1} \varepsilon_{k-l}^j P_{i,j}^{l+1} + \varepsilon_{k-l}^{n+1} P_{i,*}^{l+1} \right) y_i^l. \quad (1.44)$$

Зробивши в системі (1.37) заміну

$$y_k^l = \sum_{i=0}^{k-l-1} P_i^{l+1} y_i^l + y_{k-l}^{l+1}, \quad (1.45)$$

одержимо

$$\prod_{j=0}^i \varepsilon_j y_i^l = \sum_{j=0}^{k-l-1} (B_{ij}^l + B_{i,k-l}^l P_j^{l+1}) y_j^l + B_{i,k-l}^l y_{k-l}^{l+1},$$

$$i = \overline{0, k-l-1}, \quad (1.46)$$

$$\prod_{j=0}^{k-l} \varepsilon_j y_{k-l}^{l+1} = \left(B_{k-l,k-l}^l - \sum_{j=0}^{k-l-1} \prod_{m=j+1}^{k-l} \varepsilon_m P_j^{l+1} B_{j,k-l}^l \right) y_{k-l}^{l+1}.$$

Розглянемо тепер диференціальні вирази

$$T_i^l (u_0^l, u_1^l, \dots, u_{k-l-1}^l) = B_{i,k-l}^l y_{k-l}^{l+1} - \prod_{j=1}^{k-l} \varepsilon_j \frac{d}{dt} u_i^l +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-l-1} \prod_{m=j+1}^{k-l} \varepsilon_m (B_{ij}^l + B_{i,k-l}^l P_j^{l+1}) u_j^l, \quad i = \overline{0, k-l-1}. \quad (1.47)$$

Покажемо, що існують функції u_i^l , $i = \overline{0, k-l-1}$, які можна представити у вигляді

$$u_i^l = \bar{H}_i^{l+1} y_{k-l}^{l+1} = \sum_{j=0}^n \varepsilon_{k-l}^j H_{i,j}^{l+1} y_{k-l}^{l+1}, \quad i = \overline{0, k-l-1}, \quad (1.48)$$

де матриці $H_{i,j}^{l+1}$, $j = \overline{0, n}$, рівномірно обмежені разом зі своїми $(n-j+1)$ похідними, такі, що

$$T_i^l (u_0^l, u_1^l, \dots, u_{k-l-1}^l) = o(\varepsilon_{k-l}^{n+1}), \quad i = \overline{0, k-l-1}.$$

Підставимо (1.48) в (1.47) і виберемо функції $H_{i,j}^{l+1}$, $j = \overline{0, n}$, так, що в (1.47) всі члени, що містять степені малого параметра ε_{k-l} менші за $(n+1)$, перетворюються в нуль. Для коефіцієнтів $H_{i,j}^{l+1}$ одержуємо

$$\begin{aligned}
H_{i,0}^{l+1} &= B_{i,k-l} (B_{k-l,k-l}^l)^{-1} \\
H_{i,j}^{l+1} &= \left(\sum_{m=0}^{k-l-1} \prod_{s=m+1}^{k-2} \varepsilon_s B_{im}^l H_{m,j-1}^{l+1} + \right. \\
&\quad + \sum_{m=0}^{k-l-1} \prod_{s=m+1}^{k-l-1} \varepsilon_s \sum_{s=0}^{j-1} H_{i,s}^{l+1} P_{m,j-s-l}^{l+1} B_{m,k-l}^l + \\
&\quad + \sum_{m=0}^{k-l-1} \prod_{s=m+1}^{k-l-1} \varepsilon_s B_{i,k-l}^l \sum_{s=0}^{j-1} P_{m,s}^{l+1} H_{m,j-1-s}^{l+1} \\
&\quad \left. - \prod_{m=0}^{k-l-1} \varepsilon_m \dot{H}_{i,j-1}^{l+1} \right) (B_{k-l,k-l}^l)^{-1}, \quad j = \overline{1, n}
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Умова 5_l) означає, що $H_{i,j}^{l+1}$ і їх частинні похідні є обмеженими. У цьому випадку диференціальні вирази (1.47) матимуть вигляд

$$T_i^l (u_0^l, u_1^l, \dots, u_{k-l-1}^l) = \varepsilon_{k-l}^{n+1} \mu_i^l (t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-l}) y_{k-l}^{l+1},$$

де μ_i^l , $i = \overline{0, k-l-1}$, – рівномірно обмежені функції.

Якщо зробити заміну

$$y_i^l = \varepsilon_{k-l}^{n+1} y_i^{l+1} + \prod_{j=i+1}^{k-l} \varepsilon_j \bar{H}_i^{l+1} y_{k-l}^{l+1}, \quad i = \overline{0, k-l-1},$$

в системі (1.46), тоді для змінних y_i^{l+1} , $i = \overline{0, k-l}$, одержуємо систему

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^i \varepsilon_j y_i^{l+1} &= \sum_{j=0}^{k-l-1} (B_{ij}^l + B_{i,k-l}^l P_j^{l+1}) y_j^{l+1} + \mu_i^l y_{k-l}^{l+1}, \\
i &= \overline{0, k-l-1},
\end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\prod_{j=0}^{k-l} \varepsilon_j y_{k-l}^{l+1} = \left(B_{k-l,k-l}^l - \sum_{j=0}^{k-l-1} \prod_{m=j+1}^{k-l} \varepsilon_m P_j^{l+1} B_{j,k-l} \right) y_{k-l}^{l+1}$$

типу (1.37), для якої існують інтегральні многовиди

$$y_i^{l+1} = \prod_{j=i+1}^{k-l} \varepsilon_j H_{i,*}^{l+1} y_{k-l}^{l+1}, \quad i = \overline{0, k-l-1}. \tag{1.51}$$

Якщо система (1.50) має інтегральні многовиди (1.51), тоді система (1.46) має інтегральні многовиди

$$y_i^l = \prod_{j=i+1}^{k-l} (\bar{H}_i^{l+1} + \varepsilon_{k-l}^{n+1} H_{i,\star}^{l+1}) y_{k-l}^{l+1} = \prod_{j=i+1}^{k-l} H_i^{l+1} y_{k-l}^{l+1}, \quad i = \overline{0, k-l-1},$$

для яких справедливий асимптотичний розклад

$$y_i^l = \prod_{j=i+1}^{k-l} \left(\sum_{j=0}^n \varepsilon_{k-l}^j H_{i,j}^{l+1} + \varepsilon_{k-l}^{n+1} H_{i,\star}^{l+1} \right) y_{k-l}^{l+1}, \quad i = \overline{0, k-l-1}.$$

Зробивши в системі (1.46) заміну

$$y_i^l = y_i^{l+1} + \prod_{j=i+1}^{k-l} \varepsilon_j H_i^{l+1} y_{k-l}^{l+1} \quad (1.52)$$

одержимо систему з $l+1$ відщепленими змінними і $l+1$ етап розщеплення системи (1.1) завершено.

Теорема 1.3. *Нехай виконуються умови 1), 2) і 5_l), $l = \overline{1, k-1}$. Тоді для достатньо малого ε_l існує заміна (1.45), (1.52), яка зводить систему (1.37) до вигляду*

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{y}_i^{l+1} &= \sum_{j=0}^{k-l-1} B_{ij}^{l+1} y_j^{l+1}, \quad i = \overline{0, k-l-1}, \\ \prod_{j=0}^{k-l} \varepsilon_j \dot{y}_{k-l}^{l+1} &= B_{k-l, k-l}^{l+1} y_{k-l}^{l+1}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

і коефіцієнти асимптотичного розщеплюючого перетворення можуть бути однозначно знайдені з (1.41) та (1.49).

Зауваження 1.2. *Після k кроків декомпозиції системи (1.1) за описаною вище схемою одержимо "блочно-діагональну" систему (1.12). Крім того, коефіцієнти асимптотичного розщеплюючого перетворення можна знайти за рекурентними алгебраїчними співвідношеннями аналогічними до (1.41), (1.49).*

2 АПРОКСИМАЦІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

2.1 Вступ

Інтегро-диференціальні рівняння із запізненням виникають при математичному моделюванні поширення епідемій в задачах математичної біології та хімічної кінетики [18]-[20].

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням є достатньо складним об'єктом дослідження. Відомо, що не існує універсальних методів побудови їх точних розв'язків. Тому основними теоретичними питаннями при дослідженні таких задач є обґрунтування конструктивних підходів доведення існування їх розв'язків та розробка ефективних методів побудови наближених розв'язків. Важливою також є задача одержання оцінок похибок для наближених розв'язків.

На даний час для знаходження розв'язків крайових задач із запізненням використовуються методи послідовних наближень, проекційно-ітераційні методи, методи сплайн-функцій [21]–[27].

У даному розділі роботи буде запропоновано новий підхід наближеного розв'язання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, що базується на схемах апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь [28]–[30].

2.2 Існування та єдиність розв'язку

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f(x, [y(x)], [y(x)]_1) + \int_a^b g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1) ds, \quad (2.1)$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), \quad p = 0, 1, \quad x \in [a - \tau, a], \quad y(b) = \gamma, \quad (2.2)$$

де

$$\begin{aligned} [y(x)] &= (y(x), y(x - \tau_1), \dots, y(x - \tau_n)), \\ [y(x)]_1 &= (y'(x), y'(x - \tau_1), \dots, y'(x - \tau_n)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = \tau$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \in C^1[a - \tau, a]$ – початкова функція.

Введемо множину точок, що визначається запізненнями τ_i , $i = \overline{1, n}$

$$E = \{x_i \in [a, b] : x_i = a + \tau_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Відзначимо, що в точках множини E розв'язок крайової задачі (2.1)–(2.2), взагалі кажучи, має розривну другу похідну.

Введемо позначення

$$P = \sup \left\{ \left| f(x, [y(x)], [y(x)]_1) + \int_a^b g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1) ds \right| : |y(x)| < P_1, \right. \\ \left. |y(x - \tau_i)| < P_1, |y'(x)| < P_2, |y'(x - \tau_i)| < P_2, i = \overline{1, n}, x \in [a, b] \right\}, \\ J = [a - \tau, a], I = [a, b], I_1 = [a, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n], \\ I_{n+1} = [x_n, b], \\ B = \left\{ y(x) : y(x) \in (C(J \cup I) \cap (C^1(J) \cup C^1(I))) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} C^2(I_j) \right), \right. \\ \left. |y(x)| < P_1, |y'(x)| < P_2 \right\}, \quad (2.4)$$

де P_1, P_2 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (2.1)–(2.2) будемо вважати функцію $y = y(x)$ із простору B , яка задовольняє рівняння (2.1), за можливим винятком точок множини E та крайові умови (2.2).

Введемо в просторі B норму

$$\|y\|_B = \max \left\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |y(x)|, \frac{2}{b-a} \max \left(\max_{x \in J} |y'(x)|, \max_{x \in I} |y'(x)| \right) \right\},$$

із цією нормою даний простір є банаховим простором.

Крайова задача (2.1)–(2.2) еквівалентна інтегральному рівнянню [31, 32]

$$y(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, [y(s)], [y(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1) d\xi \right] \bar{G}(x, s) ds + l(x),$$

$$x \in J \cup I, \quad (2.5)$$

$$\bar{G}(x, s) = \begin{cases} G(x, s), & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J, \\ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}(x - a) + \varphi(a), & x \in I, \end{cases}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(s - a)(x - b)}{b - a}, & a \leq s \leq x \leq b, \\ \frac{(x - a)(s - b)}{b - a}, & a \leq x \leq s \leq b, \end{cases} \quad (2.6)$$

функція Гріна крайової задачі

$$y''(x) = 0, \quad x \in I, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Визначимо оператор T в просторі B

$$(Ty)(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, [y(s)], [y(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1) d\xi \right] \bar{G}(x, s) ds + l(s),$$

$$x \in J \cup I. \quad (2.7)$$

Звідси

$$(Ty)'(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, [y(s)], [y(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1) d\xi \right] \bar{G}'_x(x, s) ds +$$

$$+ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}, \quad x \in J \cup I. \quad (2.8)$$

Нехай функція $f(x, [y(x)], [y(x)]_1)$ неперервна в області $G[a, b] \times G_1^{n+1} \times G_2^{n+1}$, а функція $g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1)$ – неперервна в області $Q = [a, b] \times G$, де $G_1 = \{u \in R : |u| < P_1\}$, $G_2 = \{v \in R : |v| \leq P_2\}$, P_1, P_2 – додатні сталі, що входять в означення простору B та задовольняють за змінними $[y(x)], [y(x)]_1$ умову Ліпшиця зі сталими L_i та L_i^1 , $i = \bar{0}, 2n + 1$ відповідно.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови:*

- 1) $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi(x)|, \frac{(b-a)^2}{8} P + \max(|\varphi(a)|, |\gamma|) \right\} \leq P_1,$
- 2) $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi'(x)|, \frac{b-a}{2} P + \left| \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} \right| \right\} \leq P_2,$
- 3) $\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (2.1)–(2.2) в просторі B .

Для доведення теореми 2.1 використовується принцип стислих відображень у формі, що наведена в [33].

Для функції Гріна (2.6) відомі оцінки [33]

$$\int_a^b |G(x, s)| ds \leq \frac{(b-a)^2}{8}, \quad \int_a^b |G'(x, s)| ds \leq \frac{b-a}{2}. \quad (2.9)$$

Якщо виконуються умови 1)–2) теореми та оцінки (2.9), тоді нескладно показати, що оператор T відображає простір B в себе.

Із означення норми простору B дістаємо

$$\begin{aligned} \|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\|_B &\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \right. \\ &\left. + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \right] \|y_1 - y_2\|_B. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Нерівність (2.10) та умова теореми 3) забезпечують, що оператор T є оператором стиску у просторі B , а значить він має єдину нерухому точку [33]. Отже, крайова задача (2.1)–(2.2) має єдиний розв'язок $y(x) \in B$.

2.3 Схеми апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями

2.3.1 Апроксимація простішої крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння із запізненням

Розглянемо частинний випадок крайової задачі (2.1)–(2.2) у вигляді

$$y'' = f(x, y(x), y(x - \tau_1), \dots, y(x - \tau_n)) +$$

$$+ \int_a^b g(x, s, y(s), y(s - \tau_1), \dots, y(s - \tau_n)) ds, \quad x \in [a, b], \quad (2.11)$$

$$y(x) = \varphi(x), \quad x \in [a - \tau, a], \quad y(b) = \gamma, \quad (2.12)$$

де $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = \tau$, $\varphi(x) \in C[a - \tau, a]$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Нехай $f(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$, $g(x, s, u_0, u_1, \dots, u_n)$ неперервні функції в областях: $G_1 = [a, b] \times G^k$, $G_2 = [a, b] \times [a, b] \times G^k$, де $G = \{u \in \mathbb{R}, |u| \leq P_1\}$, P_1 – додатня стала.

Відзначимо, що розв'язок крайової задачі (2.11)–(2.12) в точках $x_i = a + \tau_i$, $i = \overline{1, n}$, взагалі кажучи, має розривну другу похідну.

Введемо позначення:

$$P = \sup \left\{ (f(x, y(x), y(x - \tau_1), \dots, y(x - \tau_n)) + \int_a^b g(x, s, y(s), y(s - \tau_1), \dots, y(s - \tau_n)) ds : |y(x)| \leq P_1, |y(x - \tau_i)| \leq P_1, \right. \\ \left. i = \overline{1, n}, x, s \in [a, b] \right\},$$

$$J = [a - \tau], \quad I = [a, b], \quad I_1 = [a, x_1], \quad J_2 = [x_1, x_2], \dots, \quad I_{n+1} = [x_n, b]. \quad (2.13)$$

Розглянемо клас функцій

$$B = \left\{ y(x) : y(x) \in \left(C(J \cup I) \cap C^1(I) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} C^2(I_i) \right) \right), |y(x)| < P_1 \right\}.$$

Розв'язком крайової задачі (2.11)–(2.12) будемо вважати функцію $y = y(x)$ із простору B , яка задовольняє рівняння (2.11) (за можливим винятком точок $x_i = a + \tau_i$) та крайові умови (2.12).

Введемо в класі функції B норму

$$\|y\|_B = \frac{9}{(b - a)^2} \max_{t \in J \cup I} |y(x)|. \quad (2.14)$$

Простір B з цією нормою є банаховим простором. Крайова задача (2.11)–(2.12) еквівалентна інтегральному рівнянню [31].

$$y(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, y(s), y(s - \tau_1), \dots, y(s - \tau_n)) + \right.$$

$$+ \int_a^b g(x, \xi, y(\xi), y(\xi - \tau_1), \dots, y(\xi - \tau_n)) ds \Big] \bar{G}(x, s) ds + l(x), \quad (2.15)$$

$$x \in J \cup I,$$

де

$$\bar{G}(x, s) = \begin{cases} G(x, s), & x_n s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad l(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J, \\ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}(x - a) + \varphi(a), \end{cases}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(s - a)(x - b)}{b - a}, & a \leq s \leq x \leq b, \\ \frac{(x - a)(s - b)}{b - a}, & a \leq x \leq s \leq b, \end{cases} \quad \text{— функція Гріна крайової задачі}$$

$$y''(x) = 0, \quad x \in I, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Визначимо оператор T у просторі B наступним чином

$$(Ty)(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, y(s), y(s - \tau_1), \dots, y(s - \tau_n)) + \right. \\ \left. + \int_a^b g(x, \xi, y(\xi), y(\xi - \tau_1), \dots, y(\xi - \tau_n)) ds \right] \bar{G}(x, s) ds + l(x), \quad x \in J \cup I.$$

Має місце теорема, аналогічна теоремі 2.1.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови:*

$$1. \max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi(x)|, \frac{(b - a)^2}{2} P + \max\{|\varphi(a)|, |\varphi|\} \right\} \leq P_1;$$

2. Функції $f(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$, $g(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$ задовольняють умову Ліпшица в області G за змінними u_0, u_1, \dots, u_n зі сталими $L_i, R_i, i = \overline{0, n}$ відповідно;

$$3. \frac{(b - a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b - a)R_i) < 1.$$

Тоді існує єдиний роз'язок крайової задачі (2.11)–(2.12) у просторі B .

Одним із методів дослідження диференціальних рівнянь із запізненням є апроксимація елемента запізнення $y(x - \tau)$, що входить в рівняння. Нехай $y(x)$

вхідна функція елемента запізнення, а $v(x)$ – вихідна функція, що зв'язані співвідношенням

$$v(x) = y(x - \tau), \quad a \leq x \leq b.$$

Поставимо елементу запізнення у відповідність аперіодичну ланку, що описується рівнянням [34, 35]

$$\tau z'(x) + z(x) = v(x).$$

Нескладно одержати, що різниця між вихідним станом елемента запізнення $v(x)$ і значенням аперіодичної ланки $z(x)$ буде малою при малому τ . Для покращення точності апроксимації розглядаємо послідовність із m елементів запізнення, що послідовно між собою зв'язані

$$v_1(x) = y\left(x - \frac{\tau}{m}\right), \quad v_2(x) = y_1\left(x - \frac{\tau}{m}\right) = y\left(x - \frac{2\tau}{m}\right), \dots,$$

$$v_m(x) = y_{m-1}\left(x - \frac{\tau}{m}\right) = y(x - \tau).$$

Поставимо їм у відповідність послідовність аперіодичних ланок, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1'(x) + z_1(x) &= y(x), \\ \frac{\tau}{m} z_i'(x) + z_i(x) &= z_{i-1}(x), \quad i = \overline{2, m}, \quad x \in [a, b], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$z_i(a) = y\left(a - \frac{i\tau}{m}\right), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.17)$$

де $y(x)$ – вхідна функція першого елемента запізнення.

Зазначимо, що систему (2.16)-(2.17) досліджено в роботах [35, 36]. У випадку, коли функція $y(x)$ задовольняє умову Ліпшиця або має обмежену сталою M похідну на $[a - \tau, b]$, маємо співвідношення

$$|z_i(x) - v_i(x)| \leq \frac{2M\tau}{\sqrt{m}}, \quad x \in [a, b], \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.18)$$

Якщо $y(x) \in C[a - \tau, b]$, то в цьому випадку справджуються нерівності

$$|z_i(x) - v_i(x)| \leq 2 \left(\frac{K\tau}{\sqrt{m}} + \omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right) \right), \quad x \in [a, b], \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.19)$$

де стала $K > 0$ не залежить від m , а

$$\omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right) = \max_{|x'-x| < \frac{\tau}{m}, x', x'' \in [a-\tau, b]} |y(x') - y(x'')|$$

модуль неперервності $y(x)$ на $[a - \tau, b]$.

Розглянемо тепер застосування схеми апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням [35]–[36] до крайової задачі (2.11)–(2.12). Поставимо у відповідність крайовій задачі (2.11)–(2.12) крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$z_0''(x) = f(x, z_0(x), z_{l_1}(x), \dots, z_{l_n}(x)) + \int_a^b g(x, s, z_0(s), z_{l_i}(s), \dots, z_{l_n}(s)) ds, \quad l_i = \left[\frac{m\tau_i}{\tau}\right], \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} z_j'(x) &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(x) - z_j(x)), \quad j = \overline{1, m}, \quad m \in N, \quad x \in [a, b], \\ z_j(a) &= \varphi\left(a - \frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{0, m}, \quad z_0(b) = \gamma. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Будемо говорити, що крайова задача (2.20)–(2.21) апроксимує крайову задачу (1)–(2), якщо справджуються співвідношення

$$\left| z_j(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

при $m \rightarrow \infty$, $t \in I$, $j = \overline{0, m}$.

Зв'язок між розв'язками крайових задач (2.11)–(2.12) та (2.20)–(2.21) встановлює наступна теорема.

Теорема 2.3. [28] *Нехай функції $f(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$, $g(x, t, u_0, u_1, \dots, u_n)$ задовольняють умови теореми 2.2. Тоді крайова задача (2.20)–(2.21) апроксимує крайову задачу (2.11)–(2.12) і справджуються співвідношення*

$$\max_{x \in I} \left| z_j(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| \leq \beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right),$$

де $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right) = 0$.

2.3.2 Апроксимація загальної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння із запізненням

Розглянемо застосування схеми апроксимації диференціально-різницевого рівнянь до наближення крайової задачі (2.1)-(2.2).

Спочатку проаналізуємо наближення елементів із запізненням, що входять в рівняння (2.3).

Як і в попередньому пункті, будемо розглядати m елементів запізнення, що послідовно між собою зв'язані

$$v_1(x) = y\left(x - \frac{\tau}{m}\right), \quad v_2(x) = y_1\left(x - \frac{\tau}{m}\right) = y\left(x - \frac{2\tau}{m}\right), \dots, \\ v_m(x) = y_{m-1}\left(x - \frac{\tau}{m}\right) = y(x - \tau),$$

та послідовність відповідних їм аперіодичних ланок, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь (2.16)-(2.17).

Якщо вхідна функція $y(x)$ першого елемента запізнення в системі (2.16) задовольняє умову $y(x) \in C[a - \tau, b]$, то справджуються нерівності (2.19)

$$\left| z_i(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| \leq 2 \left(\frac{K\tau}{m} + \omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right) \right) = \alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right), \quad (2.23)$$

де $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right) = 0$.

Розглянемо тепер випадок, коли $y(x)$ належить простору кусково-неперервних на $[a - \tau, b]$ функцій. Продовжимо функцію $y(x)$ на інтервал $[-h + a - \tau, b + h]$, h, \dots , поклавши $y(x) = 0$, при $x \notin [a - \tau, b]$.

Введемо до розгляду функцію

$$y_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} y(s) ds,$$

яка є неперервною на $[a - \tau, b]$.

Відомо [37], якщо $y(x) \in L_p[a - \tau, b]$, $p \geq 1$, то

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{a-\tau}^b |y_h(x) - y(x)|^p dx = 0. \quad (2.24)$$

Позначимо

$$\beta(h) = \int_{a-\tau}^b |y_h(x) - y(x)| dx. \quad (2.25)$$

Із співвідношення (2.24) дістаємо, що $\beta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Представимо функцію $y(x)$ у вигляді

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x),$$

де $y_1(x) = y_h(x)$, $y_2(x) = y(x) - y_h(x)$.

Враховуючи лінійність системи рівнянь (2.16)-(2.17), її розв'язок буде сумою функцій, що є розв'язками таких систем

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(1)'}(x) + z_1^{(1)}(x) &= y_1(x), \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(1)'}(x) + z_j^{(1)}(x) &= z_{j-1}^{(1)}(x), \quad j = \overline{2, m}, t \in [a, b], \\ z_j^{(1)}(a) &= y\left(a - \frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{1, m}, m \in N; \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(2)'}(x) + z_1^{(2)}(x) &= y_2(x), \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(2)'}(x) + z_j^{(2)}(x) &= z_{j-1}^{(2)}(x), \quad j = \overline{2, m}, t \in [a, b], \\ z_j^{(2)}(a) &= 0, \quad j = \overline{1, m}, m \in N. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Оцінимо різниці $z_j(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right)$. Маємо нерівність

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left| z_j(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \left(\left| z_j^{(1)}(x) - y^{(1)}\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| + \left| y^{(2)}\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| + \left| z_j^{(2)}(x) \right| \right) dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для різниці $\left| z_j^{(1)}(x) - y^{(1)}\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right|$ можна застосувати рівність (2.23), оскільки функція $y_h(x)$ є неперервною на $[a - \tau, b]$. Згідно позначення (2.25) маємо

$$\int_a^b \left| y^{(2)}\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| dx \leq \beta(h). \quad (2.29)$$

Оцінимо третій доданок в правій частині (2.28). Із першого рівняння системи (2.27) знаходимо

$$z_1^{(2)}(x) = \frac{m}{\tau} \int_a^x e^{-\frac{m}{\tau}(x-s)} y_2(s) ds.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_a^b |z_1^{(2)}(x)| dx &\leq \frac{m}{\tau} \int_a^b \int_s^b e^{-\frac{m}{\tau}(x-s)} |y_2(s)| dx ds = \\ &= \int_a^b \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau}(\tau-s)}\right) |y_2(s)| ds \leq \beta(h). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Аналогічні оцінки справджуються і для $z_j^{(2)}(x)$, $j = \overline{2, m}$.

Підставляючи (2.29), (2.30) та (2.23) у співвідношення (2.28), одержуємо

$$\int_a^b \left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| dx \leq (b-a)\alpha_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + 2\beta(h).$$

Покладаючи $h = \frac{\tau}{m}$, маємо

$$\int_a^b \left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| dx \leq (b-a)\alpha_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + 2\beta \left(\frac{\tau}{m} \right) = \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right). \quad (2.31)$$

Має місце наступне твердження.

Лема 2.1. *Нехай вхідна функція $y(x)$ в системі (2.16) кусково-неперервна на $[a - \tau, b]$, тоді має місце нерівність*

$$\int_a^b \left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| dx \leq \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right),$$

$$\text{де } \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) = 0.$$

Поставимо у відповідність крайовій задачі (2.1)–(2.2) крайову задачу для системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$z_0''(x) = f(x, [z(x)], [w(x)]) + \int_a^b g(x, s, [z(s)], [w(s)]) ds, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
z_j(x) &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(x) - z_j(x)), \quad j = \overline{1, m}, \\
z_j(a) &= \varphi \left(a - \frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{0, m}, \quad z_0(b) = \gamma,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
w_0(x) &= \int_a^b \left[f(s, [z(s)], [w(s)]) + \int_a^b g(s, \xi, [z(\xi)], [w(\xi)]) d\xi \right] G'_x(x, s) ds + \\
&\quad + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
w'_j(x) &= \frac{m}{\tau} (w_{j-1}(x) - w_j(x)), \quad j = \overline{1, m}, \\
w_j(a) &= \varphi' \left(a - \frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{1, m},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

де

$$\begin{aligned}
[z(x)] &= (z_0(x), z_{l_1}(x), \dots, z_{l_n}(x)), \\
[w(x)] &= (w_0(x), w_{l_1}(x), \dots, w_{l_n}(x)),
\end{aligned}$$

а індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_j}{m} \leq \tau_j < \frac{\tau(l_j + 1)}{m}. \tag{2.36}$$

Зв'язок між розв'язками вихідної крайової задачі (2.1)-(2.2) та апроксимуючої крайової задачі (2.32)-(2.35) встановлює така теорема.

Теорема 2.4. [30, 31] Нехай функції $f(x, [y(x)], [y(x)]_1)$ та $g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1)$ задовольняють умови теореми 1. Тоді крайова задача (2.32)-(2.35) апроксимує крайову задачу (2.1)-(2.2) і мають місце співвідношення

$$\begin{aligned}
\max_{a \leq \xi \leq x} \left| z_j(\xi) - y \left(\xi - \frac{j\tau}{m} \right) \right| + \max_{a \leq \xi \leq x} \left| w_j(\xi) - y' \left(\xi - \frac{j\tau}{m} \right) \right| &\leq N\gamma \left(\frac{\tau}{m} \right), \\
j &= \overline{0, m}, \quad x \in I.
\end{aligned}$$

2.4 Приклад

Розглянемо модельний приклад, який ілюструє наведену методику апроксимації крайових задач із запізненням для інтегро-диференціальних рівнянь

$$y''(x) = y(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \left(s - \frac{\pi}{2} \right) ds, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \tag{2.37}$$

$$y(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4. \quad (2.38)$$

Точний розв'язок крайової задачі знаходимо безпосередньо методом кроків

$$y_t(x) = (3 - \pi) \cos x + (5 - \pi) \sin x + \pi - 1.$$

В цьому прикладі $L_1 = L_1^1 = 1$, $L_2 = L_2^1 = 1$. Сталі P та P_1 , що входять в означення простору B , зв'язані рівністю

$$P = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) P_1.$$

Якщо тепер виберемо $P_1 > \frac{256}{64 - \pi^2(\pi + 2)}$, тоді справджуються умови теорем 2.2 та 2.3. Це означає, що розв'язок крайової задачі (2.37)–(2.38) існує та єдиний і його можна наближати апроксимуючою системою (2.20)–(2.21), яка матиме вигляд

$$z_0''(x) = -z_0(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_m(s) ds, \quad (2.39)$$

$$z_j'(x) = \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(x) - z_j(x)), \quad m \in N, j = \overline{1, m}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$z_j(0) = \sin\left(-\frac{j\tau}{m}\right) + 2, \quad j = \overline{0, m}, \quad z_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4. \quad (2.40)$$

Згідно теореми 2.3 матимемо

$$|z_0(x) - y(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язок крайової задачі (2.39)–(2.40) будемо шукати в два етапи.

1) Спочатку розглядаємо задачу Коші для системи

$$\begin{aligned} z_j'(x) &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(x) - z_j(x)), \\ z_j(0) &= z_j^0, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

де згідно (2.38) маємо

$$z_j(0) = \sin\left(-\frac{j\pi}{2m}\right) + 2, \quad j = \overline{0, m}.$$

Застосовуючи деяку різницеву схему для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші, послідовно для $j = \overline{1, m}$ знаходимо значення

$$z_m^1, z_m^2, \dots, z_m^m. \quad (2.42)$$

Використовуючи значення (2.42), за допомогою квадратурної формули правих прямокутників обчислюємо наближене значення інтеграла в правій частині рівняння (2.39)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} z_m(s) ds = \frac{\pi}{2m} \sum_{j=1}^m z_m^j = A. \quad (2.43)$$

2) Розглядаємо тепер крайову задачу

$$\begin{aligned} z_0''(x) &= -z_0(x) + A, \\ z_0(0) &= 2, \quad z_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, \end{aligned} \quad (2.44)$$

розв'язок якої знаходимо аналітично

$$z_0(x) = (4 - A) \sin x + (2 - A) \cos x + A. \quad (2.45)$$

У таблиці 3.1 наведено результати числових експериментів апроксимації розвитку крайової задачі (2.37)–(2.38), де $y_t(x)$ – точний розв'язок, $z_0(x)$ – розв'язок апроксимуючої крайової задачі (2.39)–(2.40) при $m = 20$.

Таблиця 2.1

**Результати числових експериментів для крайової задачі
(2.37)–(2.38)**

x	Точний розв'язок $y_t(x)$	Наближений розв'язок	Похибка
0	2	2	0
$\pi/10$	2.581209	2.570863	0.010346
$\pi/5$	3.119386	3.103599	0.015787
$2\pi/5$	3.865288	3.854941	0.010347
$\pi/2$	4	4	0

3 ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ СПЕЦІАЛЬНОГО ТИПУ ТА ЇХ КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

3.1 Вступ

У даному розділі досліджується задача Коші для стохастичного диференціально-функціонального рівняння з частинними похідними спеціального вигляду, яке описує динамічні процеси з пам'яттю під впливом випадкових збурень. Зокрема, вивчаються математичні умови, що гарантують існування та єдиність розв'язку такого рівняння. Теоретичні результати базуються на сучасному апараті стохастичного аналізу та функціонального диференціального числення.

Оскільки розв'язання подібних рівнянь у загальному випадку не може бути отримано аналітично, у роботі розглянуто підходи до їх наближеного чисельного розв'язання. Описано дискретизацію простору та часу, а також способи апроксимації функціональних членів рівняння з використанням буфера пам'яті. Розглянуто реалізацію шумового впливу через додавання просторово-часового стохастичного збурення, змодельованого на основі вінерового процесу.

Для перевірки теоретичних результатів і практичної ілюстрації динаміки процесів з пам'яттю розроблено комп'ютерну програму на мові Python, яка реалізує алгоритм розв'язання з використанням методу наближених обчислень Ейлера–Маруями. Розглянуто рівняння, що описує еволюцію системи з урахуванням просторового поширення (дифузії), згасання, впливу історії станів (ефект пам'яті) та випадкових збурень (шуму). Для наближеного розв'язання цього рівняння використовується дискретизація простору і часу та апроксимація інтегралу пам'яті як середнього по буферу попередніх значень. Побудовано графічну візуалізацію зміни стану системи в просторі та часі та теплову карту (heatmap), яка показує, як "розливається" і коливається функція у просторі та часі під впливом пам'яті та шуму. Отримані

результати мають перспективу подальшого використання в теорії та практиці комп'ютерного моделювання складних динамічних систем з ефектами пам'яті та стохастичними збуреннями. Зокрема, розроблені підходи можуть бути застосовані до моделювання процесів у фізиці (теплопровідність із запізненням, дифузія в середовищах зі структурною пам'яттю), біології та екології (розповсюдження популяцій або інфекцій з інкубаційними періодами), фінансовій математиці (волатильність із залежністю від минулих станів), а також у технічних та інформаційних системах керування зі стохастичними впливами й запізненням сигналу.

Дослідженню детермінованих рівнянь у частинних похідних присвячено численну кількість робіт, зазначених у монографіях [38, 39] та не меншу кількість опублікованих робіт науковців наприкінці ХХ – початку ХХІ ст. Після введення поняття стохастичного диференціалу та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціалу, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР) у відомих роботах [40]-[43] та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними (СДФРЧП) [44]-[47] (див. наведену бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для СДФРЧП. Зокрема, у монографії [48] доводиться теорема про розв'язність задачі Коші для лінійного параболічного стохастичного рівняння з неперервними збуреннями, розв'язання якого в фіксовані моменти часу зазнає імпульсного впливу. Подальше дослідження СДФРЧП йшло шляхом створення математичних моделей складних реальних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри у цих рівняннях (див., наприклад, роботи [49]-[51]).

3.2 Існування та єдиність розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння з частинними похідними спеціального вигляду та методи його комп'ютерного моделювання

3.2.1 Постановка задачі

Нехай на ймовірнісному базисі

$$(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}, \forall \{t_1, t_2\} \subset [0, T], \mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}, t_1 < t_2; \mathbf{P})$$

задано стохастичне диференціально-функціональне рівняння з частинними похідними спеціального вигляду (СДФРЧПСВ) під дією випадкових процесів $\{\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)\} : [0, T] \equiv \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ з простору Скорохода \mathbf{D} неперервних праворуч процесів, що мають лівосторонні границі [40, 41]

$$\begin{aligned} du(t, x, \omega) = & a(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \alpha(t, \omega)) dt + \\ & + b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta(t, \omega)) dw(t, \omega) \end{aligned} \quad (3.1)$$

за початковими умовами

$$\begin{aligned} u_t|_{t=0} & \equiv u(t + \theta, x, \omega)|_{t=0} = \varphi_0(\theta, \omega) \\ B_{kx} u_t|_{t=0} & \equiv B_{kx} u(t + \theta, x, \omega)|_{t=0} = \varphi_k(\theta, \omega) \end{aligned} \quad (3.2)$$

де $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$; $k = 1, 2, \dots, m - 1$; $u(t, x, \omega) : \mathbf{T} \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$; $u(t + \theta, x, \omega) \equiv u_t$; $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X \subset \mathbf{R}^1$; неперервні випадкові процеси $\{\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)\} : \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ та одновимірний вінерів процес попарно незалежні, при цьому $\mathbf{E}\{w(t_2 - t_1, \omega)\} = 0$; $\mathbf{E}\{w^2(t_2 - t_1, \omega)\} = t_2 - t_1$, $t_1 < t_2$ для довільних $\{t_1, t_2\} \subset \mathbf{T} \equiv [0, T]$, $T > 0$;

$$B_{kx} u_t \equiv \frac{\partial^k u(t + \theta, x, \omega)}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}, \quad \gamma_1 + \dots + \gamma_n = k \quad (3.3)$$

$k = \overline{1, m}$, $\theta \in [-\Delta, 0]$; $a(t, \cdot, \cdot, \dots, \alpha(t, \omega))$ та $b(t, \cdot, \cdot, \dots, \beta(t, \omega))$ є неперервними функціоналами від другого до передостаннього аргументу, а також неперервні по $t \in T$ та $\alpha(t, \omega)$ і $\beta(t, \omega)$.

Зауважимо, що при $\theta = 0$ матимемо стохастичне диференціальне рівняння з частинними похідними; при $\theta = -\Delta$, $\Delta > 0$ матимемо стохастичне диференціально-різницеве рівняння за Беллманом і Куком [38].

Лема 3.1. *При виконанні вищенаведених умов існує такий зв'язок оригінала $u(t, x, \omega)$ та зображення $v(t, \omega)$ перетворення Фур'є*

$$\|u(t, x, \omega)\|_{E_1} = 2\pi \|v(t, \sigma, \omega)\|_{2\mathbf{R}_+}, \quad \sigma > 0. \quad (3.4)$$

Якщо $E \{v^2(t, \omega)\} \equiv \varphi(t)$ є скалярною детермінованою функцією $\varphi(t) : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}^1$, то маємо нерівність Гронуолла [40, 41, 44, 45].

