

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.01>

КРАСНОКУТСЬКИЙ О.С., ЧЕРЕВКО І.М.

## СХЕМИ АПРОКСИМАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Здійснено аналіз схем апроксимації початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь послідовністю задач Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь класичної та підвищеної точності. Наведено умови збіжності та точність схем апроксимації.

Розроблено прм-пакет та веб-застосунок за допомогою мови програмування TypeScript для автоматизації моделювання систем із запізненням за наведеними в роботі алгоритмами. Проведено числові експерименти для модельних тестових прикладів.

*Ключові слова і фрази:* диференціально-різницеві рівняння, початкова задача, класична схема апроксимації, схема апроксимації підвищеної точності, числові експерименти.

---

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна  
e-mail: [krasnokutskyi.oleksandr@chnu.edu.ua](mailto:krasnokutskyi.oleksandr@chnu.edu.ua), [i.cherevko@chnu.edu.ua](mailto:i.cherevko@chnu.edu.ua)

### ВСТУП

Теорія диференціально-функціональних рівнянь активно розвивається завдяки численным застосуванням таких рівнянь у біології, медицині, економіці та інших науках. Важливою задачею для диференціально-різницевих рівнянь є побудова та обґрунтування методів наближеного знаходження розв'язків початкових задач, оскільки на даний час немає універсальних алгоритмів їх розв'язання.

Для наближеного дослідження математичних моделей, що описують процеси з післядією ефективним виявився метод апроксимації рівнянь із запізненням послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь [1]. Це дозволило якісне дослідження поведінки розв'язків рівнянь із запізненням звести до аналізу розв'язків звичайних динамічних систем. У роботах [2, 3] досліджено апроксимацію диференціально-функціональних рівнянь за допомогою апроксимації оператора в нескінченно вимірному просторі послідовністю скінченновимірних проекторів на цей простір.

Точність апроксимації нелінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням досліджена в роботі [4] у випадку, коли розв'язок початкової задачі є диференційованим або задовольняє умову Ліпшиця. Подальше вивчення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь в просторах неперервних функцій на скінченному інтервалі здійснено у працях [4, 5, 6].

---

УДК 517.929:519.622

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K06, 34K28, 34K40.

Схема апроксимації диференціально-різницевих рівнянь підвищеної точності розглянута в роботах [5, 7].

У даній роботі здійснено аналіз схем апроксимації початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь послідовністю задач Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. На базі розглянутих схем апроксимації здійснено моделювання систем із запізненням для тестових модельних прикладів.

## 1 КЛАСИЧНА СХЕМА АПРОКСИМАЦІЇ

Розглянемо початкову задачу для диференціально-різницевого рівняння із запізненням

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

де  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\tau > 0$ ,  $f(t, u, v)$  — неперервна функція, визначена для  $t \in [0; T]$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ , що задовольняє умову Ліпшиця за  $u$  і  $v$ ,  $\varphi_0(t)$  — неперервна початкова функція.

Наведемо схему наближеної заміни початкової задачі (1)–(2), задачею Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, яка була запропонована в роботах [1] і розвинена в роботах [4, 5, 6].

Введемо в розгляд  $m + 1$  функції такого вигляду

$$x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) = y_i(t), \quad i = 0, \dots, m, m \in N. \quad (3)$$

Обмежуючись розкладом у ряд Тейлора

$$x\left(t - \frac{(i-1)\tau}{m}\right) = x\left(t - \frac{i\tau}{m} + \frac{\tau}{m}\right) = x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) + \frac{\tau}{m}x'\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) + \dots, \quad (4)$$

двома членами дістанемо рівність

$$y_{i-1}(t) = y_i(t) + \frac{\tau}{m}y'_i(t).$$

У результаті рівнянню з запізненням (1) поставимо у відповідність систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} y'_0(t) &= f\left(t, y_0(t), y_m(t)\right), \\ y'_i(t) &= \frac{m}{\tau}(y_{i-1}(t) - y_i(t)), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5)$$

