DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.16

Раєвська І., Раєвська М.

ПРО ЕНДОЦИКЛІЧНІ 2-ПОРОДЖЕНІ ГРУПИ ПОРЯДКУ 256 ТА ЕКСПОНЕНТИ 16

Застосовуючи систему комп'ютерної алгебри GAP, пакети SONATA та LocalNR, ми визначили всі ендоциклічні 2-породжені групи G порядку 256 та експоненти 16, а також навели список груп, які не будуть адитивними групами локальних майже-кілець.

Ключові слова і фрази: 2-породжена група, ендоциклічна група, локальне майже-кільце.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: *raeirina@imath.kiev.ua, raemarina@imath.kiev.ua*

Вступ

Узагальненням кільця в тому сенсі, що додавання не обов'язково є комутативним і виконується хоча б один дистрибутивний закон, є майже-кільце. Очевидно, що кожне асоціативне кільце є майже-кільцем, і кожна група є адитивною групою майже-кільця, але не обов'язково майже-кільця з одиницею.

Майже-кільце з одиницею називається локальним, якщо множина усіх необоротних елементів утворює підгрупу адитивної групи майже-кільця. Дослідження локальних майже-кілець було ініційовано Мексоном [5], який визначив ряд їх основних властивостей і, зокрема, довів, що адитивна група нуль-симетричного локального майже-кільця є p-групою.

Дослідження алгебраїчних структур методами теорії груп та комп'ютерної алгебри є важливим та перспективним напрямком досліджень не лише в алгебрі, а й інших галузях математики.

Список усіх локальних майже-кілець порядку не більше 31 можна отримати з пакету SONATA [1] системи комп'ютерної алгебри GAP [4]. Однак класифікація майже-кілець вищих порядків вимагає набагато складніших обчислень. Для локальних майже-кілець вони були реалізовані в новому GAP-пакеті LocalNR [12]. Поточна версія (ще не розповсюджена за допомогою GAP) містить 37599 локальних майже-кілець порядку не більше 361, за винятком порядків 128, 256 і деяких локальних майже-кілець порядків 32, 64 і 243.

Основні результати, що стосуються локальних майже-кілець, підсумовані в оглядах: Сисак [15], І. Раєвська та М. Раєвська [9].

УДК 512.6
2010 *Mathematics Subject Classification:* 16W30.

Відомо, що існує 51 неізоморфна група порядку $32 = 2^5$, з яких 35 є ендоциклічними групами, і лише 19 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець. Список та базу даних локальних майже-кілець порядку 32 можна знайти в [8], [12] та [13].

Зазначимо, що з 267 неізоморфних груп порядку $64 = 2^6$, 53 є 2-породженими групами, і лише 39 з цих груп є ендоциклічними. Більш того, 24 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець. Список та базу даних усіх локальних майже-кілець порядку 64 можна знайти в [9], [10], [12] та [14].

Існує 2328 неізоморфних груп порядку $128 = 2^7$, з яких 162 є 2-породженими групами: 5 груп мають експоненту 64, і лише 2 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець, 18 груп мають експоненту 32, і лише 6 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець, 65 груп мають експоненту 16, і лише 16 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець, 72 групи мають експоненту 8, не менше 17 груп є адитивними групами локальних майже-кілець, та 2 групи мають експоненту 4, і обидві ці групи є адитивними групами локальних майже-кілець. Список та базу даних локальних майже-кілець порядку 128 можна знайти в [7] та [11].

Зазначимо, що залишається відкритим питання, які неабелеві групи порядку p^n можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець. З іншого боку, Файгелсток [3] довів, що для кожного простого числа p та кожного цілого $n > p$ існує група G порядку p^n, яка не є адитивною групою локального майже-кільця. Ним же було поставлене питання про характеризацію неабелевих p-груп, які можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець.

В статті опишемо ендоциклічні 2-породжені групи порядку 256 та експоненти 16. А також визначимо, які з цих груп можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець.

1 Попередні результати

Нагадаємо означення майже-кільця.

Означення 1. *Множина R з двома бінарними операціями "$+$" та "$\cdot$" називається майже-кільцем, якщо:*

1) $(R,+)$ *— група з нейтральним елементом* 0,

2) $(R,\cdot)$ *— напівгрупа,*

3) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$ *для всіх* x, y, $z \in R$.

