

## АНОТАЦІЯ

*Українець О. З.* Математичне моделювання природничих процесів та економічних систем під дією збурень. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – "Прикладна математика". – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2026.

Дисертаційна робота присвячена побудові і дослідженню математичних моделей під дією багаточастотних збурень із запізненнями аргументу, які задаються на відрізку  $[0, L]$  лінійно перетвореними аргументами  $\lambda_\nu \tau$ ,  $\lambda_\nu < 1$  і  $\theta_\nu \tau$ ,  $\theta_\nu < 1$ ; математичному моделюванню імунної відповіді організму людини при інфекційних захворюваннях і моделі епідемії із врахуванням втрати імунітету під впливом екологічного фактору  $E(t)$ . Під фактором  $E(t)$  розуміємо зважену суму різного роду забруднень як довкілля, так і соціально-психологічного характеру, які негативно впливають на перебіг інфекційного захворювання і сприяють поширенню епідемії. Досліджено також модель рівноважної економіки Ерроу–Дебре – класичну мікроекономічну модель загальної рівноваги, в якій споживачі й виробники взаємодіють на конкурентних ринках, а рівновага описується через існування цінового вектора, що забезпечує узгодженість попиту і пропозиції для всіх товарів. У дисертації запропоновані модифікації моделі Ерроу–Дебре з урахуванням цілочисельності товарних запасів та із врахування впливу оптових цін, що ґрунтується на апараті впорядкованих векторних просторів, векторних ґраток та різних узагальнень цінових функціоналів.

У роботі на підставі відомих математичних моделей запропоновані нові моделі, співавтором яких є автор дисертації. Кожна із запропонованих моделей описує певні процеси у природничих науках й економіці. Побудовані у розділах 2 і 3 математичні моделі є новими й актуальними для розв'язання прикладних задач в медичній практиці при дослідженні інфекційних захворювань, в епідеміології при аналізі і прогнозі епідемій,

в біології, екології, економіці та в інших галузях, які знаходяться під дією багаточастотних збурень або під впливом екологічного фактору. Узагальнення моделі Ерроу-Дебре, яке залежить від впливу системи цін і розподілу товарів, може знайти своє застосування у сучасній ринковій економіці.

Основними методами дослідження у роботі є аналітична та якісна теорії диференціальних рівнянь, комп'ютерне моделювання, методи функціонального аналізу. У розділі 2 застосований метод усереднення за фазовими змінними на кубі періодів цих змінних та принцип стискаючих відображень для доведення існування і єдиності розв'язку. У розділі 2 і 3 для дослідження стійкості застосовано критерії стійкості за першим наближенням, а для доведення існування розв'язку побудованих моделей – метод мажорантних рівнянь, комп'ютерне моделювання здійснювалось у системі Mathematica. У розділі 4 використані методи функціонального аналізу та топології, властивості ортогонально адитивних функціоналів.

Дисертаційна робота складається зі змісту, списку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку посилань і додатків.

У першому розділі роботи зроблено огляд літератури за темою дисертації, викладено допоміжні поняття і твердження. Наведено опис моделей в імунології, звернуто увагу на базову модель імунної відповіді Г.І. Марчука, праць У. Фориш і М. Боднара щодо модифікації базової моделі на випадок сезонних впливів. Зроблено огляд моделей епідемічних процесів, зокрема класичної SIR-моделі, яка є наслідком моделі Кермака і МакКендрика, моделі К. Кука із врахуванням втрати імунітету. Така тематика розвивалася в багатьох напрямках, але не відомо, щоб в цих моделях був включений екологічний фактор. Крім того, наведено огляд праць, присвячених розвитку досліджень моделі Ерроу-Дебре, існування рівноважного стану та його властивостей з урахуванням різних модифікацій умов та факторів моделі.

