

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.20>

Симотюк М.М.

ЗАДАЧА З ДВОМА КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У праці досліджено коректність задачі з двома кратними вузлами за виділеною змінною t та умовами періодичності за рештою координат x_1, \dots, x_p для лінійних псевдодиференціальних рівнянь. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі у просторах експоненційного типу на торі. За допомогою метричного підходу доведено теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

Ключові слова і фрази: двоточкова задача, псевдодиференціальні рівняння, малі знаменники, метричний підхід.

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine

e-mail: mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

Вступ

Задачі з двома кратними вузлами для рівнянь із частинними похідними є цікавими для побудови загальної теорії крайових задач [2, 13, 21]. Такі задачі є моделями низки фізичних процесів [13]. У працях [4, 14, 16, 17, 18] встановлено достатні умови коректної розв'язності задач з двома кратними вузлами за виділеною змінною t та умовами періодичності за рештою координат для окремих класів рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Ці достатні умови сформульовано в термінах діофантових властивостей послідовності характеристичних визначників, пов'язаних зі задачею. Для обґрунтування зазначених властивостей у цитованих працях було використано метричний підхід та результати метричної теорії чисел [1, 3, 13, 15] і доведено, що такі властивості виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів рівняння та значень вузлів інтерполяції.

Поряд із цим, недостатньо вивченими залишаються задачі з двома кратними вузлами інтерполяції для загальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Це зумовлено, очевидно, складною нелінійною структурою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків таких задач, та відсутністю ефективних підходів для встановлення

УДК 517.95+511.42

2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80, 11K50, 26A27, 26A30.

оцінок знизу цих знаменників. Розробці вказаних питань на випадок псевдодиференціальних рівнянь зі змінними за t символами присвячена дана праця. Важливу роль для оцінювання малих знаменників відіграє специфічна вронскіанна техніка, розроблена у розділах 4–6.

Зауважимо, що для випадку необмежених за просторовими координатами областях класи єдиності двоточкових задач для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними встановлено у роботах [10, 11], при цьому використано диференціально-символьний метод відокремлення змінних [7].

1 ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Домовимося про такі позначення: Ω_p – p -вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_p^T = (0, T) \times \Omega_p$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$, $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega_p$, $D_x = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$, $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_p) \in Q_p^T$, $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_p x_p$, $\text{mes}_{\mathbb{R}^n} M$ – міра Лебега в \mathbb{R}^n вимірної множини $M \subset \mathbb{R}^n$; $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера: $\delta_{j,q} = \begin{cases} 1, & j = q, \\ 0, & j \neq q \end{cases}$;

$C^n(I; \mathbb{R})$ ($C^n(I; \mathbb{C})$) – простір дійснозначних (комплекснозначних) функцій, n раз неперервно диференційовних на проміжку $I \subset \mathbb{R}$;

\mathcal{T}_n – простір тригонометричних поліномів степеня n , $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\mathcal{T}_n = \left\{ \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p, |k| \leq n} \varphi_k \exp(ik, x) : \varphi_k \in \mathbb{C}, |k| \leq n \right\};$$

$\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ – простір тригонометричних поліномів скінченного степеня, збіжність у якому визначається таким чином [5]: послідовність

$$\left\{ \varphi^m(x) = \sum_k \varphi_k^m \exp(ik, x); \quad m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathcal{T}$$

збігається до $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k \exp(ik, x) \in \mathcal{T}$, якщо:

1) існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $\varphi^m(x) \in \mathcal{T}_N$ для всіх $m \in \mathbb{N}$,

2) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_k^m = \varphi_k$;

\mathcal{T}' – простір антилінійних неперервних функціоналів на \mathcal{T} зі слабкою збіжністю, який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів [5];

$C^n([0, T]; \mathcal{T})$ ($C^n([0, T]; \mathcal{T}')$) – простір функцій $u(t, x)$, n раз неперервно диференційовних за t , і таких, що при кожному фіксованому $t \in [0, T]$ $\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in \mathcal{T}$ (\mathcal{T}'), $j = 0, 1, \dots, n$;

$W_{\alpha, \beta}(G)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий поповненням простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою

$$\|\varphi(x); W_{\alpha, \beta}(G)\| = \sqrt{\sum_{|k| \geq 0} |\varphi_k|^2 G^{2\alpha}(k) \exp(2\beta G(k))},$$

де $G : \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ – така додатна функція, що: 1) $G(k) \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}^p$; 2) $\lim_{|k| \rightarrow +\infty} G(k) = +\infty$;

$C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$ – простір функцій $u(t, x)$ таких, що при фіксованому $t \in [0, T]$ похідні $\partial^j u(t, x) / \partial t^j$, $0 \leq j \leq n$, належать до простору $W_{\alpha, \beta}(G)$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0, T]$; норму в просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$ задаємо формулою

$$\|u(t, x); C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))\| = \sum_{j=0}^n \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j}; W_{\alpha, \beta}(G) \right\|;$$

$S^n(G)$, $n = 0, 1, \dots$ – множина псевдодиференціальних операцій $A(t, D_x)$, дія яких на функцію $u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(ik, x)$ задається формулою

$$A(t, D_x)u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} A(t, k)u_k(t) \exp(ik, x),$$

де для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ $A(t, k) \in C^n[0, T]$, причому

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \left\{ \frac{\|A(t, k)\|_{C^n[0, T]}}{G(k)} \right\} < \infty;$$

функції $A(t, k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, називатимемо амплітудами псевдодиференціальної операції $A(t, D_x)$; $S_{\mathbb{R}}^n(G)$, $n = 0, 1, \dots$ – множина операцій $A(t, D_x) \in S^n(G)$, усі амплітуди яких є дійснозначними функціями.

2 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглядаємо задачу

$$L_n \left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x \right) u(t, x) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t, D_x) \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0, \quad (t, x) \in Q_p^T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} U_j[u] \equiv \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, r, \quad 1 \leq r < n, \quad x \in \Omega_p, \\ U_{r+j}[u] \equiv \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=t_1} = \varphi_{r+j}(x), \quad j = 1, \dots, n-r, \quad x \in \Omega_p, \end{cases} \quad (2)$$

де $0 < t_1 \leq T$, $A_j(t, D_x) \in S^0(G)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Задача (1), (2) називається задачею з кратними вузлами $t = 0$ і $t = t_1$, числа r і $(n-r)$ називаються кратностями вузлів $t = 0$ і $t = t_1$ відповідно.