Відповідні початкові умови для системи (5) можна задати у вигляді

$$y_i(0) = \varphi_0\left(-\frac{i\tau}{m}\right), \quad i = 0, \dots, m. \quad (6)$$

У припущенні, що розв'язок початкової задачі (1)–(2) задовольняє умову Ліпшиця на відрізьку  $[-\tau, T]$ , встановлено [4], що розв'язок задачі Коші (5)–(6) апроксимує розв'язок початкової задачі і справджуються нерівності

$$\left| x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) - y_i(t) \right| \leq \frac{K\tau}{\sqrt{m}}, \quad i = 0, \dots, m, \quad t \in [0, T], \quad K > 0. \quad (7)$$

Дослідження схем апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням в просторі неперервних функцій на скінченному інтервалі здійснено в роботах [4, 5, 6]. У цьому випадку

встановлено, що розв'язок задачі Коші (5)–(6) апроксимує розв'язок початкової задачі (1)–(2) і справджуються нерівності

$$\left| x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) - y_i(t) \right| \leq \beta\left(\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right)\right), \quad i = 0, \dots, m, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

де функція  $\beta(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right)$  — модуль неперервності розв'язку початкової задачі (1)–(2) на  $[-\tau, T]$ .

**Зауваження 1.** За теоремою Кантора–Гейне про рівномірну неперервність  $\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Отже, при великих  $m$  розв'язок задачі Коші (5)–(6) наближає розв'язок початкової задачі (1)–(2).

**Зауваження 2.** Для початкової задачі з багатьма запізненнями

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_p)\right), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (10)$$

де  $0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = \tau$ ,  $p \geq 1$  апроксимуюча задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь має вигляд [4]

$$y'_0(t) = f\left(t, y_0(t), y_{\ell_1}(t), \dots, y_{\ell_p}(t)\right), \quad \ell_i = \left[\frac{m\tau_i}{\tau}\right], \quad (11)$$

$$y'_i(t) = \frac{m}{\tau} (y_{i-1}(t) - y_i(t)), \quad i = 1, \dots, m, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

$$y_i(0) = \varphi_0\left(-\frac{i\tau}{m}\right), \quad i = 0, \dots, m.$$

**Зауваження 3.** Апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь (5) при великих  $m \in$  сингулярно збуреною, її відносять до класу жорстких задач для яких потрібно використовувати спеціальні жорстко стійкі різницеві схеми.

## 2 ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ

Припустимо, що для початкової задачі (1)–(2) справедливі такі додаткові умови:

**А)** функція  $f(t, u, v)$  задовольняє умову Ліпшиця:

$$\begin{aligned} |f(t_1, u_1, v_1) - f(t_2, u_2, v_2)| &\leq L_1(|t_1 - t_2| + |u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|), \\ L_1 > 0, \quad t_1, t_2 &\in [0, T], \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (13)$$

**В)** початкова функція  $\varphi_0(t)$  диференційовна при  $t \in [-\tau, 0]$  похідна якої задовольняє умову Ліпшиця:

$$|\varphi_0(t_1) - \varphi_0(t_2)| \leq L_0 |t_1 - t_2|, \quad L_0 > 0, \quad t_1, t_2 \in [-\tau, 0], \quad (14)$$

**С)** має місце умова склейки

$$\varphi_0(0) = f(0, \varphi_0(0), \varphi_0(-\tau)). \quad (15)$$

**Лема.** Нехай справджуються умови **А–В**. Тоді розв'язок  $x(t)$  початкової задачі (1)–(2) неперервно диференційовний на  $[-\tau, T]$  і  $x'(t)$  задовольняє умову Ліпшиця

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| \leq L_2 |t_1 - t_2|, \quad L_2 > 0, \quad t_1, t_2 \in [-\tau, T]. \quad (16)$$

*Доведення.* Розв'язуючи початкову задачу (1)–(2) методом кроків, одержимо послідовність задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь:

