DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.10

Працьовитий О.М., Ратушняк С.П.

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО ЗБУРЕНОГО ДВІЙКОВОГО РЯДУ

This paper investigates the properties of the series $a_1+a_2+...+a_n+...$, where $a_{2k-1}=\frac{1}{2^{2k-1}}$, $a_{2k}=\frac{1}{2^{2k}+1}$, which is referred to as the perturbed binary series. It is shown that for the tails of the series, defined as $r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+...$ and for the terms of the series, the inequalities

$$a_{2k-1}>r_{2k-1},\ \ a_{2k}<r_{2k}$$

hold for any $k\in N$. These inequalities ensure that the set

$$E(a_n)=\left\{x:x=\sum_{n\in M\subset N}a_n,\ M\in 2^N\right\}$$

of all subsums of the series satisfies the necessary conditions for Cantor-type structure, in particular, nowhere denseness.

Explicit expressions are obtained for the differences a_n-r_n, which characterize the lengths of certain intervals adjacent to the set E specifically the intervals of the form $(r_{2k-1};a_{2k-1})$ as well as the overlaps of cylindrical segments $\Delta_{c_1...c_m}=[u;v]$, where $(c_1,...,c_m)$ is an ordered tuple of zeros and ones, $u=c_1a_1+...+c_ma_m$, $v=u+r_m$.

The asymptotic behavior of the ratio $\frac{r_n-a_n}{r_{n-1}}$, is described; it reflects the progressive "reduction" of overlaps and "gaps" in the corresponding cylindrical segments.

Several other properties of the given series are also established.

Key words and phrases: subsum set of a series, cylinder sets, gaps (adjacency intervals) in the subsum set, overlaps of cylinder sets, Cantorval.

Ukrainian State Dragomanov University,
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: *alexandr.pratsiovytyi@gmail.com, ratush404@gmail.com*

Вступ

Одним з магістральних напрямів розвитку геометрії числових рядів є тополого-метричний аналіз множин їх неповних сум (підсум) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 16, 17]. Результати таких досліджень важливі для теорії сингулярних ймовірнісних мір, нескінченних згорток Бернуллі, теорії локально складних функцій, теорії фракталів.

УДК 514.8, 517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 40A05,11B05,28A80.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, S.R.).

© Працьовитий О.М., Ратушняк С.П., 2025

Нагадаємо, що множиною неповних сум (підсум) збіжного числового ряду

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n = r_0$$

називається множина

$$E(a_n) = \{x : x = \sum_{n \in M \subset N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,\ (\varepsilon_n) \in \{0, 1\},\ M \in 2^N\}.$$

Добре відомо, що множина неповних сум абсолютно збіжного ряду є обмеженою, континуальною, досконалою множиною, симетричною відносно точки $\frac{r_0}{2}$. Також відомо, що існує лише три топологічні типи множин підсум з монотонною послідовністю членів. Це скінченне об'єднання відрізків; множина, гомеоморфна класичній множині Кантора; канторвал. У загальній постановці задача встановити топологічний тип множини непов- них ряду є непростою. Сьогодні відомі необхідні і достатні умови належності множини підсум ряду до першого типу (теорема Какея), але невідомі критерії канторвальності та ніде не щільності множини підсум ряду. І лише у доволі вузьких класах її вдається вичерпно розв'язати. В переважній більшості це класи мультигеометричних рядів (зрозуміло, що існують виключення). Очевидним є те, що коли $a_n = 2^{-n}$,тобто коли ряд є класичним двійковим, $E(a_n) = [0; 1]$. Якщо $a_n = 2 \cdot 3^{-n}$, то множиною неповних сум відповідного ряду є класична множина Кантора – один з найпростіших прикладів лінійних фракталів (ніде не щільна множина нульової міри Лебега).

Дана робота присвячена властивостям збіжного додатного ряду

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4+1} + \ldots + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2k}+1} + \ldots, \tag{1}$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} > r_0 \approx 0,94582279,\ a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}}, a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}+1},$$

які мають суттєво спростити для нього доволі непросту задачу про тополого-метричні властивості множини підсум. Цей ряд ми називаємо *збуреним двійковим.*

Remark 1. *Очевидною є рівність:*

$$\frac{1}{2^n+1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n(2^n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n(2^n+1)}. \tag{2}$$

Lemma 1. *Має місце співвідношення*

$$\frac{14}{15} < r_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(4^k+1)}. \tag{3}$$