Зауважимо, що рівність (3.4) можна посилити на σ -алгебри $\sigma(E_1)$, $\sigma(2\mathbf{R}_+)$:

$$\|u(t, x, \omega)\|_{\sigma(E_1)} = 2\pi \|v(t, \omega)\|_{\sigma(2\mathbf{R}_+)}.$$

Застосуємо перетворення Фур'є до (3.1)-(3.3), тоді матимемо СДФР вигляду

$$\begin{aligned} dv(t, \omega) = & a\left(t, v_t(\omega), \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \alpha(t, \omega)\right) dt + \\ & + b\left(t, v_t(\omega), \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \beta(t, \omega)\right) dw(t, \omega), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$v_t(\omega)|_{t=0} = v(t + \theta, \omega)|_{t=0} = \Phi(u_t(\omega))|_{t=0} = \varphi(\theta) = \varphi_0, \quad (3.6)$$

де $\theta \in [-\Delta, 0]$,

$$\tilde{B}_k v_t \Big|_{t=0} = \Phi(B_{kx}, u_t) = \varphi_k(\theta) \equiv \varphi_k, \quad k = \overline{1, m}$$

Зауваження 3.1. *Виконання рівності (3.4) леми 3.1 означатиме, що властивості (та умови, що породжують ці властивості) розв'язку $v(t, \omega) : \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ задачі Коші СДФР вигляду (3.5)-(3.6) збігаються з властивостями розв'язку $u(t, x, \omega) : \mathbf{T} \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ СДФРЧПСВ (3.1)-(3.3) (як перетворення Фур'є відповідного розв'язку).*

Надалі будемо вважати, що існують пряме та обернене перетворення Фур'є від коефіцієнтів $a(t, x, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \alpha(t, \omega))$ та $b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta(t, \omega))$, тобто пряме перетворення Фур'є $\Phi(a(t, x, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t,$

$\alpha(t, \omega))$, $\Phi(b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta(t, \omega)))$, де $u_t \equiv u(t + \theta, x, \omega)$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, $x \in X \subset \mathbf{R}^1$ та відповідне обернене перетворення Фур'є $\Phi^{-1}(\cdot)$ такі, що

$$v(t, \sigma, \omega) = \Phi\{u(t, x, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_i} e^{i\sigma x} u(t, x, \omega) dx, \quad \sigma > 0$$

$$\Phi^{-1}\{v(t, \sigma, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-i\sigma x} v(t, \sigma, \omega) d\sigma.$$

Зауваження 3.2. Частинним випадком СДФРЧПСВ (3.1)-(3.3) є випадок $m = 2$ та $a(\cdot) \equiv \alpha(t, \omega)a_1(\cdot)$, $b(\cdot) \equiv \beta(t, \omega)b_1(\cdot)$, тобто

$$\begin{aligned} du(t, x, \omega) &= \alpha(t, \omega)a_1(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t) dt + \\ &+ \beta(t, \omega)b_1(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t) dw(t, \omega) \end{aligned} \quad (3.7)$$

за умов

$$u_t|_{t=0} = \varphi(\theta), \quad B_x u_t|_{t=0} = \varphi_1(\theta). \quad (3.8)$$

Таке представлення корисне при переході від (3.7)-(3.8) до еквівалентного квазілінійного СДФРЧП вигляду

$$\begin{aligned} du^*(t, x, \omega) &= [Au_t^*(\omega) + a^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \alpha(t, \omega))] dt + \\ &+ [Bu_t^*(\omega) + b^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \beta(t, \omega))] dw(t, \omega), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$u_t^*|_{t=0} = \varphi(\theta),$$

$$B_x u_t^*|_{t=0} = \varphi_1(\theta).$$

заміною

$$a(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t, \alpha(t, \omega)) = \frac{Au_t^*(\omega) + a^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \alpha(t, \omega))}{a(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \alpha(t, \omega))},$$

$$b(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t, \beta(t, \omega)) = \frac{Bu_t^*(\omega) + b^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \beta(t, \omega))}{b(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \beta(t, \omega))}.$$

Це дає можливість для слабонелінійних вихідних СДФРЧП (3.1)-(3.3) звести дослідження на асимптотичну стійкість у середньому квадратичному до дослідження на асимптотичну стійкість лінійного СДФРЧП вигляду [44, 45]

$$du^*(t, x, \omega) = Au_t^* dt + Bu_t^* dw(t, \omega),$$

$$u_t^*(x, \omega)|_{t=0} = \psi(\theta, \omega).$$

Якщо (3.1)-(3.3) є сильно нелінійним СДФРЧП або нелінійним змішаного типу, то дослідження (3.1)-(3.3) на стійкість у середньому квадратичному проводиться другим методом Ляпунова–Красовського [44, 45].

Теорема 3.1. *Нехай на ймовірнісному базисі задана задача Коші для вихідного СДФРЧП (3.1)-(3.3) та виконуються умови:*

1) *нелінійні функціонали $a(t, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(t, \omega))$ та $b(t, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(t, \omega))$ з імовірністю одиниця належать до класу неперервних функціоналів;*

2) *$a(t, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(t, \omega))$, $b(t, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(t, \omega))$ задовольняють умову Ліпшиця за всіма аргументами від другого до m -го з імовірністю одиниця зі сталою $L > 0$ та при всіх $\alpha(t, \omega)$, $\beta(t, \omega)$;*

3) *випадкові процеси $\{\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)\} : \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ і вінеровий процес $w(t, \omega) : \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ ($\mathbf{E}\{w(t, \omega)\} = 0$, $\mathbf{E}\{w^2(t, \omega)\} = t$) попарно незалежні;*

4) *функціонали a та b задовольняють при $t \in \mathbf{T}$ умови обмеженості вигляду:*

$$a(t, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(t, \omega)) \leq a(0, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(0, \omega)),$$

$$b(t, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(t, \omega)) \leq b(0, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(0, \omega)),$$

якщо

$$\alpha(t, \omega) \leq \alpha(0, \omega), \quad \beta(t, \omega) \leq \beta(0, \omega), \quad t \in \mathbf{T},$$

$$\alpha(0, \omega) = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \alpha(t, \omega), \quad \beta(0, \omega) = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \beta(t, \omega).$$

Тоді з імовірністю одиниця існує розв'язок СДФРЧП (3.1)-(3.3).

Для доведення єдиності розв'язку СДФРЧП (3.1)-(3.3) за $\text{mod } \mathbf{P}$ сформулюємо узагальнену лему Гронуолла для випадкових процесів.

Лема 3.2. *Нехай $v(t, \omega) : \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ задовольняє такі умови:*

1) *є \mathfrak{N}_t -вимірною;*

2) *$v(t, \omega) \geq 0$;*

3) *обмежена дійсним числом;*

4) *$v(t, \omega) \equiv 0$ для довільного $t \in [-\Delta, 0]$;*

5) задовольняє для $t > 0$ нерівність

$$P \left\{ \omega : v(t, \omega) \leq L \int_0^t \int_{-\Delta}^0 v(t+s, \omega) d\beta(s) ds \right\} = 1.$$

Тоді виконується співвідношення

$$P\{\omega : v(t, \omega) = 0\} = 1 \quad \forall t > 0.$$

3.2.2 Єдиність розв'язку задачі Коші СДФРЧР (3.1)-(3.3)

Теорема 3.2. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}, \forall \{t_1, t_2\} \subset [0, T], \mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}, t_1 < t_2; \mathbf{P})$ задано задачу Коші (3.1)-(3.3) та виконуються такі умови:

- 1) коефіцієнти $\alpha(t, \cdot, \alpha)$ і $\beta(t, \cdot, \beta)$ неперервні за всіма аргументами;
- 2) одновимірні неперервні випадкові процеси $\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)$ і вінеровий процес $w(t, \omega)$ попарно незалежні, $\mathbf{E}\{\Delta w(t, \omega)\} = 0, \mathbf{E}\{\Delta^2 w(t, \omega)\} = \Delta t^2$;
- 3) коефіцієнти $a(t, \cdot, \alpha)$ і $b(t, \cdot, \beta)$ задовольняють умови обмеженості

$$\begin{aligned} & |a(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \alpha)|^2 + |b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta)|^2 \leq \\ & \leq l(1 + \|u(t + \theta, x, \omega)\|^2), \quad u_t \equiv u(t + \theta, x, \omega), \quad \theta \in [-\Delta, 0], \quad \Delta > 0, \quad x \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^1; \end{aligned}$$

4) виконується нерівність вигляду

$$\begin{aligned} & \left| a\left(t, u_t^{(1)}, B_x u_t^{(1)}, \dots, B_{mx} u_t^{(1)}, \alpha\right) - a\left(t, u_t^{(2)}, B_x u_t^{(2)}, \dots, B_{mx} u_t^{(2)}, \alpha\right) \right|^2 + \\ & + \left| b\left(t, u_t^{(1)}, B_x u_t^{(1)}, \dots, B_{mx} u_t^{(1)}, \beta\right) - b\left(t, u_t^{(2)}, B_x u_t^{(2)}, \dots, B_{mx} u_t^{(2)}, \beta\right) \right|^2 \leq \\ & \leq l_r \left\| u_t^{(1)}(x, \omega) - u_t^{(2)}(x, \omega) \right\|^2, \quad l_r > 0, \end{aligned}$$

де $u_t^{(j)}(x, \omega) \equiv u_t^{(j)}(t + \theta, x, \omega)$, $j = 1, 2$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$; $B_{kx} u_t^{(j)}(x, \omega)$ – частинні похідні k -го порядку по x , $k = \overline{1, m}$, $\|u_t^{(j)}\| \equiv \|u^{(j)}(t + \theta, x, \omega)\| \leq r$, $j = 1, 2$.

Тоді існує єдиний розв'язок $u(t, x, \omega) : \mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ з імовірністю одиниця (mod \mathbf{P}).

3.2.3 Алгоритм побудови наближеного розв'язку для СДФРЧП (3.1)-(3.3)

Алгоритм побудови наближеного розв'язку стохастичного диференціального рівняння в частинних похідних зазвичай базується на методі Монте-Карло та дискретизації рівняння, наприклад, за допомогою методу Ейлера-Маруями або диференціальних схем (метод Мілштейна [52, 53]).

Зокрема, якщо розглядати СДРЧП у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u + f(u, x, t) = \sigma(u, x, t)\dot{W},$$

де \mathcal{L} – диференціальний оператор, $f(u, x, t)$ – детермінована функція, а $\sigma(u, x, t)\dot{W}$ – стохастичний шум (формальний запис просторово-часового білого шуму), тоді алгоритм побудови розв'язку складається з таких кроків:

- 1) ділимо область розв'язку на сітку: $x_i = i\Delta x$, $t_n = n\Delta t$;
- 2) вибираємо часовий крок Δt і просторовий крок Δx ;
- 3) використовуємо метод Монте-Карло разом зі стохастичними схемами:
 - метод Ейлера-Маруями:

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \Delta t \mathcal{L}u_{i,n} + f(u_{i,n}) \Delta t + \sigma(u_{i,n}) \Delta W_n,$$

де $\Delta W_n \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$ – нормальний випадковий шум;

- метод Мілштейна (точніше враховує нелінійності):

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \Delta t \mathcal{L}u_{i,n} + f(u_{i,n}) \Delta t + \sigma(u_{i,n}) \Delta W_n + \frac{1}{2} \sigma'(u_{i,n}) \sigma(u_{i,n}) \left((\Delta W_n)^2 - \Delta t \right);$$

– виконуємо числове моделювання, а саме, генеруємо випадковий шум ΔW_n , для кожної точки сітки обчислюємо значення $u_{i,n+1}$, повторюємо ітерації для всіх часових кроків.

Розглянемо стохастичне диференціально-функціональне рівняння в частинних похідних вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u + f(u, x, t, u_\tau) = \sigma(u, x, t)\dot{W}(x, t),$$

де \mathcal{L} – оператор диференціювання (наприклад, лапласіан), $f(u, x, t, u_\tau)$ нелінійний функціонал, що залежить від стану $u_\tau = u(x, t - \tau)$, $\sigma(u, x, t)\dot{W}(x, t)$ – формальний запис просторово-часового білого шуму.

Прикладами таких рівнянь можуть бути стохастичне рівняння реакції-дифузії зі запізненням вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, u_\tau) + \sigma \dot{W}$$

чи стохастичне рівняння моделі популяційної динаміки вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru(1 - u_\tau) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \dot{W}.$$

Для отримання наближеного розв'язку СДФРЧП можна розширити методи, використані для СДРЧП, додавши пам'ять для обліку затримки. Тоді отримуємо такий вигляд алгоритму:

1) дискретизація простору та часу (як і раніше, розділяємо область на сітку x_i, t_n , з кроками $\Delta x, \Delta t$);

2) зберігання історії розв'язку (вводимо буфер для значень $u(x, t - \tau)$, що зберігає значення рішення за попередні моменти часу);

3) модифікація схеми Ейлера-Маруями:

– для кожного вузла сітки оновлюємо стан:

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \Delta t \mathcal{L} u_{i,n} + f(u_{i,n}, u_{i,n-m}) \Delta t + \sigma dW_n,$$

– затримане значення $u_{i,n-m}$ береться з попередніх кроків.

Для стохастичного рівняння теплопровідності зі затриманою реакцією вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u_\tau + \sigma \dot{W}$$

при значеннях довжини області $L = 1.0$, часу моделювання $T = 0.5$, кількості точок у просторі $N_x = 50$, кількості часових кроків $N_t = 1000$, коефіцієнта дифузії $\alpha = 0.01$, інтенсивності шуму $\sigma = 0.1$, впливу запізнення $\beta = 0.05$ та затримки $\tau = 0.1$ отримуємо графік розподілу температури зі запізненням, зображений на Рис. 3.1.



Рис. 3.1 Розподіл температури зі запізненням

Для отримання розв'язку використовувалася мова Python з бібліотекою deque для збереження минулих значень. При кожному кроці алгоритму додавалося нове значення, а старе видалялося, значення оновлювалися з урахуванням запізнення u_τ . Вплив запізнення призводить до осциляцій і затриманої реакції.

Розглянемо також стохастичне диференціально-функціональне рівняння з частинними похідними у вигляді:

$$du(t, x) = \left[D \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \alpha u(t, x) + \beta \int_{-r}^0 u(t + \theta, x) d\theta \right] dt + \sigma dW(t, x),$$

де $u(t, x)$ – невідома функція часу t і простору x ; D – коефіцієнт дифузії; α – коефіцієнт згасання; β – коефіцієнт впливу пам'яті; r – глибина пам'яті (інтервал запізнення); σ – амплітуда шуму; $W(t, x)$ – просторово-часовий вінерів процес.

Дане рівняння описує еволюцію системи з урахуванням просторового поширення (дифузії), згасання, впливу історії станів (ефект пам'яті) та випадкових збурень (шуму). Для наближеного розв'язання цього рівняння використовується дискретизація простору і часу та апроксимація інтегралу пам'яті як середнього по буферу попередніх значень [52, 53]).

Для значень параметрів $L = 1.0$ (довжина простору), $T = 1.0$ (час моделювання), $D = 0.01$ (коефіцієнт дифузії), $\alpha = 1.0$ (згасання), $\beta = 0.5$ (пам'ять), $\sigma = 0.2$ (шум), $\tau = 0.1$ (глибина пам'яті), $N_x = 50$ (кількість точок у просторі), $N_t = 1000$ (кількість кроків у часі) отримуємо при моделюванні з використанням бібліотек Numpy та Matplotlib мови Python теплову карту (heatmap), яка показує, як "розливається" і коливається функція $u(t, x)$ у просторі та часі під впливом пам'яті та шуму (див. Рис. 3.2). Кольорова шкала відображає інтенсивність значення функції $u(t, x)$.

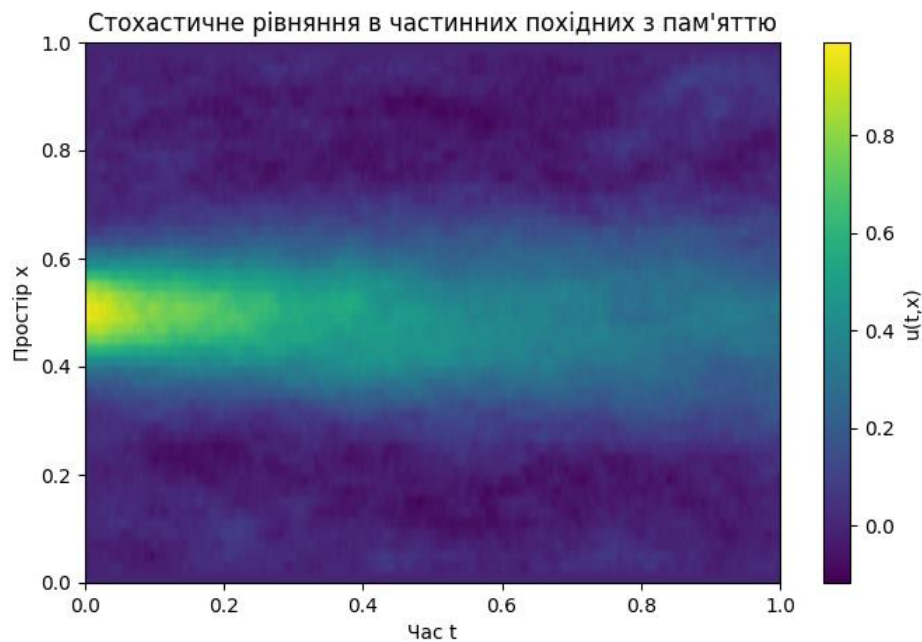


Рис. 3.2 Теплова карта для розв'язку СДРЧП

3.2.4 Візуалізація траєкторій розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з пуассоновими збуреннями та запізненнями з аналізом стійкості розв'язку з використанням Python

За допомогою бібліотек NumPy, Seaborn, Matplotlib мови Python проведено моделювання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням схеми Ейлера-Маруяма [52, 53]. Використовується класичний підхід до дискретизації лапласіана та стохастичних збурень (вінеровий та пуассоновий процеси).

Детальне доведення результатів пункту 3.1 опубліковано у працях [51, 54].

Модель стохастичного диференціального рівняння:

$$du = D * (d^2u/dx^2)dt + \sigma dW + JdN,$$

де: $u(x, t)$ – шукане поле,

D – коефіцієнт дифузії,

σ – інтенсивність стохастичного шуму,

dW – вінеровий процес,

J – амплітуда пуассонових збурень,

dN – пуассоновий процес.

Наближений метод обчислення – схема Ейлера–Маруяма зі скінченними різницями для лапласіана:

$$u_{n+1} = u_n + dt * D * (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})/dx^2 + \sigma * \xi * \text{sqrt}(dt) + J * \eta * dN,$$

де: $\xi \sim N(0, 1)$ – випадковий шум,

$\eta \sim N(0, 1)$ – випадковий внесок пуассонового процесу,

$dN \sim Poisson(\lambda dt)$ – приріст пуассонового процесу з інтенсивністю λ .

Графік стійкості відображає максимальні значення $u(x, t)$ для кожного з 10 експериментів. Високі значення свідчать про потенційну нестійкість розв'язку. Якщо хоча б один експеримент має значення вище критичного порогу (наприклад, 10), система вважається нестійкою.

Параметри

$L = 1.0$ # Довжина області

$N_x = 50$ # Кількість вузлів у просторі

$T = 1.0$ # Часова область

$N_t = 1000$ # Кількість кроків у часі

$dx = L / N_x$ # Крок по простору

$dt = T / N_t$ # Крок по часу

Параметри рівняння

$\text{diffusivity} = 0.1$ # Коефіцієнт дифузії

`sigma = 0.1 # Інтенсивність шуму`

`J = 0.5 # Амплітуда пуассонових збурень`

`lambda_poisson = 5.0 # Інтенсивність пуассонового процесу`

Дискретизація простору і часу

`x = np.linspace(0, L, Nx)`

`t = np.linspace(0, T, Nt)`

Візуалізація 10 розв'язків

`plt.figure(figsize=(10, 5))`

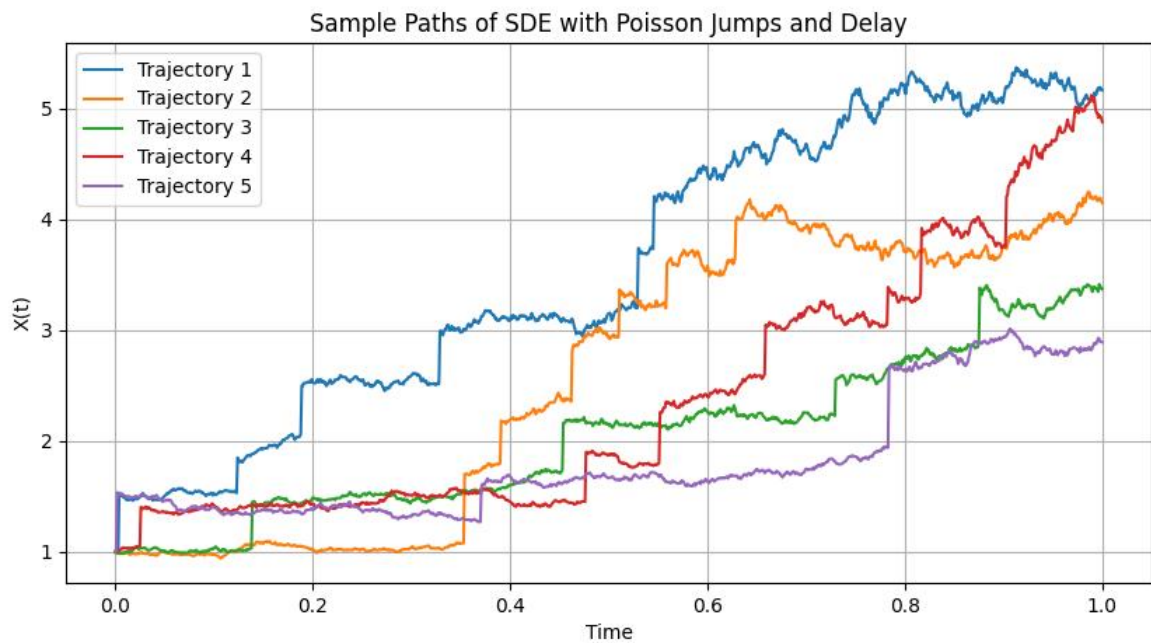


Рис. 3.3 Траєкторії розв'язків СДР з пуассоновими стрибками та запізненням

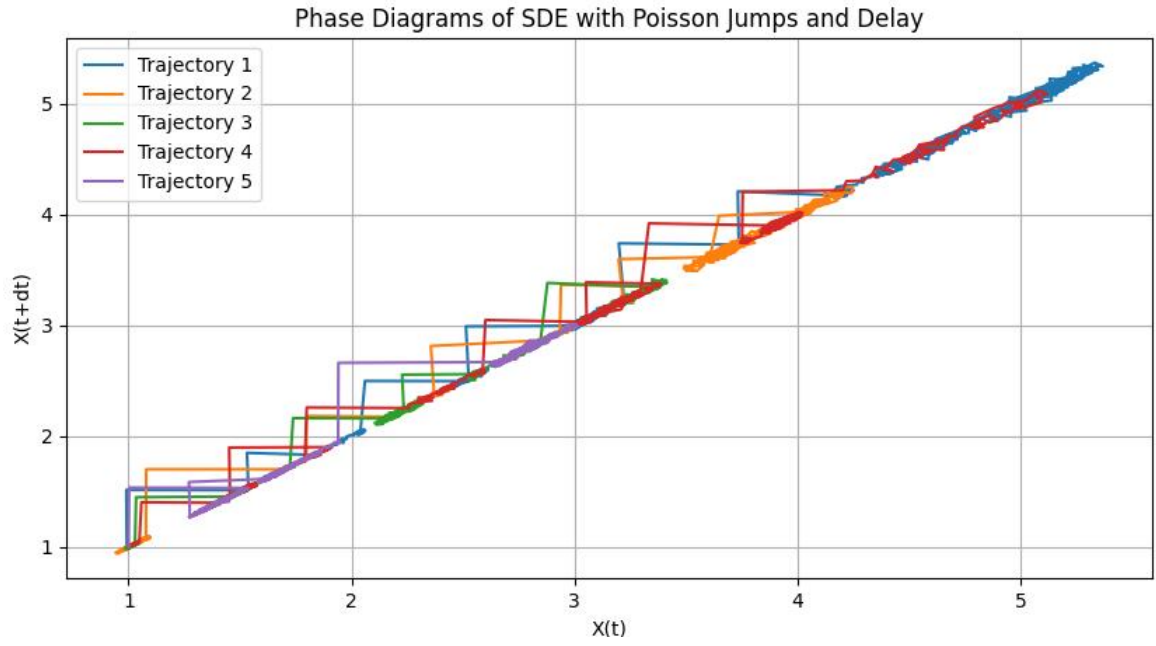


Рис. 3.4 Фазові діаграми СДР з пуассоновими стрибками та запізненням

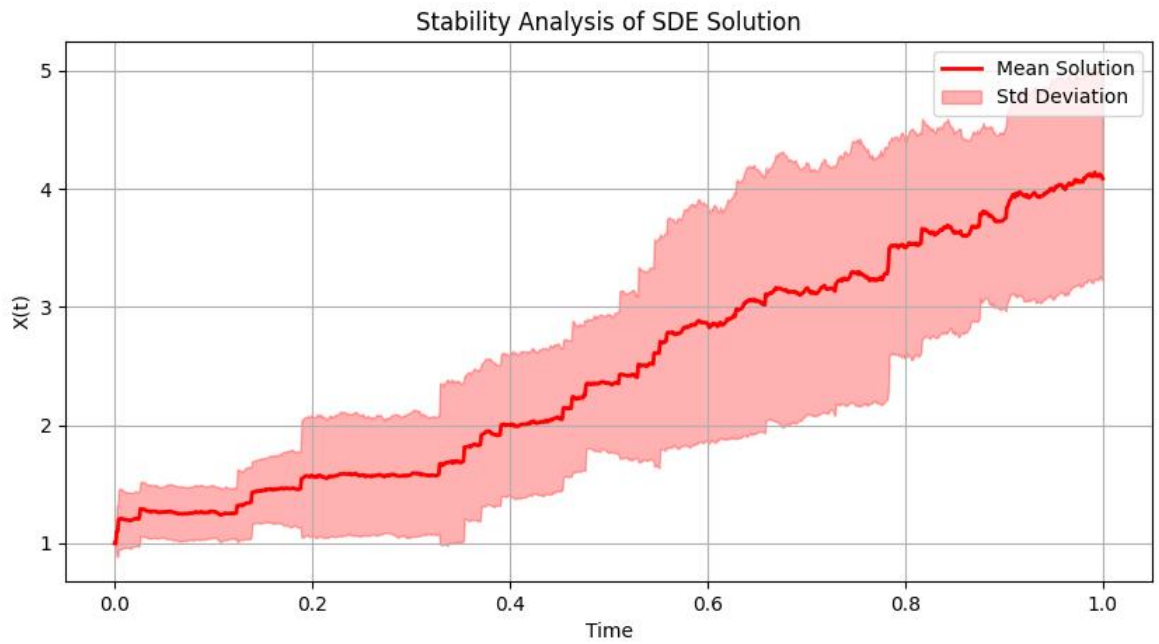


Рис. 3.5 Аналіз стійкості розв'язків СДР

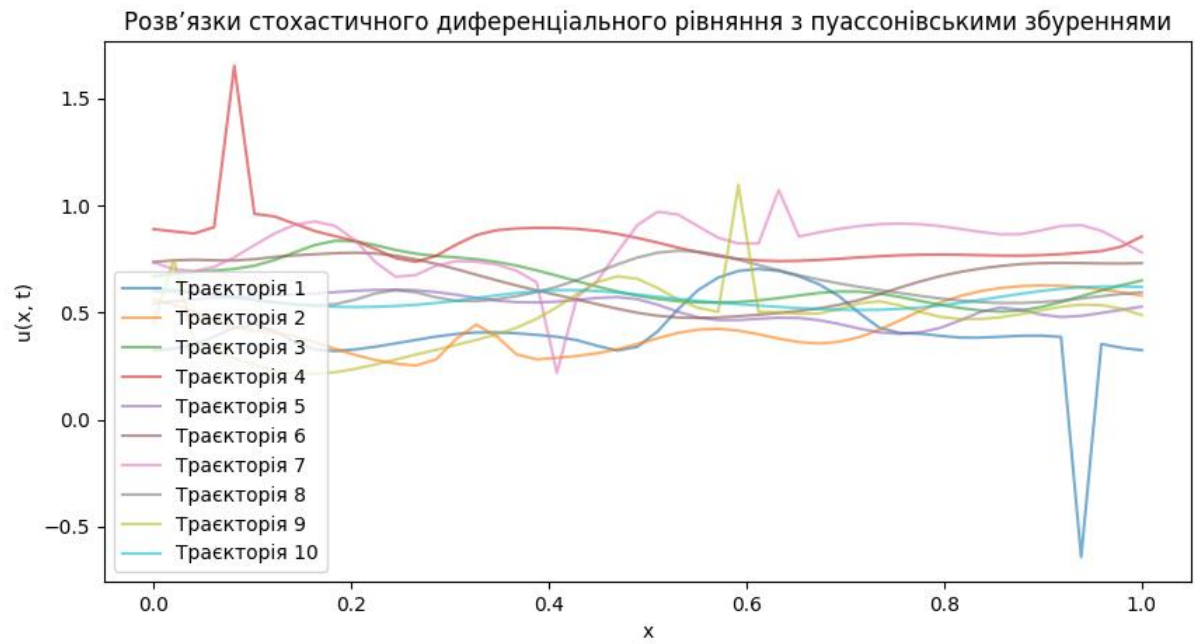


Рис. 3.6 Області стійкості розв'язків СДР

3.3 Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних

3.3.1 Постановка задачі

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема і рівнянь у частинних похідних, досліджувалося багатьма авторами [38]-[54]. У працях [55, 56] А.Н. Станжицький та А.О. Цуканова одержали теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. У даному пункті розглядається питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерового процесу і продовжує дослідження, розпочаті в роботах [55]-[57].

Детальне доведення результатів пункту 3.3 опубліковано у працях [51, 58].

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0, 0\}, \mathbf{P})$ задано нелінійне дифузійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ) в частинних похідних під дією випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерового процесу

$$d \left(u(t, x) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, y) u(t - \tau, y) dy \right) = \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_j^2} + \sigma(t, u(t - \tau, x)) dw(t, x) + \int_{\mathbf{Z}} c(t, u(t - \tau, x), z) \tilde{v}(dz, dt), \quad (3.10)$$

для $t \in (0, T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковими даними

$$u(t, x) = \psi(t, x), \quad \forall t \in [-\tau, 0], \quad (3.11)$$

$u(t, x) : [0, T] \times \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ – розв'язок задачі (3.10), (3.11); $T \in (0, \infty)$ –

фіксований дійсний час, $\tau > 0$, r -вимірний оператор Лапласа

$$\Delta_x \equiv \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_j^2}, \quad (3.12)$$

$w(t, x) - L_2(\mathbf{R}^r)$ -вимірний Q -вінеровий процес; $\tilde{v}(A, t) \equiv v(A, t) - \mathbf{E} \{v^2(A, t)\}$ – центрована пуассонова міра [40], $\sigma : [0, T] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ і $b : [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$, $c : [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ – деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження; $\psi : [-\tau, 0] \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ – функція початкових даних.

3.3.2 Про попередні результати та основні означення

Наведемо декілька тверджень з праць [55, 56, 57].

Лема 3.3. *Оператор*

$$S(t) : L_2(\mathbf{R}^r) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^r) \quad (3.13)$$

генерує розв'язок однорідної задачі Коші для рівняння тепла з імовірністю 1

$$d(u(t, x)) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z)u(t - \tau, z)dz = \Delta_x u(t, x) \quad (3.14)$$

за початковими даними (3.11) за правилом

$$u(t, x) = (s(t)g(\cdot))(x) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y)g(\cdot)dy \quad (3.15)$$

та утворює C_0 – напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий лапласіан $\Delta_x(\omega)$ (3.12). А ця напівгрупа $S(t)$ є стискаючою, тобто

$$\|(S(t)g(\cdot))(x)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \|g(x)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \quad (3.16)$$

Побудуємо потік (фільтрацію) σ -алгебр $\{F_t, t \geq t_0 \geq 0\}$, який породжений $L_2(\mathbf{R}^r)$ -значним Q -вінеровим процесом

$$w(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(x) \beta_n(t) \quad (3.17)$$

та центрованою пуассоновою мірою $\tilde{v}(A, t) \equiv v(A, t) - \mathbf{E}\{v(A, t)\}$, де $\{\beta_n(t) \equiv \beta_n(t, \omega)\} \subset \mathbf{R}^1$ – незалежні стандартні одновимірні вінерові процеси, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \equiv \lambda < \infty. \quad (3.18)$$

При цьому система векторів $e_n(x) \equiv \bar{e}_n(x)$ утворює ортонормований базис у $L_2(\mathbf{R}^r)$ такий, що

$$\sup_{n \in \{1, 2, \dots\}} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbf{R}^r} |e_n(x)| \leq 1. \quad (3.19)$$

Уведемо простір Банаха $\mathfrak{B}_{2,T}$ всіх $L_2(\mathbf{R}^r)$ -значних F_t -вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\xi(\cdot) \equiv \xi(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow L_2(\mathbf{R}^r)$ з нормою

$$\|\xi(\cdot)\|_{B_{2,r}} \equiv \sqrt{\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \|\xi(t, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2}. \quad (3.20)$$

Означення 3.1. Неперервну випадкову функцію $u \equiv u(t, x, \omega) : [-\tau, T] \times \mathbf{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbf{D}^1([-\tau, T])$ назвемо м'яким розв'язком задачі (3.10), (3.11), якщо виконуються умови:

1) $u \in F_T$ -вимірною для майже всіх $t \in [-\tau, T]$ та фіксованих $x \in \mathbf{R}^r, \omega \in \Omega$;

2) u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$\begin{aligned} u(t, x, \omega) = & \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y) \left(\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz \right) dy - \\ & - \int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, y) u(t - \tau, y) dy + \\ & + \int_{\mathbf{Z}'} \int_{\mathbf{R}^r} c(0, y, z, z_1) \psi(-\tau, z_1) \Pi(dz) dz_1 dy - \int_{\mathbf{Z}'} \int_{\mathbf{R}^r} c(0, x, y, z) u(t - \tau, y) \Pi(dz) dy - \\ & - \int_0^t \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(t - s, x - y) \times \int_{\mathbf{R}^r} b(s, y, z) u(s - \tau, z) dz dy \right) ds - \\ & - \int_0^t \left(\int_{\mathbf{Z}'} \Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(t - s, x - y) \times \int_{\mathbf{R}^r} c(s, y, z_1, z) u(s - \tau, z_1) \Pi(dz) dz_1 dy \right) ds + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}'} K(t-s, x-y) \times \sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right) d\beta_n(s) \quad (3.21)$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковою умовою (3.11);

3) існує норма

$$E \left\{ \int_0^T \|u(t, x, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}')}^2 dt \right\} < \infty. \quad (3.22)$$

Лема 3.4. Математичне сподівання від квадрату $u(t, x, \omega)$ (див. (3.22)) є нормою.

3.3.3 Основне твердження

Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0\}, \mathbf{P})$ побудований для задачі (3.10), (3.11), яка є предметом даного дослідження.

Нехай для задачі (3.10), (3.11) виконано умови:

1) коефіцієнти $\sigma \equiv \sigma(t, u, x)$ та $c(t, u, x, z)$ є:

1а) вимірними за всіма аргументами;

1б) задовольняють умову Ліпшиця за другим аргументом

$$|\sigma(t, u, x) - \sigma(t, v, x)| + \int_{\mathbf{Z}} |c(t, u, x, z) - c(t, v, x, z)| \Pi(dz) \leq L|u - v|$$

для $\forall t \in [0, T]$, $u, v \in \mathbf{R}^1$, $x \in \mathbf{R}^r$;

2) початкова функція $\psi(t, x, \omega)$ є:

2а) F_0 -вимірною відносно аргумента $t \in [0, T]$;

2б) незалежною від вінерового процесу $w(t) \equiv w(t, \omega) \in \mathbf{R}^1$ для $\forall t \in [0, T]$ та центрованої пуассонової міри $\tilde{v}(t, x, z)$;

2в) має норму

$$\sup_{-\tau \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(t, x, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}')}^2 < \infty; \quad (3.23)$$

3) функції $b \equiv b(t, x, y)$ та $c(t, x, y, z)$ задовольняє умови:

3а)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}'} \sqrt{\int_{\mathbf{R}'} b^2(t, x, y) dy dx} + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{Z}_{\mathbf{R}'}} \int_{\mathbf{R}'} \sqrt{\int_{\mathbf{R}} c^2(t, x, y, z) \Pi(dz) dy dx} = K_1 < \infty; \quad (3.24)$$

3б)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}'} \int_{\mathbf{R}'} b^2(t, x, y) dy dx + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{Z}'} \int_{\mathbf{R}'} \int_{\mathbf{R}'} c^2(t, x, y, z) \Pi(dz) dy dx = K_2 < \infty; \quad (3.25)$$

3в) для кожної точки $x \in \mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, де $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$;

3г) матриця Гессе $D_x^2 b$ задовольняє умову

$$\begin{aligned} & \left| \nabla_x b(t, x, y) \right| + \left| \nabla_x \int_{\mathbf{Z}} c(t, x, y, z) \Pi(dz) \right| + \\ & + \left\| D_x^2 b(t, x, y) \right\| + \left\| D_x^2 \left(\int_{\mathbf{Z}} c(t, x, y, z) \Pi(dz) \right) \right\| \leq \Phi(t, x, y), \end{aligned} \quad (3.26)$$

для $\forall t \in [0, T] \subset [0, \infty)$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}^r$, де функція $\Phi : [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \rightarrow [0, \infty)$ задовольняє умову обмеженості подвійного просторового інтегралу

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}'} \int_{\mathbf{R}'} \Phi(t, x, y) dx dy = K_3 < \infty; \quad (3.27)$$

4) для функції $\Phi(t, x, y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$|\Phi(t, x, z) - \Phi(t, x_0, z)| \leq \zeta(t, z, x_0, \delta) |x - x_0|,$$

де для кожної точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$ існує її окіл $B_\delta(x_0)$ та невід'ємна функція $\zeta \equiv \zeta(t, z, x_0, \delta)$ для $\forall t \in [0, T]$, $|x - x_0| < \delta$; $z \in \mathbf{R}^r$, де

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \zeta(t, \cdot, x_0, \delta) \in L_2(\mathbf{R}^r), \quad \delta \in \mathbf{R}_+ \quad (3.28)$$

Тоді задача (3.10), (3.11) для НСДРНТ має єдиний м'який розв'язок $u \equiv u(t, x, \omega) \in \mathfrak{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t \in [0, T]$, якщо

$$\sup_{0 \leq \pm t \leq T} \int_{\mathbf{R}'} \int_{\mathbf{R}'} b^2(t, x, y) dx dy \equiv K_5 < \frac{1}{4}. \quad (3.29)$$

3.4 Критерії стійкості та нестійкості в середньому квадратичному дифузійних стохастичних диференціально-функціональних систем Гіхмана–Іто під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин

3.4.1 Постановка задачі

Після введення поняття сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння, дослідження його властивостей та подальше поширення цих понять на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (див. праці Кійосі Іто, Й.І. Гіхмана, А.В. Скорохода, В.С. Королюка, Є.Ф. Царкова та ін.) стало можливим дослідження асимптотичної стійкості розв'язку для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (див., наприклад, роботи [38]-[51]).

У даному пункті досліджено асимптотичну стійкість у середньому квадратичному (в середньому) тривіального розв'язку дифузійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР) Гіхмана–Іто в термінах власних значень матриці \mathbf{B} , яка побудована з коефіцієнтів цих рівнянь.

Якщо максимальне власне значення матриці \mathbf{B} $\max \lambda_{\mathbf{B}} < 1$, то система стійка в середньому квадратичному (l.i.m.) (в середньому). Якщо $\lambda_{\mathbf{B}} > 1$, то система асимптотично нестійка в l.i.m. Досліджено також випадок, коли $\lambda_{\mathbf{B}} = 1$, де $\max \lambda_{\mathbf{B}}$ – корінь Перрона додатно визначеної матриці \mathbf{B} .