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_k(t - \tau)), \quad t \in [k\tau, (k+1)\tau], \quad (17)$$

$$x(k\tau) = \varphi_k(k\tau), \quad k = 0, 1, \dots \quad (18)$$

При виконанні умови **A** існує єдиний розв'язок задачі Коші (17)–(18).

$$x(t) = \varphi_{k+1} \in C^1[k\tau, (k+1)\tau].$$

Якщо умова **B** справджується, тоді розв'язок початкової задачі (1)–(2) буде неперервно диференційовним у точці  $t = 0$  [8]. При цьому, як випливає з рівняння (1),  $x'(t)$  буде неперервною в точках  $t = k\tau$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Отже, при виконанні умов **A–B** розв'язок початкової задачі (1)–(2) буде неперервно диференційовною функцією на  $[-\tau, T]$ .

Покажемо, що умова (16) також справджується.

Спочатку, розглянемо відрізок  $[-\tau, \tau]$ .

Якщо  $t_1, t_2 \in [-\tau, 0]$  то (16) справджується згідно умови **B** при  $L_2 = L_0$ .

Нехай  $t_1, t_2 \in [0, \tau]$ . При  $t \in [0, \tau]$  розв'язок  $x(t) = \varphi_1(t)$  початкової задачі (1)–(2) неперервно диференційовний. Використовуючи властивості функцій  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  та умови (13), (14), дістаємо:

$$\begin{aligned} |x'(t_1) - x'(t_2)| &= |f(t_1, x(t_1), \varphi_0(t_1 - \tau)) - f(t_2, x(t_2), \varphi_0(t_2 - \tau))| \leq \\ &\leq L_1(|t_1 - t_2| + |\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_2)| + |\varphi_0(t_1 - \tau) - \varphi_0(t_2 - \tau)|) \leq \\ &\leq L_1\left(|t_1 - t_2| + \max_{s \in [0, \tau]} |\varphi_1'(s)| |t_1 - t_2| + \max_{s \in [-\tau, 0]} |\varphi_0'(s)| |t_1 - t_2|\right) = \\ &= L_1\left(1 + \max_{s \in [0, \tau]} |\varphi_1'(s)| + \max_{s \in [-\tau, 0]} |\varphi_0'(s)|\right) |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Отже умова (16) має місце в цьому випадку з

$$L_2 = L_1\left(1 + \max_{s \in [0, \tau]} |\varphi_1'(s)| + \max_{s \in [-\tau, 0]} |\varphi_0'(s)|\right).$$

Якщо  $t_1 \in [-\tau, 0]$ ,  $t_2 \in [0, \tau]$ , то маємо

$$\begin{aligned} |x'(t_1) - x'(t_2)| &= |\varphi_0'(t_1) - x'(t_2)| = |\varphi_0'(t_1) - \varphi_0'(0) + \varphi_0'(0) - x'(t_2)| \leq \\ &\leq |\varphi_0'(t_1) - \varphi_0'(0)| + |x'(0) - x'(t_2)| \leq \\ &\leq L_0|t_1 - 0| + |f(0, \varphi_1(0), \varphi_0(-\tau)) - f(t_2, \varphi_1(t_2), \varphi_0(t_2 - \tau))| \leq \\ &\leq L_0|t_1 - t_2| + L_1\left(|0 - t_2| + \max_{s \in [0, \tau]} |\varphi_1'(s)| |0 - t_2| + \max_{s \in [-\tau, 0]} |\varphi_0'(s)| |0 - t_2|\right) \leq \\ &= (L_0 + L_1(1 + \max_{s \in [0, \tau]} |\varphi_1'(s)| + \max_{s \in [-\tau, 0]} |\varphi_0'(s)|)) |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Таким чином  $x'(t)$  задовольняє умову Ліпшиця на  $[-\tau, \tau]$ , де

$$L_2 = L_0 + L_1\left(1 + \max_{s \in [0, \tau]} |\varphi_1'(s)| + \max_{s \in [-\tau, 0]} |\varphi_0'(s)|\right).$$

Припустимо, що розв'язок початкової задачі (1)–(2) задовольняє умову Ліпшиця (14) при  $t \in [-\tau, j\tau]$ ,  $j \geq 1$ , зі сталою Ліпшиця  $L_2 = L_j$ .