Proof. Оскільки (див. (2))

$$\frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}+1} = \frac{1}{2^{2k}(2^{2k}+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{2k}+1} = \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}(2^{2k}+1)}, \tag{4}$$

то

$$r_0 = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2(2^2+1)}) + \frac{1}{2^3} + (\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^4(2^4+1)}) + \ldots =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(4^k+1)} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(4^k+1)} > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{14}{15}. \qquad \square$$

1 Співвідношення між членами та залишками ряду

Theorem 1. *Для будь-якого натурального k виконуються нерівності*

$$a_{2k-1} > r_{2k-1}, \quad a_{2k} < r_{2k}.$$

Proof. Оскільки

$$r_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k}+1} + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}+1} + \frac{1}{2^{2k+3}} + \ldots < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+i}} = \frac{1}{2^{2k-1}} = a_{2k-1},$$

то $a_{2k-1} > r_{2k-1}$.

Доведемо другу нерівність. Спочатку розглянемо

$$r_2 = r_0 - a_1 - a_2 = r_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} > \frac{14}{15} - \frac{7}{10} = \frac{28-21}{30} = \frac{7}{30} > \frac{1}{5} = a_2.$$

Тепер розглянемо загальний випадок. Доведемо, що

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}+1} < \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}+1} + \frac{1}{2^{2k+3}} + \frac{1}{2^{2k+4}+1} + \ldots = r_{2k}.$$

Використовуючи рівність (4), остання нерівність набуває вигляду

$$\frac{1}{2^{2k}+1} < \frac{1}{2^{2k+1}} + (\frac{1}{2^{2k+2}} - \frac{1}{2^{2k+2}(2^{2k+2}+1)}) + \frac{1}{2^{2k+3}} + (\frac{1}{2^{2k+4}} - \frac{1}{2^{2k+4}(2^{2k+4}+1)}) + \ldots$$

Вона рівносильна нерівностям

$$\frac{1}{2^{2k}+1} < \frac{1}{2^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}\cdot 2^{2m}(2^{2k+2m}+1)},$$

$$\frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)} < \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}+1} = \frac{1}{2^{2k}(2^{2k}+1)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)} < \frac{1}{2^{2k}+1}. \tag{5}$$

Остання нерівність рівносильна нерівності $a_{2k} < r_{2k}$. Доведемо нерівність (5). Оскільки

$$2^2(2^{2k+2}+1) > 2^{2k+4} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2(2^{2k+2}+1)} < \frac{1}{2^{2k+4}},$$

$$2^4(2^{2k+4}+1) > 2^{2k+8} \Leftrightarrow \frac{1}{2^4(2^{2k+4}+1)} < \frac{1}{2^{2k+8}},$$

....

$$2^{2m}(2^{2k+2m}+1) > 2^{2k+4m} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)} < \frac{1}{2^{2k+4m}}.$$

....

Тому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)} < \frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{15}.$$

Тепер порівняємо вирази $\frac{1}{15\cdot 2^{2k}}$ і $\frac{1}{2^{2k}+1}$, розглянувши різницю

$$\frac{1}{2^{2k}+1}-\frac{1}{15\cdot 2^{2k}}=\frac{15\cdot 2^{2k}-2^{2k}-1}{15\cdot 2^{2k}(2^{2k}+1)}=\frac{14\cdot 2^{2k}-1}{15\cdot 2^{2k}(2^{2k}+1)}>0.$$

Отже,

$$\frac{1}{15\cdot 2^{2k}}<\frac{1}{2^{2k}+1}\ \text{і}\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)}<\frac{1}{2^{2k}+1}.$$

Таким чином, $a_{2k}<r_{2k}$. Теорему доведено. □

Corollary 1. *Для будь-яких натуральних k і m виконуються нерівності:*

$$a_{2k-1}>a_{2k}+a_{2k+1}+\ldots+a_{2k+m}.$$

Theorem 2. *Мають місце рівності*

$$r_{2k-1}=a_{2k-1}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)},\,r_{2k}=\frac{1}{4^k}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}.$$