Розділ 2 присвячений дослідженню методом усереднення за фазовими

змінними впливу багаточастотних збурень із запізненням аргументу на динаміку процесу, який описується системою диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами. Такі моделі широко використовуються в екології й відображені в монографіях Я. Куанга, К. Гопалсамі, Х. Сміта, Дж. Хейла, А. Мишкіса і В. Колмановського та багатьох інших авторів. Але в цих моделях не розглядалися багаточастотні збурення. Під багаточастотними збуреннями розуміємо складний коливний процес із багатьох гармонік, в процесі еволюції якого може виникнути резонанс частот. Методика досліджень, запропонована А.М. Самойленком, розвинута для звичайних диференціальних рівнянь в працях Р.І. Петришина. Багаточастотні системи рівнянь із запізненням аргументу методом усереднення досліджувались в працях Я.Й. Бігуна. У даній дисертаційній роботі метод усереднення застосований для збурень, асимптотика яких може бути і дробовою, отримано ефективну оцінку методу усереднення, яка явно залежить від показників асимптотики збурень і кількості фазових змінних та запізнень у них. На моделі хижак-жертва проілюстровано динаміку розв'язку моделі у залежності від величини збурення.

У розділі 3 дисертації побудовано і досліджено модель імунної відповіді та епідемії, в яких враховано вплив екологічного фактору на перебіг процесів. Доведено існування і єдиність розв'язку, встановлено умови його невід'ємності, що важливо для адекватності моделей. Знайдено стаціонарні розв'язки та умови їх існування і дано їх медичну інтерпретацію. В моделі імунної відповіді встановлено коефіцієнтні умови локальної асимптотичної стійкості стаціонарного розв'язку, який відповідає стану здорового організму. Знайдено оцінку величини інфікування, при якій не відбувається розвитку інфекційного захворювання. В моделі епідемії із впливом екологічного фактору отримано базове репродуктивне число, на підставі якого сформульовано твердження про відсутність епідемії. Проведено комп'ютерне моделювання побудованих моделей для ілюстрації впливу екологічного фактору на перебіг інфекційного захворювання і

поширення епідемії, яке може призвести до якісної зміни динаміки процесу.

Розділ 4 присвячений модифікаціям моделі рівноважної економіки Ерроу-Дебре з урахуванням дискретної природи товарних запасів та існування оптових цін. Запропоновано підхід, у якому роль цінових векторів відіграють зарядові функціонали на впорядкованій векторній ґратці товарних векторів, що дає змогу адекватно описувати ринки з довільною ґратковою структурою набору товарів. Побудовано загальну конструкцію комплементарного простору, на якому визначаються заряди, що формують порядково повну векторну ґратку й можуть інтерпретуватися як узагальнені цінові вектори. Для запропонованих модифікацій моделі доведено існування економічної рівноваги та досліджено її основні властивості. Отримані результати розширюють апарат теорії рівноваги для ринків з дискретними ресурсами та впливом оптових ціноутворень і можуть бути використані для подальшого математичного моделювання сучасних ринкових систем.

#### **Теоретичне та практичне значення отриманих результатів.**

Математичні дослідження у дисертаційній роботі мають як теоретичний характер, так і можуть бути застосовані при дослідженні нелінійних математичних моделей під дією багаточастотних збурень або екологічних впливів, задач ринкової економіки, мають практичне значення у різних прикладних задачах. Результати моделювання імунної відповіді можуть бути застосовані у медичній практиці для дослідження та прогнозування перебігу інфекційних захворювань і в епідеміології для аналізу й прогнозування епідемії за наявності впливу екологічного фактору. Нові модифікації моделі Ерроу-Дебре, які враховують цілочисельність товарних запасів і оптові ціни, можуть знайти своє застосування у моделюванні сучасної ринкової економіки під впливом різних факторів зовнішнього і внутрішнього впливу. Застосування комп'ютерного моделювання ілюструє отримані теоретичні результати і сприяє їх практичному застосуванню. Одержані результати відкривають шлях для узагальнення математичних моделей в природничих областях та економіці.

**Ключові слова:** математична модель, стаціонарний розв’язок, дискретна модель, біфуркація, динамічна система, стійкість, запізнення, диференціальне рівняння, популяція, комп’ютерне моделювання, імунна відповідь, векторна ґратка, латеральний порядок, ортогонально адитивний оператор, властивість перетинів.