Детальне доведення результатів пункту 3.4 опубліковано у працях [51, 59].

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано ДСДФР вигляду

$$dx(t, \omega) = \varphi(\omega)a(x_t) dt + \psi(\omega)b(x_t) dw(t, \omega) \quad (3.30)$$

за початковими умовами

$$x_t|_{t=0} \equiv \{x(t + \theta), \theta \in [-r, 0]\}|_{t=0} = \alpha \in \mathbf{R}^n, \quad (3.31)$$

де $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$; $x_t \in \mathbf{D}_n([-r, 0])$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі; $\varphi(\omega), \psi(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ – задані

попарно незалежні від n -вимірного вінерового процесу $w(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ випадкові величини, що мають обмежені другі моменти

$$\mathbf{E} \{ \varphi^2(\omega) \} = K_1 < \infty; \quad \mathbf{E} \{ \psi^2(\omega) \} = K_2 < \infty; \quad (3.32)$$

$a(x_t) : \mathbf{D}_n([-r, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^n$; $b(x_t) : \mathbf{D}_n([-r, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Означення 3.2. Під сильним розв'язком задачі (3.30)-(3.31) будемо розуміти сепарабельний випадковий процес $x(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, який визначений для довільного $t \in [-r, 0]$ співвідношенням (3.30)-(3.31), вимірний відносно σ -алгебри $F_t \times B_t$ (B_t – σ -алгебра борелевих множин відрізка $[-r, t]$) та з імовірністю 1 задовольняє інтегральне рівняння

$$x(t, \omega) = \alpha(0) + \varphi(\omega) \int_0^t a(x_\tau) d\tau + \psi(\omega) \int_0^t b(x_\tau) dw(\tau, \omega). \quad (3.33)$$

Будемо вважати, що коефіцієнти та функції $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ такі, що існують сильні розв'язки задачі (3.30)-(3.31).

3.4.2 Перехід до інтегрального розв'язку задачі (3.30)-(3.31) за допомогою фундаментального розв'язку скороченої задачі

Позначимо через \mathfrak{M}_T простір n -вимірних випадкових процесів $f(t, \omega)$, який є вимірним для довільного $t \in [0, T]$ відносно σ -алгебри F_t , $t \geq 0$, $F_t \subset F$ і такий, що

$$\int_0^T \mathbf{E} \{ f^2(t, \omega) \} dt < \infty. \quad (3.34)$$

Припущення 3.1. Нехай надалі задано n -вимірний випадковий процес

$$z(t, \omega) = \varphi(\omega) \int_0^t H(t, \tau) dw(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau, \quad (3.35)$$

де $\varphi(\omega)$ – незалежна від $w(t, \omega)$, $f(\tau, \omega)$, а елементи дійсних матриць $H(t, \tau)$, $\frac{d}{dt}H(t, \tau)$ – визначені та неперервні за сукупністю аргументів $t \geq \tau \geq 0$.

Припущення 3.2. Власні значення $\lambda(\omega) \in \mathbf{R}^1$ твірного оператора напівгрупи розв'язків диференціального рівняння при кожному $\omega \in \Omega$

$$dy(t) = \varphi(\omega)a(y_t(\theta)) dt \quad (3.36)$$

лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda(\omega) < 0$.

Лема 3.5. *Нехай:*

1) виконуються припущення 3.1, 3.2;

2) випадковий процес $f(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ неперервний з імовірністю одиниця за змінною $t \in [0, T]$ і для нього виконується нерівність (3.34);

3) $\varphi(\omega), \psi(\omega)$ попарно незалежні від вінерового процесу $w(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ та виконуються умови (3.32).

Тоді випадковий процес $z(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, який задано рівністю (3.35), матиме стохастичний диференціал

$$\begin{aligned} dz(t, \omega) = & \psi(\omega) \int_0^t H(t, \tau) dw(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau + \\ & + \psi(\omega) H(t, t) dw(t, \omega) f(t, \omega). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Як і раніше, під фундаментальним розв'язком $H(t, \omega)$ диференціального рівняння (3.36), побудованого за початковою умовою (3.31), назвемо $H(t, \omega)$ для $t > 0$ вигляду

$$H(t, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi} e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda, \omega) d\lambda, \quad (3.38)$$

де

$$V(\lambda, \omega) \equiv \lambda - \varphi(\omega)a(e^{\lambda\theta}) \quad (3.39)$$

є квазіполіномом СДФР (3.36), а Π – контур, що охоплює всі корені характеристичного рівняння $\det V(\lambda, \omega) = 0$, $\omega \in \Omega$. При цьому $H(0, \omega) = I$ – одинична матриця, а для $t < 0$ маємо $H(t, \omega) = 0$.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови лема 3.5 та припущення 3.1, 3.2. Тоді розв'язок задачі Коші для СДФР (3.30), (3.31) $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ за допомогою фундаментального розв'язку $H(t)$ можна подати у вигляді*

$$x(t, \omega) = y(t, \omega) + \psi(\omega) \int_0^t H(t - \tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) b(x_\tau(\theta)), \quad (3.40)$$

де $y(t)$ – розв'язок диференціально-функціонального рівняння (3.36).

3.4.3 Необхідні та достатні умови належності розв'язків системи лінійних СДФР до простору сумовних за часом в середньому квадратичному випадкових процесів

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано автономне лінійне СДФР (3.30), (3.31), коефіцієнти якого задовольняють умови існування та єдиності розв'язку з імовірністю одиниця.

Припущення 3.3. Власні значення квазіполінома $V(\lambda)$ (3.39) розташовані в лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$ комплексної площини $xO(iy)$.

Уведемо до розгляду матрицю \mathbf{B} наступного вигляду

$$\mathbf{B} \equiv \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ [b(H_t(\theta, \omega))]_+^2 \right\} dt. \quad (3.41)$$

Тут і далі знак "2" вгорі біля матриці (вектора) означає піднесення до квадрату кожного елемента матриці (вектора), знак "+" внизу означає, що кожний елемент матриці (вектора) потрібно брати за модулем.

Застосуємо $b(\cdot)$ до лівої та правої частин рівняння (3.40), в результаті одержимо, що

$$b(x_t(\theta, \omega)) = b(y_t(\theta, \omega)) + \psi(\omega) \int_0^t b(H_{t-\tau}(\theta, \omega)) d\omega(\tau, \omega) b(x_\tau(\theta, \omega)). \quad (3.42)$$

Піднесемо до квадрату ліву та праву частини (3.42), застосуємо операцію математичного сподівання та, використовуючи властивості стохастичних

інтегралів, одержимо

$$\mu_b(t) = \mathbf{E} \{b^2(y_t(\theta, \omega))\} + \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} \int_0^t \mathbf{E} \{b^2(H_{t-\tau}(\theta, \omega)) \mu_b(s) ds\}, \quad (3.43)$$

де $\mu_b(t) = \mathbf{E} \{b^2(x_t(\theta, \omega))\}$. Далі інтегруємо рівняння (3.43) за аргументом t від 0 до $+\infty$ та, змінюючи порядок інтегрування у правій частині, матимемо

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mu_b(t) dt &= \int_0^\infty \mathbf{E} \{b^2(y_t(\theta, \omega))\} dt + \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} \times \\ &\times \int_0^\infty \mathbf{E} \{b^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \int_0^\infty \mu_b(s) ds. \end{aligned} \quad (3.44)$$

У рівнянні (3.44) в якості $y(t)$ слід брати стовпці матриці $H(t) \equiv \{h_{ij}(t)\}$, $i, j = \overline{1, n}$. Будемо позначати їх через $y_j(t)$, $j = \overline{1, n}$.

Для зручності уведемо наступні позначення:

$$N_j \equiv \int_0^\infty b^2(y_{tj}(\theta)) dt; \quad M_j \equiv \int_0^\infty \mu_{b_j}(t) dt.$$

Тоді, аналогічно до (3.43), можна записати рівняння

$$M_j = N_j + \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} \int_0^\infty \mathbf{E} \{b^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \cdot M_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.45)$$

За означенням матриці \mathbf{B} , одержимо

$$M_j = N_j + \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} \mathbf{B} \cdot M_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

За побудовою, вектор N_j збігається з j -им стовпчиком матриці \mathbf{B} , при цьому $\mathbf{B} = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$. Тоді позначимо $M \equiv \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ і подамо (3.45) у вигляді матричного рівняння

$$M = \mathbf{B} + \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} \cdot \mathbf{B} \cdot M. \quad (3.46)$$

Справджується таке твердження.

Теорема 3.4. *Нехай для лінійного СДФР (3.30), (3.31) виконуються всі умови теореми 3.3 та припущень 3.1-3.3.*

Тоді необхідною та достатньою умовою належності простору \mathfrak{M}_∞ довільного лінійного функціоналу $f : \mathbf{D}_n([-r, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^n$ є умова $\rho(\mathbf{B}) < 1$ або $|\lambda_{\max}(B)| < 1$, де $\rho(\mathbf{B})$ – спектральний радіус додатної матриці \mathbf{B} , $\lambda_{\max}(B)$ – корінь Перрона додатної матриці \mathbf{B} .

3.4.4 Асимптотична стійкість та нестійкість в середньому квадратичному (l.i.m.) розв'язків систем лінійних СДФР

За умови виконання накладених вище умов можна отримати наступні твердження про стійкість та нестійкість у l.i.m. розв'язків систем лінійних СДФР (3.30)-(3.31).

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови теореми 3.3 для лінійного автономного СДФР (3.30)-(3.32), а також $\rho(\mathbf{B}) < 1$ для матриці \mathbf{B} , яка задана (3.41).*

Тоді тривіальний розв'язок $x(t) \equiv x(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ задачі (3.31), (3.32) асимптотично стійкий у l.i.m.

Наслідок 3.1. *Якщо підставити вираз (3.38) для $H_b(t)$ у вираз (3.41) для матриці \mathbf{B} та застосувати теорему Планшереля, то формула для \mathbf{B} набуде вигляду*

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\pi} \mathbf{E} \{ \psi^2(\omega) \} \int_0^\infty |b(e^{is\theta})|^2 [V^{-1}(is)]_+^2 ds, \quad (3.47)$$

де $i = \sqrt{-1}$.

Теорема 3.6. *Нехай тривіальний розв'язок $y(t) \equiv 0$ диференціального рівняння (3.36) експоненціально стійкий, при цьому*

$$\rho(\mathbf{B}) > 1. \quad (3.48)$$

Тоді в околі нуля знайдеться така початкова функція $d(t) \in \mathbf{R}^n$, що розв'язок $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ СДФР (3.30)-(3.31) поводить себе в l.i.m. як

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \{ |x(t, \omega)|^2 \} = +\infty.$$

Зауваження 3.3. Оскільки умова $\rho(\mathbf{B}) > 1$ вимагає знаходження найбільшого за модулем власного значення матриці \mathbf{B} (3.47), для побудови якої необхідно знаходити обернену матрицю $[V^{-1}(is)]_+^2$ до матриці $[V(is)]_+^2$, а потім почленно інтегрувати кожен елемент цієї оберненої матриці від 0 до $+\infty$ за аргументом s , то постає питання, чи можна уникнути проблеми знаходження власних значень та побудови оберненої матриці, оскільки це приводить до великої кількості додаткових обчислень і використання значних обчислювальних ресурсів комп'ютера при розв'язанні прикладних задач.

Знаходження $\max \rho(\mathbf{B})$ можна уникнути, якщо від системи (3.30), (3.31) перейти до покоординатного запису

$$dx_i(t, \omega) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\omega) a_{ij}(x_{ijt}(\theta)) dt + \sum_{j=1}^n \psi_j(\omega) b_{ij}(x_{ijt}(\theta)) dw_{ij}(t, \omega) \quad (3.49)$$

за початковими умовами

$$x_i(t) = \alpha_i(t), \quad (3.50)$$

де $a_{ij}(\cdot)$, $b_{ij}(\cdot) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$ – лінійні неперервні функціонали, $w_{ij}(t, \omega)$, $i, j = \overline{1, n}$, – попарно незалежні та F_t -вимірні для $t \geq 0$.

Тоді в теоремі 3.6 потрібно перевіряти таку умову:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} \mathbf{E} \{b_{ij}^2(H_{kl}(t + \theta))\} dt < 1. \quad (3.51)$$

При малих $n \leq 10$ доцільно обчислювати $\rho(\mathbf{B})$, а при більших n можна скористатися формулою (3.51).

3.4.5 Асимптотична поведінка на безмежності другого моменту розв'язку систем лінійних СДФР загального вигляду під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано n -вимірний випадковий процес $x(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, який є розв'язком СДФР ви-

ГЛЯДУ

$$\begin{aligned} I \cdot \frac{d^N x(t, \omega)}{dt^N} + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \varphi_{jk}(\omega) A_{jk} \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j} = \\ = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \psi_{jk}(\omega) B_{jk} \frac{dw_{jk}(t, \omega)}{dt} \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j} \end{aligned} \quad (3.52)$$

за початковими умовами

$$\left. \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j} \right|_{t \in [-r, 0]} = \alpha(t), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (3.53)$$

де $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$, I – одинична матриця розмірності $n \times n$; $w_{jk}(t, \omega) \equiv \{w_{jk}^{lq}(t, \omega)\}$ – незалежні попарно вінерові процеси з нульовими зносами і матрицями параметрів дифузії $S_{jk} \equiv \{s_{jk}^{lq}\}$, де $l = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, N-1}$; $A_{jk} \equiv \{a_{jk}^{lq}\}$, $B_{jk} \equiv \{b_{jk}^{lq}\}$ – матриці з дійсними елементами; $\varphi_{jk}(\omega)$ – попарно незалежні зовнішні випадкові величини, $j = \overline{1, N-1}$; $k = \overline{0, m}$; $l = \overline{1, N}$; $q = \overline{1, N-1}$, зі скінченними першими та другими моментами $\mathbf{E} \{\varphi_{jk}(\omega)\} \leq K_1 < \infty$; $\mathbf{E} \{\varphi_{jk}^2(\omega)\} \leq K_2 < \infty$.

Позначимо через $H(t, \omega)$ матричний розв'язок з імовірністю 1 системи

$$I \cdot \frac{d^N y(t, \omega)}{dt^N} + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \varphi_{jk}(\omega) A_{jk} \frac{d^j y(t + \theta, \omega)}{dt^j} = 0 \quad (3.54)$$

такий, що $H(t, \omega) = 0$ для $t < 0$,

$$H(0, \omega) = \frac{dH(0, \omega)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-2} H(0, \omega)}{dt^{N-2}} = 0; \quad \frac{d^{N-1} H(0, \omega)}{dt^{N-1}} = I, \quad (3.55)$$

а за умови $t > 0$

$$\frac{d^j H(t, \omega)}{dt^j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^j e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda, \omega) d\lambda,$$

де контур Γ охоплює всі нулі ймовірнісного квазіполінома системи (3.54), а саме

$$\det V(\lambda, \omega) = \det \left[I \lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \varphi_{jk}(\omega) A_{jk} \lambda^j e^{-\lambda \theta} \right] \quad (3.56)$$

з імовірністю одиниця.

Використовуючи формулу (3.40), можна перейти від (3.52) до інтегральної системи

$$x^j(t, \omega) = y^j(t) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \int_0^t \left[\frac{d^j H(t-\tau)}{dt^j} dw_{jk}(t, \omega) \right] B_{jk} \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j}, \quad (3.57)$$

де $j = 0, 1, \dots, N-1$, а $y(t)$ – розв’язок (3.54) у детермінованому випадку.

Теорема 3.7. *Нехай на ймовірнісному базисі задана задача Коші для СДФР (3.52), (3.53), для якого виконано умови:*

- 1) A_{jk}, B_{jk} – дійсні матриці;
- 2) $\varphi_{jk}(\omega), \psi_{jk}(\omega), w_{jk}(\omega)$ – попарно незалежні;
- 3) $\mathbf{E} \{ \varphi_{jk}(\omega) \} \leq K_1 < \infty; \mathbf{E} \{ \varphi_{jk}^2(\omega) \} \leq K_2 < \infty;$
- 4) $\mathbf{E} \{ \psi_{jk}(\omega) \} \leq K_3 < \infty; \mathbf{E} \{ \psi_{jk}^2(\omega) \} \leq K_4 < \infty;$
- 5) корені квазіполінома $\det V_+(\lambda)$ лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0;$
- 6) спектральний радіус $\rho(\mathbf{B}) < 1$ для матриці

$$\mathbf{B}(\omega) \equiv \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \int_0^\infty \mathbf{E} \{ \psi_{jk}^2(\omega) \} S_{jk} |(is)^j|^2 \cdot [V^{-1}(is, \omega)]_+^2 ds, \quad \omega \in \Omega. \quad (3.58)$$

Тоді тривіальний розв’язок СДФР (3.52), (3.53) є асимптотично стійким, а саме, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \{ |x(t, \omega)|^2 \} = 0$, якщо $\rho(\mathbf{B}) < 1$. Якщо ж $\rho(\mathbf{B}) > 1$, тоді $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \{ |x(t, \omega)|^2 \} = +\infty$.

Нагадаємо, що знак ”2” вгорі біля матриці (вектора) означає піднесення до квадрату кожного елемента матриці (вектора), знак ”+” внизу означає, що кожний елемент матриці (вектора) потрібно брати за модулем.

3.4.6 Стохастична задача стабілізації курсу океанського лайнера під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин

Розглянемо на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ наступну систему дифузійних диференціально-різницевих рівнянь вигляду [48]:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t, \omega) + \varphi(\omega)H\dot{x}(t, \omega) + \psi(\omega)Ky(t, \omega) = \\ \quad = \gamma_1(\omega)\dot{x}(t, \omega)w_1(t, \omega) + \gamma_2(\omega)y(t, \omega)w_2(t, \omega), \\ \dot{y}(t, \omega) + \psi(\omega)\frac{1}{T}y(t, \omega) + \varphi(\omega)[Bx(t, \omega) + Lx(t - \tau, \omega)] = \\ \quad = \gamma_1(\omega)x(t, \omega)w_3(t, \omega) + \gamma_2(\omega)x(t - \tau, \omega)w_4(t, \omega), \end{cases} \quad (3.59)$$

за початковими даними

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \omega)|_{0 \leq t \leq \tau} = \alpha_1(\omega); \\ x(t, \omega)|_{0 \leq t \leq \tau} = \alpha_2(\omega); \\ y(t, \omega)|_{0 \leq t \leq \tau} = \beta(\omega), \end{cases} \quad (3.60)$$

де $x(t, \omega)$ – кут відхилення лайнера від теоретичного курсу при куті повороту керма $y(t, \omega)$; $w_j(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$; $j = \overline{1, 4}$, – задані вінерові процеси; $\varphi(\omega), \psi(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ – одновимірні задані зовнішні збурення типу випадкових величин (мінливість морських течій, нерівномірна інтенсивність потоків); $\gamma_1(\omega), \gamma_2(\omega), \alpha_1(\omega), \alpha_2(\omega), \beta(\omega)$ – одновимірні відомі зовнішні збурення типу випадкових величин із заданими законами розподілу, які визначаються серією вимірювань методами математичної статистики [45]; $H > 0, K > 0, T > 0, B, L$ – сталі, що характеризують найпростішу модель курсу лайнера.

Квазіполіном системи (3.59) має вигляд

$$\det V(\lambda, \omega) \equiv \det \left[R\lambda^2 + \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^1 A_{jr}(\omega)\lambda^j e^{-\Delta_r \lambda} \right], \quad (3.61)$$

де матриці

$$\begin{aligned} R &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & A_{00} &\equiv \begin{bmatrix} 0 & \psi(\omega)R \\ \varphi(\omega)B & T^{-1} \end{bmatrix}; & A_{01} &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(\omega)L & 0 \end{bmatrix}; \\ A_{10} &\equiv \begin{bmatrix} \varphi(\omega)H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & A_{11} &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Обчислимо квазіполіном

$$\det V(\lambda, \omega) \equiv \lambda^2 R + H\lambda\varphi^2(\omega) (T^{-1} + \lambda) - \\ - R\psi^2(\omega) [-\mathbf{E} \{\varphi^2(\omega)\} B + Le^{-\tau\lambda} \mathbf{E} \{\varphi^2(\omega)\}].$$

У просторі параметрів H, T, K, B, L, R, τ при фіксованих $\varphi(\omega), \psi(\omega)$ з $\mathbf{E} \{\varphi^2(\omega)\} \leq K_1 < \infty, \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} \leq K_2 < \infty$ можна побудувати межі D -розбиття за Беллманом, а також області, де корені квазіполінома мають від'ємні дійсні частини ($\operatorname{Re} \lambda < 0$).

Отже,

$$V^{-1}(is, \omega) = \frac{1}{\det V(is, \omega)} \begin{bmatrix} -s^2 + is\varphi^2(\omega)H & \psi^2(\omega)B + L\varphi^2(\omega) \\ \psi^2(\omega)K & T^{-1} + is \end{bmatrix},$$

де

$$|\det V(is, \omega)|^2 = [(is)^2 + (T^{-1} + H\varphi^2(\omega)) + H(is)(T^{-1} + is)\psi^2(\omega) - \\ - B^2\psi^2(\omega) + R\varphi^2(\omega)\psi^2(\omega)L \sin is]^2.$$

Матриця \mathbf{B} має вигляд

$$\mathbf{B}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^1 S_{jr}^+ \right\} |is|^2 [V^{-1}(is, \omega)]_+^2 ds,$$

де

$$S_{00}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_{01}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_{10}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_{11}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $I_{11}(\omega), I_{12}(\omega), I_{21}(\omega), I_{22}(\omega)$ відповідні випадкові інтеграли у матриці $\mathbf{B}(\omega)$. Тоді власні значення (як випадкові величини) матриці $\mathbf{B}(\omega)$ дорівнюють

$$\lambda_1(\omega) = \left(I_{11}(\omega) + I_{22}(\omega) + \sqrt{D(\omega)} \right); \quad \lambda_2(\omega) = \left(I_{11}(\omega) + I_{22}(\omega) - \sqrt{D(\omega)} \right),$$

де $D(\omega) = (I_{11}(\omega) + I_{22}(\omega))^2 - 4(I_{11}(\omega)I_{22}(\omega) + I_{12}(\omega)I_{21}(\omega))$.

Тривіальний розв'язок системи (3.59), (3.60) асимптотично стійкий у л.і.м., якщо $|\lambda_i(\omega)| < 1, i = 1, 2$. Це і є умовою стабілізації курсу лайнера.

3.5 Про існування оптимального керування для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь під дією зовнішніх збурень

3.5.1 Постановка задачі

У межах теорії стохастичного керування досліджується управління в системах з випадковими параметрами. Ця теорія має широке застосування в багатьох галузях, включаючи фінанси, інженерію, економіку та ін.

Початки теорії стохастичного керування пов'язані з роботами, в яких вивчаються розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь, що описують еволюцію системи в часі за умови випадкових збурень чи впливу випадкових факторів. Розвиток теорії стохастичного керування відбувався вдосконаленням методів розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь, введенням нових підходів до аналізу випадкових процесів і застосуванням до таких областей, як фінанси, оптимальне керування портфелями, ризик-менеджмент і багато інших (див. праці [38]-[51]).

Сучасні дослідження в теорії стохастичного керування продовжують розширювати її застосування в нові галузі, розробляти більш ефективні методи розв'язання складних проблем і поширювати її теоретичну базу.

У даному параграфі розглянуто теорему порівняння для розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР) під дією зовнішніх збурень та її застосування для однієї задачі стохастичного керування, що є розвитком результатів, отриманих для одновимірних процесів Іто у працях [60]-[62] та для випадку наявності пуассонових збурень [63].

Детальне доведення результатів пункту 3.5 опубліковано у працях [51, 64].

3.5.2 Теорема порівняння для розв'язків СДФР

Нехай (Ω, F, P) – ймовірнісний простір з потоком σ -алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, \mathbf{D} простір неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі (НПЛГ) зі значеннями з \mathbf{R}^1 та з рівномірною метрикою.

Теорема 3.8. *Нехай задані:*

1) строго зростаюча функція $\{\rho(x), x \in \mathbf{R}_+\}$ така, що

$$\rho(0) = 0, \quad \int_0^{\infty} \rho^{-2}(x) dx = \infty;$$

2) неперервні функціонали $b : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$; $c : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}^1$, $\mathbf{V} \subset \mathbf{R}^1$ такі, що для довільних $\varphi, \psi \in \mathbf{D}$

$$|b(t, \varphi) - b(t, \psi)| + \int_{\mathbf{V}} |c(t, \varphi, u) - c(t, \psi, u)| \Pi(du) \leq \rho(\|\varphi - \psi\|), \quad t \geq 0;$$

3) два неперервних функціонали $a_i : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$, $i = 1, 2$, такі, що

$$a_1(t, \varphi) \leq a_2(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathbf{D};$$

4) $\{x_i(t) \equiv x_i(t, \omega), t \in \mathbf{R}_+, \omega \in \Omega, i = 1, 2\}$ – неперервні за t випадкові процеси, $\{F_t\}$ -вимірні за ω ;

5) стандартний вінерів процес $w(t) \equiv w(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \subset \mathbf{R}^1$ такий, що $w(0) = 0 \pmod{\mathbf{P}}$;

6) $\{\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - \Pi(A)t, A \in \mathbf{V} \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$ – центрована пуассонова міра, при цьому $\{w(t)\}$ і $\{\tilde{\nu}(t, A)\}$ незалежні один від одного;

7) $\{\alpha_i(t) \equiv \alpha_i(t, \omega), t \in \mathbf{R}, \omega \in \Omega\}$ – вимірні відносно $\{F_t, t \geq 0\}$ випадкові процеси.

Нехай також випадкові процеси з пп. 4-7 даної теореми з імовірністю 1 задовольняють умови:

$$x_i(t) - x_i(0) = \int_0^t \alpha_i(s) ds + \int_0^t b(s, x_i^s) dw(s) + \int_0^t \int_{\mathbf{V}} c(s, x_i^s, \nu) \tilde{\nu}(ds, d\nu),$$

$$x_1(\theta) \leq x_2(\theta), \quad \theta \in (-\infty, 0],$$

$$\alpha_1(t) \leq a_1(t, x_1^t), \quad t \geq 0, \quad (3.62)$$

$$\alpha_2(t) \leq a_2(t, x_2^t), \quad t \geq 0, \quad (3.63)$$

де $x^t \equiv \{x(t + \theta), \theta \in (-\infty, 0]\}$.

Тоді з імовірністю 1 виконується нерівність

$$x_1(t) \leq x_2(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.64)$$

Якщо виконується умова єдиності з імовірністю 1 сильних розв'язків хоча б для одного з таких СДФР:

$$dx_i(t) = a_i(t, x^t) dt + b(t, x^t) dw(t) + \int_V c(t, x^t, \nu) \tilde{\nu}(dt, d\nu), \quad i = 1, 2, \quad (3.65)$$

тоді (3.64) виконується й за слабкішої умови:

$$a_1(t, \varphi) \leq a_2(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathbf{D}.$$

Зауваження 3.4. Теорема 3.8 має місце і для нелінійних СДФР вигляду

$$\begin{aligned} dx(t, \omega) = & x(\theta) + \sum_{j=1}^r \alpha_j(t, \omega) a_j(t, x(t + \theta, \omega)) dt + \\ & + \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j(t, \omega) b_j(s, x(t + \theta, \omega)) dw_j(t, \omega) + \\ & + \sum_{j=2r+2}^{3r+2} \int_V \alpha_j(t, \omega) c_j(t, x(s + \theta, \omega), \nu) \tilde{\nu}_j(dt, d\nu, \omega) \end{aligned} \quad (3.66)$$

за умови

$$x(t + \theta, \omega)|_{t=0} = \varphi(\theta); \quad \alpha_j(t, \omega)|_{t=0} = \beta(\theta), \quad j = \overline{1, 3r+2}, \quad (3.67)$$

де $\alpha_j(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ – зовнішні попарно незалежні між собою та з вінеровими процесами випадкові процеси; коефіцієнти a_j, b_j, c_j задовольняють умови Ліпшиця та умови теореми 3.8.

3.5.3 Задача існування оптимального керування розв'язків СДФР серед допустимих керувань

Розглянемо задачу стохастичної оптимізації, яку можна розв'язати за допомогою теореми 3.8. Ця оптимізаційна задача є прикладом доведення існування стохастичного керування для класу СДФР під дією зовнішніх збурень типу випадкових процесів. Отримані результати є розвитком досліджень, проведених у працях [60]-[63], на випадок дії зовнішніх збурень типу випадкових процесів.

Нехай $k(z)$ – неспадна невід'ємна функція, визначена на $[0, \infty)$.

Означення 3.3. Систему випадкових процесів

$$\{\alpha_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, w_l(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \tilde{v}_k(t, v, \omega), \\ k = \overline{2r+2, 3r+2}, u(t, \omega), t \geq 0\} \quad (3.68)$$

назвемо допустимою системою або допустимим керуванням, якщо:

1) вона визначена на просторі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathfrak{N}_y(\mathbf{Y}), P)$, де $\{F_t, t \geq 0\}$ – потік σ -алгебр, $\mathfrak{N}_y(\mathbf{Y})$ – σ -алгебра множини $\mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_r\} \subset \mathbf{R}^r$;

2) $\alpha_j(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ – діагональні матриці, вимірні відносно мінімальної σ -алгебри $F_t \cap \mathfrak{N}_y(\mathbf{Y})$, попарно незалежні одна від одної та від n -вимірних вінерових процесів $w_j(t, \omega)$ і центрованих пуассонових мір $\tilde{v}_j(t, v, \omega)$, при цьому $\alpha_j(t, \omega) \in \mathbf{C}([-\Delta, \infty])$;

3) $u(t)$ – n -вимірний $F_t \cap \mathfrak{N}_y(\mathbf{Y})$ випадковий процес такий, що $|u(t, \omega)| \leq 1$ для всіх $t \geq 0$ з імовірністю 1 (майже скрізь);

4) $x(t, \omega) \in \mathbf{C}([-\Delta, \infty])$ заданий та фіксований випадковий процес $x(t, \omega) : [-\Delta, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Для допустимої системи (3.68) та її коефіцієнтів виконано умови теореми 3.8 (теореми порівняння). Ризик $x^u(t, \omega)$ для (3.68) визначається рівністю

$$x^u(t, \omega) = x(\theta) + \int_0^t \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j(s, \omega) b(s, y, x^u(s + \theta)) dw_j(s) + \\ + \int_0^t \int_V \sum_{j=2r+2}^{3r+2} \alpha_j(s, \omega) c(s, x^u(s + \theta, \omega), v) \tilde{v}(ds, dv, \omega) + \int_0^t u(s) ds, \quad (3.69)$$

за початковими умовами

$$x^u(t + \theta, \omega)|_{t=0} = x_0^u(\theta), \\ \alpha_j(t, \omega)|_{t=0} = \alpha_j^0(\omega), \quad j = \overline{1, 3r+2}. \quad (3.70)$$

Далі для скорочення доведення будемо вважати, що $\alpha_j(t, \omega) \equiv 0$, $j = \overline{1, r}$, $x_t^u \equiv \{x^u(t + \theta, \omega), \theta \in [-\Delta, 0], \Delta > 0\}$.

Постановка задачі мінімізації математичного сподівання $E \{k \|x_t^u\|\}$ виконується за всіма можливими системами (3.68). Будемо розв'язувати цю задачу згідно з методикою, викладеною в [60, 63].

Нехай $U(l)$ визначено в такий спосіб:

$$U(l) = \begin{cases} \frac{-l}{|l|}, & l \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ 0, & l = 0. \end{cases}$$

Розглянемо СДФР вигляду

$$\begin{aligned} dx(t, \omega) = & \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j(t, \omega) b(t, x_t) dw_j(t, \omega) + \\ & + \int_V \sum_{j=2r+1}^{3r+2} \alpha_j(t, \omega) c(t, x_t, v) \tilde{\nu}(dt, dv, \omega) + U(x(t, \omega)) dt \end{aligned} \quad (3.71)$$

з початковими умовами

$$x(t + \theta, \omega)|_{t=0} = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\Delta, 0), \quad \Delta > 0; \quad (3.72)$$

$$x(t + \theta, \omega)|_{\theta=0} = x, \quad \alpha_j(t, \omega)|_{t=0} = \alpha_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.73)$$

Відомо, що розв'язок (3.71)-(3.73) існує та єдиний з імовірністю 1 за умовами теореми 3.8.

Нехай $u^0(s) \equiv U^0(x(t, \omega))$, тоді допустима система

$$\begin{aligned} & \{ \alpha_j^0(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, w_l^0(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \\ & \tilde{\nu}_k^0(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, u^0(t, \omega), t \geq 0 \} \end{aligned}$$

задає оптимальне керування, тобто для довільної допустимої системи (3.68) матимемо, що

$$E\{k(|x(t, \omega)|)\} \leq E\{k(|x^u(t, \omega)|)\}.$$

Лема 3.6. *Нехай система (3.68) – сукупність n -вимірних $\{F_t, \mathfrak{N}_y(\mathbf{Y})\}$ -узгоджених процесів, визначених на модифікованому просторі $(\Omega, F \cap \mathfrak{N}, P)$ з потоком $\{F_t \cap \mathfrak{N}(x)\}$; подібна сукупність*

$$\begin{aligned} & \{ \tilde{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, \tilde{w}_l(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \\ & \tilde{\nu}_k(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, \tilde{u}(t, \omega) \} \end{aligned}$$

визначена на іншому модифікованому просторі $(\tilde{\Omega}, \tilde{F} \cap \tilde{\mathfrak{N}}, \tilde{P})$ з потоком $\{\tilde{F}_t \cap \tilde{\mathfrak{N}}(x)\}$.

Тоді існує модифікований простір $(\hat{\Omega}, \hat{F} \cap \hat{\mathfrak{N}}, \hat{P})$ з потоком $\{\hat{F}_t \cap \hat{\mathfrak{N}}(x)\}$ і сукупність

$$\left\{ \hat{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, \hat{w}_l(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \right. \\ \left. \hat{\nu}_k(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, \hat{u}(t, \omega) \right\}$$

n -вимірних $\{\tilde{F}_t \cap \tilde{T}(x)\}$ -узгоджених процесів таких, що:

$$1) \{x(t, \omega), \alpha_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}; w_k(t, \omega), k = \overline{r+1, 2r+1}; \tilde{\nu}_l(t, A, \omega),$$

$$l = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \mathfrak{N}\} \stackrel{L}{\approx} \{\hat{x}(t, \omega); \hat{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, \hat{w}_l(t, \omega),$$

$$l = \overline{r+1, 2r+1}, \hat{\nu}_k(t, A, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \hat{\mathfrak{N}}\};$$

$$2) \{\tilde{x}(t, \omega), \tilde{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}; \tilde{w}_k(t, \omega), k = \overline{r+1, 2r+1}; \tilde{\nu}_l(t, A, \omega),$$

$$l = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \tilde{\mathfrak{N}}\} \stackrel{L}{\approx} \{\hat{x}(t, \omega); \hat{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1},$$

$$\hat{w}_l(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \hat{\nu}_k(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \hat{\mathfrak{N}}\};$$

$$3) \{\hat{w}_k(t, \omega), k = \overline{r+1, 2r+1}\} - n\text{-вимірні вінерові процеси};$$

$$4) \{\hat{\nu}_k(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \hat{\mathfrak{N}}\} - n \times n\text{-вимірні центровані пуассонові міри}.$$

Тут символ $\stackrel{L}{\approx}$ означає, що процеси мають однакові закони розподілу.

За наведеними припущеннями справджується наступна теорема.

Теорема 3.9. *Нехай (3.68) – довільна задана допустима система та для заданого $x \in \mathbf{R}^n$ розв'язок $\{x^u(t, \omega)\}$ визначається СДФР (3.69). Тоді на деякому модифікованому ймовірнісному просторі можна побудувати \mathbf{R}^n -вимірні процеси $\{\tilde{x}^u(t, \omega)\}$, $\{\tilde{x}^0(t, \omega)\}$ та $\{\tilde{\alpha}_j^u(t, \omega), j = \overline{1, 3r+2}\}$, $\{\tilde{\alpha}_j^0(t, \omega), j = \overline{1, 3r+2}\}$ такі, що:*

$$1) \{x^u(t, \omega)\} \stackrel{L}{\approx} \{\tilde{x}^u(t, \omega)\};$$

$$2) \{x^0(t, \omega)\} \stackrel{L}{\approx} \{\tilde{x}^0(t, \omega)\};$$

$$3) |\tilde{x}^0(t, \omega)| \leq |x^u(t, \omega)| \text{ для довільного } t \geq 0 \text{ з імовірністю } 1;$$

$$4) \{\tilde{\alpha}_j^0(t, \omega), j = \overline{1, 3r+2}\} \stackrel{L}{\approx} \{\tilde{\alpha}_j^u(t, \omega), j = \overline{1, 3r+2}\} \text{ з імовірністю } 1.$$

Доведено [64]-[66], що для допустимих систем вигляду (3.68) існує мінімальне значення математичного сподівання $E \{k \|x_t^u\|\}$. Розглянуто теорему порівняння для СДФР під дією зовнішніх збурень типу випадкових процесів, встановлено факт існування оптимального керування для цього класу систем.

Висновки до розділу 3

У розділі 3 проведено дослідження існування, єдиності, стійкості та асимптотичних властивостей сильних розв'язків широкого класу стохастичних диференціально-функціональних рівнянь у частинних похідних під дією різних типів випадкових збурень, а саме:

- досліджено існування та єдиність розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь у частинних похідних спеціального вигляду, а також розроблено алгоритм чисельного моделювання. Показано, як методи стохастичного аналізу узгоджуються з комп'ютерними підходами до апроксимації траєкторій, що робить результати придатними для практичного використання;

- досліджено існування розв'язку задачі Коші для нелінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу. Отримано теорему існування та надано її детальне доведення з використанням методів нерівностей типу Гронуолла та компактних операторів;

- запропоновано критерії середньоквадратичної стійкості та нестійкості дифузійних стохастичних диференціально-функціональних систем Гіхмана–Іто з випадковими збуреннями. Окремо проаналізовано другі моменти розв'язків та поведінку систем на безмежності. Практично важливим є також розгляд задачі стабілізації курсу океанського лайнера;

- розв'язано задачу існування оптимального керування для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із зовнішніми збуреннями. На основі теореми порівняння побудовано умови, за яких існує оптимальне керування серед множини допустимих стратегій, що є вагомим внеском у теорію стохастичного контролю;

– наведено реалізації чисельного моделювання розв’язків стохастичних рівнянь із пуассонівськими збуреннями, із запізненнями та рівнянь у частинних похідних. Застосування Python дозволило візуалізувати траєкторії, оцінити стабільність та експериментально підтвердити теоретичні твердження.

Проведене дослідження є внеском у теорію стохастичних систем із запізненням та випадковими параметрами. Отримані результати охоплюють питання існування, єдності та стійкості розв’язків, пропонують інструменти для аналізу складних стохастичних моделей та демонструють практичну реалізацію стохастичних процесів у вигляді чисельних алгоритмів і симуляцій. Представлені методи та теоретичні положення можуть бути використані в механіці, математичній фізиці, біологічних системах, фінансовій математиці та інженерії.