Означення 1. Задачу (1), (2) будемо називати $(+\infty, +\infty)$ -коректною, якщо для довільних $\varphi_j \in \mathcal{T}$, $j = 1, \dots, n$, у просторі $C^n([0, T]; \mathcal{T})$ існує єдиний розв'язок $u(t, x)$ цієї задачі, який неперервно залежить від $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, тобто з того, що послідовності $\{\varphi_j^m\}_{m=1}^\infty$, $j = 1, \dots, n$, збігаються в \mathcal{T} до φ_j , $j = 1, \dots, n$, відповідно, випливає, що послідовність $\{u^m(t, x)\}_{m=1}^\infty$ розв'язків задач

$$L_n(\partial/\partial t, D_x)u^m(t, x) = 0, \quad U_j[u^m(t, x)] = \varphi_j^m(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad m \in \mathbb{N},$$

збігається в просторі $C^n([0, T]; \mathcal{T})$ до $u(t, x)$.

Означення 2. Задачу (1), (2) будемо називати $(-\infty, -\infty)$ -коректною, якщо для довільних $\varphi_j \in \mathcal{T}'$, $j = 1, \dots, n$, у просторі $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$ існує єдиний розв'язок $u(t, x)$ цієї задачі, який неперервно залежить від $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, тобто з того, що послідовності $\{\varphi_j^m\}_{m=1}^\infty$, $j = 1, \dots, n$, збігаються в \mathcal{T}' до φ_j , $j = 1, \dots, n$, відповідно, випливає, що послідовність $\{u^m(t, x)\}_{m=1}^\infty$ розв'язків задач

$$L_n(\partial/\partial t, D_x)u^m(t, x) = 0, \quad U_j[u^m(t, x)] = \varphi_j^m(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad m \in \mathbb{N},$$

збігається в просторі $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$ до $u(t, x)$.

Означення 3. Задачу (1), (2) будемо називати $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, якщо для довільних $\varphi_j \in W_{\alpha_j, \beta_j}(G)$, $j = 1, \dots, n$, існує єдина функція $u(t, x)$ з простору $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$ така, що

$$\begin{aligned} \|L_n(\partial/\partial t, D_x)u(t, x); C([0, T]; W_{\alpha-1, \beta}(G))\| &= 0, \\ \|U_j[u(t, x)] - \varphi_j(x); W_{\alpha_j, \beta_j}(G)\| &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \|u(t, x); C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))\| &\leq C \sum_{j=1}^n \|\varphi_j(x); W_{\alpha_j, \beta_j}(G)\|, \end{aligned}$$

де стала $C > 0$ не залежить від вибору $\varphi_j \in W_{\alpha_j, \beta_j}(G)$, $j = 1, \dots, n$.

У статті числа $\alpha_j, \beta_j, j = 1, \dots, n$, будемо використовувати тільки, як компоненти векторів $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$.

3 УМОВИ КОРЕКТНОСТІ ЗАДАЧІ (1), (2)

Встановимо умови коректності задачі (1), (2). Оскільки операції $A_j(t, D_x)$ належать до класу $S^0(G)$, то $A_j(t, k) \in C[0, T]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ звичайне диференціальне рівняння

$$L_n\left(\frac{d}{dt}, k\right)u_k(t) = 0, \quad (3)$$

має таку фундаментальну систему розв'язків $f_1(t, k), \dots, f_n(t, k) \in C^n[0, T]$, що

$$f_q^{(j-1)}(0, k) = \delta_{j,q}, \quad j, q = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Позначимо:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} f_{r+1}(t_1, k) & \dots & f_n(t_1, k) \\ f'_{r+1}(t_1, k) & \dots & f'_n(t_1, k) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{r+1}^{(n-r-1)}(t_1, k) & \dots & f_n^{(n-r-1)}(t_1, k) \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (5)$$

Теорема 1. Нехай $A_j(t, D_x) \in S^0(G)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Для $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректності задачі (1), (2) необхідно, а для $(+\infty, +\infty)$ -коректності та $(-\infty, -\infty)$ -коректності задачі (1), (2) необхідно й досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \neq 0. \quad (6)$$

Доведення. Розглянемо випадок $(-\infty, -\infty)$ -коректності.

Необхідність. Якщо $\Delta(k^0) = 0$ для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}^p$, то система $(n-r)$ лінійних рівнянь

$$\sum_{q=r+1}^n C_{k^0, q} f_q^{(j-1)}(t_1, k^0) = 0, \quad j = 1, \dots, n-r,$$

має ненульовий розв'язок $(C_{k^0, r+1}, \dots, C_{k^0, n})$. Легко перевірити, що тоді функція

$$u^0(t, x) = \sum_{q=r+1}^n C_{k^0, q} f_q(t, k^0) \exp(ik^0, x)$$

належить до простору $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$ і є ненульовим розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (1), (2). Це суперечить $(-\infty, -\infty)$ -коректності задачі (1), (2).

Достатність. Нехай в умовах (2) праві частини $\varphi_j(x)$ належать до \mathcal{T}' , $j = 1, \dots, n$. Тоді правильними є наступні зображення:

$$\varphi_j(x) = \sum_{|k| \geq 0} \varphi_{j,k} \exp(ik, x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

де $\varphi_{j,k} \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Якщо функція $u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(ik, x)$ належить до простору $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$ і є розв'язком задачі (1), (2), то кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком рівняння (3) і справджує умови

$$u_k^{(j-1)}(0) = \varphi_{j,k}, \quad j = 1, \dots, r, \quad u_k^{(j-1)}(t_1) = \varphi_{r+j,k}, \quad j = r+1, \dots, n. \quad (8)$$

Розв'язок задачі (3), (8) з простору $C^n[0, T]$ зображується рівністю

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^n C_{k,q} f_q(t, k), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (9)$$

де сталі $C_{k,q}$, $q = 1, \dots, n$, є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^n C_{k,q} f_q^{(j-1)}(0, k) = \varphi_{j,k}, & j = 1, \dots, r, \\ \sum_{q=1}^n C_{k,q} f_q^{(j-1)}(t_1, k) = \varphi_{r+j,k}, & j = 1, \dots, n-r. \end{cases} \quad (10)$$

Із початкових умов (4) для функцій $f_1(t, k), \dots, f_n(t, k)$ та перших r рівнянь системи (10) випливає, що $C_{k,q} = \varphi_{q,k}$, $q = 1, \dots, r$. Тоді останні $(n-r)$ рівнянь системи (10) набувають вигляду

$$\sum_{q=r+1}^n C_{k,q} f_q^{(j-1)}(t_1, k) = \varphi_{r+j,k} - \sum_{q=1}^r \varphi_{q,k} f_q^{(j-1)}(t_1, k), \quad j = 1, \dots, n-r. \quad (11)$$