Proof. Використовуючи рівність (2), виразимо

$$\begin{aligned}
r_{2k-1}=&\frac{1}{2^{2k}+1}+\frac{1}{2^{2k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}+1}+\frac{1}{2^{2k+3}}+\ldots=\\
=&(\frac{1}{2^{2k}}-\frac{1}{2^{2k}(2^{2k}+1)})+\frac{1}{2^{2k+1}}+(\frac{1}{2^{2k+2}}-\frac{1}{2^{2k+2}(2^{2k+2}+1)})+\ldots=\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+n}}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)}=\frac{1}{2^{2k-1}}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\
=&a_{2k-1}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2k}=&\frac{1}{2^{2k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}+1}+\frac{1}{2^{2k+3}}+\frac{1}{2^{2k+4}+1}+\ldots=\\
=&\frac{1}{2^{2k+1}}+(\frac{1}{2^{2k+2}}-\frac{1}{2^{2k+2}(2^{2k+2}+1)})+\frac{1}{2^{2k+3}}+(\frac{1}{2^{2k+4}}-\frac{1}{2^{2k+4}(2^{2k+4}+1)})+\ldots=\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+n}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)}=\frac{1}{2^{2k}}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\
=&\frac{1}{2^{2k}+1}+\frac{1}{2^{2k+1}(2^{2k+1}+1)}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\
=&a_{2k}+\frac{1}{2^{2k+1}(2^{2k+1}+1)}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\
=&a_{2k}+\frac{1}{4^k}(\frac{2}{2\cdot 4^k+1}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}).
\end{aligned}$$

□

Corollary 2. *Мають місце рівності*

$$a_{2k-1} - r_{2k-1} = \frac{1}{4^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)},$$

$$r_{2k} - a_{2k} = \frac{1}{4^k}(\frac{2}{2\cdot 4^k+1} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}).$$

Lemma 2. *Якщо для довільного збіжного додатного ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + ... + a_k + r_k = S_{k-1} + a_k + S_{k,m} + r_{k+m}$$

з монотонно спадними членами для деякого k виконується нерівність $r_k > a_k$, то існує таке $m = m(k)$, що

$$S_{k,m} \equiv a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+m} > a_k.$$

Proof. Оскільки $r_k > a_k$, то $r_k - a_k \equiv c = const > 0$. Тоді

$$r_k - a_k = S_{k,m} - a_k + r_{k+m} = c > 0.$$

Звідки

$$S_{k,m} - a_k = c - r_{k+m}.$$

Оскільки ряд збіжний, а його члени a_{k+m} $(m = 1, 2, ...)$ утворюють строго спадну послідовність, то послідовність (r_{k+m}) є строго спадною нескінченно малою.

Взявши $r_{k+m} < c$, отримаємо $S_{k,m} > a_k$. Лему доведено. □

Corollary 3. *Для будь-якого натурального k існує таке $m = m(k)$, що для членів ряду* (1) *виконується нерівність $a_{2k+1} + a_{2k+2} + ... + a_{2k+m} > a_{2k}$.*

Remark 2. *Теорема засвідчує виконання необхідних умов канторвальності (як і ніде не щільності) множини неповних сум ряду* (1).

2 Щілини та перекриття

Definition 1. *Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ – впорядкований набір нулів та одиниць. Відрізок $[a; b]$, де $a = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_i$, $b = a + r_m$, називається циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ і позначається $\Delta_{c_1c_2...c_m}$.*

Безпосередньо з означення випливають наступні властивості циліндричних відрізків.

1. Всі циліндри рангу m мають рівну довжину r_m, яка прямує до нуля з ростом m.

2. Має місце вкладення: $\Delta_{c_1...c_m i} \subset \Delta_{c_1...c_m}$.

3. Для будь-якої послідовності (c_n) нулів та одиниць послідовність вкладених цилі- ндричних відрізків стягується в точку множини підсум ряду.

4. $\min \Delta_{c_1...c_m 0} < \min \Delta_{c_1...c_m 1}$.

Циліндричні відрізки $\Delta_0 = [0; r_1]$ і $\Delta_1 = [a_1; r_0]$ першого рангу не перекриваються, оскільки $r_1 < a_1$. Інтервал $(r_1; a_1)$ є суміжними з множиною $E(a_n)$, його називатимемо щілиною рангу 1.

Для циліндричних відрізків рангу 2 маємо перетини:

$$\Delta_{00} \cap \Delta_{01} = [a_2; r_2], \ \Delta_{10} \cap \Delta_{11} = [r_0 - r_2; r_0 - a_2].$$

Аналогічно,

$$\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1} = [c + a_{2k}; c + r_{2k}],$$

де $c = c_1 a_1 + \dots + c_{2k-1} a_{2k-1}$.

Легко довести наступне загальне твердження, що стосується всіх збіжних додатних рядів з монотонною послідовністю членів, включаючи ряд (1).

Lemma 3. *Кожен інтервал $(r_{2k-1}; a_{2k-1})$ є суміжним з множиною E підсум ряду* (1).