4 ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОВОРА З ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА БІФУРКАЦІЯ ЦИКЛІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

4.1 Вступ

Поняття фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) є основним при дослідженні розв'язності задачі Коші. Найповніші результати про фундаментальний розв'язок задачі Коші одержано для параболічних за І.Г. Петровським та за С.Д. Ейдельманом рівнянь та систем рівнянь з обмеженими і зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами [67, 68], для рівняння типу Колмогорова з обмеженими коефіцієнтами та окремих рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами [69]. Результати побудови ФРЗК та його застосування до досліджень існування та зображення розв'язку задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова другого порядку зі зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами за різних умов на коефіцієнти рівняння та з можливим виродженням на початковій гіперплощині подаються у пунктах 4.2 – 4.4 [70]–[88], а для нелінійного параболічного рівняння другого порядку – в пункті 4.5 [89]. Такі задачі виникають при дослідженні поведінки ціни акцій на азійських опціонах, в радіотехніці. ФРЗК для таких рівнянь є густиною розподілу відповідного стохастичного рівняння.

У пункті 4.2 викладено результатам дослідженню фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова другого порядку з коефіцієнтами, які можуть зростати при $|x| \rightarrow \infty$ і не залежать від групи змінних виродження рівняння. При цьому ріст коефіцієнтів залежить від деякої функції – характеристика дисипації, а на коефіцієнти рівняння накладається дві серії умов. Одна серія умов вимагає гладкості коефіцієнтів, а інша – спеціальну гедьдеровість коефіцієнтів та ставляться додаткові умови на характеристику дисипації. Результати про ФРЗК у випадку гедьдерових коефіцієнтів отримано Пасічник Г.С, а для гладких коефіцієнтів

– Пасічник Г.С. спільно з Мединським І.П. Ці результати викладено в працях [78]–[88]. Розглядувані в 4.2 рівняння містять одну групу змінних виродження рівняння, а коефіцієнти при старшій похідній є обмеженими функціями.

У пункті 4.3 наводяться теореми інтегральне зображення розв’язків неоднорідного виродженого рівняння типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. Доводиться, що розв’язки як функції x можуть зростати, а при $t \rightarrow 0$ поведуться відповідним способом залежно від типу виродження рівняння при $t = 0$. Рівняння з 4.5 містять нескінченно зростаючі коефіцієнти в групі молодших членів рівняння та виродження на початковій гіперплощині. Крім того, рівняння містить дві групи змінних виродження. Для таких рівнянь знайдено в явному вигляді вираз для ФРЗК. Результати, викладені в 4.5 отримано Пасічник Г.С спільно з Івасишеним С.Д. і опубліковані в рацях [69]–[73].

Результати дослідження властивостей гладкості об’ємного потенціалу, породженого фундаментальним розв’язком задачі Коші для виродженого параболічного рівняння другого порядку типу Колмогорова зі сталими коефіцієнтами в групі старших і зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів, за просторовими і часовою змінними наведено в пункті 4.4. Ці результати отримано Пасічник Г.С спільно з Мединським І.П. і опубліковані в працях [74]–[77].

У пункті 4.5 розглядається питання існування та єдиність класичного розв’язку задачі Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку з зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами лінійної частини. Результати отримані Пасічник Г.С. і опубліковані в [89].

У пункті 4.6 наводяться результати досліджень, що доповнюють і розвивають результати з [90, 91] на випадок параболічних за Ейдельманом систем довільного порядку.

У пункті 4.7. досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузиею.

4.2 Фундаментальний розв'язок задачі Коші для дисипативного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з коефіцієнтами, які не залежать від змінних виродження

Нехай n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2$; $M := n_1 m_1 + n_2 m_2$, $M_{kl} := (|k_1| + |l_1|)m_1 + (|k_2| + |l_2|)m_2$, де $m_1 := 1/2$, $m_2 := 3/2$, $\{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$.

У цьому пункті використовуються такі позначення: $\Pi_H^1 := \{(t, x_1) | t \in H, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}^{n_1}$; $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq R\}$, $B_R^1 := \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} | |x_1| \leq R\}$, $R > 0$; $z^{(1)} := (z_1, x_2)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2)$; $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot)$, $s \in \{1, 2\}$.

Розглядається в шарі $\Pi_{(0,T]} := \{(t, x) | t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^n\}$ скінченної товщини $T > 0$ рівняння

$$\begin{aligned} L u(t, x_1, \partial_t, \partial_x) := & \left(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} - a_0(t, x_1) \right) u(t, x) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}}.$$

Рівняння (4.1) є виродженим рівнянням Колмогорова другого порядку, його коефіцієнти a_{js} , $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, a_j , $j \in \{1, \dots, n_1\}$, і a_0 не залежать від змінних виродження x_{2j} , $j \in \{1, \dots, n_2\}$.

Означення 4.1. [83] Рівняння (4.1) називатимемо дисипативним ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує неперервна функція $D : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

- 1) $D(x_1) \rightarrow \infty$ при $|x_1| \rightarrow \infty$;
- 2) функції $b_{js}(t, x_1) \equiv a_{js}(t, x_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, $b_j(t, x_1) \equiv a_j(t, x_1) \times D(x_1)^{-1}$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$, $b_0(t, x_1) \equiv a_0(t, x_1) D(x_1)^{-2}$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $0 \leq t \leq T$, обмежені;

3) для рівняння

$$\left(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} (-i \partial_{x_{n+1}}) - b_0(t, x_1) (-i \partial_{x_{n+1}})^2 \right) v(t, x) = 0,$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} виконується умова параболічності

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} : \\ \operatorname{Re} \left(- \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, x_1) \sigma_{1j} \sigma_{1s} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, x_1) \sigma_{1j} \mu - b_0(t, x_1) \mu^2 \right) \geq \\ \geq \delta (|\sigma_1|^2 + \mu^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Функція D при цьому називається характеристикою дисипації рівняння (4.1).

Припускається, що виконуються наступні умови на коефіцієнти [83] рівняння (4.1).

A₁. Рівняння (4.1) є дисипативним ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова в $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D .

A₂. Існують неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} a_{js}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, $\partial_{x_1}^{k_1} a_j$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$, $\partial_{x_1}^{k_1} a_0$, $|k_1| \leq 2$, для яких справджуються оцінки

$$\begin{aligned} |\partial_{x_1}^{k_1} a_{js}(t, x_1)| &\leq C(D(x_1))^{|k_1|(1-\varepsilon)}, \\ |\partial_{x_1}^{k_1} a_j(t, x_1)| &\leq C(D(x_1))^{1+|k_1|(1-\varepsilon)}, \\ |\partial_{x_1}^{k_1} a_0(t, x_1)| &\leq C(D(x_1))^{2+|k_1|(1-\varepsilon)}, \quad t \in [0, T], \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \end{aligned}$$

де $C > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$; функції $b_{js}(t, x_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, $b_j(t, x_1)$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$, $b_0(t, x_1)$ як функції t є неперервними рівномірно щодо $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

A₃. Похідні $\partial_{x_1}^{k_1} a_{js}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n\}$, $\partial_{x_1}^{k_1} a_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\partial_{x_1}^{k_1} a_0$, $|k_1| \leq 2$, задовольняють локальну умову Гельдера за x з показником $\lambda \in (0, 1)$ рівномірно щодо $t \in [0, T]$, тобто

$$\forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall \{x_1, z_1\} \subset B_R^1 \quad \forall t \in [0, T] : |\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} a(t, x_1)| \leq C |x_1 - z_1|^\lambda,$$

де символ a позначає коефіцієнти рівняння.

Можливий інший набір умов на коефіцієнти [79, 84] рівняння (4.1), який не вимагає їх гладкості.

B₁. Рівняння (4.1) є дисипативним ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова в $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D .

B₂. $\exists C > 0 \quad \exists \lambda \in (0, 1] \quad \forall \{(t, x_1), (t, y_1)\} \subset \Pi_{[0,T]}^1 :$

$$\begin{aligned} |\Delta_{x_1}^{y_1} a_{js}(t, x_1)| &\leq C|x_1 - y_1|^\lambda, \\ |\Delta_{x_1}^{y_1} a_j(t, x_1)| &\leq C|x_1 - y_1|^\lambda(D(x_1) + D(y_1)), \\ |\Delta_{x_1}^{y_1} a_0(t, x_1)| &\leq C|x_1 - y_1|^\lambda((D(x_1))^2 + (D(y_1))^2); \end{aligned}$$

функції b_{js} , $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, b_j , $j \in \{1, \dots, n_1\}$, b_0 як функції t , є неперервними рівномірно щодо $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

B₃. Характеристика дисипації D задовольняє такі умови:

1) $\exists C > 0 \quad \forall \{x_1, y_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad |x_1 - y_1| \leq 1 : D(x_1) \leq CD(y_1);$

2) $\exists C > 0 \quad \forall \{x_1, y_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad |x_1 - y_1| > 1 : D(x_1) \leq C \exp\{\varepsilon|x_1 - y_1|D(y_1)\}$, де ε – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації будемо розпоряджатись.

Нехай $g : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow [1, \infty)$ – функція, яка зв'язана з характеристикою дисипації D однією з умовою

A₄. $g(x_1) \rightarrow \infty$ при $|x_1| \rightarrow \infty$; існують локально неперервні за Гельдером з показником λ з умови **A₃** похідні $\partial_{x_1}^{k_1} g$, $0 < |k_1| \leq 4$, які пов'язані з характеристикою дисипації D умовою

$$|\partial_{x_1}^{k_1} g(x_1)| \leq C\eta(D(x_1))^{|k_1|(1-\varepsilon)}, \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad 0 < |k_1| \leq 4,$$

де $C > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$, η – досить мале додатне число, вибором якого в кожній конкретній ситуації будемо розпоряджатись.

B₄. $g(x_1) \rightarrow \infty$ при $|x_1| \rightarrow \infty$, існують похідні $\partial_{x_1}^{k_1} g$, $0 < |k_1| \leq 2$, для яких справджуються нерівності

$$|\partial_{x_1}^{k_1} g(x_1)| \leq C\eta(D(x_1))^{|k_1|}, \quad |\Delta_{x_1}^{y_1} \partial_{x_1}^{k_1} g(x_1)| \leq C\eta|x_1 - y_1|^\lambda((D(x_1))^{|k_1|} + (D(y_1))^{|k_1|}),$$

$$\{x_1, y_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad 0 < |k_1| \leq 2,$$

де $C > 0$, $\lambda \in (0, 1]$ з умови \mathbf{B}_2 , η – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації будемо розпоряджатись.

ФРЗК шукатимемо методом Леві. Важливими при цьому є властивості головного члена форули для ФРЗК. За головний член форули для ФРЗК G беремо функцію $\hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1)$, яка є ФРЗК для рівняння

$$L(t, y_1, \partial_t, \partial_x)v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (4.3)$$

для кожної фіксованої точки $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

Правильні оцінки

$$\left| \partial_x^k \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \right| \leq C_k (t - \tau)^{-M - M_{k0}} E_c(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c(t - \tau)(D(y_1))^2\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi, y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.4)$$

де

$$E_c(t, x, \xi) = \exp\left\{-c\left(\frac{|X_1(t) - \xi_1|^2}{t} + \frac{|X_2(t) - \xi_2|^2}{t^3}\right)\right\}, \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$k \in \mathbb{Z}_+^n$, $C_k > 0$, $c > 0$. При цьому функція

$$\hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) = F_{\sigma \rightarrow X(t-\tau)-\xi}^{-1}[V_0(t, \tau, \sigma, y_1)](t, \tau, x, \xi, y_1),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1},$$

в якій $V_0(t, \tau, \sigma, y_1)$ є розв'язком рівняння

$$\left[\partial_t - \left(- \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, y_1) ([\sigma_{1j} + (t - \tau)\sigma_{2j}]\zeta'_j + \sigma_{1j}\zeta''_j) ([\sigma_{1s} + (t - \tau)\sigma_{2s}]\zeta'_s + \sigma_{1s}\zeta''_s) + \right. \right.$$

$$\left. + i \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y_1) ([\sigma_{1j} + (t - \tau)\sigma_{2j}]\zeta'_j + \sigma_{1j}\zeta''_j) + a_0(t, y_1) \right] V_0(t, \tau, \sigma, y_1) = 0. \quad (4.5)$$

Зазначимо, що

$$|V_0(t, \tau, \sigma + i\gamma, y_1)| \leq C \times$$

$$\times \exp\{(-\delta_1|\sigma_1|^2 + c_1|\gamma_1|^2)(t - \tau) + (-\delta_1|\sigma_2|^2 + c_1|\gamma_2|^2)(t - \tau)^3 - \delta(D(y_1))^2(t - \tau)\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{\sigma, \gamma\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad (4.6)$$

де $C > 0$, $\delta_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\delta > 0$. Оцінка (4.6) лежить в основі отримання повного аналітичного опису \hat{G} .

Наведемо деякі властивості ФРЗК для рівняння (4.3).

Лема 4.1. *Нехай коефіцієнти рівняння (4.3) задовольняють умови \mathbf{A}_1 і \mathbf{A}_2 .*

Тоді справджуються оцінки

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^k \partial_{y_1}^{l_1} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \right| &\leq C(t - \tau)^{-(M+M_{k_0}+|l_1|(1-\varepsilon)/2)} E_c(t - \tau, x, \xi) \times \\ &\quad \times \exp\{-c(t - \tau)(D(y_1))^2\}, \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad l_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, \quad |l_1| \leq 2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Зауваження 4.1. *З оцінок (4.7) випливають оцінки*

$$\begin{aligned} \left| \partial_{x_1}^{k_1} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; x_1) \right| &\leq C(t - \tau)^{-(M+M_{k_1 0})} E_c(t - \tau, x, \xi) \times \\ &\quad \times \exp\{-c(t - \tau)(D(x_1))^2\}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad |k_1| \leq 2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

Лема 4.2. *Нехай коефіцієнти рівняння (4.3) задовольняють умови \mathbf{A}_1 – \mathbf{A}_3 .*

Тоді справджуються оцінки

$$\begin{aligned} \forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall \{y_1, z_1\} &\subset B_R^1 : \\ \left| \Delta_{y_1}^{z_1} \partial_x^k \partial_{y_1}^{l_1} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \right| &\leq C|y_1 - z_1|^\lambda (t - \tau)^{-(M+M_{k_0}+|l_1|(1-\varepsilon)/2)} E_c(t - \tau, x, \xi), \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad l_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, \quad |l_1| \leq 2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де $C > 0$, $c > 0$, $\lambda \in (0, 1]$ з умови \mathbf{A}_3 , $\varepsilon \in (0, 1)$ з умови \mathbf{A}_2 .

Лема 4.3. *Нехай коефіцієнти рівняння (4.3) задовольняють умови \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 .*

Тоді справджуються оцінки

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{y_1}^{z_1} \partial_x^k \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \right| &\leq C|y_1 - z_1|^\lambda (t - \tau)^{-M-M_{k_0}} E_c(t - \tau, x, \xi) \times \\ &\quad \times \left(\exp\{-c(t - \tau)(D(y_1))^2\} + \exp\{-c(t - \tau)(D(z_1))^2\} \right) \left((D(y_1))^2 + (D(z_1))^2 \right), \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \quad \{y_1, z_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Лема 4.4. *Справджується рівність*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = \exp\left\{\int_{\tau}^t a_0(\theta, y_1) d\theta\right\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}. \quad (4.11)$$

Зауваження 4.2. З (4.11) випливає, що

1) для довільних $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, $0 \leq \tau < t \leq T$ і $x \in \mathbb{R}^n$, $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$

$$\partial_x^k \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = 0; \quad (4.12)$$

2)

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = 1 \quad (4.13)$$

рівномірно щодо $x \in \mathbb{R}^n$, а якщо $a_0 = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = 1, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}. \quad (4.14)$$

Поряд з функцією E_c використовується ще оцінна функція

$$F_c(t, x, \xi) := \exp\left\{-c\left(\frac{|x_1 - \xi_1|^2}{4t} + \frac{3|x_2 + 2^{-1}t(x'_1 + \xi'_1) - \xi_2|^2}{t^3}\right)\right\},$$

$$t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де $c > 0$. Зазначимо, що функція F_c з точністю до сталого множника визначає ФРЗК для модельного рівняння (4.1) з сталими коефіцієнтами.

Використовуються такі властивості з [67] функцій E_c та F_c :

$$E_c(t, x, \xi) \leq F_{c_1}(t, x, \xi) \leq E_{c_2}(t, x, \xi), \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < c_2 < c_1 < c,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_c(t, x, \xi) d\xi = C, \quad \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t - \theta, x, y) E_c(\theta - \tau, y, \xi) \left((t - \theta)(\theta - \tau)\right)^{-M} dy \leq$$

$$\leq C(t - \tau)^{-M} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi), \quad 0 < c_1 < c,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_c(t - \theta, x, y) F_c(\theta - \tau, y, \xi) \left((t - \theta)(\theta - \tau)\right)^{-M} dy =$$

$$= C(t - \tau)^{-M} E_c(t - \tau, x, \xi), \quad c > 0.$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} E_c(\theta - \tau, X(t - \theta), \xi) &\leq E_c(t - \tau, x, \xi), \\ 0 \leq \tau < \theta < t, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \\ E_c(\theta - \tau, (y_1, X_2(t - \theta)), \xi) &\leq E_{c/2}(t - \tau, x, \xi) E_{-2c}^1(\theta - \tau, y_1 - x_1), \\ 0 \leq \tau < \theta < t, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (4.15)$$

З (4.15) з урахуванням того, що при $\theta \in [(t + \tau)/2, t]$ $\theta - \tau \geq t - \theta$, одержується

$$\begin{aligned} E_c(\theta - \tau, (y_1, X_2(t - \theta)), \xi) &\leq E_{c/2}(t - \tau, x, \xi) E_{-2c}^1(t - \theta, y_1 - x_1), \\ \frac{t + \tau}{2} < \theta < t, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}. \end{aligned}$$

Лема 4.5. *Нехай коефіцієнти рівняння (4.3) задовольняють умови \mathbf{A}_1 і \mathbf{A}_2 , а неперервна функція $\varphi(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, задовольняє умови*

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x; \tau, \xi)| &\leq C(t - \tau)^{-M-1+\varepsilon/2} E_c(t - \tau, x, \xi), \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n; \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\forall R > 0 \quad \exists \lambda_1^s \in (0, 1), \quad \lambda_1^1 < \varepsilon, \quad \lambda_1^2 < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \{x, z^{(s)}\} \subset B_R :$$

$$\begin{aligned} |\Delta_{x_s}^{z_s} \varphi(t, x; \tau, \xi)| &\leq C |x_s - z_s|^{\lambda_1^s} (t - \tau)^{-M-1+\lambda_2^s m_s} \times \\ &\times \left(F_c(t - \tau, x, \xi) + F_c(t - \tau, z^{(s)}, \xi) \right), \end{aligned}$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_2^1 \equiv \varepsilon - \lambda_1^1, \quad \lambda_2^2 \equiv \frac{\varepsilon}{3} - \lambda_1^2, \quad s \in \{1, 2\}. \quad (4.17)$$

Тоді функція

$$\begin{aligned} w(t, x; \tau, \xi) &= \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \theta, y, x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} w$, $|k_1| \leq 2$, і Sw , для яких правильні формули

$$\partial_{x_{1j}} w(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_{1j}x_{1l}}^2 w(t, x; \tau, \xi) &= \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}x_{1l}}^2 \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}x_{1l}}^2 \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}x_{1l}}^2 \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) dy \right) \varphi(\theta, X(t-\theta); \tau, \xi) d\theta, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} Sw(t, x; \tau, \xi) &= \varphi(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) dy \right) \varphi(\theta, X(t-\theta); \tau, \xi) d\theta, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t_1 := t - (t - \tau)/2.$$

Лема 4.6. Нехай коефіцієнти рівняння (4.3) задовольняють умови $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_3$, а неперервна функція $\varphi(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, задовольняє умови

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x; \tau, \xi)| &\leq C_l \left((t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} \exp\{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} + \right. \\ &\left. + (t - \tau)^{\lambda/2} (D(\xi_1))^{-l} \right) E_c(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} |\Delta_{x_p}^{z_p} \varphi(t, x; \tau, \xi)| &\leq C_l |x_p - z_p|^{\lambda_1^p} \left((t - \tau)^{-M-1+\lambda_2^p m_p} \exp\{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} + \right. \\ &\left. + (t - \tau)^{\lambda_2^p m_p} (D(\xi_1))^{-l} \right) \left(F_c(t - \tau, x, \xi) + F_c(t - \tau, z^{(p)}, \xi) \right), \end{aligned}$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_2^1 \equiv \lambda - \lambda_1^1, \quad \lambda_2^2 \equiv \frac{\lambda}{3} - \lambda_1^2, \quad p \in \{1, 2\}, \quad (4.22)$$

де l – довільно фіксоване додатне число. Тоді функція

$$w(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \theta, y, y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$$

має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} w$, $|k_1| \leq 2$, і Sw , для яких правильні формули

$$\partial_{x_{1j}} w(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_{1j}x_{1l}}^2 w(t, x; \tau, \xi) &= \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}x_{1l}}^2 \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}x_{1l}}^2 \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}x_{1l}}^2 \hat{G}(t, x; \theta, y_1) dy \right) \varphi(\theta, X(t-\theta); \tau, \xi) d\theta, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} Sw(t, x; \tau, \xi) &= \varphi(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ &+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) dy \right) \varphi(\theta, X(t-\theta); \tau, \xi) d\theta, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t_1 := t - (t - \tau)/2.$$

Правильні наступні теореми про ФРЗК для рівняння (4.1) при виконанні двох серій умов на коефіцієнти.

Теорема 4.1. *Нехай для рівняння (4.1) виконуються умови \mathbf{A}_1 – \mathbf{A}_3 . Тоді для нього існує ФРЗК $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, для якого*

справджуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-M - M_{k_1^0}} E_c(t - \tau, x, \xi), \quad (4.26)$$

i

$$\begin{aligned} |\partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi)| &\leq C \sum_{j=0}^{|k_1|} (t - \tau)^{-M - M_{k_1^0} + jm_1} (D(x_1))^{j(1-\varepsilon)} \times \\ &\times E_c(t - \tau, x, \xi) \exp\{g(x) - g(\xi)\}, \quad (4.27) \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \quad |k_1| \leq 2, \end{aligned}$$

де C і c – додатні сталі, а g – будь-яка функція, що задовольняє умову \mathbf{A}_4 .

Теорема 4.2. Нехай для рівняння (4.1) виконуються умови \mathbf{B}_1 – \mathbf{B}_3 . Тоді для нього існує ФРЗК $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, для якого справджуються оцінки

$$\begin{aligned} |\partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi)| &\leq C C_l \left((t - \tau)^{-M - M_{k_1^0}} \exp\{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} + \right. \\ &\left. + (D(\xi_1))^{-l} \right) E_c(t - \tau, x, \xi), \quad |k_1| < 2, \quad (4.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi)| &\leq C_l \left((t - \tau)^{-M - M_{k_1^0}} \exp\{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} + (D(\xi_1))^{-l} \right) \times \\ &\times E_c(t - \tau, x, \xi) \left(1 + (D(x_1))^2 + \exp\{\varepsilon(t - \tau)(D(x_1))^2\} \right), \quad |k_1| = 2, \quad (4.29) \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

де l – довільно фіксоване додатне число, $C_l > 0$, $c > 0$.

Крім того, правильними є також оцінки

$$\begin{aligned} |\partial_x^k G(t, x; \tau, \xi)| &\leq C \sum_{j=0}^{|k_1|} (t - \tau)^{-M - M_{k_1^0} + jm_1} (D(x_1))^j E_c(t - \tau, x, \xi) \times \\ &\times \exp\{g(x_1) - g(\xi_1)\}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad |k_1| < 2, \quad (4.30) \end{aligned}$$

де $C > 0$, $c > 0$, а g – будь-яка функція, що задовольняє умову \mathbf{B}_4 .

Згідно з методом Леві ФРЗК для рівняння (4.1) у випадку умов серії \mathbf{A}

шукаємо у вигляді

$$G(t, x; \tau, \xi) = \hat{G}(t, x; \tau, \xi; x_1) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \theta, y; x_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.31)$$

а у випадку умов серії **B** – у вигляді

$$G(t, x; \tau, \xi) = \hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.32)$$

де $\varphi(\cdot, \cdot; \tau, \xi) : \Pi_{[0, T]} \rightarrow \mathbb{C}$ – невідома функція, яку підберемо так, щоб функція $G(\cdot, \cdot; \tau, \xi) : \Pi_{[0, T]} \rightarrow \mathbb{C}$ була розв'язком рівняння (4.1) для будь-якої фіксованої точки $(\tau, \xi) \in \Pi_{[0, T]}$.

При цьому невідома функція φ є резольвентою інтегрального рівняння другого роду [79]. Наведемо класи ядер, які при цьому виникають.

Нехай $t_0 \in [0, T]$, $T > 0$ і $P_{[t_0, T]}^{\delta_1} := \{(t, x; \tau, \xi) \in (\Pi_{[t_0, T]} \times \Pi_{[t_0, T]}) \mid t - \tau > \delta_1\}$, $\delta_1 > 0$. Розглядаються інтегральні рівняння вигляду

$$u(t, x) = f(t, x) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \theta, y) u(\theta, y) dy, \quad (t, x) \in \Pi_{[t_0, T]}, \quad (4.33)$$

Відомо, що при відповідних умовах на ядро K існує єдиний розв'язок рівняння (4.33) для довільної допустимої функції f і він визначається відповідно формулою

$$u(t, x) = f(t, x) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} R(t, x; \theta, y) f(\theta, y) dy, \quad (t, x) \in \Pi_{[t_0, T]}. \quad (4.34)$$

Тут

$$R(t, x; \tau, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0, \quad (4.35)$$

де $K_1 \equiv K$, а для $m \geq 2$ відповідно

$$K_m(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \theta, y) K_{m-1}(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad (t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0.$$

Для нище визначених класів ядер ряс (4.35) збігається абсолютно і рівномірно в $P_{[t_0, T]}^{\delta_1}$ для довільного $\delta_1 \in (0, T - t_0)$. Тому існує резольвента (4.35) рівняння (4.33) і розв'язок відповідного рівняння визначається відповідно формулою (4.34).

Відомі [67] результати про ряд (4.35), коли, наприклад,

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \leq C_1(t - \tau)^{-M-1+\chi} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0, \quad (4.36)$$

де $\chi \in (0; 1)$.

Оцінка (4.36) отривється при побудові ФРЗК, коли коефіцієнти задовольняють серію умов **A**. У випадку умов **B** виникають оцінки резольвенти, які наведено в наступній теоремі.

Теорема 4.3. *Якщо ядро неперервне і задовольняє нерівність*

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \leq C_1(t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2\},$$

$$(t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0, \quad (4.37)$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ та функцією $D : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow [1, \infty)$, яка задовольняє умови **B**₂, то існує резольвента, яка є неперервною функцією і для неї справджується оцінка

$$|R(t, x; \tau, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} \exp\{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} E_{2c}(t - \tau, x, \xi) +$$

$$+ C(D(\xi_1))^{-l} E_c^1(t - \tau, x_1 - \xi_1) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\hat{C} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) (t - \tau)^{\lambda/2} \right)^k \left(\Gamma\left(\frac{k\lambda}{2} + 1\right) \right)^{-1} E_{cq^k}(t - \tau, x, \xi), \quad (4.38)$$

$$(t, x; \tau, \xi) \in P_{[t_0, T]}^0,$$

де C , \hat{C} і c – еякі додатні сталі, $c < c_1$, Γ – гама-функція Ейлера, $q = 1/4$.

4.3 Зображення розв'язків одного ультрапараболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині

Виродження на початковій гіперплощині класифікуються [68] за величинами

$$A(t, \tau) := \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \quad \text{і} \quad B(t, \tau) := \int_{\tau}^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta,$$

де α і β – неперервні на $[0, T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна.

У випадку, коли $A(T, 0) < +\infty$, рівняння має слабе виродження, а коли $A(T, 0) = +\infty$, то – сильне. Якщо $A(T, 0) = +\infty$ і $B(T, 0) = +\infty$, то маємо випадок дуже сильного виродження.

У цьому пункті розглядається ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, в якому є нескінченно зростаючі при $|x| \rightarrow \infty$ молодші коефіцієнти та виродження при $t = 0$ [69]–[73]. Тут наводяться теореми про інтегральне зображення розв'язків неоднорідного рівняння для розв'язків, які, як функції x , можуть необмежено зростати певним чином, а при $t \rightarrow 0$ поведуться відповідним способом залежно від типу виродження рівняння при $t = 0$.

Нехай n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$. У шарі $\Pi_{(0, T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ розглядатимемо такі рівняння:

$$\begin{aligned} (Lu)(t, x) := & \alpha(t)\partial_t u(t, x) - \beta(t) \left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} u(t, x) + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} u(t, x) + \right. \\ & \left. + \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} u(t, x) + b \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{x_{1j}} (x_{1j} u(t, x)) \right) - au(t, x) = 0, \\ & (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

i

$$\begin{aligned}
(L^*v)(\tau, \xi) := & -\alpha(\tau)\partial_\tau v(\tau, \xi) + \beta(\tau) \left(\sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j} \partial_{\xi_{2j}} v(\tau, \xi) + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j} \partial_{\xi_{3j}} v(\tau, \xi) - \right. \\
& \left. - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \partial_{\xi_{1j}} \partial_{\xi_{1s}} v(\tau, \xi) + b \sum_{j=1}^{n_1} \xi_{1j} \partial_{\xi_{1j}} v(\tau, \xi) \right) - a v(\tau, \xi) = 0, \\
& (\tau, \xi) \in \Pi_{(0,T)}, \tag{4.40}
\end{aligned}$$

де a_{js} , b і a – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, і $b \neq 0$, та виконується умова параболічності

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \sigma_{1j} \sigma_{1s} \geq \delta |\sigma_1|^2.$$

Рівняння (4.39) є ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова, в якому коефіцієнти групи старших членів сталі, а коефіцієнти в групі молодших членів є зростаючими на нескінченності, причому рівняння містить виродження на початковій гіперплощині $\{t = 0\}$.

Оскільки рівняння (4.39) і (4.40) при $t = 0$ вироджуються, то для них не завжди можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайному розумінні, але можна говорити про фундаментальний розв'язок задачі Коші згідно з такими означеннями.

Означення 4.2. *Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (4.39) називається функція $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, така, що формула*

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]},$$

визначає розв'язок рівняння (4.39) для $(t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}$, який задовольняє початкову умову

$$u(t, x) \Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \in (0, T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ .

Означення 4.3. Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (4.40) називається функція $G^*(\tau, \xi; t, x)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{\xi, x\} \subset \mathbb{R}^n$, така, що формулою

$$v(\tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G^*(\tau, \xi; t, x) \varphi(x) dx, \quad (\tau, \xi) \in \Pi_{(\tau, t)},$$

визначається в $\Pi_{(\tau, t)}$ розв'язок рівняння (4.40), який задовольняє умову

$$v(\tau, \xi) \Big|_{\tau=t} = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $t \in (0, T]$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ .

У праці [69] знайдено в явному вигляді функції G і G^* та вивчено їх властивості, з яких, зокрема, випливає додатність функції G , правильність рівності

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) d\xi = E^{a,b}(t, x), \quad 0 < \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.41)$$

та оцінок

$$\begin{aligned} |\partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_2}^{k_2} \partial_{x_3}^{k_3} G(t, x; \tau, \xi)| &\leq C_{k_1 k_2 k_3} E^{a,b}(t, \tau) \prod_{l=1}^3 (p_l(B(t, \tau)))^{-(n_l + |k_l|)/2} \times \\ &\times \hat{E}_c(t, x; \tau, \xi), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4.42)$$

в яких $k_l - n_l$ -вимірний мультиіндекс, $l \in \{1, 2, 3\}$, $C_{k_1 k_2 k_3}$ і c - додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів a_{jl} , b , n_1 , n_2 і n_3 , а також від T тільки у випадку, коли $b > 0$;

$$E^{a,b}(t, \tau) := \exp\{aA(t, \tau) + n_1 b B(t, \tau)\},$$

$$\hat{E}_c(t, x; \tau, \xi) := \exp\left\{ -c \left(\frac{|e^{bB(t, \tau)} X_1(B(t, \tau)) - \xi_1|^2}{p_1(B(t, \tau))} + \sum_{l=2}^3 \frac{|X_l(B(t, \tau)) - \xi_l|^2}{p_l(B(t, \tau))} \right) \right\},$$

де $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := x_2 + \alpha_b(t) \hat{x}_1$, $X_3(t) := x_3 + t x'_2 + \frac{\alpha_b(t) - t}{b} x'_1$, $x_1 := (x'_1, x''_1, x'''_1)$, $\hat{x}_1 := (x'_1, x''_1)$, $x'_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_3})$, $x''_1 := (x_{1(n_3+1)}, \dots, x_{1n_2})$, $x'''_1 :=$

$(x_{1(n_2+1)}, \dots, x_{1n_1}), x_2 := (x'_2, x''_2), x'_2 := (x_{21}, \dots, x_{2n_3}), x''_2 := (x_{2(n_3+1)}, \dots, x_{2n_2}),$

$$\begin{aligned} \alpha_b(t) &:= \frac{e^{bt} - 1}{b}, & p_1(t) &:= \frac{e^{2bt} - 1}{2b}, \\ p_2(t) &:= \frac{t}{b^2} - \frac{2(e^{bt} - 1)}{b^3(e^{bt} + 1)}, & p_3(t) &:= \frac{t}{b^4} + \frac{t^3}{12b^2} - \frac{t^2(e^{bt} + 1)}{2b^3(e^{bt} - 1)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що в оцінках (4.42) замість $E^{a,b}(t, \tau)$ у випадку слабкого виродження можна брати 1, а коли виродження не дуже сильне, то $E^{a,0}(t, \tau)$.

Функції $\alpha_b(t), p_j(t), t \geq 0, j \in \{1, 2, 3\}$, монотонно зростають, причому $p_j(0) = 0, j \in \{1, 2, 3\}$, і справджуються рівність

$$p_1(\tau) + e^{2b\tau} p_1(t - \tau) = p_1(t), \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty, \quad (4.43)$$

і нерівності

$$p_j(\tau) + p_j(t - \tau) \leq p_j(t), \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty, \quad j \in \{2, 3\}. \quad (4.44)$$

Розглянемо функції з [70]

$$k_1(t, a_1) := \frac{c_0 a_1 e^{2bt}}{c_0 - a_1 p_1(t)}, \quad k_j(t, a_j) := \frac{c_0 a_j}{c_0 - a_j p_j(t)}, \quad j \in \{2, 3\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

де $c_0 \in (0, c)$, c – стала з оцінок (4.41), a_1, a_2, a_3 – набір таких невід'ємних чисел, що $p_j(T) < \frac{c_0}{a_j}, j \in \{1, 2, 3\}$. Ці функції мають такі властивості:

$$k_j(0, a_j) = a_j, \quad k_j(t, a_j) > a_j, \quad t \in (0, T], \quad j \in \{1, 2, 3\}; \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} k_1(t - \tau, k_1(\tau, a_1)) &= k_1(t, a_1), & k_j(t - \tau, k_j(\tau, a_j)) &\leq k_j(t, a_j), \\ 0 \leq \tau \leq t \leq T, & & j \in \{2, 3\}; \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} -c_0 \frac{|e^{bt} X_1(t - \tau) - \xi_1|^2}{p_1(t - \tau)} + k_1(\tau, a_1) |\xi_1|^2 &\leq k_1(t, a_1) |X_1(t)|^2, \\ -c_0 \frac{|X_j(t - \tau) - \xi_j|^2}{p_j(t - \tau)} + k_j(\tau, a_j) |\xi_j|^2 &\leq k_j(t, a_j) |X_j(t - \tau)|^2, \quad j \in \{2, 3\}. \\ 0 \leq \tau \leq t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Зауважимо, що при доведенні (4.46) і (4.47) користуються (4.43) і (4.44).

Скориставшись властивостями α_b , нерівностями (4.46) і (4.47) та означенням $X_j(t)$, отримаємо оцінки

$$E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \Phi_1(\tau, \xi) \leq \exp\left\{\sum_{j=1}^3 k_j(t, a_j) |X_j(t - \tau)|^2\right\} \leq \Psi_1(t, x),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.48)$$

де

$$E_{c_0}(t, x, \xi) := \exp\left\{-c_0 \left(\frac{|e^{bt} X_1(t) - \xi_1|^2}{p_1(t)} + \sum_{l=2}^3 \frac{|X_l(t) - \xi_l|^2}{p_l(t)}\right)\right\};$$

$$\Phi_\nu(\tau, \xi) := \exp\left\{\nu \sum_{l=1}^3 k_l(\tau, a_l) |\xi_j|^2\right\},$$

$$\Psi_\nu(t, x) := \exp\left\{\nu \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} s_{lj}(t) |x_{lj}|^2\right\}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Тут

$$\vec{s}(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t)), \quad \vec{s}_l(t) := (s_{l1}(t), \dots, s_{ln_l}(t)), \quad l \in \{1, 2, 3\},$$

$$s_{1j}(t) := k_1(t, a_1) + 2\theta(n_2 - j)(\alpha_b(t))^2 k_2(t, a_2) + 4\left(\frac{\alpha_b(t) - t}{b}\right)^2 \theta(n_3 - j) k_3(t, a_3),$$

$$j \in \{1, \dots, n_1\},$$

$$s_{2j}(t) := 2k_2(t, a_2) + 4t^2 \theta(n_3 - j) k_3(t, a_3), \quad j \in \{1, \dots, n_2\},$$

$$s_{3j}(t) := 4k_3(t, a_3), \quad j \in \{1, \dots, n_3\}.$$

Розглянемо функції

$$\hat{k}_1(t, a_1) := \frac{c_0 a_1 e^{2bB(t,0)}}{c_0 - a_1 p_1(B(t,0))}, \quad \hat{k}_j(t, a_j) := \frac{c_0 a_j}{c_0 - a_j p_j(B(t,0))}, \quad j \in \{2, 3\},$$

$$0 \leq t \leq T,$$

де a_1, a_2, a_3 – набір таких невід'ємних чисел, що $p_j(B(T,0)) < \frac{c_0}{a_j}$, якщо $B(T,0) < \infty$, і $a_j = 0$, якщо $B(T,0) = \infty$, $j \in \{1, 2, 3\}$;

$$\hat{\Phi}_\nu(\tau, \xi) := \exp\left\{\nu \sum_{l=1}^3 \hat{k}_l(\tau, a_l) |\xi_l|^2\right\}, \quad \hat{\Psi}_\nu(t, x) := \exp\left\{\nu \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} \hat{s}_{lj}(t) |x_{lj}|^2\right\},$$

$$0 \leq \tau \leq T, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

де $\hat{s}_{lj}(t) := s_{lj}(\beta)|_{\beta=B(t,0)}$, $j \in \{1, \dots, n_l\}$, $l \in \{1, 2, 3\}$.

Зазначимо, що у випадку дуже сильного виродження, тобто коли $B(T, 0) = \infty$, маємо $\hat{k}_j(t, a_j) \equiv 0$, $\hat{s}_{lj}(t) \equiv 0$, $\hat{\Phi}_\nu(\tau, \xi) \equiv 1$ і $\hat{\Psi}_\nu(t, x) \equiv 1$.