Оскільки визначник системи (11) співпадає з визначником $\Delta(k)$ і виконується умова (6), то система (11) має єдиний розв'язок $C_{k,r+1}, \dots, C_{k,n}$, який знаходимо за правилом Крамера:

$$C_{k,q} = \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \left(\varphi_{r+j,k} - \sum_{q=1}^r \varphi_{q,k} f_q^{(j-1)}(t_1, k) \right), \quad (12)$$

де $\Delta_{j,q}(k)$, $j, q = 1, \dots, n-r$, – алгебричне доповнення елемента $f_{r+q}^{(j-1)}(t_1, k)$ у визначнику $\Delta(k)$. Із формул (9), (12) випливає, що при виконанні умови (6) задача (1), (2), у якій функції $\varphi_j \in \mathcal{T}'$, $j = 1, \dots, n$, визначені рівностями (7), має єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \exp(ik, x) & \left\{ \sum_{q=1}^r \varphi_{q,k} f_q(t, k) - \sum_{q=r+1}^n \sum_{j=1}^{n-r} \sum_{s=1}^r \frac{\Delta_{j,q-r}(k)}{\Delta(k)} \times \right. \\ & \left. \times f_q(t, k) f_s^{(j-1)}(t_1, k) \varphi_{s,k} + \sum_{q=r+1}^n \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\Delta_{j,q-r}(k)}{\Delta(k)} f_q(t, k) \varphi_{r+j,k} \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

що належить до простору $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$. Доведемо, що за умови (6) отриманий розв'язок (13) неперервно залежить від $\varphi_j \in \mathcal{T}'$, $j = 1, \dots, n$.

Нехай послідовності $\{\varphi_j^m(x)\}_{m=1}^\infty$ збігаються в \mathcal{T}' до $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, відповідно. Це означає, що

$$\varphi_j^m(x) = \sum_{|k| \geq 0} \varphi_{j,k}^m \exp(ik, x), \quad \varphi_{j,k} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

і для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує границя $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{j,k}^m = \varphi_{j,k}$, $j = 1, \dots, n$. Оскільки виконується умова (6), то для кожного $m \in \mathbb{N}$ задача

$$L_n(\partial/\partial t, D_x)u^m(t, x) = 0, \quad U_j[u^m(t, x)] = \varphi_j^m(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad m \in \mathbb{N},$$

має в просторі $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$ єдиний розв'язок $u^m(t, x) \equiv \sum_{|k| \geq 0} u_k^m(x) \exp(ik, x)$. Із формул (12), (13), (14) дістаємо, що

$$\begin{aligned} u^m(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \exp(ik, x) \left\{ \sum_{q=1}^r \varphi_{q,k}^m f_q(t, k) - \sum_{q=r+1}^n \sum_{j=1}^{n-r} \sum_{s=1}^r \frac{\Delta_{j,q-r}(k)}{\Delta(k)} \times \right. \\ \left. \times f_q(t, k) f_s^{(j-1)}(t, k) \varphi_{s,k}^m + \sum_{q=r+1}^n \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\Delta_{j,q-r}(k)}{\Delta(k)} f_q(t, k) \varphi_{r+j,k}^m \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Із формул (13), (15) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ і для довільного $t \in [0, T]$ виконуються нерівності

$$\left| \frac{d^j u_k^m(t)}{dt^j} - \frac{d^j u_k(t)}{dt^j} \right| \leq C_1 \delta_k M_k \left(\sum_{j=1}^r |\varphi_{j,k}^m - \varphi_{j,k}| M_k + \sum_{j=r+1}^n |\varphi_{j,k}^m - \varphi_{j,k}| \right), \quad (16)$$

де $j = 0, 1, \dots, n$, $m \in \mathbb{N}$, $C_1 > 0$ – стала, яка не залежить від j, k, m, t ,

$$\delta_k = 1 + \max_{1 \leq j, q \leq n-r} \left| \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \right|, \quad M_k = 1 + \max_{1 \leq q \leq n} \{ \|f_q(t, k); C^n[0, T]\| \}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

З нерівностей (16) отримуємо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує границя

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_k^m(t) - u_k(t); C^n[0, T]\| = 0.$$

Таким чином, послідовність $\{u^m(t, x)\}_{m=1}^\infty$ збігається в просторі $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$ до $u(t, x)$.

Доведення теореми для випадків $(-\infty, -\infty)$ -коректності та $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректності проводиться аналогічно. Теорему доведено. \square

Приклад 1. Нехай рівняння (1) має факторизований вигляд

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - B_n(t, D_x) \right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial t} - B_1(t, D_x) \right) u(t, x) = 0,$$

у якому $B_j(t, D_x) \in S_{\mathbb{R}}^{n-j}(G)$, $j = 1, \dots, n$. У цьому випадку диференціальний вираз $L_n(d/dt, k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є композицією диференціальних виразів першого порядку з дійсними коефіцієнтами. Тоді за теоремою Пойя (див. [6, с. 87]) умова (6) виконується для довільного $t_1 \in (0, T]$.

Теорема 2. Нехай $A_j(t, D) \in S^0(G)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, справджується умова (6) та існують сталі $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k)| \geq G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta G(k)). \quad (17)$$

Якщо $\alpha_j \geq \alpha + \gamma + 1$, $j = 1, \dots, n$,

$$\beta_j \geq \beta + \delta + (n - r + 2)AT, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\beta_j \geq \beta + \delta + (n - r + 1)AT, \quad j = r + 1, \dots, n,$$

де

$$A = \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \left\{ \frac{1}{G(k)} \sqrt{1 + \sum_{j=0}^{n-1} \max_{t \in [0, T]} |A_j(t, k)|^2} \right\}, \quad (18)$$

то задача (1), (2) є $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною.

