

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.08>

Малик І.В., Івасюк Р.В.

ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ НЕОДНОРІДНИХ ПРИХОВАНИХ НАПІВМАРКІВСЬКИХ МОДЕЛЕЙ

Стаття присвячена дослідженню неоднорідних прихованих напівмарковських моделей, запропоновано методику оцінювання параметрів у випадку, коли зміна розподілів часу перебування у станах та матриць ймовірностей переходів є обмеженою за часом.

Отримані результати дозволяють застосовувати модель для опису систем зі змінною структурою. Запропонована методика може бути використаною в задачах аналізу часових рядів зі структурними змінами, а також для задач оптимального керування стохастичних систем, де важливим є врахування змін у поведінці процесу впродовж часу.

Ключові слова і фрази: неоднорідні приховані напівмарковські моделі, стохастичне моделювання.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: i.malyk@chnu.edu.ua (Малик І.В.), ivasiuk.roman@chnu.edu.ua (Івасюк Р.В.)

ВСТУП

У роботі Yu S.-Z. [1] розглянуто приховані напівмарковські моделі як розширення класичних прихованих марковських моделей шляхом введення явного розподілу тривалості станів. Це дозволяє моделювати неоднорідні процеси, де часові інтервали між подіями не є експоненційно розподіленими. Автор систематизував різні підходи до побудови таких моделей та модифікував алгоритм forward–backward для їхньої реалізації. У роботі [1] розширено класичну приховану марковську модель, вводячи змінну θ_t — тривалість перебування системи у прихованому стані Y_t . Нехай X_t позначає спостереження в момент часу t , тоді повна ймовірність моделі задається як

$$P(X_t, Y_t, \theta_t) = P(Y_t | Y_{t-1}) P(\theta_t | Y_t) P(X_t | Y_t, \theta_t),$$

де $P(\theta_t | Y_t)$ описує довільний невід’ємний розподіл тривалості часу перебування в станах. Це усуває експоненційне припущення класичної моделі.

Dong і He [2] запропонували сегментальну модифікацію HSMM (Segmental HSMM), орієнтовану на аналіз часових процесів у технічних системах. Модель дозволяє одночасно враховувати

УДК 517.956

2010 *Mathematics Subject Classification*: 35k35, 35k20.

Information on some grant ...

час перебування в станах і характеристику кожного сегмента, що забезпечує кращу точність діагностики та прогнозування деградаційних процесів. Оцінка параметрів виконувалася за допомогою EM-алгоритму. В даній роботі послідовність замірів процесу поділяється на сегменти $X_{t_s:t_{s+1}}$, що відповідають одному стану Y_s із тривалістю θ_s . Ймовірність спостережень для кожного сегмента подається у вигляді функції правдоподібності

$$L = \prod_{s=1}^S P(X_{t_s:t_{s+1}} | Y_s, d\theta_s),$$

що забезпечує гнучке моделювання перехідних процесів у часі.

У роботі [3] застосовано HSMM для статистичного синтезу мовлення, де модель забезпечує керування тривалістю фонем і плавність зміни акустичних параметрів. На відміну від HMM, HSMM дозволяє явно враховувати часову структуру сигналу, що підвищує природність синтезованого мовлення. Оптимізація здійснювалась через модифікований EM-процес. Автори застосували HSMM у задачі синтезу мовлення, де X_t — вектор спектральних коефіцієнтів звуку, що моделюється гаусівським розподілом

$$P(X_t | Y_t) \sim \mathcal{N}(X_t; \mu_t, \Sigma_t),$$

а параметри μ_t та Σ_t відповідають середнім та коваріаційним матрицям для кожного стану Y_t . Такий підхід дозволяє точно відтворювати динаміку мовного сигналу.

Guedon [4] розробив метод оцінювання параметрів HSMM для дискретних послідовностей спостережень. Його підхід дозволяє працювати з довільними, у тому числі непараметричними, розподілами тривалості станів. Це забезпечує можливість моделювання складних або нерегулярних процесів, де стандартні HMM неефективні. Тут розглянуто оцінку прихованих напівмарковських процесів, у яких розподіл тривалості $f_\theta(\theta_t)$ визначається непараметрично. Функція правдоподібності моделі записується наступним чином

$$P(X | \theta) = \sum_Z \prod_t f_\theta(\theta_t) P(X_t | Y_t),$$

що робить оцінку часу перебування в станах гнучкішою порівняно з фіксованими розподілами.