За допомогою (4.48) одержуємо оцінки

$$\begin{aligned} \hat{E}_{c_0}(t, x; \tau, \xi) \hat{\Phi}_1(\tau, \xi) &\leq \exp\left\{\sum_{j=1}^3 \hat{k}_j(t, a_j) |X_j(B(t, \tau))|^2\right\} \leq \hat{\Psi}_1(t, x), \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4.49)$$

Користуватимемось нормами

$$\|u(\tau, \cdot)\|^{a,b} := E^{a,b}(T, \tau) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(|u(\tau, \xi)| \hat{\Phi}_{-1}(\tau, \xi) \right), \quad \tau \in (0, T],$$

де a і b – сталі з оцінок (4.42). Відзначимо, що у випадку дуже сильного виродження

$$\|u(\tau, \cdot)\|^{a,b} := E^{a,b}(T, \tau) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |u(\tau, \xi)|.$$

Наведемо твердження про інтегральні зображення розв'язків неоднорідного рівняння

$$Lu = f, \quad (4.50)$$

(де Lu – вираз із (4.39)), які, як функції x , можуть зростати, а при $t \rightarrow 0$ поведуться певним чином залежно від характеру виродження рівняння на початковій гіперплощині.

У наступних теоремах u – неперервний в області $\Pi_{(0,T]}$ розв'язок рівняння (4.50) з неперервною функцією f , причому u і f задовольняють додаткові умови, вказані у відповідних теоремах; φ – неперервна в \mathbb{R}^n функція така, що $|\varphi(x)| \exp\left\{-\sum_{l=1}^3 a_l |x_l|^2\right\} < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$; G – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (4.39).

Теорема 4.4. *Якщо виконуються умови:*

- 1₁) $A(T, 0) < \infty$,
- 2₁) $\exists M > 0 \quad \forall t \in (0, T] : \|u(t, \cdot)\|^{0,0} \leq M$,
- 3₁) $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$,

$$4_1) \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|^{0,0} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty,$$

то правильные отображения

$$u(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \\ (t, x) \in \Pi_{(0, T]}. \quad (4.51)$$

Теорема 4.5. Пусть выполняются условия:

$$1_2) A(T, 0) = \infty, B(T, 0) < \infty, \\ 2_2) \exists M > 0 \forall t \in (0, T]: \|u(t, \cdot)\|^{a,0} \leq M, \\ 3_2) \lim_{t \rightarrow 0} \left(u(t, x) E^{a,0}(T, t) \right) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ 4_2) \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|^{a,0} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty.$$

Тогда справедлива равенство

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t, x; \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \\ (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (4.52)$$

где

$$G_0(t, x; \xi) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(G(t, x; \tau, \xi) E^{-a,0}(T, \tau) \right). \quad (4.53)$$

Теорема 4.6. За таких условий:

$$1_3) A(T, 0) = \infty, B(T, 0) = \infty, \\ 2_3) \exists M > 0 \forall t \in (0, T]: \|u(t, \cdot)\|^{a,b} \leq M, \\ 3_3) \lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot)\|^{a,b} = 0, \\ 4_3) \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|^{a,b} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$$

е правильной формула

$$u(t, x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}. \quad (4.54)$$

4.4 Властивості об'ємного потенціалу для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів

Нехай n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, що $x := (x_1, x_2, x_3)$. Змінні групи x_1 називаються основними, а змінні x_2, x_3 – змінними груп виродження. Відповідно до цього, мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, при цьому $|k| := \sum_{j=1}^3 |k_j|$, $|k_j| := \sum_{l=1}^{n_j} |k_{jl}|$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

У шарі $\Pi_{(0,T]}$ скінченної товщини $T > 0$ розглядається неоднорідне рівняння [77]

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - b \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \partial_{x_{1j}} \right) u(t, x) = f(t, x),$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (4.55)$$

де a_{js} і b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$ і $b \neq 0$, і виконується умова параболічності

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \sigma_{1j} \sigma_{1s} \geq \delta |\sigma_1|^2.$$

Для похідних ФРЗК для рівняння (4.55) $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, правильні оцінки

$$|\partial_x^k \partial_\xi^m G(t, x; \tau, \xi)| \leq C \prod_{l=1}^3 (p_l(t-\tau))^{-(n_l + |k_l| + |m_l|)/2} E_c(t - \tau, x, \xi),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.56)$$

де k_l і m_l – довільні мультиіндекси розмірності n_l , $l \in \{1, 2, 3\}$, C і c – додатні

сталі, причому C залежить від k_l і m_l ;

$$E_c(t, x, \xi) := \prod_{l=1}^3 E_c^l(t, X_l(t), \xi_l), \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.57)$$

$$E_c^l(t, X_l(t), \xi_l) := \exp\left\{-c \frac{|X_l(t) - \xi_l|^2}{p_l(t)}\right\}, \quad l \in \{1, 2, 3\},$$

в яких $X_1(t) := x_1 e^{bt}$, $X_2(t)$, $X_3(t)$, $\alpha_b(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ та $p_3(t)$ такі, як в попередньому пункті.

Наведемо допоміжні твердження.

Лема 4.7. *Справджуються рівності*

$$\partial_x^k \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) d\xi = \begin{cases} 0, & |k| \neq 0, \\ 1, & |k| = 0, \end{cases} \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (4.58)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} \partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_2 d\xi_3 = 0, \quad |k_2| + |k_3| \neq 0,$$

$$t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi_1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \quad (4.59)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_3 = 0, \quad |k_3| \neq 0,$$

$$t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \xi_2 \in \mathbb{R}^{n_2}. \quad (4.60)$$

Лема 4.8.

$$\exists C_l^1 > 0 \quad \exists C_l^2 > 0 \quad \forall t \in [0, T] : \quad C_l^1 t^{2l-1} \leq p_l(t) \leq C_l^2 t^{2l-1}, \quad l \in \{1, 2, 3\}.$$

У цьому пункті формулюються властивості об'ємного потенціалу

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (4.61)$$

ядром якого є функція G – ФРЗК для рівняння (4.55), з яких випливає коректна розв'язність задачі Коші з однорідними початковими умовами.

Використовуємо ще такі позначення:

$$\xi^{(1)}(t) := (\xi_1, X_2(t), X_3(t)), \quad \xi^{(2)}(t) := (\xi_1, \xi_2, X_3(t)), \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n;$$

$B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R, R > 0\}$ – куля в \mathbb{R}^n радіуса R і центром у початку координат.

Для густини об’ємного потенціалу (4.61) – функції $f : \Pi_{[0,T]} \rightarrow \mathbb{C}$ використовуватимемо таку умову:

Г) функція f обмежена і неперервна в $\Pi_{[0,T]}$, є гельдеровою за просторовими змінними у такому сенсі:

$$\forall R > 0 \quad \exists C > 0, \quad \exists \alpha_1 \in (0; 1], \quad \exists \alpha_2 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right], \quad \exists \alpha_3 \in \left(\frac{3}{5}; 1\right]$$

$$\forall t \in (0, T] \quad \forall \{x, \xi\} \subset B_R :$$

$$|\Delta_\xi^{X(t-\tau)} f(\tau, \xi)| := |f(\tau, \xi) - f(\tau, X(t-\tau))| \leq C \sum_{l=1}^3 |X_l(t-\tau) - \xi|^{\alpha_l}.$$

Теорема 4.7. *Нехай для функції f виконуються умова Г. Тоді*

1) *функція u має неперервні похідні, які входять у рівняння (4.55), при цьому похідні обчислюються за формулами*

$$\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad |k_1| = 1, \quad (4.62)$$

$$\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{X(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi, \quad |k_1| = 2, \quad (4.63)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{\xi^{(1)}(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi, \quad |k_2| = 1, \quad (4.64)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi, \quad |k_3| = 1, \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t, x) &= f(t, x) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t, x; \tau, \xi) \Delta_{\xi}^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi + \\
&+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t, x; \tau, \xi) \Delta_{\xi^{(2)}(t-\tau)}^{\xi^{(1)}(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t, x; \tau, \xi) \Delta_{\xi^{(1)}(t-\tau)}^{X(t-\tau)} \times \\
&\times f(\tau, \xi) d\xi + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t, x; \tau, \xi) d\xi \right) f(\tau, X(t-\tau)) d\tau, \quad (4.66) \\
&(t, x) \in \Pi_{(0, T]}.
\end{aligned}$$

2) для функції u виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_{x_i}^{k_i} u(t, x) \rightarrow 0, \quad l \in \{1, 2, 3\}, \quad |k_1| \leq 2, \quad |k_2| \leq 1, \quad |k_3| \leq 1,$$

рівномірно щодо $x \in B_R$ з довільним додатним R .

Отримані результати важливі для встановлення теорем про інтегральні зображення розв'язків та коректну розв'язність задачі Коші.

4.5 Задача Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами

Нехай $\Pi_H := \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, де проміжок $H \subset \mathbb{R}$. Розглядається задача [89]

$$(Lu)(t, x) + (uKu)(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (4.67)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.68)$$

де $T > 0$, K – локально обмежений та локально ліпшицевий оператор у класі $E_{\alpha}^{\lambda}(T)$ неперервних у $\Pi_{[0, T]}$ функцій u , для яких

$$\max_{t \in [0, T]} |u(t, x)| \leq B \begin{cases} (|x|^2 + 1)^{\alpha} & \text{для } \lambda = 0, \\ \exp\{\alpha(|x|^2 + 1)^{\lambda/2}\} & \text{для } \lambda \in (0, 2], \end{cases}$$

$\alpha > 0$, $B > 0$, і диференціальний вираз

$$Lu := \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} \left(a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} u + a_j(t, x) u \right) - \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_{x_j} u - c(t, x) u.$$

Припускається, що дійснозначні функції $a_{ij} = a_{ji}$, $\partial_{x_j} a_{ij}$, a_j , $\partial_{x_j} a_j$, b_j , $\partial_{x_j} b_j$ і $c \in$ гельдеровими в кожній компактній підобласті шару $\Pi_{[0,T]}$ та існують додатні сталі μ , C_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, і число $\lambda \in [0, 2]$ такі, що для будь-яких $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mu|\sigma|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)\sigma_i\sigma_j \leq C_1(|x|^2 + 1)^{(2-\lambda)/2}|\sigma|^2, \\ \max\{|\partial_{x_j} a_{ij}(t, x)|, |a_j(t, x)|, |b_j(t, x)|\} &\leq C_2(|x|^2 + 1)^{1/2}, \\ \max\{c(t, x) + \partial_{x_j} a_j(t, x), c(t, x) - \partial_{x_j} b_j(t, x)\} &\leq C_3(|x|^2 + 1)^{\lambda/2}. \end{aligned}$$

За сформульованих умов та додаткових умов на K вивчається питання існування та єдиності класичного розв'язку задачі (4.67), (4.68) та існування та єдиність розв'язку задачі про визначення коефіцієнта при невідомій функції у відповідному лінійному параболічному рівнянні з незалежними від t коефіцієнтами.

Для довільного $\alpha > 0$ розглядаємо функцію

$$g_\alpha(t, x) = \begin{cases} \ln \frac{(|x|^2+1)^\alpha}{1-\beta t}, & \lambda = 0 \\ (\alpha + \beta t)(|x|^2 + 1)^{\lambda/2}, & \lambda \in (0; 2], \end{cases} \quad (t, x) \in \Pi_{[0;T_\alpha]},$$

де $\beta = \beta(\alpha)$, а величина T_α буде означена нище. Нехай $v^\alpha(t, x) = u(t, x) \exp\{-g_\alpha(t, x)\}$, $(t, x) \in \Pi_{[0;T_\alpha]}$. Тоді

$$\begin{aligned} (Lu)(t, x) &= \exp\{g_\alpha(t, x)\} \left(\partial_t v^\alpha(t, x) - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} \left(a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} v^\alpha(t, x) \right) - \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^n a_j^\alpha(t, x) \partial_{x_j} v^\alpha(t, x) - c^\alpha(t, x) v^\alpha(t, x) \right) \equiv \exp\{g_\alpha(t, x)\} (L^\alpha v^\alpha)(t, x), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a_j^\alpha(t, x) &:= a_j(t, x) + b_j(t, x) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} g_\alpha(t, x), \\ c^\alpha(t, x) &:= c(t, x) + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} a_j(t, x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} g_\alpha(t, x) \partial_{x_j} g_\alpha(t, x) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(a_j(t, x) + b_j(t, x) \right) \partial_{x_j} g_\alpha(t, x) + \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} a_{ij}(t, x) \partial_{x_j} g_\alpha(t, x) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i x_j}^2 g_\alpha(t, x) - \partial_t g_\alpha(t, x). \end{aligned}$$

Очевидно, що $(Lu)(t, x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $(L^\alpha v^\alpha)(t, x) = 0$, $(t, x) \in \Pi_{(0; T_\alpha]}$. Крім того, якщо $Z^\alpha(t, x; \tau, \xi)$ є фундаментальним розв'язком рівняння $(L^\alpha v^\alpha)(t, x) = 0$, то

$$Z(t, x; \tau, \xi) = \exp\{g_\alpha(t, x) - g_\alpha(\tau, \xi)\} Z^\alpha(t, x; \tau, \xi) \quad (4.69)$$

є фундаментальним розв'язком рівняння $(Lu)(t, x) = 0$.

При побудові фундаментального розв'язку Z^α важливу роль відіграє знак коефіцієнта c^α . Якщо $\lambda = 0$, то

$$c^\alpha(t, x) \leq 4C_1\alpha^2 + 2(n+2)(2C_1 + C_2)\alpha + C_3 - \frac{\beta}{1 - \beta t}$$

і тоді, якщо $\beta(\alpha) = 2(4C_1\alpha^2 + 2(n+2)(2C_1 + C_2)\alpha + C_3)$, а $T_\alpha = \min\{T, 1/(2\beta(\alpha))\}$, маємо, що $c^\alpha(t, x) < 0$, $(t, x) \in \Pi_{[0, T_\alpha]}$. Якщо $\lambda > 0$, то

$$c^\alpha(t, x) \leq (|x|^2 + 1)^{\lambda/2} \left(C_1\lambda^2(\alpha + \beta t)^2 + (n+2)\lambda(C_1 + C_2)(\alpha + \beta t) + C_3 - \beta \right) \leq \delta^\alpha(t)(|x|^2 + 1)^{\lambda/2}.$$

Тоді за β треба взяти $\beta(\alpha) = 2(C_1\lambda^2\alpha^2 + (n+2)\lambda(C_1 + C_2)\alpha + C_3)$, а $T_\alpha = \min\{T, \tilde{T}_\alpha\}$, де \tilde{T}_α – додатний корінь рівняння $\delta^\alpha(t) = -\beta(\alpha)/4$, щоб виконувалась нерівність $c^\alpha(t, x) < 0$, $(t, x) \in \Pi_{[0, T_\alpha]}$.

В обох випадках T_α є незростаючою функцією змінної α і $\lim_{\alpha \rightarrow 0} T_\alpha = T_0(C_1, C_2, C_3) \leq T$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_\alpha = 0$. Тому $0 < T_\alpha \leq T_0$, $\alpha \in (0; \infty)$.

Для задачі Коші

$$(Lu)(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (4.70)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.71)$$

відомі результати про існування і єдиність розв'язку та одержано інтегральне зображення для нього

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi,$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0; T_\alpha)}, \quad (4.72)$$

якщо функція φ неперервна в \mathbb{R}^n , f неперервна і задовольняє умову Гельдера за x рівномірно в кожній обмеженій області шару $\Pi_{(0;T]}$, а також φ і f належать до класу $E_\alpha^\lambda(T)$.

Розв'язок задачі (4.70), (4.71), який визначається формулою (4.72), при заданих вище умовах на функції f і φ належить до класу $E_{\alpha_1}^\lambda(T_{\alpha_1})$ з $\alpha_1 = 2\alpha$ при $\lambda = 0$ і $\alpha_1 = \alpha + \beta(\alpha)T_\alpha$ при $\lambda \in (0; 2]$ і він єдиний в класі функцій $E_\alpha^\lambda(T_\alpha)$ з довільним $\alpha > 0$.

У зображенні (4.72) Z є фундаментальним розв'язком рівняння $Lu = 0$ має вигляд (4.69), де Z^α є фундаментальним розв'язком рівняння $L^\alpha u^\alpha(t, x) = 0$, який визначений для $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T_\alpha$, причому

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z^\alpha(t, x; \tau, \xi) d\xi = 1,$$

$$0 \leq Z^\alpha(t, x; \tau, \xi) \leq C(t - \tau)^{-n/2}, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T_\alpha,$$

де C – стала, яка залежить від n і μ і не залежить від α .

З того, що розв'язок (4.72) належить до класу $E_\alpha^\lambda(T_\alpha)$, випливає нерівність

$$|u(t, x)| \leq C(1 + T_\alpha) \exp\{g_\alpha(t, x)\}, \quad (t, x) \in \Pi_{(0;T_\alpha]}.$$

Розглядатимемо простори гельдерових функцій $H^{l,l/2}(\Pi_{(0;T]})$ і $H^l(\mathbb{R}^n)$, де l – неціле додатне число, і відповідні норми

$$\|u\|_{(0;T]} \equiv \sup_{(t,x) \in \Pi_{(0;T]}} \left| u(t, x) \exp\{-g_\alpha(t, x)\} \right|,$$

$$\|\varphi\| \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \varphi(x) \exp\{-g_\alpha(0, x)\} \right|.$$

Вважатимемо, що оператор K задовольняє такі умови:

- 1) $\|Ku\|_{(0;T]} \leq B_1(\|u\|_{(0;T]}, T)$,
- 2) $\|Ku_1 - Ku_2\|_{(0;T]} \leq B_2(\|u_1\|_{(0;T]}, \|u_2\|_{(0;T]}, T) \|u_1 - u_2\|_{(0;T]}$,

де $u \in E_\alpha^\lambda(T)$ і неперервна в $\Pi_{[0;T]}$, а функції $B_1(a, c)$ і $B_2(a, b, c)$ обмежені, коли аргументи змінюються в обмеженій області.

Теорема 4.8. *Нехай коефіцієнти рівняння (4.67) і оператор K задовольняють умови, сформульованя вище, $f \in H^{l,l/2}(\Pi_{(0;T]}) \cap E_\alpha^\lambda(T)$, $\varphi \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap$*

$E_\alpha^\lambda(T)$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (4.67), (4.68) з простору $H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0;T]}) \cap E_{\alpha_1}^\lambda(T_0)$, де T_0 – досить мале додатне число, $l \in (0; 1)$, $\alpha_1 = 2\alpha$ при $\lambda = 0$ і $\alpha_1 = \alpha + \beta(\alpha)T_\alpha$ при $\lambda \in (0; 2]$.

Теорема 4.9. Якщо для функцій $f_i \in H^{l, l/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ і $\varphi_i \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ існують розв'язки $u_i \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$, $i \in \{1, 2\}$, задачі Коші (4.67), (4.68), а оператор K задовольняє умову 2), то

$$\|u_1 - u_2\|_{(0;T_0]} \leq C_4 \|f_1 - f_2\|_{(0;T_0]} + C_5 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{(0;T_0]},$$

де сталі C_4 і C_5 залежать від T_0 , $\|u_i\|_{(0;T_0]}$, $i \in \{1, 2\}$, $\|Ku_1\|_{(0;T_0]}$.

Розглянемо задачу визначення коефіцієнта при невідомій функції в параболічному рівнянні другого порядку. Задача полягає у знаходженні функцій $u \in H^{l+4, (l+4)/2}(\Pi_{(0;T]}) \cap E_\alpha^\lambda(T)$ і $q \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ з умов

$$\begin{aligned} (Lu)(t, x) + q(x)u(t, x) &= f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0;T]}, \\ u(t, x)|_{t=0} &= 0, \quad u(t, x)|_{t=T} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4.73)$$

де $f \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0;T]}) \cap E_\alpha^\lambda(T)$, $\psi \in H^{l+4}(\mathbb{R}^n) \cap E_\alpha^\lambda(T)$, $f(0, x) = 0$, $\psi(x) \geq \psi_0 > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Вважатимемо, що коефіцієнти L не залежать від t .

Ввівши позначення $v(t, x) := \partial_t u(t, x)$, для функцій $v \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0;T]}) \cap E_\alpha^\lambda(T)$ і $g \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E_\alpha^\lambda(T)$ з (4.73) отримуємо задачу

$$\begin{aligned} (Lv)(t, x) + q(x)v(t, x) &= \partial_t f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0;T]}, \\ v(t, x)|_{t=0} &= 0, \quad v(t, x)|_{t=T} = (L\psi)(x) - q(x)\psi(x) + f(T, x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Якщо з третьої умови в (4.74) знайти q і підставити його в рівняння, то одержимо, що v є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} (Lv)(t, x) + v(t, x) \frac{1}{\psi(x)} \left((L\psi)(x) + f(T, x) - v(T, x) \right) &= \partial_t f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0;T]}, \\ v(t, x)|_{t=0} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Задача (4.75) має єдиний розв'язок $v \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0;T_1]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_1)$, де T_1 – досить мале додатне число. Тому й задача (4.73) має єдиний розв'язок.

4.6 Про властивості операторів Гріна і спряжених з ними операторів, породжених задачею Коші для параболічних за Ейдельманом систем довільного порядку

Отримані у цьому пункті результати стосуються дослідження властивостей операторів Гріна і спряжених з ними операторів, породжених задачею Коші для параболічних за Ейдельманом систем довільного порядку, опубліковано в працях [92]–[96] та висвітлено в п'ятьох доповідях на п'яти міжнародних наукових конференціях.

Розглядається задача Коші для системи рівнянь з частинними похідними, параболічної за Ейдельманом вигляду

$$\partial_t^{n_k} u_k(t, x) - \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{\|\bar{\alpha}\| \leq 2bn_j, \\ (\alpha_0 < n_j)}} a_{\bar{\alpha}}^{kj}(t, x) \partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} u_j(t, x) = f_k(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

$$\partial_t^{\mu-1} u_k(t, x)|_{t=0} = \varphi_k^\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \{1, \dots, n_k\}, \quad (4.76)$$

де $n, N, b_1, \dots, b_n, n_1, n_2, \dots, n_N$ – задані натуральні числа, $k \in \{1, \dots, N\}$, b – найменше спільне кратне чисел b_1, \dots, b_n ; $\bar{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\bar{\alpha}\| := \sum_{j=0}^n m_j \alpha_j$, $m_0 := 2b$, $m_j := b/b_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$; $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; $\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} := \partial_t^{\alpha_0} \partial_x^\alpha$, $\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\Pi_T := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^n\}$, T – задане додатне число.

Припускається, що система диференціальних рівнянь є рівномірно параболічна за Ейдельманом у шарі $\bar{\Pi}_T$, а коефіцієнти системи задачі (4.76) обмежені, задовольняють рівномірну умову Гельдера за x , неперервні за t , при цьому неперервність за t коефіцієнтів $a_{\bar{\alpha}}^{kj}$, з $\|\bar{\alpha}\| = 2bn_j$ рівномірна щодо $x \in \mathbb{R}^n$. Крім того, вважається, що коефіцієнти системи мають неперервні та обмежені похідні $\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} a_{\bar{\alpha}}^{kj}$, $\|\bar{\alpha}\| \leq 2bn_j$, $\{k, j\} \subset \{1, \dots, N\}$, які задовольняють відповідну умову Гельдера за x рівномірно щодо t з показником $\lambda \in (0, 1)$ в $\bar{\Pi}_T$.

Як показано в [90], розв'язок такої задачі для довільних гладких і фінітних функцій f_k та φ_k^μ , $\mu \in \{1, \dots, n_k\}$, $k \in \{1, \dots, N\}$, зображається у

вигляді

$$u_k(t, x) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{kj}(t, x; \tau, \xi) f_j(\tau, \xi) d\xi + \sum_{\mu=1}^{n_k} \int_{\mathbb{R}^n} G_j^{k\mu}(t, x; \xi) \varphi_j^\mu(\xi) d\xi \right),$$

$$(t, x) \in \Pi_T.$$

Тут $G := (G_0, G_1, \dots, G_N)$, де $G_0 := (G_0^{kj})_{k,j=1}^N$, $G_j := (G_j^{k\mu})_{k=1, \mu=1}^{N, n_k}$, $j \in \{1, \dots, N\}$, – матриця Гріна задачі (4.76).

Операторами Гріна задачі Коші (4.76) називатимемо інтегральні оператори вигляду

$$\widehat{G_0^{kj}} f = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{kj}(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad \widehat{G_j^{k\mu}} \varphi_j = \int_{\mathbb{R}^n} G_j^{k\mu}(t, x; \xi) \varphi_j(\xi) d\xi,$$

$$(4.77)$$

$\{k, j\} \subset \{1, \dots, N\}$, $\mu \in \{1, \dots, n_k\}$.

Оператори

$$\widehat{G_0^{kj*}} g(\tau, \xi) := \int_\tau^T dt \int_{\mathbb{R}^n} \overline{G_0^{kj}(t, x; \tau, \xi)'} g(t, x) dx, \quad (\tau, \xi) \in \Pi_T,$$

$$\widehat{G_j^{k\mu*}} g(\xi) := \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} \overline{G_j^{k\mu}(t, x; \xi)'} g(t, x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

де $\{k, j\} \subset \{1, \dots, N\}$, $\mu \in \{1, \dots, n_k\}$, штрих означає транспонування, а риска – комплексну спряженість, називатимемо спряженими до (4.77) відповідно.

Наведемо означення необхідних позитивних просторів Гельдера.

Нехай $T_1 > T$, $c_1 = c/2$, де c – стала з оцінок фундаментальної матриці розв'язків [90, 91]; l і λ – задані числа відповідно з множин \mathbb{Z}_+^1 і $(0, 1)$; $\Delta_t^\tau f(t, \cdot) := f(t, \cdot) - f(\tau, \cdot)$; $\Delta_{x_j}^{y_j} f(\cdot, x) := f(\cdot, x) - f(\cdot, x(y_j))$, $x(y_j) := (x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Через $H_{c_1}^{l+\lambda}$ позначимо простір функцій $u : \Pi_T \rightarrow \mathbb{C}_{N1}$, які мають неперервні похідні $\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}}$, $\|\bar{\alpha}\| \leq l$, і мають скінченну норму

$$\|u\|_{c_1}^{l+\lambda} := \sum_{0 \leq l - \|\bar{\alpha}\| \leq 2b} \sup_{\substack{\{t, \beta\} \subset [0, T], \\ t \neq \beta, x \in \mathbb{R}^n}} \left(|\Delta_t^\beta \partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} u(t, x)| \times |t - \beta|^{-(l - \|\bar{\alpha}\| + \lambda)/(2b)} \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times (E_{c_1}(T_1 - t, x) + E_{c_1}(T_1 - \beta, x))^{-1}) + \sum_{j=1}^n \sum_{0 \leq l - \|\bar{\alpha}\| \leq m_j} \sup_{\substack{(t,x) \in \Pi_T, \\ y_j \in \mathbb{R}, x_j \neq y_j}} \left(|\Delta_{x_j}^{y_j} \partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} u(t, x)| \times \right. \\ & \left. \times |x_j - y_j|^{-(l - \|\bar{\alpha}\| + \lambda)/m_j} \times (E_{c_1}(T_1 - t, x) + E_{c_1}(T_1 - t, x(y_j)))^{-1} \right) + \\ & + \sum_{j=0}^l \sum_{\|\bar{\alpha}\|=j} \sup_{(t,x) \in \Pi_T} (|\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} u(t, x)| \times (E_{c_1}(T_1 - t, x))^{-1}). \end{aligned}$$

$C_{c_1}^{l+\lambda}$ – простір функцій $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}_{N_1}$, для яких існують неперервні похідні ∂_x^α , $\|\alpha\| \leq l$, і є скінченною норма

$$\begin{aligned} |v|_{c_1}^{l+\lambda} := & \sum_{j=1}^n \sum_{0 \leq l - \|\alpha\| \leq m_j} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ y_j \in \mathbb{R}, x_j \neq y_j}} \left(|\Delta_{x_j}^{y_j} \partial_x^\alpha v(x)| \times |x_j - y_j|^{-(l - \|\alpha\| + \lambda)/m_j} \times \right. \\ & \left. \times (E_{c_1}(T_1, x) + E_{c_1}(T_1, x(y_j)))^{-1} \right) + \sum_{j=0}^l \sum_{\|\alpha\|=j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|\partial_x^\alpha v(x)| \times (E_{c_1}(T_1, x))^{-1}). \end{aligned}$$

Через $H_{\circ}^{s+\lambda}$ та $\overset{\circ}{H}^{s+\lambda}$ позначимо множини функцій u з $H^{s+\lambda}$, для яких $\partial_t^{\mu-1} u_k(t, x)|_{t=0} = 0$ та $\partial_t^{\mu-1} u_k(t, x)|_{t=T} = 0$, $\mu \in \{1, \dots, n_k\}$, відповідно. $H^{l+\lambda}$ і $C^{l+\lambda}$ – простори Гельдера обмежених функцій.

$H^{s+\lambda}$ – простір Гельдера спеціально підібраних спадних функцій, що визначається так само як $H_{s+\lambda}^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}$ з [91], в яких функцію $\psi(t, x)$ замінено на

$$\tilde{\psi}(t, x) := \exp \left\{ -c \sum_{j=1}^n (T_1 - t)^{1-q_j} |x_j|^{q_j} \right\}, \quad T_1 > T, \quad q_j := 2b_j / (2b_j - 1).$$

Теорема 4.10. *Справедливими є наступні твердження:*

1) оператори \widehat{G}_0^{kj} обмежено діють з $H_{\circ}^{s+\lambda}$ в $H_{\circ}^{2bn_k+s+\lambda}$, де s – ціле додатне число, $0 < \lambda < 1$;

2) оператори \widehat{G}_0^{kj*} обмежено діють з $H_{\circ}^{s-2bn_j+\lambda}$ в $H_{\circ}^{s+\lambda}$, де $s \geq \max_j(2bn_j)$, $0 < \lambda < 1$.

Для доведення теореми використовуються оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі (4.76), означення операторів Гріна та просторів Гельдера, що описані в цьому пункті вище.

4.7 Біфуркація циклів параболічних систем із малою дифузією

4.7.1 Біжучі хвилі параболічних рівнянь із малою дифузією

Дослідимо існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузією. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися у праці [97] та ін.

Для диференціальних рівнянь з частинними похідними можуть виникати складні просторові структури. У системах нелінійних гіперболічних рівнянь досліджено існування зліченного числа циклів, а у системах параболічних рівнянь з малою дифузією – існування як завгодно великої кількості циклів (феномен буферності). Такі математичні моделі описують складні фізичні явища [98]-[99].

Дослідимо біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u \right] + (d_0 + ic_0)u^2 \bar{u} \quad (4.78)$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (4.79)$$

де ε – малий додатний параметр.

Має місце таке твердження.

Теорема 4.11. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (4.78), (4.79) має періодичні відносно t розв'язки [97]*

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon),$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma) |d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2 (\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2$$

при всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Як приклад розглянемо рівняння (4.78), в якому $\beta = 0$, $c_0 = 0$. Тоді з теореми 1 випливає, що при $d_0 < 0$, $dn^2 < \alpha$ існує періодичний розв'язок $u_n = \sqrt{\varepsilon(\alpha - dn^2)|d_0|^{-1}} \begin{pmatrix} \cos(-t + nx) \\ \sin(-t + nx) \end{pmatrix}$. Згідно з теоремою 4.11 біжучі хвилі $u_n(t, x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \frac{1}{6d}(d + 2\alpha)$.

4.7.2 Періодичні режими рівняння спінового горіння та їх стійкість

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} \right], \quad (4.80)$$

$$\xi(t, x + 2\pi) = \xi(t, x), \quad (4.81)$$

де ε – малий додатний параметр, $\varrho > 0$.

Правильні наступні твердження.

Теорема 4.12. *Нехай для деякого цілого n виконується нерівність $n^2 < \varrho^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (4.80), (4.81) має періодичні відносно t розв'язки [97]*

$$\xi_n = \sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}} \cos(-t + nx) + O(\varepsilon),$$

де $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 4.13. *Біжучі хвилі $\xi_n(t, x)$ задачі (4.80), (4.81) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова [97]*

$$n^2 < \frac{1}{6}(2\varrho^2 + 1).$$

4.7.3 Біфуркація торів у параболічних системах диференціальних рівнянь із малою дифузиею

Доведемо існування інваріантних торів автономної параболічної системи диференціальних рівнянь з малою дифузиею на колі [100]. Дослідимо питання існування та стійкості біжучих хвиль такої системи.

Розглянемо нелінійну параболічну систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u, \bar{u}) \quad (4.82)$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (4.83)$$

Тут ε – малий додатний параметр, $u \in \mathbb{R}^n$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_k > 0$ при $1 \leq k \leq n$, $A_0 = \text{diag}(i\omega_1, i\omega_2, \dots, i\omega_n)$, $\omega_k > 0$ при $1 \leq k \leq n$, функція $F(u, \bar{u}) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ п'ять раз неперервно диференційовна відносно u та \bar{u} , $F(0, 0) = 0$, причому F має в нулі порядок малості вище першого.

Нехай виконується умова A :

$$p_1 \omega_1 + \dots + p_n \omega_n \neq m \quad \text{при} \quad 0 < |p_1| + \dots + |p_n| < 6,$$

де m, p_1, \dots, p_n – цілі.

Перетворимо систему (4.82) за допомогою підстановки

$$u = v + \sum_{i=2}^4 W_i(v, \bar{v}), \quad (4.84)$$

де W_2, W_3, W_4 – форми відповідно другого, третього і четвертого порядку. Перетворення (4.84) можна підібрати так, що рівняння для v та \bar{v} набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_0 v + \varepsilon A_1 v + G(v, \bar{v})v + V(v, \bar{v}), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= \varepsilon D \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \bar{A}_0 \bar{v} + \varepsilon \bar{A}_1 \bar{v} + \bar{G}(v, \bar{v})\bar{v} + \bar{V}(v, \bar{v}), \end{aligned} \quad (4.85)$$

де $G(v, \bar{v})$ – діагональна матриця з елементами $g_k(v, \bar{v}) = \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j \bar{v}_j$, $1 \leq k \leq n$, на діагоналі, $V(v, \bar{v}) = O(|v|^5)$ при $|v| \rightarrow 0$.

При $\varepsilon = 0$ одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь. Нехай нульовий розв'язок системи (4.85) при $\varepsilon = 0$ і $V(v, \bar{v}) \equiv 0$ асимптотично стійкий.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (4.82), (4.83). Розв'язок системи (4.85) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $v = \theta(y)$,

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $y_k = \sigma_k t + x$, $1 \leq k \leq n$, де функція $\theta(y)$ має період 2π . Позначимо $\frac{d\theta}{dy} = \left(\frac{d\theta_1}{dy_1}, \dots, \frac{d\theta_n}{dy_n} \right)$. Тоді одержимо систему

$$\sigma \frac{d\theta}{dy} = A_0 \theta + \varepsilon \left[D \frac{d^2 \theta}{dy^2} + A_1 \theta \right] + G(\theta, \bar{\theta}) \theta + V(\theta, \bar{\theta}),$$

де $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Цю систему заміною $\frac{d\theta}{dy} = \vartheta$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \vartheta, \quad \sigma \vartheta = A_0 \theta + \varepsilon \left[D \frac{d\vartheta}{dy} + A_1 \theta \right] + G(\theta, \bar{\theta}) \theta + V(\theta, \bar{\theta}). \quad (4.86)$$

Інтегральний многовид системи (4.86) можна зобразити у вигляді

$$\vartheta = A_0 \theta \sigma^{-1} + \varepsilon \left[D A_0^2 \theta \sigma^{-3} + A_1 \theta \sigma^{-1} \right] + G(\theta, \bar{\theta}) \theta \sigma^{-1} + V(\theta, \bar{\theta}) \sigma^{-1}.$$

Система на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = A_0 \theta \sigma^{-1} + \varepsilon \left[D A_0^2 \theta \sigma^{-3} + A_1 \theta \sigma^{-1} \right] + G(\theta, \bar{\theta}) \theta \sigma^{-1} + V(\theta, \bar{\theta}) \sigma^{-1}.$$

Цю систему лінійною заміною можна звести до діагонального вигляду в лінійній частині

$$\frac{dz}{dy} = A_0 z \sigma^{-1} + \varepsilon \left[D A_0^2 z \sigma^{-3} + A_2 z \sigma^{-1} \right] + G(z, \bar{z}) z \sigma^{-1} + V(z, \bar{z}) \sigma^{-1} + O(\varepsilon^2),$$

де $A_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, μ_k – діагональні елементи матриці A_1 .

Перейдемо до полярних координат, поклавши $z_k = r_k \exp(i\varphi_k)$, $\bar{z}_k = r_k \exp(-i\varphi_k)$. Тоді одержимо систему рівнянь

$$\frac{dr_k}{dy_k} = \varepsilon \left[\frac{\xi_k}{\sigma_k} - \frac{d_k \omega_k^2}{\sigma_k^3} \right] r_k + \frac{1}{\sigma_k} r_k \sum_{j=1}^n b_{kj}(\varepsilon) r_j^2 + \frac{1}{\sigma_k} R_k(r, \varphi),$$

$$\frac{d\varphi_k}{dy_k} = \frac{\omega_k}{\sigma_k} + \varepsilon \frac{\eta_k}{\sigma_k} + \frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=1}^n c_{kj}(\varepsilon) r_j^2 + \frac{1}{\sigma_k} r_k^{-1} \Phi_k(r, \varphi),$$

де $\xi_k = \text{Re } \mu_k$, $\eta_k = \text{Im } \mu_k$, $b_{kj} = \text{Re } a_{kj}$, $c_{kj} = \text{Im } a_{kj}$, $R_k(r, \varphi) = O(|r|^5)$, $\Phi_k(r, \varphi) = O(|r|^5)$.

Нехай $\xi_k \sigma_k^2 > d_k \omega_k^2$, при $1 \leq k \leq n$ і система рівнянь

$$\varepsilon \left[\xi_k - \frac{d_k \omega_k^2}{\sigma_k^2} \right] + \sum_{j=1}^n b_{kj}(\varepsilon) r_j^2 = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

має розв'язок. Функції z_k будуть мати період 2π , якщо $\frac{\omega_k}{\sigma_k} = m + O(\varepsilon)$, $m \in \mathbb{Z}$, тобто $\sigma_k = \frac{\omega_k}{m} + O(\varepsilon)$, $1 \leq k \leq n$. Нехай виконуються нерівності

$$\xi_k > d_k m^2, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (4.87)$$

і система рівнянь

$$\varepsilon [\xi_k - d_k m^2] + \sum_{j=1}^n b_{kj}(\varepsilon) r_j^2 = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (4.88)$$

має розв'язок.

Теорема 4.14. *Нехай $\omega_k > 0$ при $1 \leq k \leq n$, для деякого цілого m виконуються нерівності (4.87), система рівнянь (4.88) має розв'язок і виконується умова А. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (4.82), (4.83) має інваріантний тор [100].*

Розв'язки на торі будуть квазіперіодичними, якщо $|(p, \omega) + q| > \gamma |p|^{-n-1}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ при деякому $\gamma > 0$ цілому q і векторі $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ з цілими елементами.

Для дослідження стійкості інваріантного тора потрібно лінеаризувати систему в околі тора, здійснити перетворення лінеаризованої системи і дослідити одержану систему.