Доведення. Функції $f_q(t, k)$, $q = 1, \dots, n$, є розв'язками рівняння (3) і справджують умови (4). Зведемо задачі Коші (4) для рівняння (3) до відповідних задач Коші для системи рівнянь першого порядку і використаємо наслідок 1 із [9, с. 29]. Тоді для функцій із фундаментальної системи розв'язків рівняння (3) отримаємо оцінки

$$\max_{t \in [0, T]} |f_q^{(j)}(t, k)| \leq C_2(1 + \delta_{j,n}G(k)) \exp(ATG(k)), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad q = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Із нерівностей (19) дістанемо, що

$$|\Delta_{j,q}(k)| \leq C_3 \exp((n - r)ATG(k)), \quad j, q = 1, \dots, n - r. \quad (20)$$

Нехай в умовах (2) $\varphi_j \in W_{\alpha_j, \beta_j}(G)$, $j = 1, \dots, n$. Оскільки виконується умова (6), то існує єдиний формальний розв'язок задачі (1), (2), який зображається рядом (13). Доведемо, що цей ряд належить до простору $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$. З нерівностей (17)–(20) для коефіцієнта Фур'є $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, ряду (13) отримуємо оцінки

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} |u_k^{(q)}(t)|^2 &\leq C_4 \left(\sum_{j=1}^r |\varphi_{j,k}|^2 w_k^2(\gamma + 1; \delta + (n - r + 2)AT) + \right. \\ &\left. + \sum_{j=r+1}^n |\varphi_{j,k}|^2 w_k^2(\gamma + 1; \delta + (n - r + 1)AT) \right), \quad q = 0, 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (21)$$

де вжито позначення $w_k(\xi; \eta) = G^\xi(k) \exp(\eta G(k))$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи елементарні співвідношення

$$w_k(\alpha; \beta) w_k(\gamma + 1; \delta + (n - r + 2)AT) \leq w_k(\alpha_j; \beta_j), \quad j = 1, \dots, r,$$

$$w_k(\alpha; \beta) w_k(\gamma + 1; \delta + (n - r + 1)AT) \leq w_k(\alpha_j; \beta_j), \quad j = r + 1, \dots, n,$$

з формули (13) та оцінок (21) дістаємо, що

$$\begin{aligned} \|u(t, x); C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))\| &= \sum_{q=0}^n \max_{t \in [0, T]} \sqrt{\sum_{|k| \geq 0} |u_k^{(q)}(t)|^2 w_k^2(\alpha; \beta)} \leq \\ &\leq C_5 \sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{|k| \geq 0} |\varphi_{j,k}|^2 w_k^2(\alpha_j; \beta_j)} = C_5 \sum_{j=1}^n \|\varphi_j(x); W_{\alpha_j, \beta_j}(G)\|. \end{aligned}$$

Таким чином, ряд (13) належить до простору $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$ і неперервно залежить від функцій $\varphi_j \in W_{\alpha_j, \beta_j}(G)$, $j = 1, \dots, n$. Теорему доведено. \square

Розвинемо визначник $W(g_1, \dots, g_n, y)$ за елементами останнього стовпця, тоді запишемо рівняння (31) у вигляді

$$y^{(n)}(t) + \sum_{q=0}^{n-1} r_q(t) y^{(q)}(t) = 0, \quad (32)$$

де

$$r_q(t) = \frac{w_q(t)}{W(g_1, \dots, g_n)(t)}, \quad q = 0, 1, \dots, n-1,$$

а $w_q(t)$ – алгебричне доповнення елемента $y^{(q)}(t)$, $q = 0, 1, \dots, n-1$, у визначнику $W(g_1, \dots, g_n, y)(t)$. Із умови леми 2 випливає, що коефіцієнти $r_q(t)$, $q = 0, 1, \dots, n-1$, рівняння (32) підпорядковані таким вимогам гладкості: $r_{n-1} \in C^{n-1}[a, b]$, $r_j \in C^{n-2}[a, b]$, $j = 0, 1, \dots, n-2$. Тому твердження леми 2 випливає з леми 1. \square

5 МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ МАЛИХ ЗНАМЕННИКІВ

З'ясуємо питання про можливість виконання нерівності (17), додатково припускаючи, що функція $G : \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$, яка описує ріст амплітуд псевдодиференціальних операцій у рівнянні (1), для деяких невід'ємних λ, μ справджує умову

$$\sum_{|k| \geq 0} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)) < \infty. \quad (33)$$

Нам знадобиться класична лема Бореля-Кантеллі.

Лема 3. (Бореля-Кантеллі, [13, 19]). Нехай $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність вимірних (за мірою Лебега в \mathbb{R}^n) множин з \mathbb{R}^n таких, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}_{\mathbb{R}^n} A_k < \infty.$$

Тоді міра Лебега в \mathbb{R}^n множини тих точок, які потрапляють до нескінченної кількості множин даної послідовності, дорівнює нулю.

Для кожного $j = 0, 1, \dots, r$, через $V_j(t, k)$ позначимо вронскіан $(n-j)$ функцій $f_{j+1}(t, k), \dots, f_n(t, k)$:

$$V_j(t, k) = \begin{vmatrix} f_{j+1}(t, k) & \dots & f_n(t, k) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{j+1}^{(n-j-1)}(t, k) & \dots & f_n^{(n-j-1)}(t, k) \end{vmatrix}.$$

Через $V_{j,q}(t, k)$, $q = j+1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, r$, будемо позначати той мінор визначника $V_j(t, k)$, який відповідає елементові $f_q^{(n-j-1)}(t, k)$; зрозуміло, що мінор $V_{j,j+1}(t, k)$ співпадає з вронскіаном $V_{j+1}(t, k)$.

Лема 4. Нехай $A_j(t, D_x) \in S^{n-2}(G)$, $j = 0, 1, \dots, n-2$, $A_{n-1}(t, D_x) \in S^{n-1}(G)$. Якщо на деякому проміжку $I \subset [0, T]$ виконується нерівність

$$\forall t \in I \quad |V_j(t, k)| \geq \exp(-\rho_j G(k)), \quad \rho_j \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

то для довільного $\sigma_j > 0$ множини

$$\{t \in I : |V_{j+1}(t, k)| < \exp(-\rho_{j+1}G(k))\}, \quad \rho_{j+1} = (n - j - 1)(\rho_j + AT + \sigma_j),$$

можна покрити не більше, ніж $N_{j+1}(k)$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує $d_{j+1}(k)$, при цьому для довільного $\varepsilon \in (0, \sigma_j)$ виконуються оцінки

$$N_{j+1}(k) \leq C_6 |I| \exp((\xi_j + \varepsilon)G(k)), \quad d_{j+1}(k) \leq C_7 \exp((\varepsilon - \sigma_j)G(k)),$$

де $\xi_j = (\rho_j + 2AT)(n - j - 1)$, а додатні сталі C_6, C_7 не залежать від k .

Доведення. Із умови леми 4 випливає, що

$$A_j(t, k) \in C^{m-2}[0, T], \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \quad A_{n-1}(t, k) \in C^{n-1}[0, T].$$

Тому функції $f_{j+1}(t, k), \dots, f_n(t, k)$ належать до простору $C^{2(n-j)-1}[0, T]$.