Proof. Те, що a_n і r_n належать E очевидно. Розглянемо довільне число x з множини E, тобто $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, де $(\varepsilon_n) \in L$.

Якщо $\varepsilon_i = 1$ для деякого $i \leq 2k-1$, то $x \geq a_i > a_{2k-1}$. Тому $x \notin (r_{2k-1}; a_{2k-1})$.

Якщо $\varepsilon_i = 0$ для всіх $i \leq 2k-1$, але $\varepsilon_i = 1$ для всіх $i > 2k-1$, то $x = r_{2k-1} = a_{2k} + a_{2k+1} + \dots$. Якщо ж деяке $\varepsilon_{2k-1+i} = 0$, то $x < r_{2k-1}$.

Отже, $x \notin (r_{2k-1}; a_{2k-1})$. З довільності вибору x отримуємо $(r_{2k-1}; a_{2k-1}) \cap E = \varnothing$. □

Corollary 4. *Для довільного натурального k маємо $(r_0 - a_{2k-1}; r_0 - r_{2k-1}) \cap E = \varnothing$.*

Дане твердження слідує з симетричності множини підсум ряду відносно точки $\frac{r_0}{2}$.

Remark 3. *Оскільки згідно з наслідком з теореми*

$$a_{2k-1} - r_{2k-1} = \frac{1}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m (4^{k+m} + 1)},$$

то міра Лебега множини $E(a_n)$ задовольняє нерівність

$$\lambda(E(a_n)) < r_0 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} - r_{2k-1}) = r_0 - \frac{2}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m (4^{k+m} + 1)}.$$

Ця груба оцінка міри Лебега множини E є наслідком її симетрії відносно точки $\frac{r_0}{2}$.

3 Асимптотична поведінка перекриттів та щілин

Lemma 4. *Для членів та залишків ряду* (1) *має місце рівність*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{r_n}{a_n} = 1.$$

Proof. Розглянемо спочатку відношення

$$\begin{aligned}
\frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}} =& \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+2}+1} + \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+3}} + \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+4}+1} + \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+5}} + \ldots = \\
=& (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots) + 2^{2k+1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+2m}+1} = \\
=& \frac{1}{3} + 2^{2k+1} \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{4^{k+m}} - \frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)}) = \\
=& \frac{1}{3} + 2^{2k+1} \cdot \frac{1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m} - 2^{2k+1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)} = \\
=& \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)} = \\
=& 1 - 2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)} \to 1 \ (k \to \infty).
\end{aligned}$$

Тепер розглянемо відношення

$$\begin{aligned}
\frac{r_{2k}}{a_{2k}} =& \frac{2^{2k}+1}{2^{2k+1}} + \frac{2^{2k}+1}{2^{2k+2}+1} + \frac{2^{2k}+1}{2^{2k+3}} + \frac{2^{2k}+1}{2^{2k+4}+1} + \ldots = \\
=& \frac{2^{2k}+1}{2^{2k+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} + (4^k+1) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k+m}+1} = \\
=& \frac{2}{3}(1+\frac{1}{4^k}) + (4^k+1) \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{4^{k+m}} - \frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)}) = \\
=& \frac{2}{3}(1+\frac{1}{4^k}) + \frac{4^k+1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m} - \frac{4^k+1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)} = \\
=& 1 + \frac{1}{4^k} - (1+\frac{1}{4^k}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)} \to 1 \ (k \to \infty),
\end{aligned}$$

оскільки $\frac{1}{4^m(4^{m+k}+1)} < \frac{1}{4^{2m} \cdot 4^k}$. □

Theorem 3. *Мають місце співвідношення*

$$\frac{a_{2k+1} - r_{2k+1}}{r_{2k}} = \frac{1 - \frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}}{1 + \frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}} \to 0 \ (k \to \infty), \tag{6}$$

$$\frac{r_{2k} - a_{2k}}{r_{2k-1}} = \frac{\frac{r_{2k}}{a_{2k}} - 1}{\frac{r_{2k}}{a_{2k}} + 1} \to 0 \ (k \to \infty). \tag{7}$$

Proof. Оскільки

$$\frac{a_{2k+1} - r_{2k+1}}{r_{2k}} = \frac{a_{2k+1} - r_{2k+1}}{a_{2k+1} + r_{2k+1}} = \frac{1 - \frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}}{1 + \frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}},$$

$$\frac{r_{2k} - a_{2k}}{r_{2k-1}} = \frac{r_{2k} - a_{2k}}{r_{2k-1} + a_{2k}} = \frac{\frac{r_{2k}}{a_{2k}} - 1}{\frac{r_{2k}}{a_{2k}} + 1},$$

то враховуючи лему 4, отримуємо (6) і (7). □

References

[1] *Anisca R., Ilie M.* On the structure of arithmetic sums of Cantor sets associated with series // Results Math. – 2023. – **78**, № 5. article no. 5.