5 МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ПРОЦЕСІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

5.1 Дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь

5.1.1 Алгоритми дослідження стійкості

Розглянемо застосування схем апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь для знаходження неасимптотичних коренів відповідних квазіполіномів та розв'язання важливих для практичних застосувань таких задач:

- аналіз стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями;
- знаходження верхньої межі запізнення лінійних систем із запізненням, для якої зберігається її стійкість.

Дослідження цих задач зводиться до перевірки умов від'ємності дійсних частин усіх нулів відповідних квазіполіномів. Оскільки безпосередня перевірка на практиці такої умови можлива тільки в найпростіших випадках, ми будемо вивчати експоненціальну стійкість (нестійкість) лінійних систем із багатьма запізненнями, аналізуючи корені характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь із запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^k B_i x(t - \tau_i), \quad (5.1)$$

де $A, B_i, i = \overline{1, k}$ – сталі $n \times n$ матриці, $0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = \tau$.

Поставимо системі (5.1) у відповідність апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь [101], у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + \sum_{i=1}^k B_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau} \right], \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \mu (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 5.1. [102] Якщо нульовий розв'язок системи із запізненням (5.1) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує $t_0 > 0$ таке, що при $t \geq t_0$ нульовий розв'язок апроксимуючої системи (5.2) також експоненціально стійкий (нестійкий).

Якщо для всіх $t \geq t_0$ нульовий розв'язок системи (5.2) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді нульовий розв'язок системи із запізненням (5.1) експоненціально стійкий (нестійкий).

Зауваження 5.1. Із теореми 5.1 слідує, що існує число t_0 таке, що при $t \geq t_0$ апроксимуюча стійкість (нестійкість) нульового розв'язку системи із запізненням (5.1) еквівалентна асимптотичній стійкості (нестійкості) нульового розв'язку апроксимуючої системи лінійних диференціальних рівнянь (5.2).

Розглянемо рівність

$$\Phi(\lambda) = H_m(\lambda) + R_m(\lambda), \quad (5.3)$$

де $R_m(\lambda) = \Phi(\lambda) - H_m(\lambda)$, $\Phi(\lambda)$ – квазіполіном системи (5.1), $H_m(\lambda)$ – функція визначена співвідношенням

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{mn}}, \quad m \in N,$$

яка при $t \rightarrow \infty$ збігається до квазіполінома $\Phi(\lambda)$.

Число t_0 потрібно вибрати так, щоб при $t \geq t_0$ виконувалась нерівність

$$\min_{\lambda} |\Phi(\lambda)| > \max_{\lambda} |R_m(\lambda)|. \quad (5.4)$$

Відзначимо, що точне знаходження екстремальних виразів у співвідношенні (5.4) часто є складною задачею. Тому достатньо обмежитись знаходженням нижньої та верхньої оцінок для $\Phi(\lambda)$ та $R_m(\lambda)$.

Теорему 5.1 можна застосувати для дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням. Схему такого дослідження сформулюємо у вигляді алгоритму [103]–[105].

1. Для лінійного диференціального рівняння будуємо апроксимуючу систему лінійних диференціальних рівнянь.

2. Знаходимо характеристичний многочлен апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь.

3. Приводимо знайдений многочлен до вигляду, зручного для знаходження його коренів на ЕОМ.

4. Застосовуємо спеціалізоване програмне забезпечення і знаходимо корені характеристичного многочлена апроксимуючої системи при достатньо великих m .

5. Аналізуючи розміщення коренів характеристичного многочлена визначаємо стійка чи нестійка апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь.

6. Застосовуємо теорему 5.1 і робимо висновок про стійкість чи нестійкість вихідного диференціально-різницевого рівняння.

Приклад 5.1. [103]–[105] Розглянемо лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (5.5)$$

де $A, B - 2 \times 2$ сталі матриці, $\tau > 0$.

Скористаємось класичною схемою апроксимації коренів квазіполінома для системи (5.5)

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + Bz_m(t), \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)), \quad i = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, тоді характеристичне рівняння системи (5.6) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \Psi_m(\delta) &= \left(\frac{m}{\tau}\right)^2 s^{2m+2} + s^{2m+1} \left(-a_{11} \frac{m}{\tau} - a_{22} \frac{m}{\tau} - 2 \left(\frac{m}{\tau}\right)^2\right) + \\ &+ s^{2m} \left(a_{11}a_{12} + a_{11} \frac{m}{\tau} + a_{22} \frac{m}{\tau} - a_{21}a_{22}\right) + s^{m+1} \left(-b_{22} \frac{m}{\tau} - b_{11} \frac{m}{\tau}\right) + \\ &+ s^m \left(a_{11}b_{22} + b_{21} \frac{m}{\tau} + b_{11}a_{22} + b_{11} \frac{m}{\tau} - a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}\right) + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Корені многочлена (5.7) можна знаходити, використовуючи стандартні процедури обчислення коренів многочлена, які наявні в ППП Matlab, Mathematica, Maple, бібліотеці NumPy.

У нашій роботі використовується функція `roots` із бібліотеки NumPy, яка знаходить корені многочлена за його коефіцієнтами.

У випадку, коли

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & -6.5 \\ 4.8 & -0.9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1.39 & -0.65 \\ 0.48 & -1.39 \end{pmatrix}$$

знаходимо корені характеристичного рівняння для різних значень τ та знаходимо, що нульовий розв'язок системи (5.5) є експоненціально стійким при

$$\tau \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_3).$$

Значення величин τ_1, τ_2, τ_3 для різних m наведені в таблиці 5.1

Таблиця 5.1

Області стійкості рівняння (5.5)

Розмірність апроксимуючої системи m	Умови стійкості
$m = 100$	$\tau \in (0; 0.2740) \cup (0.8035; 1.3580)$
$m = 400$	$\tau \in (0; 0.2720) \cup (0.8310; 1.2299)$
$m = 500$	$\tau \in (0; 0.2718) \cup (0.8330; 1.2299)$

Для наглядності нижче наведено графік залежності від τ значення найбільшої дійсної частини серед коренів апроксимуючого многочлена.

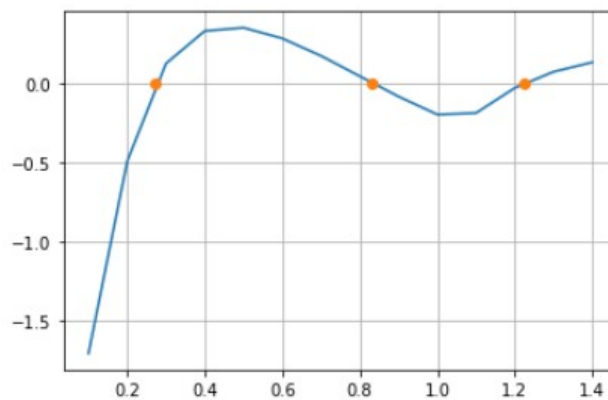


Рис. 5.1 Графік залежності від τ значення найбільшої дійсної частини коренів характеристичного рівняння (5.5)

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (5.8)$$

де запізнення $\tau > 0$, сталі $n \times n$ матриці A, B такі, що система без запізнення

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + B)x(t) \quad (5.9)$$

є асимптотично стійкою.

Існує стала $\Delta > 0$ така, що при $0 < \tau < \Delta$ нульовий розв'язок системи (5.8) також є асимптотично стійким [106].

Розглянемо алгоритм застосування схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь системою звичайних диференціальних рівнянь для знаходження верхньої межі запізнення у системі (5.8), для якої зберігається стійкість [101, 105], [107]–[110].

1. Системі із запізненням (5.8) поставимо у відповідність апроксимуючу систему аналогічну (5.2), характеристичний многочлен якої має вигляд (5.7).

2. Задаємо деяке $\Delta = \Delta_0$ (наприклад, $\Delta_0 = 1$) та уточнюючий крок $h_0 = \Delta$.

3. Наближаємо квазіполіном системи із запізненням характеристичним рівнянням апроксимуючої системи і знаходимо наближений корінь квазіполінома з найбільшою дійсною частиною α при $\tau = \Delta_0$.

4. Якщо $\alpha < 0$, то для заданого Δ_0 нульовий розв'язок системи із запізненням є асимптотично стійким. Покладаємо $\Delta_0 = \Delta_0 + h_0$ та переходимо на п.3.

5. Якщо $\alpha > 0$, то для даної верхньої межі Δ_0 нульовий розв'язок системи із запізненням не є асимптотично стійким. Тоді покладаємо $\Delta_0 = \Delta_0 - h_i$, де $h_i = \frac{h_{i-1}}{2}$, $i = 1, 2, \dots$, та переходимо на п.3 до того часу, поки $h_i > \varepsilon$, де ε – задана точність.

6. Якщо $h_i < \varepsilon$, де ε – задана точність, то верхня межа запізнення Δ_0 , для якої зберігається асимптотична стійкість системи із запізненням, знайдено із заданою точністю.

Приклад 5.2. Знайти максимальне значення запізнення τ , при якому нульовий розв'язок диференціально-різницевого рівняння із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0.25x(t) - 0.5x(t - \tau) \quad (5.10)$$

буде експоненціально стійким.

При $\tau = 0$ дістаємо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = -0.25x(t),$$

яке очевидно експоненціально стійке.

У роботі [111] одержано граничне значення величини запізнення

$$\Delta_1 = \frac{1}{10 \max(0.25, 0.5)} = 0.2,$$

для якого нульовий розв'язок рівняння (5.10) буде експоненціально стійким.

Оцінка запізнення у випадку, коли $A, B \in R$, уточнена в роботі [106]

$$\Delta = (2(|A| + |B|) |HB|)^{-1},$$

де $H = -(2(A + B))^{-1}$. Тоді отримуємо

$$\Delta_2 = \frac{8}{9}.$$

Використовуючи для рівняння (5.10) класичну схему апроксимації [102] та схему підвищеної точності [112], будемо апроксимувати квазіноліном для рівняння (5.10) характеристичними многочленами відповідних апроксимуючих систем.

Точне значення величини Δ , при якій зберігається експоненціальна стійкість, згідно [113] дорівнює

$$\Delta^* = 2.4184.$$

В таблиці 5.2 наведено наближені значення величини Δ , обчислені згідно запропонованого вище алгоритму при різних значеннях m з використанням класичної схеми апроксимації та схеми підвищеної точності

Таблиця 5.2

Наближені значення величини запізнення рівняння (5.10), для якого зберігається стійкість розв'язків

m	$\Delta_{\text{кл.сх.}}$	$\Delta_{\text{п.т.}}$
10	2.5264	2.4142
20	2.4713	2.4173
50	2.4393	2.4182
70	2.4332	2.4183

Наведений приклад показує, що застосування схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь дозволяє більш точно знайти верхню межу запізнення, для якої зберігається експоненціальна стійкість.

5.1.2 Опис використаних інформаційних технологій

Середовище розробки

Для автоматизації моделювання стійкості систем із запізненням за допомогою наведених в роботі числових алгоритмів розроблено прикладне програмне забезпечення. Для його розробки використано мову програмування Python та фреймворк Python Flask Framework.

Python – популярна мова програмування з відкритим кодом, яка застосовується для написання автономних програм і сценарних додатків для різних предметних областей. Вона є переносимим, потужним, а також відносно легким і ефективним у використанні інструментом.

Python Flask Framework – це легкий мікрофреймворк, заснований на Werkzeug, Jinja2 [114]. Flask Framework залежить від двох зовнішніх бібліотек: шаблону Jinja2, інструментарію Werkzeug WSGI.

У різних пакетах прикладних програм розроблено ряд стандартних процедур для обчислення коренів многочленів, які відіграють важливу роль для аналізу стійкості систем із запізненням. Мова програмування Python має потужний набір бібліотек для наукових цілей. Зокрема в даній роботі використовуються бібліотеки NumPy та SciPy.

NumPy – це проект з відкритим кодом, що має на меті забезпечити числові обчислення за допомогою Python [115]. SciPy – відкрита бібліотека високоякісних наукових інструментів для мови програмування Python, яка містить модулі для оптимізації, інтегрування, обчислення спеціальних функцій, обробки зображень, реалізації генетичних алгоритмів та інших задач, які розв’язуються при інженерній розробці.

З бібліотеки NumPy ми використовуємо функцію `roots`, яка обчислює корені многочлена за заданими його коефіцієнтами. Задаючи $n + 1$ вимірний вектор w , складений з коефіцієнтів многочлена ступеня n , можна знайти його корені. Значення елементів вектора w повинні бути дійсними числами. В результаті застосування функції `roots` отримаємо вектор r , який складається з n коренів многочлена, що розглядається. При цьому задавати початкове наближення для коренів не потрібно, алгоритм закладений у функції `roots` працює без задавання початкових наближень, що є досить зручно.

Для стійкості нульового розв’язку рівняння (5.1) необхідно і досить, щоб усі корені його характеристичного рівняння (5.2) лежали у півплощині $Re\lambda < 0$.

Позначимо $\lambda_\tau = (Re\lambda_1, Re\lambda_2, \dots, Re\lambda_{2m+1})$, вектор дійсних частин коренів характеристичного многочлена апроксимуючої системи (5.2), що знайдені для фіксованого запізнення τ . Введемо функцію $v(\tau) = \max \lambda_\tau$, яка визначає найбільшу дійсну частину знайдених коренів. Тепер для стійкості нульового розв’язку рівняння (5.1) необхідно і досить згідно Теорема 5.1 є виконання умови $v(\tau) < 0$.

Зафіксуємо дійсне число $A > 0$ та обчислимо значення функції $v(\tau)$ на проміжку $(0, A]$ з деяким кроком h . В результаті отримаємо набір точок вигляду $(\tau, v(\tau))$. Побудуємо графік функції $v(\tau)$, де по осі абсцис покладемо значення τ , а по осі ординат значення функції $v(\tau)$ в точці τ , тобто значення найбільшої дійсної частини серед обчислених коренів многочлена, які наближають корені квазіполінома.

Аналізуючи графік функції $v(\tau)$ можна визначити для яких значень за-

пізнення τ зберігається стійкість для заданого рівняння із запізненням.

Структура прикладної програми

Розроблений додаток представляє собою набір структурованих сторінок для знаходження наближених коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь з одним або декількома запізненнями та нейтрального типу, використовуючи класичну схему апроксимації або схему апроксимації підвищеної точності.

Для керування додатком розроблено інтерактивне меню, що забезпечує можливість вибору задачі, яку користувач бажає розв'язати. Меню з'являється на сторінці при наведенні на кнопку "Меню" у верхньому лівому куті, та зникає при наведенні миші на основну частину сторінки або при виборі одного з пунктів меню.

Кожен пункт меню – це посилання, що забезпечує перехід на відповідну сторінку для розв'язку потрібної задачі. Кожна сторінка має однакову структуру, проте відрізняється алгоритмом розв'язку. На сторінці представлено рівняння, яке буде досліджуватися та форма для введення необхідних параметрів. Кожне з полів для вводу параметрів називається так, як і відповідні параметри у рівнянні для зручнішого користування. Вхідними даними служать сталі коефіцієнти або сталі матриці та значення запізнень. Користувач має зручний та зрозумілий інтерфейс, де окрім коефіцієнтів та значень запізнень потрібно ввести m – розмірність апроксимуючої системи.

Зважаючи на те, що додаток є веб-застосунком, також використані наступні технології: HTML, CSS, JavaScript.

Головна сторінка веб-додатку (рис. 5.2) містить список посилань на відповідні сторінки, на яких можна знайти неасимптотичні корені квазіполінома ДРР або дослідити на стійкість ДРР.

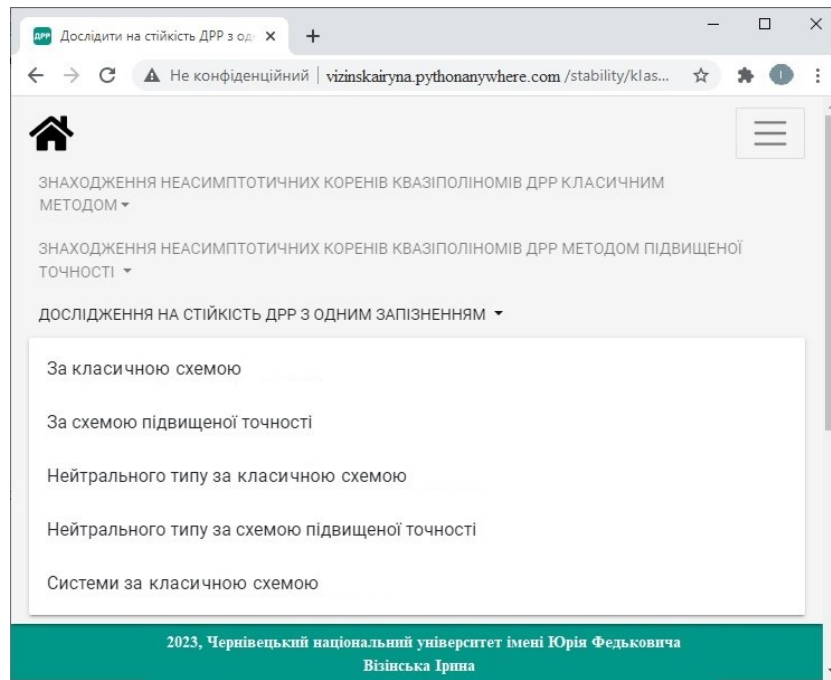


Рис. 5.2 Головна сторінка прикладної програми

В залежності від того яке рівняння потрібно дослідити, користувач вибирає відповідне посилання. Якщо буде вибрано "Знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів ДРР із одним запізненням за схемою підвищеної точності", то відкриється сторінка зображена на рис. 5.3. На даній сторінці потрібно ввести коефіцієнти ДРР, запізнення та розмірність апроксимуючої системи. Результат з'явиться на тій самій сторінці.

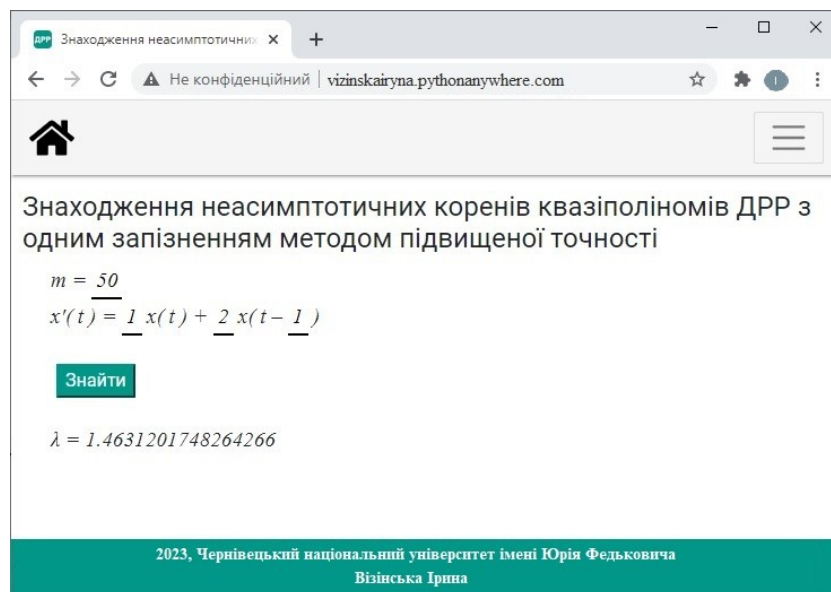


Рис. 5.3 Знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома для рівняння з одним запізненням за схемою підвищеної точності

Якщо вибрати пункт "Дослідження ДРР на стійкість із одним запізненням за класичною схемою", то відкриється сторінка зображена на рис. 5.4. На даній сторінці потрібно ввести коефіцієнти ДРР, праву границю відрізка, на якому досліджується рівняння, та розмірність апроксимуючої системи. Результат з'явиться на тій самій сторінці.



Рис. 5.4 Дослідження на стійкість рівняння з одним запізненням за класичною схемою

5.2 Сучасні методи математичного моделювання, машинного навчання та обробки природної мови для аналізу економічних процесів і текстових даних

5.2.1 Вступ

Розглядаються задачі дослідження та аналізу сучасних методів математичного моделювання, машинного навчання та обробки природної мови, спрямовані на вирішення широкого спектра прикладних задач – від прогнозування фінансових процесів до виявлення дезінформації та емоційного забарвлення текстів.

Досліджується комплексний аналіз часових рядів економічних даних (зокрема цін на криптовалюти) із застосуванням класичних та сучасних моделей машинного навчання. Серед завдань – оцінка ефективності вейвлетного згладжування, Random Forest, еволюційно нечітких систем та нейронних мереж, а також порівняння їх за основними метриками точності.

Вивчаються інтелектуальні методи обробки природної мови (TF-IDF, n-grams, косинусна подібність, fuzzy logic) для задач класифікації текстів, зокрема: виявлення дезінформації, ідентифікація настрою та енергетики тексту, автоматичне розпізнавання сарказму. При цьому важливо розробити й протестувати гібридні моделі, що поєднують NLP, нечітку логіку, rule-based підходи та класичні ML-алгоритми для підвищення точності та інтерпретованості результатів.

Актуальним напрямком досліджень є застосування підкріплювального навчання (Contextual Bandits) для задач CRM та управління відтоком клієнтів, дослідження економічної доцільності таких моделей.

5.2.2 Моделювання економічних та фінансових процесів.

Аналіз часових рядів

Розглянемо кілька підходів для прогнозування цін на криптовалюту, зокрема декомпозицію Добеші, Random Forest, еволюційно нечітку систему та нейронну мережу. У рамках Locally Stationary Wavelet модель часовий ряд X_t

представлено як сукупність часово- та частотно-залежних коефіцієнтів $X_t = \sum_{j,k} w_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t) \xi_{j,k}$, що дозволяє адаптувати модель до нелінійної нестационарної структури даних [116]. Для згладжування застосовано дискретне вейвлетне перетворення (DWT) з виділенням апроксимаційних A_j та детальних D_j коефіцієнтів, після чого реконструкція сигналу $\tilde{X} = IDWT(A_j, D_j, \dots, D_k)$ при відсіченні найдрібніших деталей забезпечує відсіювання високочастотного шуму. Вейвлетна передобробка знижує чутливість моделей до короткочасних флуктуацій і дозволяє зосередитись на змісті довших трендів. Застосування вейвлетного згладжування у поєднанні з Random Forest переводить задачу прогнозу у вигляд спостереження з лаговими ознаками, що підвищує стабільність і зменшує перенавчання. Random Forest описується як ансамбль дерев з кінцевим прогнозом $\hat{y}_t = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_B(x_t)$, де усереднення дерев дає більш плавні і надійні оцінки. Для побудови ознак використовують лагові вектори $x_t = [\tilde{x}_{t-1}, \tilde{x}_{t-2}, \dots, \tilde{x}_{t-L}]$, а таргет береться із початкового ряду, що дозволяє навчатись на згладжених вхідних даних, але вимірювати якість на реальних значеннях. Встановлено, що збільшення числа лагів з п'яти до семи не гарантує покращення прогнозу, а іноді вводить додатковий шум. Еволюційно нечітка система автоматично генерує та відбирає правила за допомогою генетичного алгоритму, де хромосома кодує набір правил $r_i = (A_1, \dots, A_L, B)$ і популяція еволюціонує через відбір, кросовер і мутацію. Прогноз нечіткої

системи визначається дефазифікацією $\hat{x}_t = \frac{\sum_{i=1}^N w_i c_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$, де сила спрацьовування

правила $w_i = \prod_{k=1}^L \mu_{A_k^{(i)}}(x_{t-k})$. Функція придатності у генетичному алгоритмі орієнтована на зменшення RMSE, для чого використовують обернену метрику $f(\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i - x_i)^2 + \varepsilon}}$. Еволюційний нечіткий підхід продемонстру-

вав найнижчі середні помилки серед розглянутих моделей, з середнім RMSE близько 1011 і помітною перевагою за MAPE та SMAPE. Нейронна мережа

з одним прихованим шаром на 15 нейронів показала конкурентні результати з RMSE приблизно 1579 та тенденцію до згладження різких ринкових сплесків. Масштабний експеримент на 200 випадкових вікнах із біткойн-даними виявив, що wavelet-smoothed Random Forest у середньому знижував RMSE порівняно зі стандартним RF (приблизно 2891 проти 3137 відповідно). Порівняльний аналіз метрик MAPE, SMAPE, MASE та коефіцієнта кореляції Пірсона підтверджує стабільну перевагу гібридних підходів у більшості сценаріїв. Теоретично властивості вейвлетів Добеші: компактна підтримка, ортогональність та велика кількість нульових моментів – обґрунтовують їх здатність вилучати раптові коливання без значної деградації трендової компоненти. Практично поєднання вейвлет-препроцесінгу з ансамблевими або нечітко-еволюційними методами забезпечує баланс між стійкістю до шуму, інтерпретованістю та точністю прогнозів.

Досліджено нове застосування підкріплювального навчання для управління відтоком клієнтів з використанням підходу Contextual Bandit (CB). Виходячи з обмежень статичних класифікаторів машинного навчання, ми впровадили агент Thompson Sampling Bandit, який інтегрує ймовірності відтоку, життєву цінність клієнта (CLV) та витрати на втручання в систему прийняття рішень у режимі реального часу. На відміну від традиційних моделей, що зосереджуються виключно на точності прогнозування, цей підхід оптимізує цільове просування для максимізації економічного прибутку. Результати показують, що контекстуальний агент вивчає оптимальні рекламні політики та адаптується до поведінки конкретних сегментів, перевершуючи за економічною корисністю методи, засновані на правилах. Проілюстровано доцільність та ефективність підкріплювального навчання в CRM-системах, орієнтованих на утримання клієнтів [121].

В контексті аналізу числових рядів, розглянуто низку задач, пов'язаних із розміщенням n шахових фігур на шахівниці розміром $n \times n$ таким чином, щоб жодна з фігур не атакувала іншу, використовуючи підхід з використанням генеруючих функцій [123].

5.2.3 Обробка природної мови та нечітка логіка

Досліджено інтеграцію методів обробки природної мови, зокрема TF-IDF та n-gram аналізу, із системами нечіткої логіки для виявлення дезінформації в текстових даних [117]. Запропонований підхід базується на підрахунку ваги термінів через TF-IDF, де інверсна документна частота обчислюється за формулою $idf_j = \log(N_{documents}/N_j)$. Для порівняння документів використано косинусну подібність $CosineSimilarity(x, y) = (x \cdot y) / (\|x\|_2 \cdot \|y\|_2)$, що дозволяє оцінити кутову відстань між векторами TF-IDF. Паралельно застосовано n-gram моделі для захоплення контекстних послідовностей слів, що підвищує чутливість до фразових конструкцій, типових для дезінформації. Отримані числові коефіцієнти $c_disinfo$ та $c_false_positive$ використовуються як вхідні змінні нечіткої системи для оцінки ймовірності дезінформації. У нечіткій частині застосовано гаусівські функції належності $\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)$, що забезпечує гладкі переходи між рівнями належності і зручність для обчислень. Нечіткі правила поєднують значення $c_disinfo$ і $c_false_positive$ у табличному форматі, де комбінації "високо/низько" приводять до різних градацій результату c . Дефазифікація виконується ваговим усередненням $c = \left(\sum_i w_i c_i\right) / \left(\sum_i w_i\right)$, що дає кінцеву градацію ризику і зменшує частку хибнопозитивних спрацьовувань. Експериментальна перевірка на корпусі близько 2000 текстів показала, що нечітко-підсилена модель досягає $accuracy \approx 85.3\%$ і знижує $false\ positives$ до 12.5% у порівнянні з SVM та іншими базовими підходами.

Паралельно запропоновано підхід для детекції настрою та енергійності тексту з використанням трапецеїдальних і трикутних функцій належності для моделювання лінгвістичних змінних [118]. Для моделювання емоцій і рівня енергії розроблено лексикон, у якому кожне слово анотується векторами членства по відповідних нечітких множинах. Процес фазифікації перетворює текст у багатовимірний вектор належностей, після чого набір "IF-THEN" правил дає інтерпретацію комбінованих емоційно-енергетичних станів. Модельні приклади показали, що поєднання настрою та енергії дає більш інформатив-

ні вихідні сигнали для застосувань у UX, моніторингу психічного здоров'я і маркетинговому аналізі. На вибірці з 1000 розмічених текстів система досягла $accuracy \approx 84.1\%$, $precision \approx 82.9\%$, $recall \approx 83.8\%$ та $F1 \approx 83.6\%$, значно перевищивши традиційні підходи [119]. Комбінування трапецієвидних і трикутних функцій дозволяє моделювати як плавні, так і раптові переходи в емоційних інтенсивностях. Реалізації обох підходів виконано засобами Python з використанням бібліотек NumPy і scikit-fuzzy, що забезпечує відносно просту прототипну інженерію. У низці прикладних сценаріїв рекомендовано використовувати нечітку оцінку разом із додатковими семантичними ембедингами для підвищення стійкості до парафраз і синонімії. Окремо розглянуто питання інтеграції цих методів у системи моніторингу та реагування, де інтерпретованість виходів є ключовою вимогою для прийняття рішень [120].

Досліджено сучасні методи обробки природної мови та розроблено алгоритм автоматичного виявлення сарказму в текстах. Проаналізовано лінгвістичні особливості саркастичних висловлювань, розглянули існуючі підходи до їх розпізнавання та побудували власну модель, яка поєднує лексичний аналіз, емоційні токени та емодзі. Для класифікації ми застосували метод опорних векторів і випадковий ліс, а для визначення емоційного контексту - статистичний аналіз емодзі та словникові ресурси. Запропоновано підхід, який виявляє різкий контраст емоцій у тексті, що є характерною ознакою сарказму [122].

5.2.4 Автоматизація освітнього процесу на платформі GitHub Classroom

Перехід до дистанційного навчання ускладнив процес перевірки студентських програмних рішень і спонукав викладачів шукати ефективніші інструменти для організації лабораторних робіт. Одним із таких рішень автори дослідження розглядають GitHub Classroom - платформу, яка поєднує можливості системи контролю версій та освітньої платформи і дозволяє розгортати завдання зі стартовим кодом та автоматичними тестами [124]-[129]. Описано

ключові етапи організації роботи з платформою: створення облікового запису та організації викладача, підготовка репозиторію зі starter code і тестами, формування класу та додавання студентів, а також призначення завдань із правилами оцінювання і дедлайнами. GitHub Classroom забезпечує інтеграцію з LMS (зокрема Moodle) і Google Classroom, що спрощує адміністрування груп і синхронізацію навчального процесу. Під час виконання завдань студенти працюють у виділених репозиторіях, а наступні модифікації коду автоматично перевіряються тестами, що дає оперативний зворотний зв'язок і зменшує ручну роботу викладача. Платформа добре підходить для перевірки рутинних завдань і вправ з різних мов програмування, проте не замінює потреби у персоналізованому наставництві на початкових етапах вивчення алгоритмізації. Автори акцентують, що використання starter-коду і набору тестів підвищує однорідність завдань і об'єктивність оцінювання, а також сприяє відтворюваності середовищ виконання. Рекомендовано явно прописувати правила оцінювання під час створення завдання та використовувати можливості платформи для організації командної роботи над проектами. Загалом, впровадження GitHub Classroom у навчальний процес демонструє значний потенціал для підвищення ефективності викладання програмування через автоматизацію рутинних операцій та швидкий зворотний зв'язок для студентів.

5.3 Побудова областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями

5.3.1 Вступ

Дослідимо стійкість різницевого та лінійного автономного диференціально-різницевого рівнянь. Вивчимо питання про побудову області стійкості рівнянь із багатьма запізненнями [130]-[133].

Розглянемо рівняння

$$\frac{dz}{dt} = cz(t) + a_1z(t-1) + a_2z(t-2) + \dots + a_nz(t-n), \quad (5.11)$$

де коефіцієнти $c, a_k, 1 \leq k \leq n$, дійсні, причому c – фіксоване.

Для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (5.11) був асимптотично стійким, необхідно і досить, щоб всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda = c + a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + \dots + a_n e^{-n\lambda} \quad (5.12)$$

лежали в лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Означення 5.1. Областю стійкості рівняння (5.12) називається множина точок $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, для яких всі корені рівняння (5.12) задовольняють умову $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Нехай L – проста неперервна крива, на якій вказано напрямок руху. Через $\Delta \operatorname{Arg}_{z \in L} f(z)$ позначимо зміну аргументу функції $f(z)$ при русі вздовж кривої L .

Лема 5.1. Нехай функції $f(z)$ та $g(z)$ аналітичні в комплексній площині і для точок z із деякої простої неперервної кривої L виконуються нерівності $|g(z)| < |f(z)|$. Тоді виконується нерівність [131]

$$\Delta \operatorname{Arg}_{z \in L} (f(z) + g(z)) \geq \Delta \operatorname{Arg}_{z \in L} f(z) - \pi.$$

Позначимо $Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z$.

Лема 5.2. Нехай для всіх $\alpha \in [0; 1]$ існує z таке, що $|z| = e^{-\alpha}$ і виконується нерівність $|Q(z)| \leq \pi + 1 + |c|$. Тоді знайдеться стала $K > 0$ така, що виконується нерівність [131] $|a_j| \leq K$ для всіх $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема 5.2. Область стійкості рівняння (5.12) обмежена [131].

Лема 5.3. Якщо вектор (a_1, a_2, \dots, a_n) належить області стійкості рівняння (5.12), то виконується нерівність [131] $c + a_1 + a_2 + \dots + a_n < 0$.

Доведення. Нехай $c + a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 0$. Тоді квазімногочлен $P(\lambda) = \lambda - c - a_1 e^{-\lambda} - \dots - a_n e^{-n\lambda}$ задовольняє умови

$$P(0) \leq 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P(\lambda) = +\infty.$$

Значить, існує число λ_0 , $0 \leq \lambda_0 < \infty$, таке, що $P(\lambda_0) = 0$. Рівняння (5.12) має невід'ємний дійсний корінь. Отже, вектор (a_1, a_2, \dots, a_n) не належить області стійкості. Лема 5.3 доведена.

5.3.2 Рівняння із двома запізненнями

Застосуємо метод D -розбиттів до рівняння

$$\lambda = ae^{-m\lambda} + be^{-n\lambda}, \quad (5.13)$$

де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m < n$. Квазіполіном має нульовий корінь, якщо $a + b = 0$. Ця пряма і є однією з ліній, що утворюють межу D -розбиття.

Нехай тепер рівняння (5.13) має суто уявний корінь iy , $y \neq 0$:

$$a(\cos my - i \sin my) + b(\cos ny - i \sin ny) = iy.$$

Відокремлюючи дійсну і уявну частини, одержимо систему

$$a \cos my + b \cos ny = 0, \quad a \sin my + b \sin ny = -y. \quad (5.14)$$

Розв'яжемо систему (5.14), якщо

$$\begin{vmatrix} \cos my & \cos ny \\ \sin my & \sin ny \end{vmatrix} = \sin(n - m)y \neq 0.$$

Рівняння ліній D -розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y \cos ny}{\sin(n - m)y}, \quad b = -\frac{y \cos my}{\sin(n - m)y}.$$

Ці лінії розбивають площину параметрів (a, b) на нескінченне число областей, всередині кожної з яких рівняння (5.13) має однакове число коренів з додатною дійсною частиною.

Система (5.14) може бути сумісною також у випадку, коли її головний визначник $\sin(n - m)y = 0$. Це можливо при $y \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $\cos my = \cos ny = 0$ або $my = \pi/2 + k\pi$, $ny = \pi/2 + l\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. Такі рівності виконуються тільки у випадку, коли m та n непарні. Якщо ж m та n парні, то досить взяти $k = (m - 1)/2$, $l = (n - 1)/2$, $y = \pi/2$ і система (5.14) визначатиме пряму лінію $a \sin m\pi/2 + b \sin n\pi/2 = -\pi/2$. Крім цієї прямої існуватиме ще зліченне число однаково віддалених взаємно паралельних прямих, які є лініями D -розбиття. У цьому випадку лініями D -розбиття

будуть прямі, кут нахилу яких рівний $\pi/4$ або $-\pi/4$. При непарних m та n відбувається біфуркація появи нових ліній D -розбиття.

У випадку, коли $m = 1$, n – непарне натуральне число ($n > 1$), область стійкості обмежена $\frac{n+3}{2}$ дугами ліній, серед яких дві дуги будуть відрізками прямих. Інші дуги одержуються із параметричного зображення

$$a = \frac{y \cos ny}{\sin(n-1)y}, \quad b = -\frac{y \cos y}{\sin(n-1)y}$$

при $0 < y < \frac{2\pi}{3}$.

Як приклад знайдемо область стійкості рівняння

$$\lambda = ae^{-\lambda} + be^{-3\lambda}.$$

Щоб знайти оцінки для коефіцієнтів a та b , використаємо методику доведення теореми 1. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на рис. 5.5.

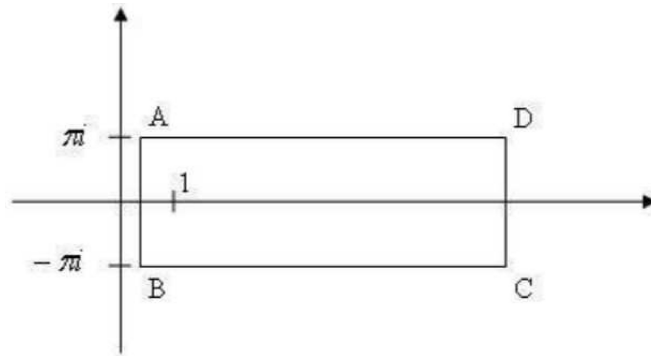


Рис. 5.5

Спочатку припустимо, що $\alpha = 0$. Тоді при $\|a\| - \|b\| \geq \pi$ маємо $|ae^{-iy} + be^{-3iy}| \geq \pi \geq |iy|$, тому зміна аргументу функції $P(\lambda) = \lambda - ae^{-\lambda} - be^{-3\lambda}$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у прямокутнику $ABCD$.

Застосовуючи цю ж методику до прямокутника $ABCD$ при $\alpha = 1$, одержимо, що функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у цьому прямокутнику при $\|a\|e^{-1} - \|b\|e^{-3} \geq \sqrt{\pi^2 + 1}$.

Із наших міркувань випливає, що для точок (a, b) із області стійкості правильні нерівності

$$\|a\| - \|b\| \leq \pi, \quad \|a\|e^{-1} - \|b\|e^{-3} \leq \sqrt{\pi^2 + 1}. \quad (5.15)$$

Згідно з лемою 5.3 область стійкості повинна задовольняти ще одну нерівність

$$a + b < 0. \quad (5.16)$$

Нерівності (5.15) і (5.16) визначають на площині параметрів a та b деякий обмежений многокутник.

Для знаходження області стійкості застосуємо тепер метод D -розбиттів. Пряма $a + b = 0$ є однією з ліній, що утворюють межу D -розбиття.

Якщо квазіполіном має суто уявний корінь iy , то рівняння меж D -розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y(4 \cos^2 y - 3)}{2 \sin y}, \quad b = -\frac{y}{2 \sin y}. \quad (5.17)$$

Побудуємо лінії, що відповідають випадку $\cos y = \cos 3y = 0$. Ці рівняння мають сумісні корені $y = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому лініями D -розбиття будуть прямі $a - b = (-1)^{k+1}(\pi/2 + k\pi)$.