Покажемо, що ця умова має місце для  $t \in [-\tau, (j+1)\tau]$ .

Якщо  $t_1, t_2 \in [-\tau, j\tau]$ , то умова (16) виконується за припущенням з  $L_2 = L_j$ .

Нехай  $t_1, t_2 \in [j\tau, (j+1)\tau]$ . Тоді, використовуючи властивості функцій  $\varphi_j(t)$ ,  $\varphi_{j+1}(t)$  і умову (11), маємо

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| \leq L_1 \left( 1 + \max_{s \in [j\tau, (j+1)\tau]} |\varphi'_{j+1}(s)| + \max_{s \in [(j-1)\tau, j\tau]} |\varphi'_j(s)| \right) |t_1 - t_2|.$$

У випадку  $t_1 \in [k\tau, (k+1)\tau]$ ,  $0 \leq k \leq j$ ,  $t_2 \in [j\tau, (j+1)\tau]$ , маємо

$$\begin{aligned} |x'(t_1) - x'(t_2)| &= |f(t_1, x(t_1), \varphi_j(t_1 - \tau)) - f(t_2, x(t_2), \varphi_j(t_2 - \tau))| \leq \\ &\leq L_1 \left( |t_1 - t_2| + |\varphi_{k+1}(t_1) - \varphi_{j+1}(t_2)| + |\varphi_k(t_1 - \tau) - \varphi_j(t_2 - \tau)| \right) \leq \\ &\leq L_1 \left( |t_1 - t_2| + |\varphi_{k+1}(t_1) - \varphi_{j+1}(t_2)| + \varphi_{k+2}((k+1)\tau) - \dots + \varphi_{j+1}(j\tau) - \varphi_j(t_2) \right) + \\ &\quad \left( |\varphi_k(t_1 - \tau) - \varphi_k(k\tau) + \varphi_{k+1}(k\tau) - \dots + \varphi_j(j\tau) - \varphi_j(t_2 - \tau)| \right) \leq \\ &\leq L_1 \left( 1 + \max_{s \in [(k-1)\tau, k\tau]} |\varphi'_k(s)| + 2 \left( \max_{s \in [k\tau, (k+1)\tau]} |\varphi'_{k+1}(s)| + \dots + \max_{s \in [(j-1)\tau, j\tau]} |\varphi'_j(s)| \right) + \right. \\ &\quad \left. \max_{s \in [j\tau, (j+1)\tau]} |\varphi'_{j+1}(s)| \right) |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

При  $t_1 \in [-\tau, 0]$ ,  $t_2 \in [j\tau, (j+1)\tau]$ , аналогічно одержуємо

$$\begin{aligned} |x'(t_1) - x'(t_2)| &\leq (L_0 + L_1 (1 + \max_{s \in [-\tau, 0]} |\varphi'_0(s)| + 2 \max_{s \in [0, \tau]} |\varphi'_1(s)| + \dots \\ &+ \max_{s \in [(-j-1)\tau, j\tau]} |\varphi'_j(s)|)) |t_1 - t_2| + \max_{s \in [j\tau, (j+1)\tau]} |\varphi'_{j+1}(s)| |t_1 - t_2| = L_{j+1} |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Отже  $x'(t)$  задовольняє умову Ліпшиця для  $t \in [-\tau, (j+1)\tau]$  зі сталою  $L_2 = L_{j+1}$ . Оскільки  $j$  довільне ціле число, що не перевищує  $[T/\tau] + 1$ , то умова (16) справджується при  $t \in [-\tau, T]$ .

Лема доведена.  $\square$

### 3 СХЕМА АПРОКСИМАЦІЇ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ

Апроксимація диференціального рівняння (1) системою звичайних диференціальних рівнянь (5) базується на використанні послідовності з'єднаних аперіодичних елементів (3), що здійснюють зсув на величину  $\tau/m$  та обмежуючись в розкладі у ряд Тейлора двома членами.