Автори роботи [5] використали HSMM для опису фінансових часових рядів, особливо для моделювання змін між режимами високої та низької волатильності. Завдяки урахуванню тривалості ринкових фаз HSMM краще відтворюють статистичні властивості даних, ніж HMM. Параметри моделі оцінювалися методом максимальної правдоподібності. В роботі досліджено застосування HSMM до фінансових часових рядів, моделюючи тривалості θ_t гамма-розподілом:

$$P(\theta_t | Y_t) \sim \text{Gamma}(\alpha_{Y_t}, \beta_{Y_t}),$$

де параметри $(\alpha_{Y_t}, \beta_{Y_t})$ визначають форму та масштаб розподілу для кожного стану. Це дозволяє відтворювати довгі або короткі фази волатильності на ринку.

У роботі [6] здійснено систематичний огляд досліджень, присвячених HMM і HSMM, зосереджуючись на їхніх модифікаціях та практичних застосуваннях. Автори підкреслюють, що неоднорідні та узагальнені версії HSMM активно використовуються у різних галузях — від біоінформатики до фінансового аналізу — завдяки їхній здатності відображати складну часову структуру даних. Повна ймовірність моделі має вигляд

$$P(X, Z, \theta) = \prod_t \theta_t P(Y_t | Y_{t-1}) P(\theta_t | Y_t, X_t) P(X_t | Y_t),$$

що описує неоднорідні та контекстно залежні процеси.

У роботі [7] представлено узагальнений огляд прихованих марковських моделей (НММ) та байєсівських мереж, показавши, як обидва підходи можна інтерпретувати через структуру графових залежностей. Автор розглянув методи оцінювання параметрів, зокрема алгоритм максимальної правдоподібності на основі ЕМ-процедури, та продемонстрував застосування НММ у задачах розпізнавання мовлення, біоінформатики та часових рядів. Ця робота стала фундаментальною для розвитку ідей застосування НММ для більш складних байєсівських моделей. На відміну від інших робіт, у даній роботі представлено класичну НММ як окремий випадок байєсівської мережі, у якій спостереження X_t генеруються з прихованих станів Y_t за ймовірністю

$$P(X_t, Y_t) = P(Y_t | Y_{t-1}) P(X_t | Y_t).$$

Така структура закладає основу для побудови складніших моделей, зокрема HSMM та їхніх байєсівських версій.

Scott [8] запропонував байєсівські методи для оцінювання прихованих марковських моделей, у яких усі параметри, включно з кількістю станів, розглядаються як випадкові змінні. Автор використовує алгоритми симпліфікації за Гіббсом та методи Монте-Карло марковських ланцюгів для отримання апостеріорних розподілів. Такий підхід дозволяє оцінити апріорну інформацію та уникнути проблеми переобчислення при різних розмірах моделі. Параметри $\lambda = (A, B, \pi)$ оцінюються не через ММП, а через апостеріорний розподіл

$$P(\lambda | X) \propto P(X | \lambda)P(\lambda),$$

який апроксимується методами зазначеними вище, що відрізняє цей підхід від частотного аналізу Ghahramani.

Ryden і Titterton [9] розвинули ідею байєсівського оцінювання НММ, застосувавши стрибкові методи Монте-Карло марковських ланцюгів (Jump Markov Chain Monte Carlo, JMCMC). Їхній підхід забезпечує оцінку структури моделі (кількості станів) та параметрів переходів у рамках єдиного алгоритму. Це дослідження стало ключовим кроком до інтеграції байєсівських методів у динамічне моделювання прихованих процесів. Автори застосували JMCMC, де стан моделі може змінюватися разом із кількістю прихованих станів K , тобто при переході між моделями використовується крок

$$P(K' | K) P(\theta_{K'} | K'),$$

що забезпечує байєсівське порівняння моделей різної розмірності.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Як було зазначено у вступі, основні роботи в напрямку прихованих моделей ґрунтуються на припущенні однорідності в часі, тобто незмінності ймовірнісних характеристик розглянутих систем. Дане припущення являється корисним із декількох причин: по-перше, з точки зору оцінки параметрів, дане припущення являється ефективним, оскільки при оцінці параметрів використовуються асимптотичні методи оцінки, тобто при збільшенні розміру вибірки точність оцінок лише зростає; по-друге дане припущення спрощує оцінку параметрів, оскільки непотрібно оцінювати точки зміни (у випадку кусково-сталих параметрів) або визначення правила зміни для параметрів у випадку неперервної зміни.