Оскільки $V_j(t, k) \neq 0$ для всіх $t \in I$, то за лемою 2

$$|W(V_{j,j+1}, \dots, V_{j,n})(t, k)| = |W(f_{j+1}, \dots, f_n)(t, k)|^{n-j-1} = |V_j(t, k)|^{n-j-1}.$$

Тоді з нерівності (34) випливає, що

$$|W(V_{j,j+1}, \dots, V_{j,n})(t, k)| \geq \exp(-(n - j - 1)\rho_j G(k)). \quad (35)$$

Розкриваючи визначник $W(V_{j,j+1}, \dots, V_{j,n})(t, k)$ і враховуючи, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \{G^\xi(k) \exp(-\varepsilon G(k))\} < \infty,$$

з оцінок (19) отримаємо

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad |W(V_{j,j+1}, \dots, V_{j,n})(t, k)| &\leq C(n, j) \max_{0 \leq q \leq n-j-1} \{|V_{j+1}^{(q)}(t, k)|\} \times \\ &\times \left(\max_{\substack{0 \leq q \leq n-j-1, \\ j+2 \leq s \leq n}} \{|V_{j,s}^{(q)}(t, k)|\} \right)^{n-j-1} \leq C_8 \max_{0 \leq q \leq n-j-1} \{|V_{j+1}^{(q)}(t, k)|\} \times \\ &\times \exp((n - j - 1)(AT + \varepsilon)G(k)), \end{aligned} \quad (36)$$

де $C(n, j), C_8 > 0$ – сталі, які не залежать від $k \in \mathbb{Z}^p$. Тоді з формул (35), (36) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує стала $C_9 > 0$ така, що в кожній точці $t \in I$ виконується нерівність

$$\max_{0 \leq q \leq n-j-1} \{|V_{j+1}^{(q)}(t, k)|\} \geq C_9 \exp(-(n - j - 1)(\rho_j + AT + \varepsilon)G(k)). \quad (37)$$

Зазначимо також, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує стала $C_{10} > 0$ така, що

$$\max_{0 \leq q \leq n-j} \{|V_{j+1}^{(q)}(t, k)|\} \leq C_{10} \exp((n - j - 1)(AT + \varepsilon)G(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (38)$$

Використовуючи міркування, аналогічні до наведених при доведенні допоміжних лем у праці [20], з формул (37), (38) отримуємо твердження леми 4. \square

Теорема 3. Нехай $A_{n-1}(t, D_x) \in S^{n-1}(G)$, $A_j(t, D_x) \in S^{n-2}(G)$, $j = 0, 1, \dots, n-2$, а для функції $G(k)$ виконується умова (33). Для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}) чисел $t_1 \in (0, T]$ нерівність (17) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при довільному $\gamma \in \mathbb{R}$ та $\delta = \nu_r$, де число ν_r визначається зі системи таких рекурентних співвідношень: $n_1 = 3AT(n-1)$, $\nu_1 = (n-1)((3n-2)AT + \mu + \sigma_0)$,

$$\begin{cases} \nu_{j+1} = (n-j-1)(n_j + \nu_j + AT + \mu + \sigma_j) + (n-j-1)^2(\nu_j + 2AT), \\ n_{j+1} = n_j + (n-j-1)(\nu_j + 2AT), \quad j = 1, \dots, r-1, \end{cases}$$

де σ_j , $j = 0, 1, \dots, r-1$, – довільні фіксовані додатні числа.

Доведення. Розглянемо такі множини:

$$E_j(k) = \{t \in [0, T] : |V_j(t, k)| < \exp(-\nu_j G(k))\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad j = 1, \dots, r.$$

Із формули Ліувілля для вронскіана системи функцій $f_1(t, k), \dots, f_n(t, k)$ випливає, що на всьому відрізьку $[0, T]$ виконується нерівність

$$|W(f_1, \dots, f_n)(t, k)| = |V_0(t, k)| \geq \exp(-ATG(k)) = \exp(-\nu_0 G(k)).$$

Згідно з лемою 4, множину $E_1(k)$ можна покрити відрізьками, які позначимо через $I_q^{(1)}(k)$, $q = 1, \dots, N_1(k)$, довжина кожного з яких не перевищує $d_1(k)$; при цьому для довільного $\varepsilon > 0$ виконуються такі оцінки:

$$\begin{aligned} N_1(k) &\leq C_{11} \exp((n_1 + \varepsilon)G(k)), \\ d_1(k) &\leq C_{12} \exp\left(\left(\nu_0 - \frac{\nu_1}{n-1} + \varepsilon\right)G(k)\right). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sum_{q=1}^{N_1(k)} \text{mes}_{\mathbb{R}} I_q^{(1)}(k) \leq N_1(k)d_1(k) \leq C_{13}G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)).$$

Припустимо, що множину $E_j(k)$, $j \geq 1$, можна покрити відрізьками, які позначимо через $I_q^{(j)}(k)$, $q = 1, \dots, N_j(k)$, довжина кожного з яких не перевищує $d_j(k)$ так, що для довільного $\varepsilon > 0$ виконуються оцінки

$$\begin{aligned} N_j(k) &\leq C_{14} \exp((n_j + \varepsilon)G(k)), \\ d_j(k) &\leq C_{15} \exp\left(\left(\nu_{j-1} + AT - \frac{\nu_j}{n-j} + \varepsilon\right)G(k)\right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\sum_{q=1}^{N_j(k)} \text{mes}_{\mathbb{R}} I_q^{(j)}(k) \leq N_j(k)d_j(k) \leq C_{16}G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)). \quad (39)$$

Множина $[0, T] \setminus \left\{ \bigcup_{q=1}^{N_j(k)} I_q^{(j)}(k) \right\}$ складається з не більше ніж $N_j(k) + 2$ проміжків $J_q^{(j+1)}(k)$, $q \leq N_j(k) + 2$. На кожному з проміжків $J_q^{(j+1)}(k)$, $q \leq N_j(k) + 2$, виконується нерівність

$$|V_j(t, k)| \geq \exp(-\nu_j G(k)).$$

За лемою 3 кожну з множин $E_{j+1}(k) \cap J_q^{(j+1)}$ ($q \leq N_j(k) + 2$) можна покрити $N_q^{(j+1)}(k)$ відрізками $I_{q,s}^{(j+1)}$, $s \leq N_q^{(j+1)}(k)$, довжина кожного з яких не перевищує $d_{j+1}(k)$; при цьому для довільного $\varepsilon > 0$ виконуються оцінки

$$N_q^{(j+1)}(k) \leq C_{17} \exp(((n-j-1)(\nu_j + 2AT) + \varepsilon)G(k)),$$

$$d_{j+1}(k) \leq C_{18} \exp\left(\left(\nu_j + AT - \frac{\nu_{j+1}}{n-j-1} + \varepsilon\right)G(k)\right),$$

