DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.13

Крак Ю.В., Кудін Г.І., Шкільнюк Д.В.

ФОРМУЛИ ПСЕВДО ОБЕРНЕННЯ МАТРИЦЬ ПРИ МАТРИЧНОМУ РОЗШИРЕННІ (ЗВУЖЕННІ) ВИХІДНОЇ МАТРИЦІ

Дослідження властивостей та методів побудови псевдо обернених матриць є фундаментальними основами теорії керування та системного аналізу і має важливе застосування для багатьох прикладних задач. Означення псевдо-оберненої матриці було запропоноване на початку XX століття математиком Едвардом Муром. Згодом, незалежно від Е. Мура, в дещо іншій формі, псевдо обернена матриця визначилась і досліджувалась англійським математиком Роджером Пенроузом та іншими авторами. Твердження про існування та єдиність псевдо оберненої матриці для будь-якої матриці над дійсними та комплексними числами носить назву теореми Мура-Пенроуза. Т. Гревілем було запропоновано рекурентні формули для обчислення псевдо обернених матриць у випадку розширення системи рівнянь. В результаті клас задач псевдо обернення можна розширити на задачі адаптивної обробки даних.

Подальшого розвитку теорія псевдо обернення набула в роботах вітчизняних та зарубіжних вчених, зокрема слід виділити дослідження М.Ф. Кириченка та його учнів і послідовників: Ю.В. Крак, Ф.Г. Гаращенко, В.С. Донченко, які створили потужну наукову школу в галузі системного аналізу, теорії керування та розпізнавання образів, синтезу жестів та інтелектуального керування. Основні напрямки досліджень наукової школи це питання теорії збурень псевдо обернених матриць, конструктивні методи та конкретні алгоритми (рекурентні формули), які можна реалізувати для реальних технічних систем.

У даній роботі запропоновано нові математичні результати з класичної теорії псевдо обернення матриць у випадку, коли вихідну матрицю розширяють або звужують матрицею відповідної розмірності. Отримані узагальнення формул Гревіля на випадок матричного додавання (розширення) та формул Кириченка М.Ф. – на випадок матричного вилучення (звуження). Результати наведені у вигляді теорем з відповідним доведенням.

Ключові слова і фрази: системи лінійних алгебраїчних рівнянь, псевдо обернення, формули Гревіля, формули Кириченка М.Ф., матричне розширення (звуження).

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна (Крак Ю.В.)
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна (Крак Ю.В., Кудін Г.І.)
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна (Шкільнюк Д.В.)
e-mail: *Iurii.krak@knu.ua (Крак Ю.В.), kudin@ukr.net (Кудін Г.І.), d.skilnjuk@chnu.edu.ua (Шкільнюк Д.В.)*

УДК 519.7:004.04
2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A09, 15A12, 15A22.

Вступ

У прикладних дослідженнях важливими є процедури рекурентного обчислення, які виникають при розширенні досліджуваної інформації: у задачах відновлення функції додавання нового спостереження, у задачах класифікації, кластеризації розширення навчальної вибірки відповідних класів, у лінійному варіанті регресії розширення матриці спостережень, загалом конструктивно реалізувати етапи статистичного аналізу, пов'язані із появою у вибірці нових спостережень, вилученням певних спостережень – заміну одних спостережень на інші. Оскільки розв'язки і псевдо розв'язки СЛАР описуються співвідношеннями (гіперплощинами), складові опису яких використовують псевдо обернені матриці, то процес рекурентного використання інформації зводиться до рекурентних обчислень матриць з розширенням (звуженням) рядком (стовпчиком) чи матрицею.

Формули розширенням матриці рядком (стовпчиком) широко відомі як формули Гревіля [1, 2]. Якщо розширення матриці відбувається додаванням матриці узгодженої розмірності, то співвідношення типу прямого варіанту формули Гревіля отримані в 1964 році [3] – формула Клайна. Алгоритм обчислення матриці звуженням рядком (стовпчиком) опубліковані Кириченком М.Ф. [4].

У статті пропонується варіант поширення дії формул типу Гревіля та Кириченка М.Ф. на матричні евклідові простори.