Розглянемо випадковий процес (τ_t, X_t, Y_t) , $t \geq 0$, де τ_t — моменти зміни випадкових процесів (X_t, Y_t) , $t \geq 0$, причому надалі будемо вважати, що справедливе наступне представлення для моментів зміни τ_t :

$$\tau_0 = 0, \tau_t = \tau_{t-1} + \theta_t,$$

де θ_t — час перебування у станах для t -ї зміни процесу (X_t, Y_t) , причому θ_t має розподіл $F^{(t)}$; $X_t \in \mathbf{X} = \{s_1, \dots, s_n\}$ — прихований дискретний ланцюг Маркова, що описує динаміку прихованого процесу та визначається матрицею перехідних ймовірностей

$$A^{(t)} = (a_{ij}^{(t)})_{i,j \in \mathbf{X}'},$$

$$a_{ij}^{(t)} = P(X_t = j | X_{t-1} = i), t \geq 1, \quad (1)$$

де $Y_t \in \mathbf{Y} = \{o_1, \dots, o_M\}$ — видимий процес, умовні розподіли якого визначаються на основі процесу X_t згідно співвідношення

$$B^{(t)} = (b_{ij}^{(t)})_{i \in \mathbf{X}, j \in \mathbf{Y}'},$$

$$b_{ij}^{(t)} = P(Y_t = j | X_t = i), t \geq 1. \quad (2)$$

Таким чином, розглянутий вище неоднорідний прихований напівмарковський процес описується набором параметрів

$$\lambda = \{F^{(t)}, \pi, A^{(t)}, B^{(t)}\}, t \geq 1, \quad (3)$$

де π — початковий розподіл процесу X_t , тобто

$$\pi_i = P(X_0 = i), i \in \mathbf{X}.$$

Зрозумілим є той факт, що відсутність однорідності по часу параметрів $(F^{(t)}, A^{(t)}, B^{(t)})$ для (4) ускладнює саму задачу оцінки параметрів із наступних причин:

- За умови відсутності однорідності параметрів потрібно робити додаткові припущення щодо природи змін $(F^{(t)}, A^{(t)}, B^{(t)})$.
- Алгоритми оцінки параметрів [10] та алгоритми оцінки оптимальної динаміки прихованого ланцюга [11] розраховані на однорідний випадок. Тому для оцінки параметрів неоднорідної моделі слід розбивати вибірку на підвибірки за часом та проводити наближення неперервних параметрів більш простими характеристиками, наприклад, кусково-сталими функціями. В результаті такого припущення знижується точність оцінки параметрів моделі λ (3).

У даній роботі розглянемо оцінку параметрів неоднорідного прихованого напівмарковського процесу із обмеженнями на швидкість зміни параметрів моделі (3). Умову обмеженості зміни параметрів λ (3) моделі будемо визначати у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \max_{0 \leq t < s \leq T} d_D(F^{(t)}, F^{(s)}) \leq \varepsilon, \\ \max_{0 \leq t < s \leq T} [d_M(A^{(t)}, A^{(s)}) + d_M(B^{(t)}, B^{(s)})] \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

де метрики в просторі функцій розподілу та просторі матриць будемо визначати наступним чином:

$$d_D(F, G) = \sup_{x \in R_+} |F(x) - G(x)|,$$

$$d_M(K, L) = \|K - L\|_{L_\infty} = \max_{i,j} |K_{ij} - L_{ij}|.$$

У цьому випадку, оптимізаційна задача оцінки параметрів неоднорідної прихованої напівмарковської моделі визначається наступним чином:

$$L(\lambda; y_{1:T}) \rightarrow \text{MAX}, \quad (5)$$

де $L(\lambda; y_{1:T})$ — функція правдоподібності для процесу (τ_t, X_t, Y_t) , тобто

$$\begin{aligned} L(\lambda; y_{1:T}) = \\ P(X_0 = x_0) \prod_{t=1}^{T-1} P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_{t-1} = x_t) P(Y_{t+1} = y_{t+1} | X_{t+1} = x_{t+1}) = \\ \pi_0 \prod_{t=1}^{T-1} a_{x_t, x_{t+1}}^t b_{x_{t+1}, y_{t+1}}^t. \end{aligned} \quad (6)$$