Розглянемо розклад за формулою Тейлора:

$$y_{i-1}(t) = y_i(t) + \frac{\tau}{m} y'_i(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{m} \right)^2 y''_i(t) + \dots$$

обмежуючись трьома членами розкладу [5, 7].

Поставимо у відповідність початковій задачі (1)–(2) задачу Коші для системи звичайних диференційованих рівнянь:

$$\begin{aligned} y'_0(t) &= f(t, y_0, y_m), \\ y'_{j-1}(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{m} \right)^2 y''_j(t) + \frac{\tau}{m} y'_j(t) + y_j(t), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{19}$$

з початковими умовами

$$y_0(0) = \varphi_0(0), \quad y_j(0) = \varphi \left( -\frac{j\tau}{m} \right), \quad y'_j(0) = \varphi' \left( -\frac{j\tau}{m} \right), \quad j = 1, \dots, m. \tag{20}$$

Нехай  $y_j(t)$   $j = 1, \dots, m$  розв'язки апроксимуючої задачі Коші (19)–(20), а  $x(t)$  — розв'язок початкової задачі (1)–(2), що  $x'(t)$  задовольняє умову Лїпшиця зі сталою  $L_2$  та  $|x'(t)| \leq M$ .

Розглянемо задачу про близькість розв'язків задачі (1)–(2) та (19)–(20).

Позначимо

$$R_j(t) = \max |y_j(s) - x(s - \frac{j\tau}{m})|, \quad 0 \leq s \leq t, \quad j = 0, \dots, m. \quad (21)$$

Представимо

$$y_j(t) = y_{j1}(t) + y_{j2}(t),$$

де  $y_{j1}(t)$ ,  $y_{j2}(t)$  розв'язки задач Коші:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 y''_{11} + \frac{\tau}{m} y'_{11} + y_{11} = x(t), & y_{11}(0) = x(-\frac{\tau}{m}), & y'_{11}(0) = x'(-\frac{\tau}{m}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 y''_{j1} + \frac{\tau}{m} y'_{j1} + y_{j1} = y_{j-1}, & y_{j1}(0) = x(-\frac{\tau}{m}), & y'_{j1}(0) = x'(-\frac{\tau}{m}) \end{cases} \quad j = 2, \dots, m, \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 y''_{12} + \frac{\tau}{m} y'_{12} + y_{12} = y_0 - x(t), & y_{12}(0) = 0, & y'_{12}(0) = 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 y''_{j2} + \frac{\tau}{m} y'_{j2} + y_{j2} = y_{j-1,2}, & y_{j2}(0) = 0, & y'_{j2}(0) = 0 \end{cases} \quad j = 2, \dots, m. \quad (23)$$

Системами (22), (23) досліджено в роботах [5, 7] і встановлено оцінки

$$|y_{j1}(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})| \leq \frac{2\tau^{3/2}(L_2(1 + \frac{\tau}{2}) + M(1 + \tau^2))}{m} = \frac{A}{m}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (24)$$

$$|y_{j2}(t)| \leq R_0(t), \quad j = 1, \dots, m. \quad (25)$$

Із двох останніх нерівностей одержуємо

$$R_j(t) \leq \frac{A}{m} + R_0(t), \quad j = 1, \dots, m. \quad (26)$$

Представимо функції  $x(t)$  та  $y_0(t)$  в інтегральному вигляді:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s - \tau)) ds,$$

$$y_0(t) = x(0) + \int_0^t f(s, y_0(s), y_m(s)) ds.$$

Враховуючи властивості функцій  $f(t, u, v)$  та нерівність (26), дістаємо

$$|x(t) - y_0(t)| \leq \int_0^t L_1(R_0(s) + R_m(s)) ds \leq \int_0^t (2L_1 R_0(s) + \frac{L_1 A}{m}) ds.$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла — Беллмана [9] одержуємо

$$R_0(t) = \max_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y_0(s)| \leq \frac{A}{2m} (e^{2L_1 t} - 1). \quad (27)$$

Із нерівності (27) дістаємо теорему.