1 Формула Клайна [2]. Залежність псевдо оберненої матриці U^+ від розширення вихідної матриці правою матрицею V:

$$(U \vdots V)^+ = \begin{pmatrix} U^+(I - VJ) \\ \dots \\ J \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$J = C^+ + Z(C)KV^T \left(U^+\right)^T U^+ \left(I - VC^+\right),$$

де

$$C = \left(I - UU^+\right) V,\ Z(C) = I - C^+C,\ K = \left(I + M^T M\right)^{-1},\ M = U^+VZ(C).$$

2 Залежність псевдо оберненої матриці від розширення вихідної матриці незалежною нижньою матрицею

Якщо передбачити, що розширення матриці $A \in R^{m\times n}$ відбувається приєднанням знизу нової матриці $B \in R^{m_1\times n}$, тобто утворюється матриця

$$A_B = \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix} \in R^{(m+m_1)\times n},$$

то за відомої псевдо оберненої матриці $A^+ \in R^{n\times m}$ для обчислення псевдо оберненої матриці $A_B^+ \in R^{n\times(m+m_1)}$ необхідно знайти співвідношення типу прямих формул Гревіля.

Теорема 1. *Якщо для матриць $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{m_1\times n}$ виконується умова лінійної незалежності рядків матриці B від рядків матриці A:*

$$C = BZ(A) \neq 0, \quad Z(A) = I_n - A^+A, \tag{2}$$

то

$$\begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix}^+ = \Big(\left(I_n - QB\right) A^+ \vdots Q \Big), \quad Q = Z(A)C^+. \tag{3}$$

Доведення. Розглядається система матричних рівнянь

$$\begin{cases} AX = H \\ BX = H_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} H \\ \dots \\ H_1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} H \\ \dots \\ H_1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$A \in R^{m\times n},\ B \in R^{m_1\times n},\ X \in R^{n\times p},\ H \in R^{m\times p},\ H_1 \in R^{m_1\times p}$$

розв'язок якої формується послідовним представленням розв'язків кожного рівняння системи:

$$X = A^+H + Z(A)V, \quad V \in R^{n\times p}, \tag{5}$$

$$B\left(A^+H + Z(A)V\right) = H_1 \Rightarrow V = C^+D + Z(C)W, \tag{6}$$

де

$$D = H_1 - BA^+H, \quad W \in R^{n\times p}.$$

Згідно представлення псевдо розв'язку системи рівнянь (4):

$$\hat{X} = \underset{\min W}{\mathrm{Arg}} \left\|A^+H + Z(A)\left(C^+D + Z(C)W\right)\right\|^2 = A^+H + Z(A)C^+\left(H_1 - BA^+H\right) =$$

$$= \Big(\left(I_n + Z(A)C^+B\right) A^+ \vdots Z(A)C^+ \Big) \begin{pmatrix} H \\ \dots \\ H_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix}^+ = \Big(\left(I_n + QB\right) A^+ \vdots Q \Big).$$

□

Наслідок 1. *Залежність псевдо оберненої матриці від розширення вихідної матриці незалежною правою матрицею. Якщо для матриць $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{m\times n_1}$ виконується умова лінійної незалежності стовпців матриці B від стовпців матриці A:*

$$C = Z\left(A^T\right)B \neq 0, \quad Z\left(A^T\right) = I_m - AA^+, \tag{7}$$

то

$$(A \vdots B)^+ = \begin{pmatrix} A^+\left(I_n - BQ\right) \\ \dots \\ Q \end{pmatrix}, \quad Q = C^+Z\left(A^T\right). \tag{8}$$

3 Залежність псевдо оберненої матриці від розширення вихідної матриці залежною правою матрицею

Теорема 2. *Якщо для матриць $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{m\times n_1}$ виконується умова лінійної залежності стовпців матриці B від стовпців матриці A:*

$$C = Z\left(A^T\right)B = 0, \quad Z\left(A^T\right) = I_m - AA^+, \tag{9}$$

то

$$(A\vdots B)^+ = \begin{pmatrix} A^+\left(I_n - BQ\right) \\ \dots \\ Q \end{pmatrix}, \quad Q = \left(I_{n_1} + \left(A^+B\right)^T\left(A^+B\right)\right)^{-1}\left(A^+B\right)^T A^+. \tag{10}$$

Доведення. Розглядається матричне рівняння

$$(A\vdots B)\begin{pmatrix} X \\ \dots \\ Y \end{pmatrix} = H \Leftrightarrow AX + BY = H \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ \dots \\ Y \end{pmatrix} = (A\vdots B)^+ H, \tag{11}$$

$$A \in R^{m\times n},\ B \in R^{m\times n_1},\ X \in R^{n\times p},\ Y \in R^{m_1\times p},\ H \in R^{m\times p},$$