[2] *Banakh T., Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Topological and measure properties of some self-similar sets // Topol. Methods Nonlinear Anal. – 2015. – **46**, № 2. – P. 1013–1028.

[3] *Banakiewicz M.* The Lebesgue measure of some M-Cantorval // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2019. – **471**, № 1-2. – P. 170–179.

[4] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Multigeometric sequences and Cantorvals // Central European Journal of Mathematics. – 2014. – **12**, № 7. – P. 1000–1007.

[5] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Prus-Wisniowski F.* Topological and algebraic aspects of subsums of series // Traditional and present-day topics in real analysis. – 2013. – P. 354 – 366.

[6] *Bielas W., Plewik S., Walczyńska M.* On the center of distances // European Journal of Mathematics. – 2018. – **4**. – P. 687–698.

[7] *Ferdinands J., Ferdinands T.* A family of Cantorvals // Open Math. – 2019. – **17**, № 1. – P. 1468–1475.

[8] *Filipczak T., Nowakowski P.* Conditions for the difference set of a central Cantor set to be a Cantorval // Results Math. – 2023. – **78**, article no. 166.

[9] *Glab S., Marchwicki J.* Set of Uniqueness for Cantorvals // Results Math. – 2023. – **78**, № 9. art. 9.

[10] *Guthrie J., Nymann J.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – **55**, № 2. – P. 323–327.

[11] *Karvatskyi D., Murillo A., Viruel A.* The achievement set of generalized multigeometric sequences // Results Math. – 2024. – **79**, article no. 132.

[12] *Mendes P., Oliveira F.* On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets // Nonlinearity. – 1994. – **7**, № 2, – P. 329–343.

[13] *Nymann J., Sáenz R.* On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math. – 2000. – **83**, № 1. – P. 1–4.

[14] *Pratsiovytyi M., Karvatskyi D.* Cantorvals as sets of subsums for a series related with trigonometric functions // Proceedings of the International Geometry Center. – 2023. – **15**, № 3-4, – P. 262–271.

[15] *Pratsiovytyi M.V., Karvatsky D.M.* Jacobsthal-Lucas series and their applications // Algebra and discrete mathematics.–2017, 24 (1), P. 169-180.

[16] *Vynnyshyn Ya., Markitan V., Pratsiovytyi M., Savchenko I.* Positive series whose sum sets are cantorvals // Proceedings of the International Geometry Center. – 2019. – **12**, № 2. – P. 26–42.

[17] *Pratsiovytyi M., Karvatskyi D.* The set of incomplete sums of the modified Guthrie-Nymann series // Bukovinian Math. Journal. – 2022. – **10**, № 2. – P. 195–203.

Received 01.06.2025

Працьовитий О.М., Ратушняк С.П. *Про властивості одного збуреного двійкового ряду* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №1. — С. 109–117.

У роботі вивчаються властивості ряду $a_1+a_2+...+a_n+...$, де $a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}+1}$, який названо збуреним двійковим. Встановлено, що для залишків $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$

і членів ряду виконуються нерівності $a_{2k-1} > r_{2k-1}$, $a_{2k} < r_{2k}$ для довільного $k \in N$, а це забезпечує виконання необхідних умов канторвальності (як і ніде не щільності) множини $E(a_n) = \left\{x : x = \sum\limits_{n \in M \subset N} a_n,\ M \in 2^N\right\}$ всіх підсум ряду.

Отримано вирази різниць $a_n - r_n$, що характеризують довжини деяких суміжних з множиною E інтервалів $(r_{2k-1}; a_{2k-1})$ та перекриття циліндричних відрізків: $\Delta_{c_1 \ldots c_m} = [u; v]$, де $(c_1, ..., c_m)$ – впорядкований набір нулів та одиниць $u = c_1 a_1 + ... + c_m a_m$, $v = u + r_m$.

Описано асимптотичну поведінку відношення $\frac{r_n - a_n}{r_{n-1}}$, яке характеризує процес “зменшення” долі перекриттів та “щілин” у відповідних циліндричних відрізках. Встановлено низку інших властивостей даного ряду.