**Теорема.** Якщо для початкової задачі (1)–(2) справджуються умови **A–B**, тоді її розв'язок  $x(t)$  рівномірно наближається функцією  $y_0(t)$ , що визначається з апроксимуючої системи (19)–(20), на довільному скінченному інтервалі  $[0, T]$ .

**Зауваження 4.** Схему апроксимації (19)–(20) початкової задачі (1)–(2) називають схемою підвищеної точності.

4 ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Для моделювання початкових задач із запізненням за допомогою наведених алгоритмів розроблено прикладне програмне забезпечення на мові програмування TypeScript, з використанням Taiwind для побудови візуального каркасу та chart.js для побудови графіків.

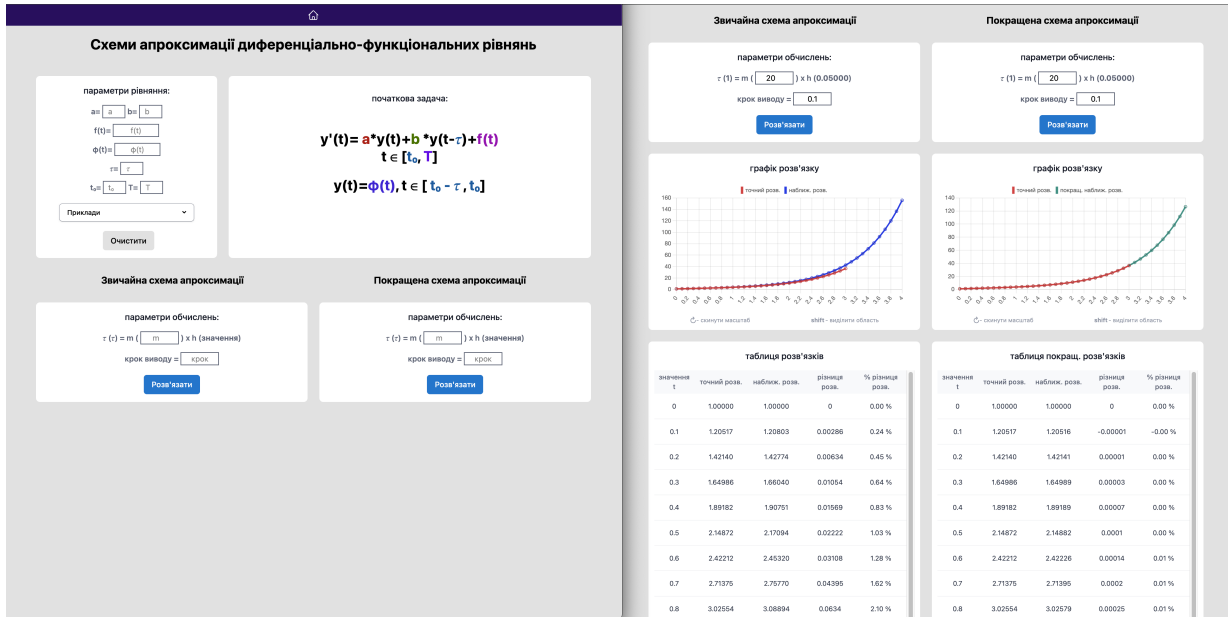


Рис. 1: Вигляд додатку після запуску (зліва) та в процесі взаємодії (справа)

Прикладне програмне забезпечення складається з двох частин:

- математичний пакет - набір програмно реалізованих алгоритмів для моделювання початкових задач із запізненнями,
- інтерактивний веб-інтерфейс - веб сторінка, яка дозволяє якісно взаємодіяти із математичним пакетом, задавати необхідні вхідні параметри та отримувати результати роботи у вигляді графіків та таблиць.