Як можна бачити з рівняння (6), процес знаходження розв'язку цілком аналогічний класичному пошуку оптимальних параметрів. Проте в даному випадку, процес являється неоднорідним, отже для розв'язання задачі необхідно розбивати вихідний інтервал $[0, T]$ на підінтервали, використовуючи моменти розбиття τ_n .

2 АЛГОРИТМ ОЦІНКИ

У загальному випадку, задачу, описану вище, складно розв'язати, оскільки оптимізаційна задача (5) для оцінки параметрів λ (3) не являється задачею опуклого програмування. Для спрощення самої задачі пошуку оптимальних параметрів (5) за умов (4) зробимо ще два додаткові припущення:

- час перебування в стані дозволяє в середньому отримати достатню велику вибірку для оцінки параметрів моделі, тобто

$$E\theta_n \geq N, \quad (7)$$

де через N будемо визначати необхідну кількість замірів на одному інтервалі неперервності параметрів $(A^{(t)}, B^{(t)})$;

- Зміна параметрів відбувається поступово, тобто перевіряються лише параметри на сусідніх інтервалах. Дану умову можна записати у наступному вигляді

$$\begin{cases} \max_{0 \leq t < T} d_D(F^{(t)}, F^{(t+1)}) \leq \varepsilon, \\ \max_{0 \leq t < T} [d_M(A^{(t)}, A^{(t+1)}) + d_M(B^{(t)}, B^{(t+1)})] \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (8)$$

Умови, визначені вище не лише забезпечують кускову сталість розглянутого процесу (τ_t, X_t, Y_t) , а і дозволяють розглядати більш ширший діапазон параметрів. Основною проблемою при аналізі проблеми оптимізації (5) за умов (7), (8) являється проблематика визначення моментів переключення системи τ_n , оскільки значення прихованого процесу X_t — невідомі та оцінюються на основі оптимізації.

Розглянемо для оцінки параметрів λ наступний алгоритм.

- 1 Оцінка параметрів λ для однорідного процесу (\hat{X}_t, \hat{Y}_t) , що визначається параметрами (π, \hat{A}, \hat{B}) .
- 2 Оцінка моментів переключення τ_n на основі оцінених значень прихованого ланцюга Маркова $X_t = \hat{x}_t$ з попереднього пункту.
- 3 Перевірка виконання умови (7). Якщо умова (7) виконується, то переходимо пункту 5, в іншому випадку – до п. 4.
- 4 Нехай i_1, \dots, i_k – індекси інтервалів, для яких не виконується умова (7) або (8). Для цих інтервалів визначимо сусідній інтервал, який містить мінімальне значення замірів, тобто

$$i_j^u = \operatorname{argmin}\{|\tau_{i_j-1} - \tau_{i_j-2}|, |\tau_{i_j+1} - \tau_{i_j}|\}.$$

Після переобчислення інтервалів, повертаємося до кроку 3.

- 5 Оцінюємо параметри λ на основі оптимізаційної задачі (5), використовуючи байєсівський метод або алгоритм Вітербі. Перевіряємо умови (7) або (8). Якщо умови виконані, то виходимо з алгоритму, в іншому випадку – переходимо до кроку 4.

ПРИКЛАД МОДЕЛЮВАННЯ НЕОДНОРІДНОГО НАПІВМАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

У якості ілюстрації роботи запропонованої методики проведено моделювання неоднорідного прихованого напівмарковського процесу з дискретним простором станів $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ та алфавітом емісій розміру $M = 4$. Горизонт моделювання становить $T = 600$ дискретних кроків, істинні моменти зміни параметрів задано наступними точками змін

$$\mathbf{T} = [0, 200, 380, T],$$

що відповідає трьом кусково-сталим інтервалам на часовій осі. Таким чином, моменти перебування однорідності системи мають наступні часові інтервали

$$[0, 200), [200, 380), [380, 600].$$

Для моделювання матриці переходів $A^{(t)}$ та матриці емісій $B^{(t)}$ використаємо підхід, реалізований у роботі [10]. Визначимо основні параметри на інтервалах сталості: для сегменту $t \in [1, 200]$:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.20 & 0.15 & 0.05 \\ 0.10 & 0.70 & 0.10 & 0.10 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix},$$