Таке майже-кільце називається лівим майже-кільцем. Якщо ж аксіому 3) замінити аксіомою $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$ *для всіх* x, y, $z\in R$, *то отримаємо праве майже-кільце.*

Група $(R,+)$ позначається через R^+ та називається *адитивною групою*, а її нейтральний елемент 0 — *нулем* майже-кільця R. З аксіоми 3 випливає, що $r\cdot 0 = r\cdot(0+0) = r\cdot 0 + r\cdot 0$, звідки отримуємо $r\cdot 0 = 0$. З цієї ж аксіоми витікає, що $r\cdot(-s) = -(r\cdot s)$. Майже-кільце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0\cdot x = 0$.

Означення 2. *Майже-кільце R, в якому напівгрупа $(R,\cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом i, називається* майже-кільцем з одиницею *i. Група всіх оборотних елементів цього моноїда позначається через R^* та називається* мультиплікативною групою *майже-кільця R, а її доповнення $R\setminus R^*$ — множиною необоротних елементів із R.*

Означення 3. *Майже-кільце R з одиницею називається локальним, якщо множина L всіх необоротних елементів із R утворює підгрупу адитивної групи R^+. В цьому випадку L будемо називати підгрупою необоротних елементів майже-кільця R.*

Теорема 1 ([5]). *Якщо R — скінченне локальне майже-кільце, яке не є майже-полем, то $|R| \leq |L|^2$.*

Нехай G — група та $\operatorname{End} G$ — множина всіх її ендоморфізмів, яку можна розглядати як напівгрупу відносно операції композиції ендоморфізмів. Для кожного $g \in G$ позначимо через $g^{\operatorname{End} G}$ множину $\{g^\alpha | \alpha \in \operatorname{End} G\}$ всіх образів елемента g відносно ендоморфізмів із $\operatorname{End} G$.

Наведемо наступне означення (див., наприклад, [6]).

Означення 4. *Групу G назвемо ендоморфно циклічною (або ендоциклічною), коли в ній існує елемент g, для якого $G = g^{\operatorname{End} G}$.*

2 Основні результати

Нагадаємо, що експонентою групи є найменше спільне кратне порядків її елементів. Зокрема, експонентою скінченної p-групи є максимальний порядок її елементів.

Наступна лема визначає експоненту адитивної групи скінченного майже-кільця з одиницею [2, Theorem 3].

Лема 1. *Експонента адитивної групи скінченного майже-кільця R з одиницею дорівнює адитивному порядку його одиниці, який співпадає з адитивним порядком кожного елементу його мультиплікативної групи R^*.*

Лема 2 ([9]). *Нехай R — локальне майже-кільце порядку p^n. Тоді $|R^*| = p^n - p^k$, де $[\frac{n}{2}] \leq k < n$.*

Позначимо через $U(G)$ множину всіх елементів групи G, порядок яких дорівнює експоненті цієї групи.

Безпосередній наслідок леми 2.

Наслідок 1. *Якщо група G є адитивною групою локального майже-кільця R порядку p^n, тоді $U(G)$ не менше $p^n - p^{n-1}$.*

Існує 56092 неізоморфних груп порядку $256 = 2^8$, з яких 540 є 2-породженими групами: 3 групи мають експоненту 128, 9 груп мають експоненту 64, 30 груп мають експоненту 32, 107 груп мають експоненту 16, 84 групи мають експоненту 8, та 3 групи мають експоненту 4.

Нехай $[n, i]$ — i-та група порядку n у бібліотеці SmallGroups в GAP.

Застосовуючи систему комп'ютерної алгебри GAP, пакети SONATA та LocalNR, ми визначили всі ендоциклічні 2-породжені групи G порядку 256 експоненти 16 та порядок множини всіх елементів групи G, порядок яких дорівнює експоненті цієї групи.

Лема 3. *Наступні 2-породжені групи G порядку 256 та експоненти 16 є ендоциклічними, та вказано порядок $U(G)$ для кожної групи G:*

IdGroup(G)	*StructureDescription*(G)	$\lvert U(G)\rvert$
$[256, 39]$	$C_{16} \times C_{16}$	*192*