Нехай

$$\Pi_{j+1}(k) = \bigcup_{q=1}^{N_j(k)} I_q^{(j)} \cup \left\{ \bigcup_{q=1}^{N_j(k)+2} \bigcup_{s=1}^{N_q^{(j+1)}(k)} I_{q,s}^{(j+1)} \right\}.$$

Зрозуміло, що система відрізків $\Pi_{j+1}(k)$ є покриттям множини $E_{j+1}(k)$. Оскільки

$$\sum_{q=1}^{N_j(k)+1} \sum_{s=1}^{N_q^{(j+1)}(k)} \text{mes}_{\mathbb{R}} I_{q,s}^{(j+1)} \leq C_{19} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)), \quad (40)$$

то з нерівностей (39), (40) випливає, що

$$\text{mes}_{\mathbb{R}} E_{j+1}(k) \leq C_{20} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)).$$

Таким чином, дістаємо

$$\text{mes}_{\mathbb{R}} E_r(k) \leq C_{21} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)).$$

Із умови (33) випливає, що ряд $\sum_{|k| \geq 0} \text{mes}_{\mathbb{R}} E_r(k)$ є збіжним. Тоді за лемою Бореля–Кантеллі міра Лебега в \mathbb{R} множини тих чисел t_1 , які належать до нескінченної кількості множин $E_r(k)$, $k \in \mathbb{Z}^P$, дорівнює нулеві. Теорему доведено. \square

6 ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ЗАДАЧІ

Результат теореми 3 можна суттєво уточнити для часткових випадків задачі (1), (2), коли кратність вузла $t = 0$ є максимальною ($r = n - 1$) або мінімальною ($r = 1$). Відповідні уточнення встановлено у теоремах 4, 5.

Лема 5. (див. [20]) *Нехай функція $f \in C^n([a, b]; \mathbb{C})$ є розв'язком рівняння*

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = 0, \quad (41)$$

в якому $a_j \in C([a, b]; \mathbb{C})$, $j = 1, \dots, n$. Якщо

$$\max_{1 \leq j \leq n} |f^{(j-1)}(a)| \geq \delta > 0, \quad \sum_{j=1}^n \max_{t \in [a, b]} |f^{(j)}(t)| \leq M,$$

то для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ виконується оцінка

$$\text{mes}_{\mathbb{R}} \{t \in (a, b) : |f(t)| < \varepsilon\} \leq C_{22} \max \left\{ 1, \frac{M}{\delta} \exp\left(\frac{n(b-a)A}{n-1}\right) \right\} n^{-1} \sqrt{\varepsilon/\delta},$$

де $\varepsilon_2 = \frac{\delta \exp(-(b-a)A)}{(2\sqrt{n})}$, $A = \left(1 + \sum_{j=1}^n \max_{t \in [a, b]} |a_j(t)|^2\right)^{1/2}$, $C_{22} = C_{22}(n, b-a)$.

Теорема 4. Нехай $A_j(t, D) \in S^0(G)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, а для функції $G(k)$ виконується умова (33). Якщо $r = n-1$, то нерівність (17) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}) чисел $t_1 \in (0, T]$, для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma \geq (\lambda+1)(n-1)$, $\delta \geq (2n-1)AT + \mu(n-1)$.

Доведення. Якщо $r = n-1$, то $\Delta(k) = f_n(t_1, k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Функція $f_n(t, k)$ є розв'язком задачі Коші:

$$f_n^{(n)}(t, k) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t, k) f_n^{(j)}(t, k) = 0, \quad f_n^{(j-1)}(0, k) = \delta_{j,n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Використаємо лему 5 для оцінки мір множин

$$M_{\gamma, \delta}(k) := \{t_1 \in (0, T] : |f_n(t_1, k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta G(k))\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Враховуючи, що

$$\max_{1 \leq j \leq n} |f_n^{(j-1)}(0, k)| = 1, \quad \sqrt{1 + \sum_{j=0}^{n-1} \max_{t \in [0, T]} |A_j(t, k)|^2} \leq AG(k),$$

а також те, що

$$\|f_n(t, k); C^n[0, T]\| \leq C_{23} G(k) \exp(ATG(k)),$$

при $\gamma \geq (\lambda+1)(n-1)$, $\delta \geq (2n-1)AT + \mu(n-1)$, дістанемо, що

$$\begin{aligned} \text{mes}_{\mathbb{R}} M_{\gamma, \delta}(k) &\leq C_{24} G(k) \exp\left(\frac{2n-1}{n-1} ATG(k)\right) n^{-1} \sqrt{G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta G(k))} = \\ &= C_{24} G^{1-\gamma/(n-1)}(k) \exp\left(\frac{(2n-1)AT - \delta}{n-1} G(k)\right) \leq C_{25} G^{-\lambda} \exp(-\mu G(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \end{aligned}$$

Таким чином, при $\gamma \geq (\lambda+1)(n-1)$, $\delta \geq (2n-1)AT + \mu(n-1)$ ряд $\sum_{|k| \geq 0} \text{mes}_{\mathbb{R}} M_{\gamma, \delta}(k)$ є збіжним.

Тоді з леми Бореля–Кантеллі випливає, що міра Лебега в \mathbb{R} множини чисел t_1 , які належать до нескінченної кількості множин $M_{\gamma, \delta}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, дорівнює нулеві. Теорему доведено. \square

Теорема 5. Нехай $A_j(t, D) \in S^{n-2}(G)$, $j = 0, 1, \dots, n-2$, $A_{n-1}(t, D) \in S^{n-1}(G)$, а для функції $G(k)$ виконується умова (33). Якщо $r = 1$, то нерівність (17) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}) чисел $t_1 \in (0, T]$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при

$$\gamma \geq (\lambda+1)(n-1), \quad \delta \geq (2n-1)A_1T + \mu(n-1) + a_{n-1}T,$$

де

$$A_1 = a \left(1 + \sum_{j=0}^{n-1} r_j^2\right)^{1/2}, \quad r_j = \sum_{q=0}^{n-1-j} C_{j+q}^j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$a_{n-1} = \max \left\{0; \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{t \in [0, T]} G^{-1}(k) \text{Re } A_{n-1}(t, k)\right\},$$

$$a = \max_{k \in \mathbb{Z}^p} \sup \left\{ \max_{0 \leq j \leq n-2} G^{-1}(k) \|A_j(t, k)\|_{C^{n-2}[0, T]}; G^{-1}(k) \|A_{n-1}(t, k)\|_{C^{n-1}[0, T]} \right\}.$$