для сегменту $t \in [201, 380]$:

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.40 \\ 0.05 & 0.90 & 0.02 & 0.03 \\ 0.40 & 0.20 & 0.20 & 0.20 \end{pmatrix},$$

для сегменту $t \in [381, 600]$:

$$B^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.20 & 0.20 \\ 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.40 \\ 0.05 & 0.15 & 0.60 & 0.20 \end{pmatrix}.$$

Для визначення перехідних ймовірностей $A^{(t)}$, $B^{(t)}$ використовуємо поняття інтенсивностей переходів – Табл. 1, яке часто зустрічається в теорії систем масового обслуговування. Задамо інтенсивності переходів між станами для даного прикладу, що задаються функцією тривалості перебування $\theta \in \mathbb{N}$ у стані

$$\lambda_{ij}(\theta) = \exp(\alpha_{ij}\theta + \beta_{ij} \ln(d+1) + \gamma_{ij}),$$

де $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ – параметри для переходу $i \rightarrow j$. Процес ініціалізовано у стані $i_1 = 1$ з початковою тривалістю $\theta_1 = 1$. Параметри моделі підбрано так, щоб забезпечити різні режими переходів та чітко виражену неоднорідність у часі, тобто залежність матриць $A^{(t)}, B^{(t)}$ від часу.

Табл. 1: Істинні параметри інтенсивностей переходів $\lambda_{ij}(d)$.

Перехід $i \rightarrow j$	α_{ij}	β_{ij}	γ_{ij}
1 \rightarrow 1	0.80	1.15	0
1 \rightarrow 2	1.20	1.05	0.01
1 \rightarrow 3	1.00	1.10	0.02
2 \rightarrow 1	0.90	1.25	0.01
2 \rightarrow 2	0.70	1.20	0
2 \rightarrow 3	1.10	1.30	0.015
3 \rightarrow 1	1.00	1.05	0.02
3 \rightarrow 2	0.95	1.10	0.01
3 \rightarrow 3	0.85	1.20	0

Алгоритм генерації траєкторії напівмарковського процесу реалізовано у середовищі Python. Для кожного моменту часу t виконується така послідовність:

1. Для поточного стану i_t і тривалості θ_t обчислюються інтенсивності переходів $\lambda_{i_t j}(\theta_t)$ для всіх $j \neq i_t$ та нормалізуються інтенсивності для всіх інших станів:

$$p_{i_t j}(\theta_t) = \frac{\lambda_{i_t j}(\theta_t)}{\sum_{k \neq i_t} \lambda_{i_t k}(\theta_t)}.$$

2. Наступний стан i_{t+1} генерується випадково згідно з розподілом $\{p_{i_t j}\}$.
3. Тривалість перебування в стані оновлюється згідно наступного правила.

$$\theta_{t+1} = \begin{cases} \theta_t + 1, & i_{t+1} = i_t, \\ 1, & i_{t+1} \neq i_t. \end{cases}$$

Оцінювання виконувалося на змодельованій траєкторії довжиною $T = 600$. Отримані оцінки демонструють коректне відтворення кусково-сталих структур параметрів: всередині кожного інтервалу похибки є малими, тоді як у околі точок зміни параметрів спостерігаються характерні транзйентні відхилення.

Розглянемо моделювання даної системи. На Рис. 1 відображено траєкторію процесу $Y_t, t \in [0, 600]$. Як ми можемо бачити із даного рисунку, при переході через точки τ_i відбувається зміна структури самої системи.