Відзначимо, що лінії D -розбиття досить нанести в многокутнику, що обмежує область стійкості. Неважко переконатися, що зв'язна область, обмежена відрізками прямих

$$b = -a, \quad -\frac{\pi}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}; \quad b = a + \frac{\pi}{2}, \quad -3\frac{\pi}{4} \leq a \leq -\frac{\pi}{4}$$

та дугою лінії (5.17) при $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ є областю стійкості. Область стійкості рівняння (5.13), у якому $m = 1$, а $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, відповідно, — це заштрихована частина площини, зображена на рис. 5.6, 5.7, 5.8. Область стійкості рівняння (5.13), у якому $m = 1$, $n = 2$ зображена в [134].

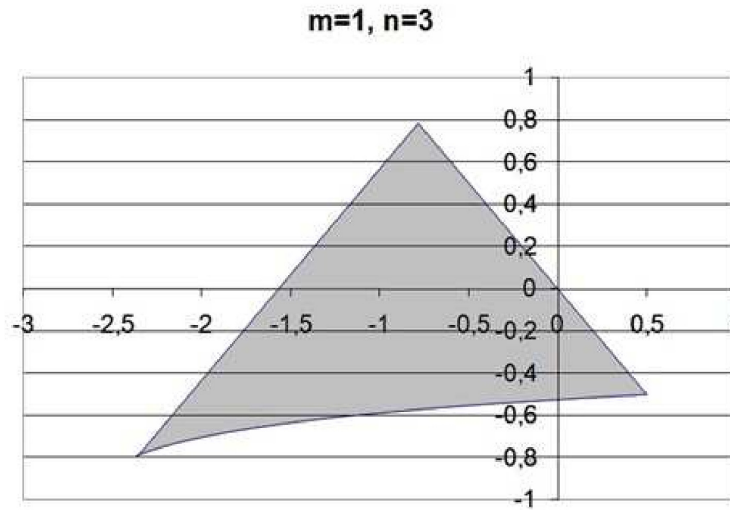


Рис. 5.6

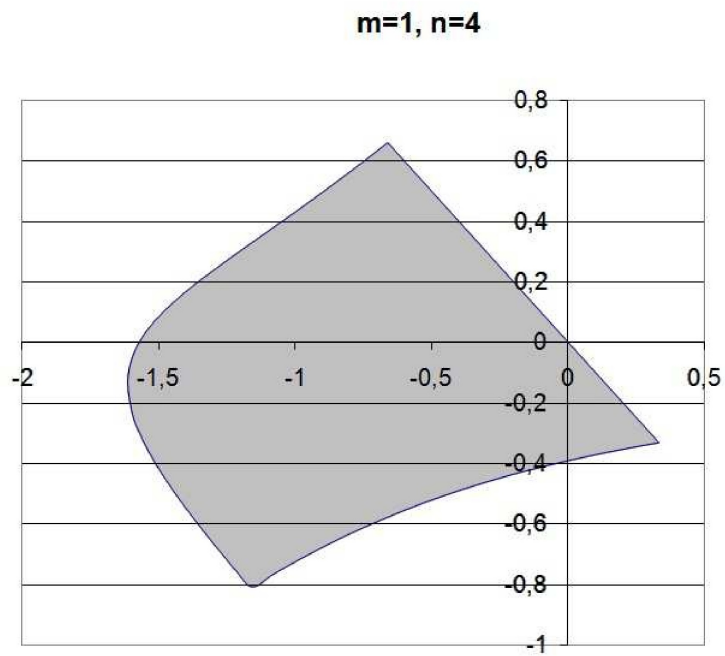


Рис. 5.7

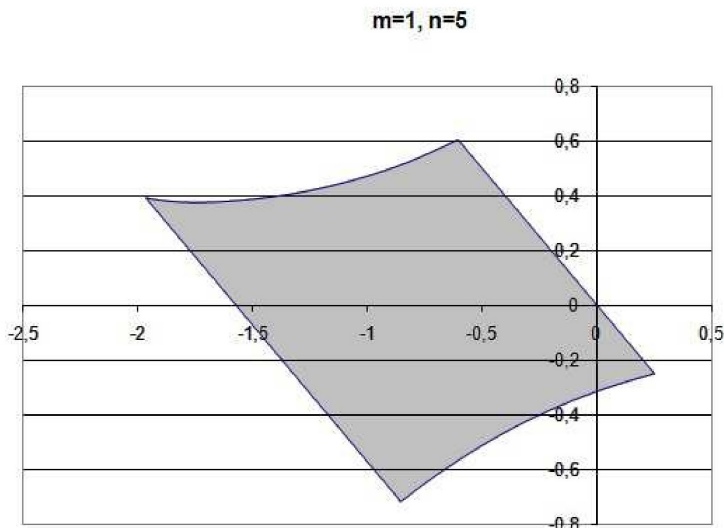


Рис. 5.8

5.3.3 Рівняння із двома запізненнями та доданком без запізнення

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = cx(t) + ax(t - m) + bx(t - n),$$

де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m < n$, причому c – фіксоване.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda = c + ae^{-m\lambda} + be^{-n\lambda}.$$

Побудуємо D -розбиття у просторі параметрів a, b . Якщо $\lambda = 0$, то одержимо пряму: $c + a + b = 0$, тобто $a + b = -c$. Якщо $\lambda = iy$, то

$$ae^{-imy} + be^{-iny} = iy - c.$$

Використовуючи формулу Ейлера, одержимо

$$a(\cos my - i \sin my) + b(\cos ny - i \sin ny) = iy - c,$$

звідки

$$\begin{cases} a \cos my + b \cos ny = -c, \\ -a \sin my - b \sin ny = y. \end{cases} \quad (5.18)$$

Домноживши перше рівняння системи (5.18) на $\sin ny$, друге – на $\cos ny$ і додавши ці рівняння, одержимо

$$a(\sin ny \cos my - \cos ny \sin my) = y \cos ny - c \sin ny,$$

звідки

$$a = \frac{y \cos ny - c \sin ny}{\sin(n - m)y}.$$

Домноживши перше рівняння системи (5.18) на $\sin my$, друге – на $\cos my$ і додавши ці рівняння, одержимо

$$b(\sin my \cos ny - \cos my \sin ny) = y \cos my - c \sin my,$$

звідки

$$b = \frac{c \sin my - y \cos my}{\sin(n - m)y}.$$

При досить великих фіксованих додатних c область стійкості буде порожньою множиною.

5.3.4 Рівняння із трьома запізненнями

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = cx(t - p) + a_1x(t - m) + a_2x(t - n),$$

де p , m та n – взаємно прості натуральні числа, причому c і p – фіксовані. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda = ce^{-p\lambda} + a_1e^{-m\lambda} + a_2e^{-n\lambda}.$$

Побудуємо D -розбиття у просторі параметрів a_1 , a_2 . Якщо $\lambda = 0$, то одержимо пряму: $c + a_1 + a_2 = 0$, тобто $a_1 + a_2 = -c$. Якщо $\lambda = iy$, то

$$a_1e^{-imy} + a_2e^{-iny} = iy - ce^{-ipy}.$$

Використовуючи формулу Ейлера, одержимо

$$a_1(\cos my - i \sin my) + a_2(\cos ny - i \sin ny) = iy - c(\cos py - i \sin py),$$

звідки

$$\begin{cases} a_1 \cos my + a_2 \cos ny = -c \cos py, \\ -a_1 \sin my - a_2 \sin ny = y + c \sin py. \end{cases} \quad (5.19)$$

Домноживши перше рівняння системи (20) на $\sin ny$, друге – на $\cos ny$ і додавши ці рівняння, одержимо

$$a_1(\sin ny \cos my - \cos ny \sin my) = -c(\sin ny \cos py - \cos ny \sin py) + y \cos ny,$$

звідки

$$a_1 = \frac{y \cos ny - c \sin(n-p)y}{\sin(n-m)y}.$$

Домноживши перше рівняння системи (5.19) на $\sin my$, друге – на $\cos my$ і додавши ці рівняння, одержимо

$$a_2(\sin my \cos ny - \cos my \sin ny) = y \cos my - c(\sin my \cos py - \cos my \sin py),$$

звідки

$$a_2 = \frac{c \sin(m-p)y - y \cos my}{\sin(n-m)y}.$$

5.4 Математичні моделі екстремальних режимів в екологічних системах

5.4.1 Вступ

Розглядається проблема побудови математичних моделей, що описують екстремальні режими розвитку екологічних систем під дією антропогенних і природних факторів. Зі зростанням техногенного навантаження на довкілля багато процесів у біосфері досягли критичних значень, тому виникла потреба у створенні систем підтримки прийняття рішень у сфері екологічної безпеки. Це одна з найскладніших багатofакторних задач. Її вирішення можливо тільки при використанні методів системного аналізу.

Розглянемо основні етапи створення комп'ютерної системи підтримки прийняття рішень. Перший етап – аналіз ключових факторів забруднення, спричиненого екологічними та техногенними катастрофами, типовими збоями проєктів, експлуатацією небезпечних об'єктів тощо. Другий етап передбачає кількісну оцінку функції ризику та створення еколого-математичної мо-

делі, що дозволяє оцінити поточний стан природи та спрогнозувати майбутнє. Основна мета моделі полягає в досягненні розуміння розглянутого процесу.

Відокремлюють два основні етапи створення таких систем:

- аналіз факторів забруднення (катастрофи, аварії, накопичення токсинів у ґрунті тощо);
- побудова екологічно-математичних моделей для кількісного оцінювання ризику та прогнозування майбутніх станів довкілля.

Результати дослідження в цьому пункті опубліковані в [135].

5.4.2 Побудова екологічно-математичних моделей

Узагальнюючи дані про три основні властивості ґрунтів, ми стикаємося з необхідністю розробки моделі (або серії моделей), яка відповідає на наступні питання.

А) Який рівень кислотності ґрунту шкідливий для здоров'я людини? Коли до нього буде доступ (або чи буде доступ) для деяких регіонів?

Б) За яким законом змінюються властивості ґрунту?

В) Як оцінити пороговий момент здатності ґрунту витримати хімічний вплив?

1. Такого роду проблеми виникають при аналізі різних природних і пов'язаних з діяльністю людини явищ. Проектовані нами моделі повинні досить ефективно відображати що розглядається явище і відповідати на питання, які ми ставимо в кожному конкретному випадку. Маючи можливість описати модель за допомогою аналітичних виразів, ми можемо значно просунутися в ній. З іншого боку, ми можемо схилитися до розробки емпіричної моделі на основі підсумовування наявного набору спостережень. Визначити особливості цього процесу можна за допомогою моделювання або з оцінкою на фоні спостереження. Природно розглядати досліджуваний процес як суму двох частин: детермінованого та випадкового. Таким чином, модель спостережень має вигляд:

$$Y(t) = g(t) + W(t),$$

де $g(t)$ – невідома детермінована складова (тренд), а $W(t)$ – випадкова компонента (шум). Завдання полягає у виділенні тренду, тобто оцінюванні функції $g(t)$.

2. Ще один клас задач дасть наступна модель:

$$f(y(t)) = g(\xi(t - 1)) + W(t). \quad (5.20)$$

Відношення (5.20) є стохастичним різницевим рівнянням. Теорію цих рівнянь аналізували Кальман [135] та інші. Основне завдання полягає у розробці алгоритму прогнозування процесу $y(t)$ на основі деякого вектора спостережень $\xi(t)$ у момент часу $t - 1$.

Ця задача детально досліджена у випадку, коли вихідний сигнал $y(t)$ задовольняє різницеве рівняння:

$$A(D)y(t) = B(D)W(t), \quad A(0) = B(0) = 1, \quad (5.21)$$

де $A(D)$ та $B(D)$ – оператори зсуву, що визначають залежність поточних значень від попередніх, а $W(t)$ – білий шум.

Сам процес $y(t)$, як правило, безпосередньо не спостерігається. Фактично спостерігається процес із додаванням білого шуму.

Такі моделі ефективні для прогнозування концентрації шкідливих речовин у ґрунті та визначення моментів досягнення критичних порогів. Наприклад, для прогнозу запасів фосфатів у ґрунті, коли відомі попередні дані, різницеве рівняння є природною моделлю реального процесу.

Якщо тренд залежить від часу, коефіцієнти в операторі $A(D)$ також можуть бути змінними в часі. У таких випадках розроблені відповідні методи прогнозування [137], але замість класичного методу найменших квадратів тут застосовується метод Вінера–Колмогорова. Тоді задача прогнозу зводиться до розв’язання різницевих або диференціальних рівнянь. Для деяких речовин, що поширюються у ґрунті, прогнозований параметр t зручно розглядати як векторну величину. Тоді модель (5.21) можна узагальнити, вважаючи оператор D багатовимірним, а $W(t)$ – багатовимірним білим шумом.

Для оцінювання вмісту хімічних речовин, кислот або важких металів у ґрунті доцільно використовувати математичний апарат випадкових полів.

Розглянемо геохімічне поле, у якому вміст певної речовини є функцією часу t та просторової координати $x - \xi(t, x)$. Таке поле називають випадковим геохімічним полем. У реальних експериментах зазвичай доступні усереднені значення в певній області або об'ємі.

Щоб задача була коректною, накладемо такі припущення:

1. Однорідність випадкового поля. У цьому випадку зручно вважати поле зі стаціонарними приростами (а не строго однорідним).

2. Неперервність. Властивості ґрунтів змінюються повільно й без різких стрибків, тому це припущення є природним.

Очевидно, властивості нейтралізації кислот та адсорбції фосфору є основними для природного переходу від спостережень функції $\xi(t, x)$ до її середніх характеристик $y(t, x)$. Таким чином, якщо ми зафіксуємо деяку область Dx на будь-яку точку x , ми можемо перейти до прогнозової оцінки задачі для будь-якої випадкової функції $y(t) = y(t, x)$, опускаючи індекс x і маючи на увазі, що задача вирішується для деякої конкретної місцевості або регіону. Таким чином, ми можемо розглянути випадок, коли послідовність спостережень з випадковими значеннями, для яких слід зробити певний статистичний висновок, дорівнює $y(t_1), \dots, y(t_n)$. Послідовність $y(t_1), \dots, y(t_n)$ ми назвемо часовим рядом.

5.4.3 Аналіз часового ряду

Розглянемо детальніше задачу виявлення тренду.

Варто зазначити дві особливості таких часових рядів:

1. Для багатьох регіонів дані відсутні або неповні.
2. Закон розподілу шуму невідомий.

З урахуванням цих обставин можна застосовувати різні методи для виявлення тренду. Найпоширеніші серед них:

- метод максимальної правдоподібності (MLM);
- метод найменших квадратів (LSM), що мінімізує функціонал $L(\theta) = \sum [x_j - g(t_j, \theta)]^2$;

- метод найменших модулів відхилень (LADM), який мінімізує функціонал $L(\theta) = \sum [x_j - g(t_j, \theta)]$;
- мінімакс-метод (МММ), що мінімізує максимальну похибку.

Для наших задач найкраще підходить метод найменших модулів (LADM), оскільки він належить до робастних методів - стійких до зміни закону розподілу похибок або наявності "грубих" спостережень. Крім того, LADM є ефективним навіть для малих вибірок. Оцінки найменшого абсолютного відхилення (LADE) називаються робастними оцінювачами, тобто оцінювачами, які мають підвищену стійкість щодо змін у законі розподілу похибок, наявності приблизної похибки тощо. Крім того, LADE значно ефективніші у випадку невеликої вибірки.

При розгляді малих вибірок асимптотичні властивості не можуть бути критеріями якості оцінок. У цьому випадку стійкість (робастність) оцінок щодо законів розподілу спостережень і дисперсії похибки є первинними. У зв'язку з цим у випадку невідомого розподілу слід віддати перевагу LADM і МММ. У випадку з великими вибірками ми повинні намагатися отримати узгодженість оцінок і асимптотичну нормальність.

Метод МММ часто використовується для вирішення різних завдань, але ці оцінки навряд чи були якісно проаналізовані. Складність полягає в тому, що неможливо застосувати ергодичну теорему і центральну граничну теорему для аналізу асимптотичних властивостей. Тим не менш, у зв'язку з простотою цільової функції, ці оцінки зручно використовувати на попередньому етапі для розрахунку LSE і LADE. Практична доцільність такого підходу відзначена в [138], де описаний програмний комплекс для статистичної обробки експериментальних даних з використанням вищезазначених причин. Зауважимо, що широке використання LADE і мінімаксного оцінювача (ММЕ) було пригнічено обчислювальними труднощами, пов'язаними з мінімізацією нелінійних, негладких і неопуклих функцій. У випадку з функцією лінійної регресії цієї труднощі можна уникнути, зводячи задачу мінімізації критерію до задачі лінійного програмування. Останні досягнення в області негладкої

оптимізації дозволяють вирішити проблему і в випадку нелінійної регресійної функції.

Опишемо ще одну модель непараметричного оцінювання регресійної функції в деякому функціональному просторі. Вона досить адекватно відображає фізичні процеси, про які говорилося вище. Припустимо, що спостереження ґрунту або іншого об'єкта відбуваються в дискретні моменти часу з незалежними похибками, і нам потрібно визначити тенденцію в будь-який момент часу на всьому інтервалі спостережень. Іншими словами, нам потрібно відновити регресійну функцію оптимальним способом по відношенню до деякого критерію, ґрунтуючись на її спотворених спостереженнях в дискретні моменти часу з адитивним шумом. В якості критеріїв можна взяти MLM, LSM і LADM.

Нехай K – дійсна множина, компактна щодо деякої метрики на $[0, 1]$, $\{\xi_{jn}, 0 \leq j \leq n\}$ – множина дійсних незалежних випадкові величини зі скінченними першими двома моментами. Модель спостереження виглядає наступним чином:

$$x_{jn} = \alpha_0 \frac{j}{n} + \xi_{jn}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad \alpha_0 \in K.$$

В якості оцінок ми будемо розглядати LSE або LADE:

$$L_n(\alpha_n) = \min_{\alpha \in K} \sum_{j=0}^n \left[x_{jn} - \alpha \left(\frac{j}{n} \right) \right]^2,$$

$$\check{L}_n(\check{\alpha}_n) = \min_{\alpha \in K} \sum_{j=0}^n \left| x_{jn} - \alpha \left(\frac{j}{n} \right) \right|.$$

Такі задачі оцінювання називаються непараметричними. Їх рішення пов'язане з безліччю труднощів, як обчислювальних, так і якісних, при аналізі статистичних властивостей. Однак чисельні методи знаходження оптимуму розроблені і для цих моделей. Серед досліджень у цій галузі заслуговує на увагу цікавий підхід, розроблений у [139].

Ми можемо обчислити ймовірності знаходження всередині смуги з деякою характеристикою. Це може бути вміст фосфатів у ґрунті, важких металів (наприклад, кадмію) або кількість різних солей на поверхні ґрунту або в

глибині. Більш того, з огляду на розподіл функціоналу, можна знайти перший стрибок через поріг, який може характеризувати критичний рівень включення якоїсь речовини.

Доведено, що стандартизовані оцінки таких трендів мають асимптотичні властивості, подібні до властивостей вінерівського процесу. Це означає, що для великих вибірок помилка оцінки поводить себе подібно до гауссового процесу.

Розглянемо проблему досягнення критичного порогу.

Дослідимо проблему, пов'язану з поведінкою деяких екологічних систем. Реальні екологічні системи схильні до різних випадкових впливів. Якщо час цих випадкових впливів або збурень значно менше часу роботи системи, то можливе застосування досить розвиненого інструментарію марковських процесів для аналізу всієї системи (динаміки її розвитку). У цих умовах білий шум є природною моделлю випадкових збурень. Для цих збурень існує добре розвинений математичний апарат, що дозволяє описати динаміку систем як стохастичне диференціальне рівняння:

$$dx(t) = a(x, t)dt + b(x, t)dW(t), \quad (5.22)$$

де $a(x, t)$ – дрейфова складова, $b(x, t)$ – інтенсивність випадкових коливань, $W(t)$ – процес Вінера. Таке рівняння дозволяє досліджувати час досягнення системою критичного рівня забруднення.

Врахування випадкового впливу в поєднанні з білим шумом (що є ідеалізованим випадковим процесом з малою часовою кореляцією) дозволяє використовувати добре розвинений апарат теорії стохастичних рівнянь і отримати якісні та кількісні результати при моделюванні поведінки процесу (5.22). Рівняння (5.22) визначає процес дифузії з густинами нестационарних ймовірностей, що задовольняють рівнянням Колмогорова (прямої і оберненої). Для цих процесів можна оцінити деякі характеристики поведінки екологічної системи, про які говорилося вище, наприклад, проблеми, пов'язані з досягненням системою критичного порогу.

Ключовою задачею є оцінка часу першого досягнення системою крити-

чного рівня. Час визначено як: $\tau = \inf t > 0 : x(t) \geq L$, де L – порогове значення (наприклад, максимально допустима концентрація токсичної речовини). Аналіз цього часу дозволяє оцінити ризик екологічної кризи та середній час, що залишився до досягнення критичної ситуації. Розглядається також ситуація, коли пороговий рівень може бути з часом змінним.

Для гауссових процесів використовуємо відомі результати теорії максимумів та перетинів, застосовуючи теорему Гірсанова для перенесення розгляду з одного ймовірнісного простору до іншого. Це дозволяє переписати процес у вигляді:

$$X(t) = m(t) + \sigma(t)W(t),$$

де $m(t)$ – детермінована частина, а $W(t)$ – вінерівський процес. За такого підходу ймовірність виходу за межу L аналізується через властивості максимуму гауссового процесу та його похідних. Зокрема, для інтегральної оцінки ймовірності досягнення порога використовується формула: $P_{\max} X(t) \geq L$.

Отримані результати дозволяють обчислювати цю ймовірність для широкого класу екологічних процесів.

Важливим є також застосування стохастичних моделей для оцінювання якості ґрунтів, зокрема їх буферної здатності. Процеси закислення ґрунту описуються моделями, які враховують як повільні детерміновані зміни, так і випадкові флуктуації кислотності. Такі моделі дозволяють визначити критичний рівень рН, при якому ґрунт втрачає здатність підтримувати біогеохімічну рівновагу. Наприклад, якщо $x(t)$ – рівень кислотності, то його зміна може описуватися рівнянням:

$$dx(t) = a(dt) - bx(t)dt + \sigma dW(t),$$

де a – інтенсивність зовнішнього закислення, b – швидкість природної нейтралізації.

Практичне значення дослідження полягає у тому, що на основі запропонованих моделей можна створити комп'ютерні системи підтримки прийняття рішень в екологічному моніторингу. Такі системи можуть здійснювати аналіз часових рядів, оцінювати тренди, будувати прогнози та визначати ймо-

вірність настання критичних станів. Вони здатні інтегрувати дані з різних джерел, враховувати стохастичний характер природи та видавати рекомендації щодо запобігання екологічним небезпекам.

Це дозволяє завчасно виявляти ризики, оптимізувати заходи щодо зменшення техногенного навантаження та формувати екологічно обґрунтовані рішення.

Проаналізовано ключові чинники забруднення довкілля, спричинені екологічними та техногенними катастрофами, а також типові відмови під час експлуатації небезпечних об'єктів. Запропоновано методи кількісної оцінки функції ризику. Створено екологічні та математичні моделі, які дають змогу оцінювати поточний стан навколишнього середовища, робити прогнози та забезпечувати розуміння процесу, що розглядається.

Таким чином, робота поєднує системний аналіз із сучасними стохастичними методами, роблячи вагомий внесок у математичне моделювання екологічних ризиків і прогнозування екстремальних явищ у природному середовищі.

5.5 Імітаційне моделювання SIR моделей методом клітинних автоватів

5.5.1 Вступ

Поширення інфекційних захворювань являє собою складне явище з великою кількістю непередбачуваних факторів. Створення імітаційних моделей поширення інфекцій є важливим елементом для дослідження складної динаміки захворювання. Найпоширенішими моделями розповсюдження інфекційних захворювань є SIR-модель (Susceptible–Infected–Recovered) та багаточисельні її узагальнення, які ділять популяцію на три різні групи: здорові особини, що можуть підхопити інфекцію (S); заражені, особини, що переносять хворобу (I), і ті, хто одужав і перестав розповсюджувати хворобу (R) [140, 141].

В основі цих моделей є система диференціальних рівнянь, яка описує поведінку динаміки захворювання на макрорівні, зберігаючи високий рівень

абстрагування від реальності. При цьому не враховуються індивідуальні властивості об'єктів, оскільки процес поширення інфекції дискретний та неможливо передбачити наслідки, які активно впроваджуються.

Ще один підхід для моделювання процесів у епідеміології – є імітаційне моделювання із допомогою мультиагентного методу. Він дає змогу, задавши початкові параметрами для кожного типу об'єктів і систему правил їхньої взаємодії, визначити динамічні закономірності розвитку інфекції і найважливіші властивості агентів, які сприяють зміні темпів поширення. Перевагою даного підходу є те, що враховуються індивідуальні властивості кожного об'єкту складної системи [142]. Застосування агентного моделювання забезпечує можливість експериментувати з параметрами моделі та отримати різні сценарії розвитку подій, розширюючи наше бачення про те, що може відбутися в майбутньому.

Подальші дослідження кількості агентів у конкретній фракції та швидкості їх зміни розглянуто в роботах [143]-[145].

У роботах [146]-[148] було здійснено моделювання SIR моделей за допомогою клітинних автоматів, де було розглянуто частину карантинних обмежень, однак не досліджено повний комплекс заходів та не проаналізовано їх взаємодію.

У першій частині даної роботи ми пропонуємо спосіб моделювання коронавірусної інфекції методом клітинних автоматів, в якому реалізовано різні режими і підходи розповсюдження захворювання та здійснено аналіз і порівняння ефективності запроваджених обмежень. Друга частина роботи присвячена аналізу ефективності впровадження соціального дистанціювання на основі технології навчання з підкріпленням Reinforcement learning [149]-[154].

5.5.2 Імітаційне моделювання SIR моделей

У найпростіших SIR моделях здійснюються базові припущення, наприклад, що кожен має однакові шанси підхопити вірус від інфікованої людини, оскільки популяція ідеально і рівномірно змішана, і що всі люди з хворобою однаково заразні, поки не помруть або не одужають. Більш просунуті моделі,

які роблять кількісні прогнози, необхідні під час нової пандемії, поділяють людей на менші групи – за віком, статтю тощо.

Особливий інтерес становлять клітинні автомати, що моделюють рух індивідів. Клітинні автомати можуть подолати недоліки підходу з використанням диференціальних рівнянь і розглядаються як ефективний альтернативний метод для моделювання поширення епідемії.

У класичній SIR моделі є набір агентів, які рухаються в популяції. У нашій симуляції ми розглядаємо набір агентів, які рухаються у просторі, і тим самим імітують життя в місті. Кожен агент може належати до однієї з трьох категорій залежно від свого стану: S (susceptible) – здоровий і сприйнятливий до хвороби, I (infected) – інфікований, який може заразити інших, R (recovered) – видужав або не сприйнятливий. Агенти поступово переходять між цими станами в процесі моделювання: $S \rightarrow I \rightarrow R$.

Для моделювання необхідно ініціалізувати параметри моделі [152, 154]:

- загальна кількість агентів (N);
- відстань, при якій є ймовірність заразитися (d);
- тривалість моделювання (t);
- інфіковані агенти на першій ітерації (n_inf);
- позиція агента (x, y);
- швидкість агента (v) та вектор руху (k);
- радіус зараження (r);
- інфікованість агента (inf);
- вакцинованість агента (vac);
- чи носить агент маску ($mask$);
- чи агент знаходиться на самоізоляції ($isol$).

Якщо неінфікований агент потрапляє у радіус зараження інфікованого, відбувається оцінка ймовірності інфікування. Якщо агент сприйнятливий (статус S), то з певною ймовірністю він може заразитися та змінити свій статус на I . Значення ймовірності інфікування визначається випадковим числом z з інтервалу $[0, 1]$. Якщо $z < p$, де p – ймовірність зараження, агент інфі-

кується. Важливо враховувати різні фактори, що впливають на ймовірність інфікування, наприклад, наявність маски чи вакцини у агента. Наявність маски може значно знизити ймовірність зараження, оскільки вона обмежує передачу вірусу від інфікованого до сприйнятливого агента. Вакцинація також відіграє певну роль, оскільки вакциновані агенти мають знижений ризик зараження або можуть мати легший перебіг хвороби. Такі деталі дозволяють врахувати складну динаміку поширення вірусу і допомагають моделювати реальні сценарії епідемії.

Після завершення часу інфікування агент або одужує (статус змінюється на R), або помирає. Рішення про те, чи агент помирає, залежить від рівня летальності D : генерується випадкове число з інтервалу $[0, 1]$, і якщо це число більше за D , агент виживає і переходить до статусу R , інакше він помирає і видаляється з процесу моделювання.

Симуляція триває до моменту, поки всі інфіковані агенти не вилікуються або не помруть.

Моделювання обмежувальних заходів

Ізоляція: створюються умови, за яких хворий агент не може заразити інших. Це можна реалізувати або через додатковий статус з перевіркою на кожному кроці ітерації, або шляхом створення окремої зони (ізолятор або домашній карантин), де знаходяться інфіковані агенти і взаємодіють лише між собою. Після одужання агент повертається до основної області моделювання. У реальному житті виявити та ізолювати всіх інфікованих складно через інкубаційний період та можливість безсимптомного перебігу хвороби.

Масковий режим: зменшується ризик зараження, обмежуючи передачу вірусу через дихальні шляхи або контакт з забрудненими поверхнями. У моделюванні цей ефект враховується через зниження ймовірності зараження на константу $Q_{mask} = 0.6$. Таким чином, ймовірність зараження модифікується наступним чином: $z < pQ_{mask}$, де z – випадкова величина з інтервалу $[0, 1]$.

Вакцинація: не гарантується повного уникнення зараження, але значно

знижується його ймовірність. Крім того, вакциновані агенти частіше переносять захворювання у легкій формі. У моделі це враховується через зменшення ризику зараження на константу $Q_{vaccination} = 0.4$. Ймовірність зараження розраховується як: $z < pQ_{vaccination}$, де z – випадкова величина з інтервалу $[0, 1]$.

Моделювання триває до моменту, поки всі інфіковані агенти не одужають. Це дозволяє моделювати різні сценарії під час однієї симуляції. Для аналізу сценаріїв можливе збереження стану системи в будь-який момент часу, що дозволяє продовжити моделювання з цього моменту для різних умов.

Вихідні дані моделі включають динаміку загальної кількості інфікованих, одужаних та померлих агентів. Запропонована модель дозволяє легко розрахувати ці показники шляхом підсумовування станів агентів.

На Рис. 5.9 зображені різні сценарії моделювання.

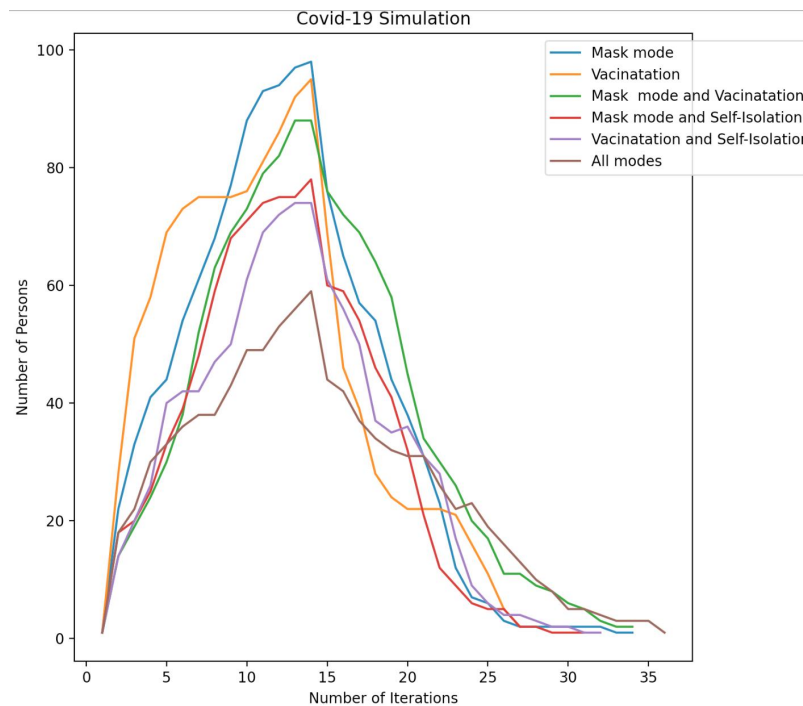


Рис. 5.9 Динаміка кількості інфікованих агентів при різних сценаріях

Моделювання 1: Враховано лише масковий режим. Кількість інфікованих агентів швидко зростає, створюючи критичне навантаження на медичну систему. Пік захворюваності є найвищим серед усіх сценаріїв, що свідчить про недостатню ефективність маскового режиму без додаткових заходів.

Моделювання 2: Враховано лише вакцинацію. Також спостерігається високий пік інфікування, що призводить до значного навантаження на медичну систему. Лише вакцинація без інших обмежень виявляється неефективною у запобіганні стрімкому зростанню кількості хворих.

Моделювання 3: Комбінація маскового режиму та вакцинації. Хоча пік захворюваності залишається високим, спостерігається швидкий спад кількості інфікованих завдяки набуттю імунітету через вакцинацію. Це допомагає поступово зменшити навантаження на медичну систему, але ситуація все ще залишається критичною.

Моделювання 4: Самоізоляція у разі хвороби та масковий режим. Пік захворюваності стає меншим, а розвиток хвороби проходить більш плавно. Запровадження самоізоляції значно зменшує навантаження на медичну систему та дозволяє уникнути критичних ситуацій з переповненням лікарень.

Моделювання 5: Самоізоляція та вакцинація. Пік захворюваності значно знижується порівняно з попередніми сценаріями, розвиток хвороби проходить більш контрольовано. Ця комбінація заходів дозволяє уникнути переповнення медичної системи та є більш ефективною для стримування епідемії.

Моделювання 6 (основне): Враховано всі обмежуючі фактори - масковий режим, самоізоляцію, вакцинацію та період одужання. Сценарій показує найкращі результати з найменшим піком захворюваності та плавним розвитком хвороби. Пік епідемії зміщується в часі, що дозволяє медичній системі краще підготуватися та ефективно реагувати на зростання кількості випадків. Комплексне запровадження всіх заходів є найбільш ефективним у стримуванні пандемії.

Результати моделювання показують, що найкращий результат досягається за умови застосування комбінації маскового режиму, вакцинації та самоізоляції (Моделювання 6). Це дозволяє розтягнути епідемічний процес у часі, уникнути критичного навантаження на медичну систему та забезпечити ефективне стримування пандемії.

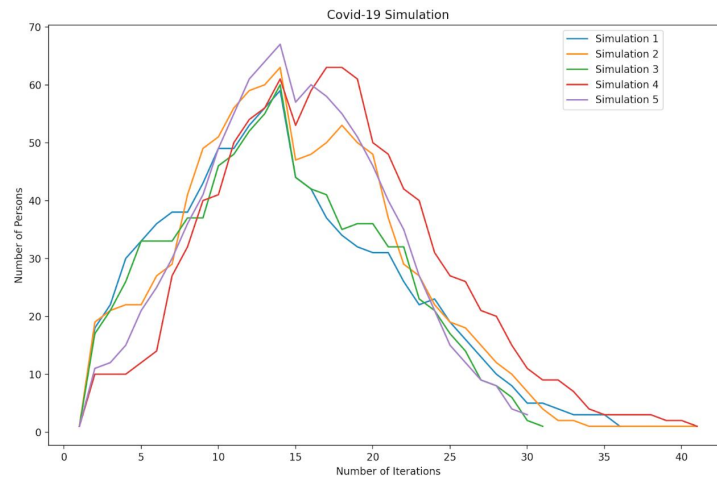


Рис. 5.10 Різні симуляції кількості інфікованих агентів основної моделі

На рис. 5.10 показано п'ять різних симуляцій основної моделі для демонстрації її стійкості. Ми демонструємо, що попередні графіки не є випадковими, а різні симуляції на часовому проміжку мають схожі результати.

На осі x зображені ітерації моделі, а на осі y – кількість інфікованих агентів. З Рис. 5.10 видно, що основній моделі вдалося знизити пік захворюваності. Попередні симуляції мали пік із 80-100 інфікованими на одній ітерації, тоді як основна модель продемонструвала максимум 67 інфікованих. Середнє значення всіх симуляцій склало 62 особи як пік на ітераціях. В умовах перевантаження медичної системи це є значним досягненням. Також спостерігається покращення в часовому аспекті – розвиток хвороби проходить плавніше та повільніше порівняно з іншими симуляціями. Середня кількість ітерацій усіх основних симуляцій становила 36, що свідчить про ефективність параметрів основної моделі.

Аналіз пікових значень поширення інфекції. У процесі моделювання динаміки епідемії було проаналізовано пікові значення поширення інфекції та особливості динаміки інфекційних хвиль. Оцінка проведена за такими критеріями: максимальне та мінімальне значення піку, середнє значення піку, а також ітерації, на яких спостерігалися максимальні значення. Відхилення результатів наводиться у відсотках, що дає змогу оцінити варіативність моделі при різних параметрах.

Максимальне значення піку (в особах): Дослідження показало, що

найбільша кількість інфікованих осіб у піковий момент склала 67 ± 2 з відхиленням $\pm 2,98\%$. Це значення відповідає найбільшій кількості інфікованих на етапі розгортання епідемії.

Мінімальне значення піку (в особах): Найменше значення піку склало 59 ± 2 , що відповідає відхиленню $\pm 3,38\%$. Це свідчить про мінімальну кількість інфікованих осіб під час пікового навантаження системи.

Середнє значення піку (в особах): Середнє значення піку за період моделювання склало $62,4 \pm 6$, при цьому відхилення становило $\pm 9,61\%$. Це вказує на стабільність моделі в контексті середніх значень пікового навантаження.

Максимальна ітерація з найбільшим значенням: Максимум інфікованих осіб спостерігався на ітерації 16 ± 1 , з відхиленням $\pm 6,25\%$. Це дає уявлення про час, коли епідемія досягає свого піку.

Мінімальна ітерація з максимальним значенням: Перший пік інфікованих осіб спостерігався на ітерації 13 ± 1 , з відхиленням $\pm 7,69\%$. Це вказує на початкову фазу розгортання епідемії.

Середня ітерація з максимальним значенням: Середня ітерація, на якій спостерігалось максимальне значення, становить $13,6 \pm 5$, з відхиленням $\pm 29,4\%$. Це свідчить про те, що пікові значення можуть виникати в різний час в залежності від параметрів моделі.

5.5.3 Дослідження соціального дистанціювання за допомогою навчання з підкріпленням

Моделювання поширення вірусу за допомогою навчання з підкріпленням (RL) є складним завданням через велику кількість невизначеностей і нестабільностей [155].

Основні кроки для моделювання поширення вірусу за допомогою RL [156, 157]:

1. Визначення динамічного середовища: необхідно створити середовище, у якому агенти будуть взаємодіяти між собою. Це може бути мережа зв'язків між людьми або географічна карта з визначеними місцями зустрічей.

2. Визначення агентів: агенти можуть бути людьми з різними характеристиками (вік, стать, стан здоров'я тощо);

3. Визначення цілей агентів: метою кожного агента може бути мінімізація ризику інфікування або максимізація користі від взаємодії з іншими агентами;

4. Визначення винагород: необхідно визначити винагороди для кожного агента, що відображатимуть наближення до досягнення їхньої мети. Винагорода може нараховуватися за кожну взаємодію з іншим агентом або за певний період часу.