## ABSTRACT

*Ukrainets O.* Mathematical Modeling of Natural Processes and Economic Systems under the Influence of Perturbations. – Qualified scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in specialty 113 – "Applied Mathematics". — Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2026.

The dissertation is devoted to the construction and study of mathematical models under multifrequency perturbations with delayed arguments, where the delays are defined on the interval  $[0, L]$  by linearly transformed arguments  $\lambda_\nu \tau$ ,  $\lambda_\nu < 1$ , and  $\theta_\nu \tau$ ,  $\theta_\nu < 1$ ; to the mathematical modelling of the human immune response in infectious diseases and to an epidemic model that accounts for loss of immunity under the influence of an environmental factor  $E(t)$ . By the factor  $E(t)$  we mean a weighted sum of various kinds of pollution, both of the physical environment and of a socio-psychological nature, which adversely affect the course of infectious disease and favour the spread of the epidemic. The work also examines the Arrow–Debreu general equilibrium model—the classical microeconomic model of general equilibrium in which consumers and producers interact on competitive markets, and equilibrium is characterised by the existence of a price vector that equates demand and supply for all goods. The dissertation proposes modifications of the Arrow–Debreu model that incorporate integer commodity stocks and the influence of wholesale prices, using the theory of ordered vector spaces, vector lattices, and various generalizations of price functionals.

In this work, on the basis of known mathematical models, new models are proposed of which the author of the dissertation is a co-author. Each of

the proposed models describes certain processes in the natural sciences and in economics. The mathematical models constructed in Chapters 2 and 3 are new and relevant for solving applied problems in medical practice in the study of infectious diseases, in epidemiology for the analysis and forecasting of epidemics, and in biology, ecology, economics and other fields that are subject to multifrequency perturbations or to the influence of an environmental factor. The generalization of the Arrow–Debreu model that depends on the influence of the price system and the distribution of goods may find application in the modern market economy.

The main research methods used in the work are the analytic and qualitative theory of differential equations, computer simulation, and methods of functional analysis. In Chapter 2, the method of averaging over phase variables on the cube of periods of these variables and the contraction mapping principle are applied to prove the existence and uniqueness of solutions. In Chapters 2 and 3, first-approximation (linearization) stability criteria are used to study stability, and the method of majorant equations is used to prove the existence of solutions of the constructed models; computer simulation was carried out in Mathematica. In Chapter 4, methods of functional analysis and topology are used, along with the properties of orthogonally additive functionals.

The dissertation consists of a table of contents, a list of notation, an introduction, four chapters, general conclusions, a list of references, and appendices.

The first chapter provides a review of the literature on the topic of the dissertation and presents auxiliary concepts and results. A description of models in immunology is given, with attention to the basic model of immune response due to G.I. Marchuk and to the works of W. Forys and M. Bodnar on the modification of this basic model for the case of seasonal effects. A review of models of epidemic processes is given, in particular the classical SIR model, which is a consequence of the Kermack–McKendrick model, and the model of K. Cooke that accounts for loss of immunity. This line of research has been developed in many directions, but it is not known that an environmental factor has been incorporated in such models.

In addition, the study includes a review of works devoted to the development of research on the Arrow–Debreu model, the existence of an equilibrium state, and its properties under various modifications of the conditions and factors of the model.

Chapter 2 is devoted to the study, by the method of averaging over phase variables, of the effect of multifrequency perturbations with delayed argument on the dynamics of a process described by a system of differential equations with linearly transformed arguments. Such models are widely used in ecology and are presented in the monographs of Y. Kuang, K. Gopalsamy, H. Smith, J. Hale, A. Myshkis and V. Kolmanovskii, and many other authors; however, multifrequency perturbations were not considered in these models. By multifrequency perturbations we mean a complex oscillatory process comprising many harmonics, in whose evolution frequency resonance may occur. The research methodology proposed by A.M. Samoilenko was developed for ordinary differential equations in the works of R.I. Petryshyn. Multifrequency systems of equations with delayed argument were studied by the averaging method in the works of Y.Y. Bihun. In the present dissertation, the averaging method is applied to perturbations whose asymptotics may be fractional as well; an effective estimate for the averaging method is obtained that depends explicitly on the exponents of the asymptotics of the perturbations and on the number of phase variables and delays in them. The dynamics of the solution is illustrated on a predator–prey model as a function of the magnitude of the perturbation.