Взаємодія із додатком відбувається за принципом зверху вниз. Спочатку необхідно задати вхідні параметри початкової задачі, або ж вибрати один із прикладів що вже попередньо задані на етапі розробки. Для початку числового моделювання необхідно також задати потрібні параметри обчислень: розмірність  $m$  та крок виводу результатів  $h$ . Натиснувши кнопку *Розв'язати* одержимо результати моделювання у вигляді таблиць та графіків.

**Приклад.** Розглянемо початкову задачу для диференціально-функціонального рівняння з відхиленим аргументом:

$$x'(t) = x(t) + x(t - 1) - t, \tag{28}$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0]. \tag{29}$$

За допомогою методу кроків отримаємо  $x_T(t)$  точний розв'язок початкової задачі (28)–(29) на відрізку  $[0, 2]$ :

$$x_T(t) = \begin{cases} e^t + t, & t \in [0, 1], \\ e^t + (t - 1)e^{t-1} + 1, & t \in [1, 2]. \end{cases} \tag{30}$$

Результати числових експериментів для знаходження наближеного розв'язку  $x_n(t)$ , значення точного розв'язку  $x_T(t)$  та абсолютні і відності похибки наведені в таблицях.

Табл. 1: Результати числових експериментів для класичної схеми апроксимації

$t$	$x_T(t)$	$x_n(t)$	$\Delta$	$\delta$
0	1.00000	1.00000	0	0.00%
0.5	2.14872	2.15927	0.01055	0.49%
1	3.71828	3.78329	0.06501	1.75%
1.5	6.30605	6.52536	0.21931	3.48%
2	11.10734	11.62828	0.52094	4.69%

Табл. 2: Результати числових експериментів для схеми апроксимації підвищеної точності

$t$	$x_T(t)$	$x_n(t)$	$\Delta$	$\delta$
0	1.00000	1.00000	0	0.00%
0.5	2.14872	2.14882	0.00010	0.00%
1	3.71828	3.71869	0.00041	0.01%
1.5	6.30605	6.30752	0.00147	0.02%
2	11.10734	11.11148	0.00414	0.04%

Аналіз числових експериментів що наведені в таблицях 1, 2 показує що похибка схеми підвищеної точності значно краща ніж похибка класичної схеми що підтверджує теоретичні результати точності апроксимації (7),(27).

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. New York : Academic Press, 1981. P. 155- 197.
- [2] Banks H. T., Burns A. I. Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximation . SIAM J. Control Optim.– 1978.– 11, № 2.– P. 169–208.
- [3] Banks H.T. Approximation of Non Linear Functional differential equation Control Systems. Journal of optimization theory and application.– 1979.– 29, № 3.– P. 383–408.
- [4] Cherevko I. M., Piddubna L. A. On the approximate solutions of differential difference equation. Matematychni Studii. 1998. Vol. 9, No 2. P. 187-192.
- [5] Piddubna L. A., Cherevko I. M. Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. 1999. Vol. 28, No 1. P. 15-21.
- [6] Matvii O. V., Cherevko I. M. On the approximation of systems with delay and their stability. Nonlinear oscillations. 2004. Vol. 7, No 2. P. 208-216.
- [7] Cherevko I. M. Approximation of differential equations and approximation of non-asymptotic roots of quasipolynomials. Nonlinear differential equations and their applications.-Kyiv: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1992.-P.74-84.
- [8] El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. New York and London : Academic Press, 1973. 356 p.

- [9] Hartman P. Ordinary Differential Equations. Philadelphia : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2002. 612 p.

Надійшло 20.11.2025

---

Krasnokutskyi O.S., Cherevko I.M. *Approximation Schemes for Differential–Difference Equations and Their Numerical Simulation*, Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 7–15.

This work presents an analysis of approximation schemes for initial value problems of differential–difference equations based on sequences of Cauchy problems for systems of ordinary differential equations of classical and higher-order accuracy. Convergence conditions and accuracy properties of the approximation schemes are established.

An npm package and a web application implemented in TypeScript have been developed to automate the numerical simulation of delay systems using the algorithms proposed in the study. Numerical experiments for representative benchmark examples are carried out to demonstrate the performance and validity of the schemes.