Середовище. Під час моделювання динаміки популяції в умовах пандемії ми визначаємо стан населення SIRD (сприйнятливі, інфіковані, одужалі, померлі) на певний день. Ця інформація про стан є важливою як для симуляції, так і для середовища RL. Вона включає частки сприйнятливих осіб (S), загальну кількість інфікованих (I), одужалих (R) та померлих (D) серед усього населення. Ці параметри передаються до довільного симулятора динамічних систем у середовищі WhyNot, яке далі інтегрує його в середовище Gym для RL:

- Динамічна система (`simulate_fn`);
- Конфігурація (`config`);
- Початковий стан для запуску симулятора (`initial_state`);
- Визначений простір дій для учня (`action_space`);
- Визначений простір спостереження (`observation_space`);
- Перетворення числових дій у втручання симулятора (`intervention_fn`);
- Визначена функція винагороди (`reward_fn`).

Симуляція починається з початкового стану і змінює стан за допомогою параметрів (`p`), взятих з конфігураційного кортежу:

- `start_time` – початок симуляції;
- `end_time` – кінець симуляції (кількість ітерацій);
- `delta_t` – частота перерахунку параметрів симулятора;
- `sigma` – ймовірність переходу від сприйнятливих до інфікованих;

- μ_i – ймовірність переходу від інфікованих до одужалих;
- τ_i – ймовірність переходу від інфікованих до смерті.

Процес моделювання пандемії з використанням моделі SIRD включає взаємодію агента RL із стимуляцією для оптимізації політики соціального дистанціювання. На початку епізоду симуляції середовище RL ініціалізується розподілом населення за станом здоров'я, що забезпечує початковий контекст для прийняття рішень агентом RL. Агент, керуючись своєю політикою, оцінює поточний стан і визначає рівень соціального дистанціювання, який представлений дискретними діями від 0% до 100%. Обрана дія коригує параметри, такі як рівень передачі в моделі SIRD, і симуляція продовжується на певну кількість днів для моделювання ефекту втручання. Після застосування дії модель SIRD оновлює стан здоров'я популяції, враховуючи динаміку захворювання та вплив заходів соціального дистанціювання. Після цього обчислюється винагорода, яка оцінює ефективність втручання з урахуванням впливу на здоров'я (наприклад, зниження смертності та кількості інфекцій).

Функція винагороди. Функція винагороди є важливою для спрямування поведінки агента, надаючи зворотний зв'язок про те, чи є зміни стану позитивними або негативними. У нашому дослідженні функція винагороди показує дії, що призводять до позитивних результатів, таких як зменшення кількості інфікованих осіб, і карає за дії, що погіршують ситуацію. Враховуючи як позитивні, так і негативні наслідки дій, функція винагороди допомагає агенту RL обирати дії, що мінімізують загальний вплив COVID-19.

Функція винагороди формулюється наступним чином:

$$R(t) = 100S(t) - 100I(t) - 1000D(t),$$

де – $R(t)$ – винагорода в момент часу t ;

- $S(t)$ – кількість сприйнятливих осіб в момент часу t ;
- $I(t)$ – кількість інфікованих осіб в момент часу t ;
- $D(t)$ – кількість смертей в момент часу t .

Ця функція винагороди стимулює політику, яка ефективно зменшує кількість інфікованих і померлих.

У даному підході ми розглянули різні політики для кривих захворюваності, щоб оцінити їхню ефективність та виявити умови, за яких фактор дистанціювання дає найбільшу винагороду Рис. 5.11.

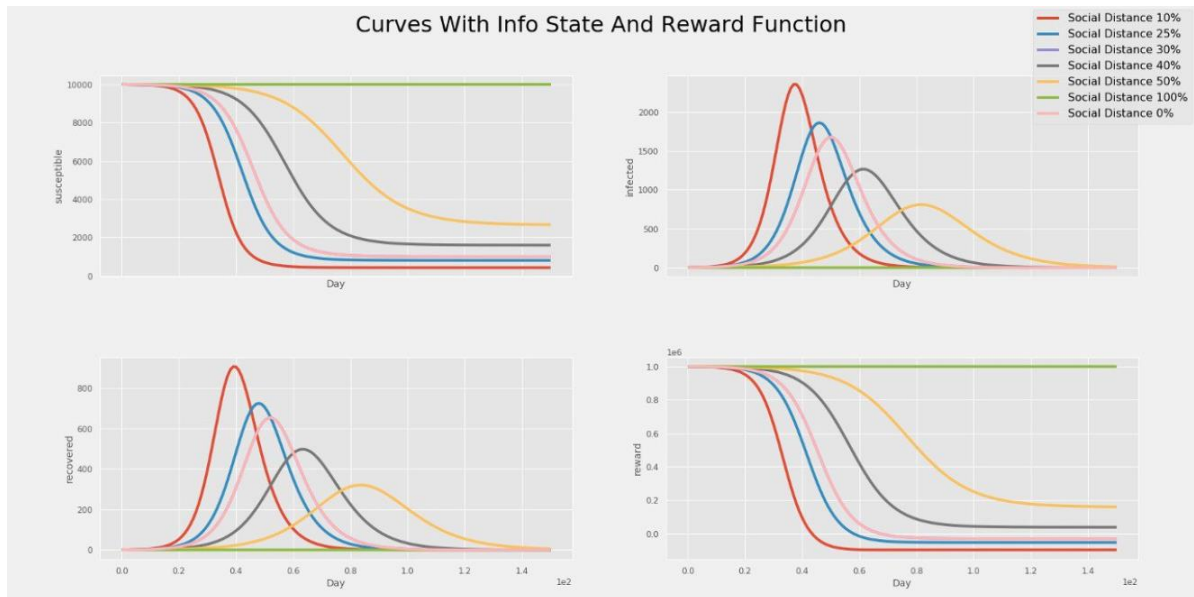


Рис. 5.11 Графіки із різними станами і результатами функції винагороди

Найкращий варіант – 100% соціальне дистанціювання, що забезпечує відсутність інфікованих, але є нереалістичним через економічні наслідки. Зниження дистанціювання до 50% зберігає високу ефективність, зменшуючи кількість інфікованих і підтримуючи економічну стабільність.

Помірні обмеження (30-40%) виявилися найбільш збалансованими, оскільки вони дозволяють знизити кількість інфікованих без значного впливу на економіку та спосіб життя. Такий підхід забезпечує баланс між запровадженням обмежень і контролем над зростанням захворюваності.

Відсутність соціального дистанціювання (0%), тобто відсутність будь-яких обмежень, є найгіршим варіантом з найвищим піком інфікування та мінімальною винагородою.

5.5.4 Висновки та перспективи подальших досліджень

У цьому дослідженні розглянуто два підходи до моделювання поширення інфекцій: SIR моделі та навчання з підкріпленням. SIR моделі є корисними для загального аналізу динаміки захворюваності та враховують ключові осо-

бливості взаємодії між групами населення, що дозволяє оцінити ефективність різних заходів на макрорівні.

Моделювання з RL надає можливість адаптивного реагування на зміни в епідемії, що дозволяє агентам навчатися та приймати рішення, спрямовані на зменшення поширення інфекції. Запропонована модель включає аспекти соціальної динаміки через прості правила, засновані на статистичних принципах. Найкращі результати досягнуто при 30-40% соціального дистанціювання, що забезпечує баланс між контролем епідемії та економічною стабільністю.

Комбінація SIR моделей з RL підходом забезпечує комплексний підхід до моделювання епідемій, що дозволяє ефективніше планувати заходи боротьби з інфекційними захворюваннями.

ВИСНОВКИ

Основними результатами, наведеними в звіті, є такі:

- запропоновано алгоритм розщеплення системи лінійних сингулярно збурених рівнянь з багатьма малими параметрами до сукупності незалежних підсистем;
- одержано достатні коефіцієнтні умови існування розщеплюючого перетворення системи лінійних сингулярно збурених рівнянь з багатьма малими параметрами;
- досліджено можливість побудови асимптотичних розкладів коефіцієнтів розщеплюючого перетворення за степенями малих параметрів;
- встановлено достатні умови існування розв'язку крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями;
- досліджено схему апроксимації крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, одержані теоретичні результати проілюстровані на тестовому модельному прикладі;
- досліджено існування та єдиність розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними спеціального вигляду, розроблено алгоритм їх чисельного моделювання;
- запропоновано критерії середньоквадратичної стійкості та нестійкості дифузійних стохастичних диференціально-функціональних систем Гіхмана–Іто з випадковими збуреннями;
- розв'язано задачу існування оптимального керування для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із зовнішніми збуреннями;
- наведено реалізації чисельного моделювання розв'язків стохастичних рівнянь із пуассонівськими збуреннями, із запізненнями та рівнянь з частинними похідними;
- означено дисипативне ультрапараболічне рівнянням типу Колмогорова в шарі скінченної товщини, досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з коефіцієнтами, які можуть зростати при $|x| \rightarrow \infty$;

- доведено теореми про інтегральне зображення розв'язків неоднорідного виродженого рівняння типу Колмогорова з необмеженими коефіцієнтами в групі молодших членів та з виродженням на початковій гіперплощині;
- встановлено існування та єдиність класичного розв'язку задачі Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку з зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами лінійної частини.
- досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова другого порядку з коефіцієнтами, які можуть зростати при $|x| \rightarrow \infty$ і не залежать від групи змінних виродження рівняння;
- розглянуто питання існування та єдиність класичного розв'язку задачі Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку з зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами лінійної частини;
- досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузією;
- запропоновано алгоритми дослідження на стійкість систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями та знаходження верхньої межі запізнення, для якої зберігається стійкість системи із запізненням;
- здійснено комплексний аналіз часових рядів економічних даних із застосуванням класичних та сучасних моделей машинного навчання;
- запропоновано алгоритми побудови коефіцієнтних областей стійкості диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями;
- розглянуто задачу про побудову математичних моделей, що описують екстремальні режими розвитку екологічних систем під дією антропогенних і природних факторів;
- розроблено та реалізовано функціональну схему імітаційного моделювання різних сценаріїв поширення пандемії COVID-19.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

- [1] Осипова О.В. Інтегральні многовиди та декомпозиція систем багатотемпових лінійних сингулярно збурених рівнянь : дис. . . канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Чернівці, 2021. 128 с.
- [2] Візінська І.І. Апроксимація початкових і крайових задач для диференціально функціональних рівнянь та їх числове моделювання : дис. . . доктора філософії за спеціальністю 113 - "Прикладна математика". Чернівці, 2023. 149 с.
- [3] Косович І.Т. Моделювання прогнозування поширення епідемій методами рухомих клітинних автоматів та навчанням з підкріпленням : дис. . . доктора філософії за спеціальністю 113 - "Прикладна математика". Чернівці, 2025. 190 с.
- [4] Campbell S. L. Singular systems of differential equations. Pitman, London, 1980.
- [5] Chen L.-Y., Goldenfeld N., Oono Y. Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory. *Physical Review*. 1996. **54**. P. 376-394.
- [6] Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*. 2006. **67**, No. 1. P. 1-43.
- [7] Naidu D. S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications. *An overview, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*. 2002. **9**, No. 2. P. 233-278.
- [8] Zhang Y., Naidu D. S., Cai C., Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theory and applications. *An overview 2002-2012, International Journal of Information Systems Sciences (IJISS)*. 2014. **9**, No. 1. P. 1-36.
- [9] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике. *Тр. междунар. симп. По нелинейным колебаниям*. К. : Изд-во АН УССР, 1963. **1**. С. 93-154.

- [10] Боголюбов Н. Н. О некоторых статических методах в математической физике. Львов : Изд-во АН УССР. 1945. 137 с.
- [11] Черевко І. М. Розщеплення лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь. *Доповіді НАН України*. 2002. № 6. С. 32-36.
- [12] Sobolev V. A. Decomposition of linear singularly perturbed systems. *Acta Math. Hung.* 1987. **49**, No. 3-4. P. 365-376.
- [13] Abed E. H. Decomposition and stability of multiparameter singular perturbation problems. *IEEE Automat. Contr.* 1986. **31**. P. 925-933.
- [14] Ihor Cherevko, Oleksandra Osypova. Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems. *Miskolc Mathematical Notes*. 2015. Vol. 16, No. 2. P. 729-745.
- [15] Осипова О. В., Черевко І. М. Про розщеплення та декомпозицію лінійних стаціонарних сингулярно збурених диференціальних рівнянь. *Буковинський математичний журнал*. 2019. **7**, № 2. С. 76-85.
- [16] Fridman E. Decomposition of linear optimal singularly perturbed systems with time delay. *Automation and remote control*. 1990. Vol. 51. P. 1518-1527.
- [17] Osypova O.V., Pertsov A.S., Cherevko I.M. Decomposition and stability of linear singularly perturbed systems with two small parameters. *Carpathian Mathematical Publications*. 2021. 13(1). P. 15–21.
- [18] Cushing J. M. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag. 1977. 198 p.
- [19] Tunc C. Properties of Solutions to Volterra Integro-Differential Equations with Delay. *Appl. Math. Inf. Sci.* 2016. Vol. 10, № 5. P. 1775-1780.
- [20] Bellour A., Bousselsal M. Numerical Solution of Delay Integro-Differential Equations by Using Taylor Collocation Method. *Mathematical Methods in Applied Science*. 2013. Vol. 37. P. 1491-1506.
- [21] Ronto M., Samoilenko A. M. Numerical-analytic Methods In Theory Of Boundary-Value Problems. World Scientific, 2000. 468 p.

- [22] Лучка А. Ю., Ферук В. А. Проекційно-ітеративний метод для систем диференціальних рівнянь із загалюванням та обмеженнями. *Нелінійні коливання*. 2003. **6**, № 2. С. 206-232.
- [23] Korol I. I. Numerical-analytic method for investigating boundary value problems for impulsive differential equations. *Miskolc Mathematical Notes*. 2008. Vol. 9, № 2. P. 99-110.
- [24] Dorosh A., Cherevko I. Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Differential Equations With Many Delays. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10, № 1. P. 65-70.
- [25] Cherevko I., Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations. *J. Numer. Anal. Approx. Theory*. 2015. Vol. 44, № 2. P. 154-165.
- [26] Brunner H. Recent advances in the numerical analysis of Volterra functional differential equations with variable delays. *J. Comput. Appl. Math.* 2009. Vol. 228, № 2. P. 524-537.
- [27] Brunner H. Stability of solutions of delay functional integro-differential equations and their discretizations. *Computing*. 2003. Vol. 71, № 3. P. 229-245.
- [28] Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. *Буковинський математичний журнал*. 2022. **10**, № 1. С. 120-128.
- [29] Дорош А.Б., Тузик І.І., Черевко І.М. Схеми апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. *Нелінійні коливання*. 2023. **26**, № 1. С. 33-41.
- [30] Dorosh A.B., Tuzyk I.I., Cherevko I.M. Approximation Schemes for the Boundary-Value Problems for Integrodifferential Equations with Delay. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024. 278(6). P. 963–973.
- [31] Grim L. J. Boundary value problems for delay-differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1968. Vol. 74, № 5. P. 997-1000.

- [32] Grim L. J. Boundary value problems for differential equations with deviating arguments. *Aequationes Math.* 1970. Vol. 4, № 1. P. 176-190.
- [33] Hartman P. Ordinary Differential Equations. Philadelphia : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2002. 612 p.
- [34] Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. *Recent advances in differential equations.* New York : Academic Press, 1981. P. 155-197.
- [35] Repin Yu. M. On the approximate replacement of systems with lag by ordinary dynamical systems. *J. Appl. Math. Mech.* 1965. Vol. 29, No. 2. P. 254-264.
- [36] Cherevko I.M., Piddubna L. A. On the approximate solutions of differential-difference 121 equation. *Математичні студії.* 1998. Vol. 9, № 2. С. 187-192.
- [37] Natanson I. P. Theory of functions of a real variable. Nauka, 1974. 480 p.
- [38] Bellman R., Cooke K.L. Differential-Difference Equations. Academic Press, New York & London, 1963.
- [39] Michael E. Taylor. Partial Differential Equations. I-III. Series: Applied Mathematical Sciences. Springer Nature Switzerland AG 2023.
- [40] Gihman I.I., Skorokhod A.V. Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1972. 356 p.
- [41] Gihman I.I., Skorokhod A.V. The Theory of Stochastic Processes. I-III. Series: Classics in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2004-2007.
- [42] Oksendal B. Stochastic differential equations, 6d, Springer, 2013, 379 p.
- [43] Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, John Willey and Sons, London, 1974, 244 p.
- [44] Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Рига : Зинатне, 1989. 421 с.

- [45] Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. Рига: Ориентир, 1992. 301 с.
- [46] Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных. *Укр. мат. журнал.* 1993. Т.45, №9. С. 1773-1781.
- [47] Свердан М.Л., Царков Е.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. Снятин : Над Прутом, 1996. 448 с.
- [48] Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні задачі в просторах Діні. Чернівці : Чернів. нац. ун-т, 2010. 248 с.
- [49] Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. On existence and stabization of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential Ito-Skorokhod equation with random parameters. *System Research & Information Technologies.* 2018. №3. P. 80-90.
- [50] Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування у стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Видання друге, доповнене. Чернівці : Технодрук, 2019. 258 с.
- [51] Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування у стохастичних динамічних системах. Частина 2. Монографія. Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2025. 170 с.
- [52] Kloeden P.E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1992, 636 p.
- [53] Lord G.J., Powell C.E., Shardlow T. An Introduction to Computational Stochastic PDEs. Cambridge University Press, 2014, 503 p.
- [54] Юрченко І.В., Ясинський В.К. Існування та єдиність розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння з частинними похідними спеціального вигляду та методи його комп'ютерного моделюва-

- ння. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фіз.-мат. науки : зб. наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка; [редкол.: О.М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2025. Вип.27. С. 84-103.*
- [55] Станжицкий А.Н., Цуканова А.О. Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа. *Нелінійні коливання*. 2016. **3**, №3. С. 408-430.
- [56] Tsukanova A.O. On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in Hilbert space. *Буковинський математичний журнал*. 2016. Т.4, №3-4. С. 179-189.
- [57] Ясинський В.К., Юрченко І.В. Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2017. №2. С. 103-114.
- [58] Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. Existence of the Solution to the Cauchy Problem for Nonlinear Stochastic Partial Differential-Difference Equations of Neutral Type. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol.57, No.5. P. 764-774.
- [59] Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. Mean-Square Stability and Instability Criteria for the Gikhman-Ito Stochastic Diffusion Functional Differential Systems Subject to External Disturbances of the Type of Random Variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol.59, N2. P. 283-295.
- [60] Toshio Yamada. On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications. *Journal Math. Kyoto Univ*. 1973.

- Vol.13(3). P. 497-512.
- [61] Tokuzo Shiga. Diffusion processes in population genetics. *Journal Math. Kyoto Univ.* 1981. Vol.21(1). P. 133-151.
- [62] Ikeda N., Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Amsterdam : North-Holland Mathematical Library, 1989. 568 p.
- [63] Yasyns'kyi V.K., Sverdau M.L., Yurchenko I.V. On one problem of stochastic control. *Ukrainian Mathematical Journal.* 1995. Vol. 47, № 11. P. 1788-1797.
- [64] Yasynskyi V.K., Yurchenko I.V. On the existence of optimal control for stochastic functional differential equations under the influence of external disturbances. *Cybernetics and System Analysis.* 2024. Vol. 60, № 3. P. 462-471.
- [65] Yurchenko I.V. On the existence of optimal control for stochastic differential functional equations under the influence of external disturbances. I. Comparison theorem. *Scientific World Journal.* 2025. Iss.30, Part 2. P. 138-146.
- [66] Yurchenko I.V. On The Existence Of Optimal Control For Stochastic Differential Functional Equations Under The Influence Of External Disturbances. *International Scientific Conference "Organization of Scientific Research in Modern Conditions'2025"*. Conference Proceedings. Series Conference proceedings "SW-US conference proceedings". March, 2025. ProConference in conjunction with KindleDPSeattle, Washington, USA.
- [67] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**).
- [68] Івасишен С.Д., Мединський І.П., Пасічник Г.С. Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Буковинський математичний журнал.* 2016. 4 (3-4). С. 57-68.

- [69] Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. Ультрапараболічні рівняння з необмежено зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів і виродженнями на початковій гіперплощині. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2018. **61** (1). С. 31–46.
- [70] Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Зображення розв’язків рівняння типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині. *Буковинський математичний журнал.* 2021. **9**, № 1. С. 189–199.
- [71] Пасічник Г.С. Про зображення розв’язків одного ультрапараболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині. *Міжнар. наук. конф., присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка* (30.10.2021 р., Чернівці) : Матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 123-124.
- [72] Пасічник Г.С. Особливості математичної підготовки інженера. *Матеріали ХХ Міжнародної науково-технічної конференції "Важке машинобудування. Проблеми та перспективи розвитку".* 01–03 вересня 2022 року / за заг. ред. В. Д. Ковальова. Краматорськ-Тернопіль : ДДМА, 2022. С. 169.
- [73] Мединський І.П., Пасічник Г.С. Івасишен Степан Дмитрович: життєвий і творчий шлях. *Буковинський математичний журнал.* 2022. **10**, № 2. С. 8–19.
- [74] Мединський І., Пасічник Г. Про властивості об’ємного потенціалу для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів. *Зб. наук. праць. Ін-т прикл.пробл. мех. і математики ім Я.С.Підстригача НАН України.* 2023. С. 349–350.
- [75] Мединський І., Пасічник Г. Про властивості розв’язків одного рівняння типу Колмогорова, коефіцієнти якого в групі молодших членів є зростаючими функціями. *Матеріали міжнар. наук. конф. "Математика*

- та інформаційні технології”*, присвяченої 55-річчю ф-ту математ. та інформ. 28-30 вересня 2023 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2023. С. 265–266.
- [76] Буйновський В., Пасічник Г. Синхронізація каналів на основі методу графічної оцінки та аналізу програм. *Матеріали міжнар. наук. конф. ”Математика та інформаційні технології”*, присвяченої 55-річчю ф-ту математ. та інформ. 28-30 вересня 2023 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2023. С. 165.
- [77] Мединський І.П., Пасічник Г.С. Властивості об’ємного потенціалу для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів. *Буковинський математичний журнал*. 2023. **11**, № 2. С. 197–210.
- [78] Пасічник Г.С. Про фундаментальний розв’язок ультрапараболічного рівняння, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження і можуть зростати. *Матеріали між нар. наук. конф. ”Прикладна математика та інформаційні технології”*, присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22-24 вересня 2022 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. С. 140-141.
- [79] Пасічник Г.С. Розв’язки деяких класів інтегральних рівнянь другого роду. *Буковинський математичний журнал*. 2024. **12**, № 1. С. 84–93.
- [80] Галина Пасічник, Ігор Мединський. Задача Коші для одного виродженого рівняння, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження і можуть зростати. *V міжнародна конференція, присвячена 145 річниці від дня народження Ганса Гана, 23–27.09.2024*, Чернівці : тези доп. Чернівці : Чернівець. нац. ун-т. ім. Юрія Федьковича, 2024. С. 80.
- [81] Halyna Pasichnyk, Ihor Medynsky. On classical fundamental solution for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with growing coefficients independent on variables of degeneration and with degeneration on the initial hyperplane. *Ukraine Mathematics Conference ”At the End of the Year 2024”*

- (Kyiv, December, 16 -18.2024) : book of abstracts. Kyiv : Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2024. С. 38.
- [82] Мединський І.П., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами, залежними від параметра, та з виродженням на початковій гіперплощині. *Буковинський математичний журнал*. 2024. **12**, № 2. С. 143–153.
- [83] Мединський І.П., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння типу Колмогорова з необмеженими коефіцієнтами, які не залежать від змінних виродження. *Допов. Нац. акад. наук України*. 2025. **3**. С. 3–16.
- [84] Пасічник Г.С. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для дисипативного ультрапараболічного рівняння з незалежними від змінних виродження коефіцієнтами. *Всеукраїнська наукова конференція "Диференціальні рівняння і аналіз даних"*, 8-9 травня 2023 р. : Тези доповідей. Львів, 2025. С. 45.
- [85] Halyna Pasichnyk, Ihor Medynskyi. On the classical fundamental solution of the Cauchy problem for a dissipative ultraparabolic equation with two groups of degenerate variables and with coefficients independent of them. *XII International Skorobohatko Mathematical Conference*, September 23–25, 2025, Lviv : Abstracts. Lviv : Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2025. P. 70.
- [86] Pasichnyk Halyna. On a dissipative ultraparabolic equation withs Holder coefficients independent of the degenerate variables. *Міжнародна конференція, присвячена 75 річниці від дня народження Володимира Маслюченка*, 25-27.09.2025, Чернівці : тези доп. Чернівці : Чернівець. нац. ун-т. ім. Юрія Федьковича, 2025. С. 154.
- [87] Pasichnyk H. On the Classical Fundamental Solution of the Cauchy Problem for a Dissipative Ultraparabolic Equation with One Group in Degenerate Variables and Differential Coefficients Independent of the Degenerate Vari-

- ables. *International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations – QUALITDE-2025. Dedicated to the blessed memory of Professor Revaz Gamkrelidze* : Reports of Qualitde, December 6-8, 2025, Tbilisi, Georgia. V.4. P. 163–166.
- [88] Pasichnyk H. On the classical fundamental solution of the Cauchy problem for a second-order Kolmogorov-type equation with degeneration on the initial hyperplane and increasing coefficients independent of the degeneration variables. *Ukraine Mathematics Conference "At the End of the Year 2025"* (Kyiv, December, 18–19. 2025) : book of abstracts. Kyiv : Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2025. P. 112.
- [89] Пасічник Г.С. Задача Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами. *Буковинський математичний журнал*. 2025. **13**, № 2. С. 32-38.
- [90] Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. Birkhauser Verlag. 2004. 390 pp.
- [91] Івасишен С. Д., Івасюк Г. П. Параболічні початкові задачі Солонникова-Ейдельмана. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.* 2011. **74**. С. 98–108.
- [92] Івасюк Г. П., Фратавчан Т. М. Про властивості розв'язків однорідної модельної 2в-параболічної крайової задачі. *Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка*. 28–30 жовтня 2021 р. Чернівці : Матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 77.
- [93] Івасюк Г. П., Фратавчан Т. М. Про задачу Коші для параболічних за Ейдельманом систем. *Матеріали міжнародної наукової конференції "Прикладна математика та інформаційні технології", присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій*, 22-24 вересня 2022 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. С. 124-127.

- [94] Процах Н. П., Івасюк Г. П., Фратавчан Т. М. Про задачі для рівнянь та систем рівнянь типу Ейдельмана. *Буковинський математичний журнал*. 2022. **10**, № 2. С. 213-228.
- [95] Івасюк Г. П., Процах Н. П., Фратавчан Т. М. Про властивості операторів Гріна і спряжених з ними операторів, породжених задачею Коші для параболічних за Ейдельманом систем довільного порядку. *Математика та інформаційні технології. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики*, 28–30 вересня 2023 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2023. С. 206-207.
- [96] Ivasiuk H. P., Fratavchan T. M., Protsakh N. P. On the homeomorphisms arising from the Cauchy problem for parabolic in the sense of Eidelman systems of arbitrary order. *Міжнародна конференція, присвячена 75 річниці від дня народження Володимира Маслюченка* (25-27 вересня 2025 року). Тези доповідей. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2025. С. 131.
- [97] Klevchuk I.I. Existence and stability of traveling waves in parabolic systems of differential equations with weak diffusion. *Carpathian Mathematical Publications*. 2022. **14**, No 2. P. 493-503.
- [98] Belan E.P., Samoilenko A.M. Dynamics of periodic modes of the phenomenological equation of spin combustion. *Ukrainian Math. J.* 2013. **65**, No 1. P. 21–46.
- [99] Samoilenko A.M., Belan E.P. Periodic modes of the phenomenological spin combustion equation. *Differ. Equ.* 2015. **51**, No 2. P. 214–231.
- [100] Гритчук М.В., Клевчук І.І. Біфуркація торів у параболічних системах диференціальних рівнянь із малою дифузією. *Буковинський математичний журнал*. 2023. **11**, № 2. С. 100-103.
- [101] Візінська І.І. Моделювання стійкості диференціально-різницевих рівнянь із запізненням. *Буковинський математичний журнал*. 2023. **11**, № 1. С. 71-79.

- [102] Матвій О.В., Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість. *Нелінійні коливання*. 2004. **7**, № 2. С. 208-216.
- [103] Черевко І.М., Тузик І.І., Іліка С.А. Алгоритм дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь. *Матеріали XXVI Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики"*, Львів, 27-28 вересня 2021. С. 173-177.
- [104] Tuzyk I., Cherevko I. Algorithms for studying the stability of linear systems with many delay. *12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, 26-28 September 2022, Spišská Kapitula, Slovakia. P. 164-167.
- [105] Іліка С.А., Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь та неасимптотичних коренів їх квазіполіномів запізненням. *Тези доповідей IX міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації"*. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2020. С. 49-50.
- [106] Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Киев : Изд-во Киевского ун-та, 1987. 236 с.
- [107] Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability. *11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021*. Deggendorf, Germany, 15-17 September 2021. P. 49-52.
- [108] Cherevko I., Tuzyk I. Approximation of systems with delay their stability. *Book of abstracts of EQUADIFF*. Brno, Czech Republic, 11-15 July 2022, Masaryk University. No 15. P. 225.
- [109] Тузик І.І. Про апроксимацію диференціально-різницевих рівнянь та їх стійкість. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання –*

- 2019” (Львів, 27–29 травня 2019 р.). Матеріали конференції. Львів, 2019.
- [110] Ihor Cherevko, Iryna Tuzyk, Larissa Pidubna. On the approximation of linear systems with delay and their stability type. *The 28th Conference On Applied and Industrial Mathematics*. Romania. September 17-18, 2021 : Proceedings CAIM 2021. P. 16-17.
- [111] Qin Yuan-xun, Lion-quinq, Wang Lian. Eect of time lags on stability of dynamical system. *Scientica sinica*. 1960. Vol. 10, № 6. P. 26-42.
- [112] Pidubna L.A., Cherevko I.M. Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials. *Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations*. 1999. Vol. 28, № 1. P. 15-21.
- [113] Ліка С.А., Тузик І.І., Піддубна Л.А. Черевко І.М. Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Буковинський математичний журнал*. 2018. **6**, № 3-4. С. 80-83.
- [114] Flask [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://uk.wikipedia.org/wiki/Flask>
- [115] NumPy [Електронний ресурс]. NumPy – Режим доступу : <http://www.numpy.org/>
- [116] Vikovan V., Melnyk H., Melnyk V. Cryptocurrency price forecasting with Daubechies wavelets and evolutionary fuzzy time series. *Bukovinian Mathematical Journal*. 2025. **13**. №1. P. 157-172.
- [117] Melnyk H.V., Melnyk V.S., Vikovan V.K. Application of Natural Language Processing and Fuzzy Logic to Disinformation Detection. *Bukovinian Mathematical Journal*. 2024. **12**, № 1. P. 21-31.
- [118] Melnyk H., Melnyk V. Enhancing Mood and Energy Detection in NLP through Fuzzy Logic Integration. *Modeling, Control and Information Technologies : Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. 2025. **7**. P. 165-168.

- [119] Melnyk H., Melnyk V. Enhancing Mood Detection in Textual Analysis through Fuzzy Logic Integration. *2024 14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*, Ceske Budejovice, Czech Republic, 2024. P. 23-26.
- [120] Melnyk H., Melnyk V. Sentiment Analysis for Student Feedback. *2023 2nd International Conference on Innovative Solutions in Software Engineering (ICISSE)*. 2023. P. 99.
- [121] Melnyk H.V., Melnyk V.S. Reinforcement Learning for Economically Optimized Churn Management : A Contextual Bandit Framework. *2025 15th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*. 2025.
- [122] Квасницька Є, Мельник В. Використання технік обробки тексту для виявлення сарказму. *Збірник матеріалів III Міжнародної науково-практичної конференції*. 5-6 червня 2025 р., м. Київ. К. : КНЕУ, 2025. 1101 с.
- [123] Lazoryk A.B., Melnyk H.V., Melnyk V.S. Application of generative functions to the problems of maximum chess arrangements of N figures. *Bukovinian Mathematical Journal*. 2023. **11**, № 2. P. 51-58.
- [124] Melnyk V., Melnyk H. Using of GitHub Classroom tools in Programming. *Conference on Applied and Industrial Mathematics : CAIM 2022*, Ed. 29, 25-27 august 2022, Chişinău. Chişinău, Republica Moldova : Casa Editorial-Poligrafică "Bons Offices" SRL, 2022, Ediția a 29. P. 173.
- [125] Melnyk H., Melnyk V. Mentorship in education: the progressive transformation from teacher to guide. *Наука та освіта в умовах викликів сьогодення : матеріали Міжнародної науковопрактичної конференції*. Міжнародний гуманітарний дослідницький центр, Чернігів, 16 грудня 2023 р. 2023. P. 390.
- [126] Melnyk V. Using github classroom for student education. *Математика та інформаційні технології : Матеріали міжнародної наукової конференції*

ції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, Чернівці, 28-30 вересня 2023 р. Чернівці, 2023. Р. 98.

- [127] Мельник Г.В., Мельник В.С. Оптимізація лабораторних робіт з програмування: уніфіковане застосування функцій автоматичного оцінювання в класі Github Classroom. *Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця (НПК-2023) : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 7-8 грудня 2023 р., м. Суми, Україна. Суми : СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2023. 168 с.*
- [128] Melnyk H., Melnyk V. Sentiment Analysis for Student Feedback. *2023 2nd International Conference on Innovative Solutions in Software Engineering (ICISSE)*, Ivano-Frankivsk, 29 November 2023.
- [129] Melnyk H., Melnyk V. Mentorship in education: the progressive transformation from teacher to guide. *Наука та освіта в умовах викликів сьогодення : матеріали Міжнародної науковопрактичної конференції. Міжнародний гуманітарний дослідницький центр, Чернігів, 16 грудня 2023 р. 2023. Р. 390.*
- [130] Клевчук І.І. Дослідження різницевих рівнянь з раціональними правими частинами. *Буковинський математичний журнал*. 2020. **8**, № 2. С. 71-82.
- [131] Клевчук І.І., Гритчук М.В. Побудова областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. *Буковинський математичний журнал*. 2022. **10**, № 1. С. 61-70.
- [132] Гритчук М.В., Клевчук І.І. Побудова областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із запізненням. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2023. Випуск 24. С. 21-30.
- [133] Клевчук І.І., Гритчук М.В. Побудова областей стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням. *SWorldJournal*. 2023. **19**, Part 1.

- P. 77-83.
- [134] Клевчук І.І., Пернай С.А., Черевко І.М. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь. *Доп. НАН України*. 2012. № 7. С. 28-34.
- [135] Doroshenko I., Knopov O., Vovk L. Mathematical Models of Extreme Modes in Ecological Systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 5. P. 764-779.
- [136] Kalman R.E., Bucy R.S. New result in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng.* 1961. Vol. 83(1). P. 95-108.
- [137] Dorogovtsev A.Ya. Remarks on the processes generated by some differential equations. *Visnyk KDU*. 1962. Vol. 1, No. 3. P. 124-146.
- [138] Bardadym T.A., Borshchevskiy A.V., Vovk L.B., Ivanov A.V. The Complex of Programs for Statistical Processing of Experimental Data. Inst. Cybern. AS USSR. Kyiv, 1991. P. 91-41.
- [139] Gaivoronskii A.A., Golodnikov A.N., D. Le Fung. Solution of limiting extremal problems for minimizing functionals. *Cybern. Syst. Analysis*. 1980. Vol. 16, No. 1. P. 97-103.
- [140] Bacaër N. McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926–1927). *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, 2011. Springer : London.
- [141] Satsuma J., Willox R., Ramani A., Grammaticos B., Carstea A. Extending the SIR epidemic model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 2020. 336(3). P. 369–375.
- [142] Chumachenko D.I., Chumachenko T.O. *Mathematical Models and Methods for Predicting Epidemic Processes : Monograph*. Kharkiv : Planet-Print LLC, 2020.
- [143] Currie C.M., Fowler J.W., Kotiadis K., Monks T., Onggo B.S., Robertson D.A., Tako A.A. How simulation modelling can help reduce the impact of COVID-19. *Journal of Simulation*. 2020. 14(2). P. 83–97.

- [144] Chumachenko D.I., Chumachenko T.O. Simulation Modeling of Epidemic Processes: Applied Aspects : Monograph. Kharkiv : Panov A.M., 2023.
- [145] Rabajante J.F. Insights from early mathematical models of 2019-nCoV acute respiratory disease (COVID-19) dynamics. COVID-19 e-print. 2020.
- [146] Hu Z., Ge Q., Jin L., Xiong M. Artificial Intelligence Forecasting of Covid-19 in China. COVID-19 e-print. 2020.
- [147] Anastassopoulou C., Russo L., Tsakris A., Siettos C. Data-based analysis, modelling and forecasting of the COVID-19 outbreak. PLoS ONE 15. 2020.
- [148] Jithesh P.K. A model based on cellular automata for investigating the impact of lockdown, migration and vaccination on COVID-19 dynamics. *Comput. Methods Programs Biomed.*, 2021. 211(1). P. 1–10.
- [149] Kosovych I., Cherevko I., Vyklyuk Y., Nevinskyi D. Simulation of Various Distribution Restrictions of COVID-19 using Cellular Automata. *2022 12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*, Ruzomberok, Slovakia. 2022. P. 58–61.
- [150] Косович І. Т., Щур Т. В., Черевко І. М. Математичне та імітаційне моделювання епідеміологічних процесів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наукових праць. Кам'янець-Подільський*, 2022. Вип. 23. С. 49-57.
- [151] Косович І. Т. Моделювання різних сценаріїв поширення COVID-19 методом клітинних автоматів. *Підстригачівські читання – 2022: матеріали конференції молодих учених (Львів, 25–27 травня 2022 р.)*. Львів, 2022.
- [152] Косович І. Імітація поширення COVID-19 методом клітинних автоматів. *Прикладна математика та інформаційні технології : Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22–24 вересня 2022 р.* Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. С. 176–178.
- [153] Косович І., Щур Т., Щур О. Моделювання SIR моделей для прогнозування поширення COVID-19. *Математика та інформаційні технології :*

Матеріали міжнародної наукової конференції присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023 р. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. С. 225-226.

- [154] Черевко І. М., Косович І. Т. Імітаційне моделювання SIR моделей методом клітинних автоматів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія "Математика і інформатика"*. 2024. Т. 45, Вип. 2. С. 276-285.
- [155] K. Zong, C. Luo. Reinforcement learning based framework for COVID-19 resource allocation. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, vol. 167, May 2022.
- [156] Kosovych I., Cherevko I., Shchur T., Shkilniuk D. Computer Modeling of the Dynamics of Epidemiological Processes. *14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT'2024, 19-21 September 2024, Ceske Budejovice, Czech Republic)*. P. 32-35.
- [157] Косович І. Т., Черевко І. М., Краснокутський О. С. Агентно-орієнтоване моделювання поширення епідемій. *10 Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" пам'яті проф., чл.-кор. НАПНУ А. Ф. Верланя (28–29 червня 2024 р., Кам'янець-Подільський)*. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. С. 98–100.