Chapter 3 of the dissertation constructs and studies a model of immune response and an epidemic model in which the influence of an environmental factor on the course of the processes is taken into account. Existence and uniqueness of a solution are proved, and conditions for its nonnegativity are established, which is important for the adequacy of the models. Stationary solutions are found together with conditions for their existence, and their medical interpretation is given. In the immune-response model, coefficient conditions for local asymptotic stability of the stationary solution corresponding to the state of a healthy organism are

established. An estimate is obtained for the level of infection below which the infectious disease does not develop. In the epidemic model with environmental influence, the basic reproduction number is derived, and on this basis a result on the absence of an epidemic is formulated. Computer simulation of the constructed models is carried out to illustrate the effect of the environmental factor on the course of the infectious disease and the spread of the epidemic, which may lead to a qualitative change in the dynamics of the process.

Chapter 4 is devoted to modifications of the Arrow–Debreu equilibrium model that take into account the discrete nature of commodity stocks and the presence of wholesale prices. An approach is proposed in which the role of price vectors is played by charge functionals on the ordered vector lattice of commodity vectors, which makes it possible to describe markets with an arbitrary lattice structure of the commodity set in an adequate way. A general construction of a conjugate space is given, on which charges are defined that form an order complete vector lattice and can be interpreted as generalized price vectors. For the proposed modifications of the model, the existence of an economic equilibrium is proved and its main properties are studied. The results extend the framework of equilibrium theory to markets with discrete resources and with the influence of wholesale price formation, and can be used for further mathematical modelling of modern market systems.

**Theoretical and practical significance of the results.** The mathematical research in the dissertation is both theoretical in character and applicable to the study of nonlinear mathematical models under multifrequency perturbations or environmental influences, and to problems of market economy; it has practical significance in various applied settings. The results of the immune-response modelling can be used in medical practice for the study and forecasting of the course of infectious diseases, and in epidemiology for the analysis and forecasting of epidemics when an environmental factor is present. The new modifications of the Arrow–Debreu model that allow for integer commodity stocks and wholesale prices may find application in the modelling of the modern market

economy under the influence of various external and internal factors. The use of computer simulation illustrates the theoretical results obtained and supports their practical application. The results open the way for further generalization of mathematical models in the natural sciences and in economics.

**Key words:** mathematical model, stationary solution, discrete model, bifurcation, dynamical system, stability, time delay, differential equation, population, computer modeling, immune response, Riesz space, lateral order, orthogonally additive operator, intersection property.

### Список публікацій за темою дисертації

#### Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

*Наукові праці у виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України:*

1. Бігун Я.Й., Українець О.З., Скутар І.Д. Усереднення в математичних моделях під дією багаточастотних збурень із запізненням. Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми керування та інформатики». 2024. Т. 69, № 1. С. 34–42. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі та обговорення результатів; О.З. Українцю належить формулювання і доведення тверджень; І. Д. Скутару належить участь у формулюванні прикладу*).

2. Попов М.М., Українець О.З. Цілочисленні товарні вектори у моделі економіки Ерроу-Дебре. Буковинський математичний журнал. 2024. Т. 12, № 2. С. 182-189. (*Внесок авторів: М.М. Попову належить формулювання Твердження 1 і Твердження 2; О.З. Українцю належить формулювання і доведення Теорема 1*).

3. Українець О.З. Неперервні скалярні заряди на  $\ell_0$  із застосуванням до моделі економіки Ерроу-Дебре. Буковинський математичний журнал. 2025. Т. 13, № 1. С. 66–82.

4. Бігун Я. Й., Українець О. З. Математичне моделювання поширення епідемії із врахування екологічного фактору. Науковий вісник

Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». 2025. Т. 47, № 2. С. 126–135. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі і визначення схеми досліджень; О.З. Українцю належить обґрунтування, доведення теорем та комп'ютерне моделювання*).