Доведення. У випадку $r = 1$ визначник $\Delta(k)$ є мінором $(n - 1)$ -го порядку, що відповідає елементові $f_1^{(n-1)}(t_1, k)$ у вронскіані $W(f_1, \dots, f_n)(t, k)$. Розглянемо функцію

$$y(t, k) \equiv \Delta(k) \exp \left(\int_0^t A_{n-1}(\tau) d\tau \right), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (42)$$

За лемою 1 функція $y(t, k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, на відрізку $[0, T]$ є розв'язком рівняння

$$y^{(n)}(t, k) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} (A_j(t, k) y(t, k))^{(j)} = 0. \quad (43)$$

Після елементарних перетворень (розкриття похідних за правилом Лейбніца та зміни порядку підсумовування) рівняння (43) зведемо до такого вигляду:

$$y^{(n)}(t, k) + \sum_{j=0}^{n-1} r_j(t, k) y^{(j)}(t, k) = 0, \quad (44)$$

де $r_j(t, k) \equiv \sum_{q=0}^{n-1-j} (-1)^{n-q-j} C_{j+q}^j A_{j+q}^{(q)}(t, k)$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Для коефіцієнтів $r_j(t, k)$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, рівняння (44) виконуються нерівності

$$\max_{t \in [0, T]} |r_j(t, k)| \leq \sum_{q=0}^{n-1-j} C_{j+q}^j \max_{t \in [0, T]} |A_{j+q}^{(q)}(t, k)| \leq ar_j G(k), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

з яких випливає, що

$$\sqrt{1 + \sum_{j=0}^{n-1} \max_{t \in [0, T]} |r_j(t, k)|^2} \leq A_1 G(k).$$

Оскільки $f_q^{(j-1)}(0, k) = \delta_{j,q}$, $j, q = 1, \dots, n$, то з формули Тейлора для функцій $f_2(t, k), \dots, f_n(t, k)$ випливають такі розвинення:

$$f_q(t, k) = \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} + \beta_q(t, k) t^n, \quad q = 2, \dots, n, \quad (45)$$

де $\beta_q(t, k)$, $q = 2, \dots, n$, – неперервні функції в околі точки $t = 0$. У випадку $r = 1$ визначник $\Delta(k)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ дорівнює значенню у точці $t = t_1$ вронскіана $W_{n-1}(f_2(t, k), \dots, f_n(t, k))$ системи функцій $f_2(t, k), \dots, f_n(t, k)$. Враховуючи властивість вронскіана, описану в задачі 57 у [12, ч. 2, с. 126], з розвинень (45) отримаємо, що в околі точки $t_1 = 0$ виконуються рівність

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= W_{n-1} \left(\frac{t_1}{1!} + \beta_2(t_1, k) t_1^n, \dots, \frac{t_1^{n-1}}{(n-1)!} + \beta_n(t_1, k) t_1^n \right) = \\ &= t_1^{n-1} W_{n-1} \left(\frac{1}{1!} + \beta_2(t_1, k) t_1^{n-1}, \dots, \frac{t_1^{n-2}}{(n-1)!} + \beta_n(t_1, k) t_1^{n-1} \right) = \\ &= t_1^{n-1} W_{n-1} \left(\frac{1}{1!}, \dots, \frac{t_1^{n-2}}{(n-1)!} \right) + \beta(t_1, k) t_1^n = C_{26} t_1^{n-1} + \beta(t_1, k) t_1^n, \end{aligned} \quad (46)$$

де $C_{26} = \frac{1}{(n-1)!}$, а $\beta(t_1, k)$ – неперервна функція в околі точки $t_1 = 0$. Із розвинення (46) випливає, що

$$\left. \frac{d^{j-1} \Delta(k)}{dt_1^{j-1}} \right|_{t_1=0} = \delta_{j,n}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (47)$$

На підставі правила Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, із рівності (42) та формул (47) отримуємо, що

$$\left. \frac{d^{j-1}y(t_1, k)}{dt_1^{j-1}} \right|_{t_1=0} = \delta_{j,n}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (48)$$

Застосовуючи лему 5 до функції $y(t, k)$, яка є розв'язком задачі Коші (44), (48), дістаємо, що при $\gamma \geq (\lambda + 1)(n - 1)$, $\delta_0 \geq (2n - 1)A_1T + \mu(n - 1)$

$$\begin{aligned} & \text{mes}_{\mathbb{R}} \{t_1 \in (0, T] : |y(t_1, k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta_0 G(k))\} \leq \\ & \leq C_{27} G(k) \exp\left(\frac{2n-1}{n-1} A_1 T G(k)\right) {}^{n-1}\sqrt{G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta_0 G(k))} = \\ & = C_{27} G^{1-\frac{\gamma}{(n-1)}}(k) \exp\left(\frac{(2n-1)A_1 T - \delta_0}{n-1} G(k)\right) \leq C_{28} G^{-\lambda} \exp(-\mu G(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \end{aligned} \quad (49)$$

Із рівності (42) випливає включення

$$\begin{aligned} & \{t_1 \in [0, T] : |\Delta(k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-(\delta_0 + a_{n-1}T)G(k))\} \subset \\ & \subset \{t_1 \in [0, T] : |y(t_1, k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta_0 G(k))\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \end{aligned}$$

Тому з нерівностей (49) отримуємо, що ряд

$$\sum_{|k| \geq 0} \text{mes} \{t_1 \in [0, T] : |\Delta(k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-(\delta_0 + a_{n-1}T)G(k))\}$$

є збіжним, коли $\gamma \geq (\lambda + 1)(n - 1)$, $\delta_0 \geq (2n - 1)A_1T + \mu(n - 1)$. Із леми Бореля–Кантеллі дістаємо твердження теореми. \square

7 КОРЕКТНІСТЬ ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МАЙЖЕ ВСІХ ЗНАЧЕНЬ ДРУГОГО ВУЗЛА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Зауваження 1. Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник $\Delta(k)$ як функція змінної t_1 може мати на $[0, T]$ не більш ніж скінченну кількість нулів. Тому множина

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p} \{t_1 \in [0, T] : \Delta(k) = 0\}$$

має нульову міру Лебега.

Із теорем 2–5 і зауваження 1 випливають такі твердження про коректність задачі (1), (2) для майже всіх чисел $t_1 \in (0, T]$.

Наслідок 1. Нехай $A_{n-1}(t, D) \in S^{n-1}(G)$, $A_j(t, D) \in S^{n-2}(G)$, $j = 0, 1, \dots, n-2$, а для функції $G(k)$ виконується умова (33). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}) чисел $t_1 \in (0, T]$ задача (1), (2) є $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною, де

$$\begin{aligned} \alpha_j & \geq \alpha + \gamma + 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ \beta_j & \geq \beta + \nu_r + (n - r + 2)AT, \quad j = 1, \dots, r, \\ \beta_j & \geq \beta + \nu_r + (n - r + 1)AT, \quad j = r + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

γ – довільне дійсне число, число ν_r – таке ж, як у теоремі 3.