Продовження на наступній сторінці

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$\|U(G)\|$
$[256, 40]$	$C_{16} \rtimes C_{16}$	*192*
$[256, 41]$	$C_{16} \rtimes C_{16}$	*192*
$[256, 42]$	$(((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 43]$	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 44]$	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_{16}) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 45]$	$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 46]$	$(((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 47]$	$(C_4 \times C_2).((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 48]$	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_{16}) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 49]$	$(C_4 \times C_2).((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 50]$	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 51]$	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 52]$	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 53]$	$(C_4 \times C_2).((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 54]$	$(C_4 \times C_2).((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 56]$	$(C_{16} \times C_8) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 57]$	$Q_{16} \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 58]$	$(C_8 \rtimes C_{16}) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 59]$	$Q_{16} \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 64]$	$(((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	*64*
$[256, 80]$	$(C_8 \rtimes C_{16}) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 84]$	$(C_8 \rtimes C_{16}) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 87]$	$C_{16} \rtimes C_{16}$	*192*
$[256, 88]$	$C_{16} \rtimes C_{16}$	*192*
$[256, 89]$	$C_{16} \rtimes C_{16}$	*192*
$[256, 90]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 93]$	$((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 95]$	$((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 96]$	$(C_2 \times C_2).((C_4 \rtimes C_8) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_4).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 97]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	*64*
$[256, 98]$	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_8) \rtimes C_2$	*64*
$[256, 99]$	$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 100]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	*64*
$[256, 101]$	$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 102]$	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_8) \rtimes C_2$	*102*
$[256, 104]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 105]$	$(C_2 \times C_2).((C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_4).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 106]$	$(C_4 \rtimes C_4) \rtimes C_{16}$	*128*

Продовження на наступній сторінці

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$\|U(G)\|$
$[256, 107]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 109]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 113]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 114]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 115]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 116]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$	*128*
$[256, 121]$	$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 124]$	$((C_2 \times C_2).(C_2 \times C_2 \times C_2)) \rtimes C_8$	*128*
$[256, 125]$	$(C_4 \times C_2).((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$	
	$= (C_4 \times C_2 \times C_2).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 126]$	$(C_{16} \times C_2) \rtimes C_8$	*128*
$[256, 127]$	$(C_{16} \times C_2) \rtimes C_8$	*128*
$[256, 130]$	$(C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_8$	*128*
$[256, 131]$	$(C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_8$	*128*
$[256, 133]$	$(C_{16} \times C_4) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 134]$	$(C_{16} \rtimes C_4) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 136]$	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 137]$	$(C_4 \times C_2).((C_4 \times C_2) \rtimes C_4) =$	
	$= (C_4 \times C_2).(C_8 \times C_4)$	*128*
$[256, 139]$	$(C_4 \rtimes C_{16}) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 140]$	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 151]$	$(C_4 \times C_2).((C_4 \times C_2) \rtimes C_4) =$	
	$= (C_4 \times C_2).(C_8 \times C_4)$	*128*
$[256, 155]$	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 159]$	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 160]$	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 161]$	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 162]$	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 163]$	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 164]$	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 165]$	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$	*64*
$[256, 166]$	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 167]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 168]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 169]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 170]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 171]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 172]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 173]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 174]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 179]$	$((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 180]$	$((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 181]$	$((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 182]$	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_{16}$	*128*

Продовження на наступній сторінці

IdGroup(G)	*StructureDescription(G)*	$\|U(G)\|$
$[256, 183]$	$(C_4 \times C_2).((C_4 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2).(C_8 \times C_4)$	*128*
$[256, 184]$	$(C_4 \times C_2).((C_4 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_2 \times C_2 \times C_2).(C_8 \times C_4)$	*128*
$[256, 185]$	$(C_4 \times C_4).((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_2).(C_8 \times C_4)$	*128*
$[256, 186]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 187]$	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_{16}$	*128*
$[256, 197]$	$((C_4 \rtimes C_4) \rtimes C_4) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 218]$	$((C_4 \rtimes C_4) \rtimes C_4) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 221]$	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 242]$	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 246]$	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 250]$	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$	*64*
$[256, 256]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 257]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$	*128*
$[256, 328]$	$(((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 329]$	$C_2.((((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) =$ $= (C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 330]$	$(((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 331]$	$C_2.((((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 344]$	$(C_4.((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2).(C_8 \times C_2)) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 345]$	$(C_4.((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2).(C_8 \times C_2)) \rtimes C_2$	*128*
$[256, 348]$	$C_4.((C_2 \times Q_8) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_4).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 349]$	$C_4.((C_2 \times Q_8) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_4).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 356]$	$C_4.((C_4 \times C_4) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_4).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 357]$	$C_4.((C_4 \times C_4) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_4).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 361]$	$C_4.(((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_4).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 362]$	$C_4.(((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_4).(C_8 \times C_2)$	*128*
$[256, 384]$	$(((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	*64*

Застосовуючи до леми 3 наслідок 1 маємо наступне твердження.