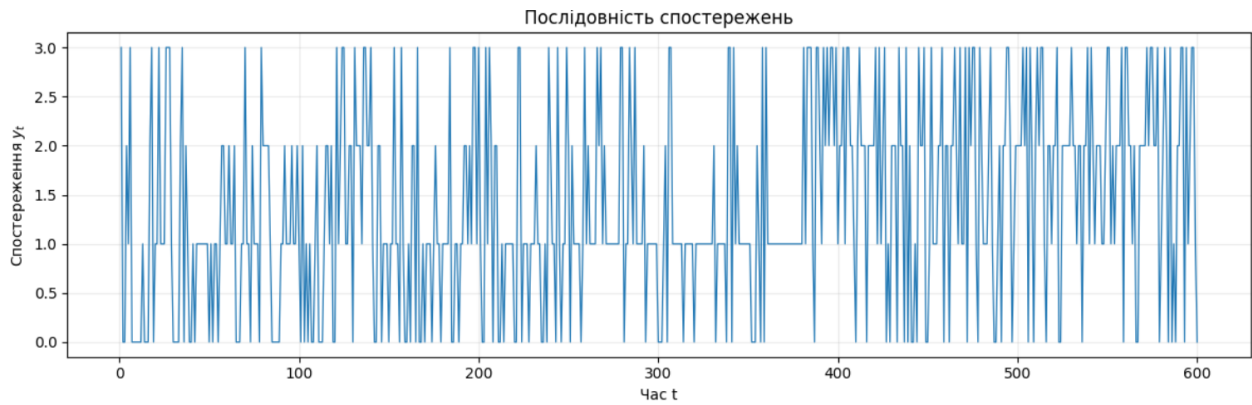
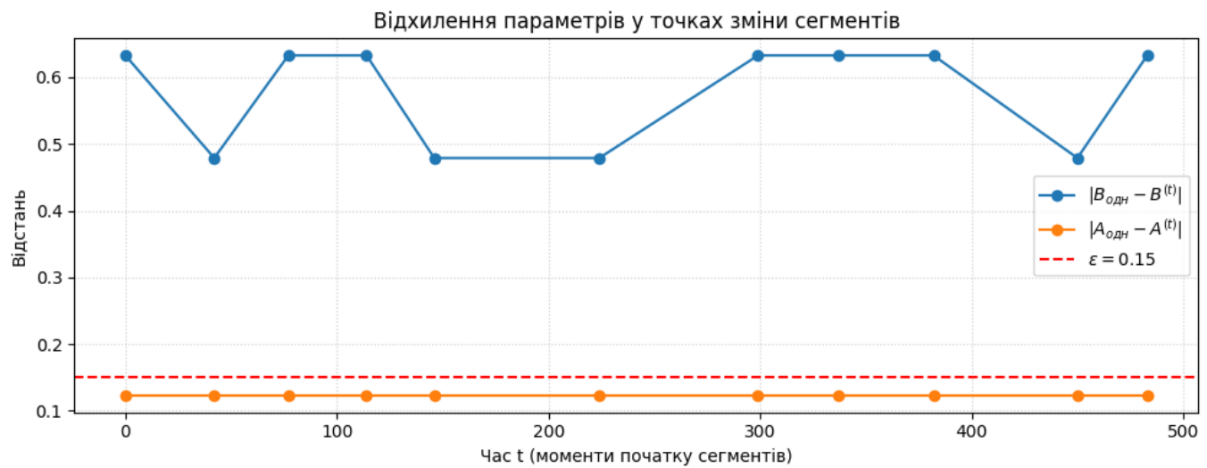


Рис. 1: Послідовність спостережень

Рис. 2: Похибки оцінювання параметрів з наступними довжинами інтервалів $[42, 35, 37, 32, 78, 75, 38, 45, 68, 33, 117]$ при $N = 30$

На Рис. 2 відображено різницю між параметрами однорідної та неоднорідної системи. З цього рисунку можна зробити висновок, що параметри прихованого ланцюга Маркова X_t являються більш стійкими при переході від однорідного до неоднорідного випадку, з іншого боку для матриці переходу $B^{(t)}$ дані відмінності являються більш суттєвими.