5. Бігун Я. Й., Українець О. З. Математична модель впливу забруднення зовнішнього середовища на імунну відповідь організму людини. Буковинський математичний журнал. 2025. Т. 13, № 2. С. 114-124. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі і обговорення результатів досліджень; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теорем, комп'ютерне моделювання*).

*Наукові праці у періодичних наукових виданнях, проіндексованих у наукометричній базі даних Scopus:*

6. Fotiy O., Popov M., Ukrainets O. A characterization of F-spaces containing an isomorph of  $\ell_0$ . Carpathian Mathematical Publications. 2025. Vol. 17, no 1. P. 146. (*Внесок авторів: О.Г. Фотій належить твердження 1 і 2, а також приклад 1; М.М. Попову належить формулювання і доведення Теорема 1; О.З. Українцю належить участь у доведенні Теорема 1, формулювання прикладу 2, прикладу 3 та їх доведення*). (*Scopus, Q1 – <https://www.scimagojr.com/journalresearch.php?q=21100925710&tip=sid&clean=0>*)

### **Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

1. Українець О. З. Усереднення в математичних моделях під дією багаточастотних збурень із запізненням. Міжнародна науково-практична конференція : тези доповідей, м. Софія, 31 січ. – 2 лют. 2024 р. / International Scientific Unity. М. Софія, 2024. С. 263–266.

2. Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of immune response to infectious diseases with ecological factor. International Conference IMCS-60 : proceedings, Chisinau, Republic of Moldova, October 10–13, 2024 / Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, Moldova State University. Chisinau, 2024. P. 151–154. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну*

*належить постановка задачі і обговорення результатів досліджень, наслідок 2.1; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теорем 1 та 2)*

3. Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modeling of the body's immune response to infectious disease with external factors. Modeling, Control and Information Technologies : proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference, Rivne, Ukraine, November 7–9, 2024 / National University of Water and Environmental Engineering. Rivne, 2024. P. 223–224. *(Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить обговорення результатів досліджень та наслідок; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теорем, числове моделювання результатів)*

4. Bihun Y., Ukrainets O. Modelling of immune response with ecological factor. Applications of Mathematics in Biology and Medicine : XXX National Conference (International Edition), Wikno, Poland, September 16–20, 2025 / University of Warmia and Mazury; Institute of Applied Mathematics and Mechanics, University of Warsaw. Wikno, 2025. P. 7–8. *(Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить участь у постановці задачі; О.З. Українцю належить побудова та дослідження математичної моделі)*

5. Бігун Я., Українець О. Математичне моделювання впливу забруднення довкілля на епідемічний процес. Modeling, Control and Information Technologies : proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Rivne, Ukraine, 6-8 November / National University of Water and Environmental Engineering. Rivne, 2025. № 8. С. 278–279. *(Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить обговорення результатів досліджень; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теореми, комп'ютерне моделювання)*

6. Bihun Y., Ukrainets O., Patratii M. Asymptotic stability of solutions to an immune-response model under the influence of an environmental factor. Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2025 : proceedings, Kyiv, December 18–19, 2025 / Taras Shevchenko National University of Kyiv. Kyiv,

2025. Р. 90. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну та М.В. Патратій належать обговорення практичного застосування результатів досліджень; О.З. Українцю – побудова і дослідження математичної моделі*)

**Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:**

1. Popov M., Ukrainets O. A maximal Riesz-Kantorovich theorem with applications to markets with an arbitrary commodity set. *Matematychni Studii*. 2024. Vol 62, No 2. P. 199-210. (*Внесок авторів: М.М. Попову належить формулювання і доведення Теорем 1, 2; О.З. Українцю належить формулювання прикладів і участь у доведенні Теорему 3*).

2. Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. *Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences*. 2024. Vol. 18, No. 2. P. 7-17. (*Внесок авторів: постановку задачі та обговорення результатів досліджень здійснив Я.Й. Бігун; О.З. Українець виконав формулювання і доведення теорем, а також комп'ютерне моделювання*).