для якого має місце рівність

$$X(Y) = A^+(H - BY). \tag{12}$$

Псевдо розв'язок системи (11) визначається мінімізацією функції $J(Y)$:

$$J(Y) = \|X(Y)\|^2 + \|Y\|^2,$$

$$\hat{Y} = \underset{\min Y}{\mathrm{Arg}}\, J(Y) = \underset{\min Y}{\mathrm{Arg}}\left(sp\left(X(Y)X^T(Y)\right) + sp\left(YY^T\right)\right) =$$

$$= \underset{\min Y}{\mathrm{Arg}}\left(sp\left(H_1H_1^T\right) - 2sp\left(B_1^T H_1 Y^T\right) + sp\left(B_1^T B_1 Y Y^T\right) + sp\left(YY^T\right)\right),$$

де

$$H_1 = A^+H,\ B_1 = A^+B.$$

$$\frac{\partial J(Y)}{\partial Y} = 2\left(Y - B_1^T H_1 + B_1^T B_1 Y\right) = 0 \ \Rightarrow\ \left(I_{n_1} + B_1^T B_1\right)Y = B_1^T H_1.$$

Оскільки $B_1 = A^+B \neq 0$, то

$$Y = \left(I_n + B_1^T B_1\right)^{-1} B_1^T H_1 = QH,$$

$$X(Y) = \left(A^+ - A^+BQ\right)H.$$

Остаточно:

$$\begin{pmatrix} X(Y) \\ \dots \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+\left(I_n - BQ\right) \\ \dots \\ Q \end{pmatrix} H.$$

$\square$

Наслідок 2. *Залежність псевдо оберненої матриці від розширення вихідної матриці залежною нижньою матрицею. Якщо для матриць $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{m_1 \times n}$ виконується умова лінійної залежності рядків матриці B від рядків матриці A:*

$$C = BZ(A) = 0, \quad Z(A) = I_n - A^+ A, \tag{13}$$

то

$$\begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix}^+ = \left((I_n - QB)\, A^+ \vdots Q \right), \quad Q = A^+ \left(BA^+\right)^T \left(I_{m_1} + \left(BA^+\right)\left(BA^+\right)^T \right)^{-1}. \tag{14}$$

4 Залежність псевдо оберненої матриці від вилучення (звуження) з матриці нижньої лінійно незалежної матриці

Якщо передбачити, що звуження матриці

$$A_B = \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix} \in R^{(m+m_1)\times n}, \tag{15}$$

$$A \in R^{m \times n}, \ B \in R^{m_1 \times n},$$

для якої відома псевдо обернена матриця

$$A_B^+ = (P \vdots Q) \in R^{n \times (m+m_1)}, \tag{16}$$

відбувається вилученням знизу матриці $B \in R^{m_1 \times n}$, тобто залишається лише матриця A, то при відомих матрицях P, Q необхідно обчислити псевдо обернену матрицю $A^+ \in R^{n,m}$.

Теорема 3. *Якщо для матриці* $\begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix}$ *з відомими матрицями $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{m_1 \times n}$ відома псевдо обернена матриця*

$$\begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix}^+ = (P \vdots Q), \tag{17}$$

де матриці $P \in R^{n \times m}, Q \in R^{n \times m_1}$ також відомі і, при цьому, виконується умова лінійної незалежності рядків матриці B від рядків матриці A, тобто $tr(BQ) = m_1$, то

$$A^+ = \left(I_n - Q \left(Q^T Q\right)^{-1} Q^T \right) P. \tag{18}$$

Доведення. Згідно теореми 1 відомі представлення матриць $P \in R^{n \times m}$, $Q \in R^{n \times m_1}$:

$$P = (I_n - QB)\, A^+, \quad Q = Z(A)(BZ(A))^+,$$

тому необхідно довести матричну рівність:

$$\left(I_n - Q \left(Q^T Q\right)^{-1} Q^T \right) (I_n - QB)\, A^+ = A^+. \tag{19}$$

Отже,

$$\left(I_n - Q\left(Q^TQ\right)^{-1}Q^T\right)(I_n - QB)\,A^+ = A^+ - QBA^+ + Q\left(Q^TQ\right)^{-1}\left(Q^TQ\right)BA^+ -$$

$$-Q\left(Q^TQ\right)^{-1}Q^TA^+ = A^+ - Q\left(Q^TQ\right)^{-1}Q^TA^+ = A^+.$$

□

Наслідок 3. *Вилучення з матриці правої лінійно незалежної матриці. Якщо для матриці* $(A\vdots B)$ *з відомими матрицями* $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{m\times n_1}$ *відома псевдо обернена матриця*

$$(A\vdots B)^+ = \begin{pmatrix} P \\ \dots \\ Q \end{pmatrix}, \tag{20}$$

де матриці $P \in R^{n\times m}$, $Q \in R^{n_1\times m}$ *також відомі і при цьому виконується умова лінійної незалежності стовпців матриці* B *від стовпців матриці* A, *тобто* $tr(QB) = n_1$, *то*

$$A^+ = P\left(I_m - Q^T\left(QQ^T\right)^{-1}Q\right). \tag{21}$$

5 Залежність псевдо оберненої матриці від вилучення (звуження) з матриці нижньої лінійно залежної матриці