У результаті роботи алгоритму сегментації та оцінювання параметрів було отримано такі значення. Моменти розділення, визначені процедурою кластеризації параметрів, становлять 0, 200, 380 та 600, що узгоджується з поведінкою істинної моделі. На кожному з інтервалів оцінені параметри демонструють стабільну збіжність. Оцінена матриця переходів для однорідного випадку має наступний вигляд

$$A_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.15 & 0.15 \\ 0.15 & 0.70 & 0.15 \\ 0.15 & 0.15 & 0.70 \end{pmatrix},$$

тоді як емісійна матриця для цього ж однорідного випадку буде такою

$$B_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} 0.4762 & 0.2381 & 0.0952 & 0.1905 \\ 0.0025 & 0.0025 & 0.0025 & 0.0025 \\ 0.0025 & 0.0025 & 0.0025 & 0.0025 \end{pmatrix}.$$

Порівняння з істинними значеннями B показує найбільші відхилення у другому та третьому рядках, що відображено у матриці похибок $B_{\text{seg}} - B$. Алгоритм сформував 30 початкових локальних сегментів, які після фільтрації та злиття коротких інтервалів були агреговані до 11 фінальних сегментів довжинами [42, 35, 37, 32, 78, 75, 38, 45, 68, 33, 117]. Отримані результати підтверджують коректність виявлення змін параметрів моделі та узгодженість оцінених характеристик із глобальною динамікою процесу.

ВИСНОВКИ

Основною метою роботи являється створення алгоритму оцінки параметрів неоднорідної прихованої напівмарковської моделі, для якої має місце кусково стала структура параметрів із одночасною зміною трьох основних параметрів системи – часу перебування в станах $F^{(t)}$, матриці переходу для прихованого ланцюга Маркова X_t та ймовірностей переходів для Y_t . Проведене експериментальне дослідження підтверджує, що реалізований алгоритм адекватно відтворює часову неоднорідність параметрів прихованої напівмарковської моделі та забезпечує стійкі оцінки параметрів λ (3) із заданою точністю ε . Методика може бути використана для розробки адаптивних процедур керування та подальшої байєсівської оцінки параметрів напівмарковських процесів.

В наступних роботах в цьому напрямку планується розглянути більш загальний випадок, який характеризується сумісним розподілом режимів для матриці $A^{(t)}$ та $B^{(t)}$. Дані дослідження дозволять більш глибоко розуміти природу неоднорідних прихованих моделей.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Yu S.-Z. *Hidden Semi-Markov Models*. Artificial Intelligence, 2010, **174**, 215–243.
- [2] Dong M., He D. *A Segmental Hidden Semi-Markov Model (HSMM)-Based Diagnostics and Prognostics Framework and Methodology*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, **21**, 2248–2266.
- [3] Zen H., Tokuda K., Masuko T., Kobayashi T., Kitamura T. *A Hidden Semi-Markov Model-Based Speech Synthesis System*. IEICE Transactions on Information and Systems, 2007, **E90-D(5)**, 825–834.
- [4] Gujdon Y. *Estimating Hidden Semi-Markov Chains from Discrete Sequences*. Journal of Computational and Graphical Statistics, 2003, **12(3)**, 604–639.
- [5] Bulla J., Bulla I. *Stylized Facts of Financial Time Series and Hidden Semi-Markov Models*. Computational Statistics & Data Analysis, 2006, **51**, 2192–2209.
- [6] Mor B., Garhwal S., Loura A. *A Systematic Review of Hidden Markov Models and Their Applications*. Archives of Computational Methods in Engineering, 2020, **28**, 4001–4028.
- [7] Ghahramani Z. *An Introduction to Hidden Markov Models and Bayesian Networks*. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2001, **15(1)**, 9–42.
- [8] Scott S.L. *Bayesian Methods for Hidden Markov Models*. Journal of the American Statistical Association, 2002, **97(457)**, 337–351.
- [9] Robert C.P., Ryden T., Titterton D.M. *Bayesian Inference in Hidden Markov Models through Jump Markov Chain Monte Carlo*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2000, **62(1)**, 57–75.
- [10] Rabiner L.R. *A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*. Proceedings of the IEEE, 1989, **77(2)**, 257–286.

- [11] Viterbi A.J. *Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm*. IEEE Transactions on Information Theory, 1967, **13**(2), 260–269.

Надійшло 24.11.2025

Malyk I.V., Ivasiuk R.V. *Parameter estimation of nonhomogeneous hidden semi-Markov models*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 70–79.

The article is devoted to the study of nonhomogeneous hidden semi-Markov models, and proposes a methodology for estimating parameters in the case where the change of state sojourn time distributions and transition probability matrices is time-limited.

The obtained results allow the model to be applied to the description of systems with time-varying structure. The proposed methodology can be used in time series analysis tasks with structural changes, as well as in optimal control problems for stochastic systems where it is important to account for changes in the process behavior over time.