Наслідок 2. Нехай $A_j(t, D_x) \in S^0(G)$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, а для функції $G(k)$ виконується умова (33). Якщо $r = n - 1$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}) чисел $t_1 \in (0, T]$ задача (1), (2) є $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною, де

$$\alpha_j \geq \alpha + (\lambda + 1)(n - 1) + 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\beta_j \geq \beta + \mu(n - 1) + (2n + 2)AT, \quad j = 1, \dots, n - 1,$$

$$\beta_n \geq \beta + \mu(n - 1) + (2n + 1)AT.$$

Наслідок 3. Нехай $A_{n-1}(t, D_x) \in S^{n-1}(G)$, $A_j(t, D_x) \in S^{n-2}(G)$, $j = 0, 1, \dots, n - 2$, і нехай для функції $G(k)$ виконується умова (33). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}) чисел $t_1 \in (0, T]$ задача (1), (2) при $r = 1$ є $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною, де

$$\alpha_j \geq \alpha + (\lambda + 1)(n - 1) + 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\beta_1 \geq \beta + \mu(n - 1) + ((2n - 1)A_1 + a_{n-1} + 3nA)T,$$

$$\beta_j \geq \beta + \mu(n - 1) + ((2n - 1)A_1 + a_{n-1} + (3n - 1)A)T, \quad j = 2, \dots, n,$$

де сталі A_1, a_{n-1} – такі ж, як у теоремі 5.

8 ВИСНОВКИ

Ця стаття присвячена дослідженню коректності задач з локальними двоточковими умовами за змінною t для рівнянь з псевдодиференціальними за x операціями, символи яких залежать від t . Встановлено умови однозначної розв'язності цих задач у функціональних просторах, вага яких залежить від функції, що описує можливий ріст амплітуд псевдодиференціальних операцій–коефіцієнтів рівняння. На основі тверджень про оцінки мір виняткових множин гладких функцій уперше для рівнянь загального вигляду зі змінними за t коефіцієнтами доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень другого вузла інтерполяції. Доцільним завданням є перенесення отриманих результатів на випадок систем псевдодиференціальних рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Arnol'd V.I. *Small denominators. I. Mapping the circle onto itself*. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1961, 25, (1), 21–86. (Russian)
- [2] Bernik V.I., Beresnevich V.V., Vasylyshyn P.B., Ptashnyk B.Yo. *Multipoint problem with multiple nodes for linear hyperbolic equations*. Ukr. math. journ. 1999, 51 (10), 1311–1316. (Ukrainian)
- [3] Bernik V.I., Melnychuk Yu.V. *Diophantine approximations and the Hausdorff dimension*. Nauka i Tekhnika, Minsk, 1988. (Russian)
- [4] Bobyk I.O., Ptashnyk B.Yo. *Boundary value problems for hyperbolic equations with constant coefficients*. Ukr. math. journ. 1994, 46 (7), 795–802. (Ukrainian)
- [5] Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L. *Boundary value problems for differential-operator equations*. Nauk. Dumka, Kyiv, 1984, 284 p. (Russian)
- [6] Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. Mir, Moscow: Mir, 1970, 720 p. (Russian)
- [7] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M. *Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method*. Publishing House of Lviv Polytechnic National University, Lviv, 2002. (Ukrainian)

- [8] Kamke E. Handbook of Ordinary Differential Equations. Nauka, Moscow, 1971, 576 p. (Russian)
- [9] Kartashev A.P., Rozhdestvenskii B.L. Ordinary Differential Equations and Fundamentals of the Calculus of Variations. Nauka, Moscow, 1980. – 288 p. (Russian)
- [10] Nytrebych Z.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics*. Azerb. Journal of Mathematics 2017, **7** (2), 180–196.
- [11] Nytrebych Z.M., Malanchuk O.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *On the solvability of two-point in time problem for PDE*. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics 2017, (38), 715–726.
- [12] Polya G., Szegő G. Problems and Theorems in Analysis: in 2 vols. Nauka, Moscow, 1978. – Vol. 1, 391 p. – Vol. 2, 432 p. (Russian)
- [13] Ptashnik B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. Nauk. Dumka, Kyiv, 1984. (Russian)
- [14] Ptashnik B.I., Shtabalyuk P.I. *A boundary value problem for hyperbolic equations in a class of functions that are almost periodic with respect to space variables*. Differentsial'nye Uravneniya 1986, **22** (4), 669–678. (Russian)
- [15] Sprindzhuk V. G. *Achievements and problems in Diophantine approximation theory*. Russian Mathematical Surveys, 1980, Volume 35, Issue 4, 1–80.
- [16] Symotyuk M.M. *Two-point problem for linear partial differential equations with constants coefficients*. Sci. Bull. Uzhhorod Nat. University, 2002, **7**, 96–107. (Ukrainian)
- [17] Symotyuk M.M. *Diophantine approximations of characteristic determinant of the two-point problem for partial differential equations*. Mathem. Bulletin of Shevchenko Scientific Society 2004, **2**, 199–212. (Ukrainian)
- [18] Symotyuk M.M., Tymkiv I.R. *Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time*. Carpathian Mathematical Publication 2014, **6** (2), 351–359. doi: 10.15330/cmp.6.2.351–359.
- [19] Sprindzhuk V.G. Metric Theory of Diophantine Approximations. Nauka, Moscow, 1977, 144 p. (Russian)
- [20] Symotyuk M.M. *A multipoint problem for pseudodifferential equations with partial derivatives*. Math. Methods and Phys.-Mech. Fields, 2003, Vol. 46, No. 2, P. 26–41.
- [21] Valitskii Yu.N. *Well-posedness of a problem for a differential equation with given values for a function and its derivatives at several points*. Sibirsk. Mat. Zh. 1996, **37** (2), 251–258. (Russian)

Надійшло 11.11.2025

Symotiuk M.M. *Two-point problem for linear systems of partial differential equations*, Bukovian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 201–218.

In this paper, we study the well-posedness of a problem with two multiple nodes with respect to a distinguished variable t and periodicity conditions with respect to the remaining coordinates x_1, \dots, x_p for linear pseudodifferential equations. Conditions for the existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration in spaces of exponential type on the torus are established. By means of a metric approach, theorems providing lower bounds for small denominators arising in the construction of the solution are proved.