Лема 4. *Наступні 2-породжені ендоциклічні групи G порядку 256 та експоненти 16 не є адитивними групами локальних майже-кілець:*

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$
$[256, 64]$	$(((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$
$[256, 97]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$
$[256, 98]$	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_8) \rtimes C_2$
$[256, 99]$	$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_8$
$[256, 100]$	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$
$[256, 101]$	$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_8$
$[256, 102]$	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_8) \rtimes C_2$
$[256, 107]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
$[256, 109]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
$[256, 113]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
$[256, 114]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
$[256, 115]$	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
$[256, 159]$	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$
$[256, 160]$	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$
$[256, 161]$	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$
$[256, 162]$	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$
$[256, 163]$	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$
$[256, 164]$	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$
$[256, 165]$	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$
$[256, 166]$	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$
$[256, 167]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$
$[256, 168]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$
$[256, 169]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$
$[256, 170]$	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$
$[256, 218]$	$((C_4 \rtimes C_4) \rtimes C_4) \rtimes C_4$
$[256, 221]$	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$
$[256, 242]$	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$
$[256, 246]$	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$
$[256, 250]$	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$
$[256, 384]$	$(((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$

Леми 3 і 4 є результатами обчислень, виконаних за допомогою GAP та пакета LocalNR (див. `https://github.com/raemarina/256_exp_16`).

Робота підтримана грантом Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, I.Yu.R., M.Yu.R.).

Список літератури

[1] Aichinger E., Binder F., Ecker Ju., Mayr P. and Noebauer C. *SONATA — system of near-rings and their applications*, GAP package, Version 2.9.1. 2018, `https://gap-packages.github.io/sonata/`

[2] Clay J.R., Malone Jr. *The near-rings with identities on certain finite groups*. Math. Scand. 1966, **19**, 146–150.
https://www.mscand.dk/article/view/10803/8824

[3] Feigelstock S. *Additive groups of local near-rings*. Comm. Algebra 2006, **34 (2)**, 743–747.
https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00927870500388042

[4] *The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.14.0. 2024, https://www.gap-system.org

[5] Maxon C.J. *On local near-rings*. Math. Z. 1968, **106**, 197–205.
https://link.springer.com/article/10.1007/BF01110133

[6] Oxford E., Walls Gary. *Endocyclic groups*. Arch. Math. (Basel) 1979, **32 (2)**, 109–113.
https://link.springer.com/article/10.1007/BF01238476

[7] Raevska I. *Local nearrings with additive groups of order 128*. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics 2024, **45 (2)**, 110–114.
https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).110-114

[8] Raievska I., Raievska M. *Finite local nearrings*. Mohyla Mathematical Journal 2018, **1**, 38–48.
https://mmj.ukma.edu.ua/article/view/152611/151700

[9] Raievska I., Raievska M. *Local nearrings, their structure and GAP*. Ukr. Mat. Zh. 2024, **76 (11)**, 1629–1644; translated Ukr. Math. J. 2025, **76 (11)**, 1831–1848.
https://doi.org/10.1007/s11253-025-02426-y

[10] Raevska I., Raevska M., Sysak Ya. Local nearrings of order 64. International mathematical conference "Groups and Actions: Geometry and Dynamics, dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy" (December 19–22, 2016, Kyiv, Ukraine). Book of abstracts. — Kyiv, 2016. — P. 43.

[11] Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. *DatabaseEndom128: (v0.2)* [Data set], 2022. Zenodo, https://doi.org/10.5281/zenodo.6538441

[12] Raievska I., Raievska M., Sysak Y. *LocalNR, Package of local nearrings*, Version1.0.4. 2024 (GAP package),
https://gap-packages.github.io/LocalNR

[13] Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. *DatabaseEndom32: (v1.0.2)* [Data set], 2024. Zenodo,
https://zenodo.org/records/10820301

[14] Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. *DatabaseEndom64: (v1.0.1)* [Data set], 2024. Zenodo,
https://zenodo.org/records/10820320

[15] Sysak Ya.P. *Products of groups and local nearrings*. Note di Mat. 2008, **28 (2)**, 179–213.
http://siba-ese.unisalento.it/index.php/notemat/article/view/11153

Надійшло 14.11.2025

Raievska I., Raievska M. *Endocyclic* 2*-generated groups of order* 256 *of exponent* 16, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 161–169.

Using GAP, the SONATA and LocalNR packages, we have defined all endocyclic 2-generated groups G of order 256 and exponent 16, and listed the groups that can not be additive groups of local nearrings.