Теорема 4. *Якщо для матриці* $\begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix}$ *з відомими матрицями* $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{m_1\times n}$ *відома псевдо обернена матриця*

$$\begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix}^+ = (P\vdots Q), \tag{22}$$

де матриці $P \in R^{n\times m}$, $Q \in R^{n\times m_1}$ *також відомі і, при цьому, виконується умова лінійної залежності рядків матриці* B *від рядків матриці* A, *тобто* $tr(BO) \neq m_1$, *то*

$$A^+ = (I_n + QQ_1B)\,P, \quad Q_1 = (I_n - BQ)^{-1}. \tag{23}$$

Доведення. Згідно наслідку 2 відомі представлення матриць $P \in R^{n\times m}$, $Q \in R^{n\times m_1}$:

$$P = A^+(I_n - QB), \quad Q = A^+\left(BA^+\right)^T\left(I_{m_1} + \left(BA^+\right)\left(BA^+\right)^T\right)^{-1}, \tag{24}$$

тому необхідно довести матричну рівність:

$$(I_n + QQ_1B)\,A^+(I_n - QB) = A^+.$$

Отже:

$$(I_n + QQ_1B)\,A^+(I_n - QB) = A^+ - QBA^+ + QQ_1BA^+ - qQ_1BQBA^+ =$$

$$= A^+ + Q\left(-I_{m_1} + Q_1\left(I_{m_1} - BQ\right)\right)BA^+ = A^+.$$

□

Наслідок 4. *Вилучення з матриці правої лінійно залежної матриці. Якщо для матриці* $(A \vdots B)$ *з відомими матрицями* $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{m \times n_1}$ *відома псевдо обернена матриця*

$$(A \vdots B)^+ = \begin{pmatrix} P \\ \dots \\ Q \end{pmatrix} \qquad (25)$$

де матриці $P \in R^{n \times m}$, $Q \in R^{n_1 \times m}$ *також відомі і при цьому виконується умова лінійної залежності стовпців матриці* B *від стовпців матриці* A, *тобто* $tr(QB) \neq n_1$, *то*

$$A^+ = P\left(I_m + BQ_1Q\right), \quad Q_1 = \left(I_{n_1} - QB\right)^{-1}. \qquad (26)$$

Висновки

У роботі здійснено дослідження визначення аналітичної залежності збурень елементів псевдо оборотних і проекційних матриць від збурення окремих елементів вихідної матриці. Запропоновано конструктивні формули для псевдо обернених і проекційних матриць, в умовах збурення вихідної матриці, що відповідають природним припущенням про її розширення чи звуження. Отримані залежності знайдуть у подальшому застосування під час вирішення завдань синтезу лінійних моделей, оптимізації алгоритмів цифрової обробки інформації, апроксимації функцій, задачах адаптивної обробки даних.

Список літератури

[1] Ben-Israel A., Greville T. N.E. Generalized Inverses: Theory and Applications. 2nd ed. Springer, New York, 2003.

[2] Albert A. Regression, pseudoinversion, recurrent estimation / Trans. with English M.: Nauka, 1977. 305 p.

[3] Cline R.E. *Representations for the generalized inverse of partitioned matrix.* SIAM J. Appl. Math. **32**, 1964. 588-600.

[4] Kirichenko N.F., Lepecha M.P. *Pseudoinverse and projective matrices perturbation in linear and nonlinear identification problems.* Problemy Upravleniya I Informatiki (Avtomatika). Iss. 1. 2001. 6-22.

Надійшло 06.03.2026

Krak Yu.V., Kudin H.I., Shkilnyuk D.V. *Formulas for pseudo-inversion of matrices during matrix expansion (contraction) of the original matrix*, Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 148–155.

The study of the properties and the construction methods of pseudoinverse matrices forms the fundamental basis of control theory and systems analysis, having significant applications across numerous applied problems. The definition of the pseudoinverse matrix was first proposed at the beginning of the 20th century by the mathematician E.H. Moore. Later, independently of Moore and in a slightly different form, the pseudoinverse matrix was defined and investigated by the English mathematician Roger Penrose and other authors. The statement regarding the existence and uniqueness of a pseudoinverse for any matrix over real or complex numbers is known as the Moore–Penrose theorem. T. Greville proposed recurrence formulas for calculating

pseudoinverse matrices in the case of expanding a system of equations. Consequently, the class of pseudo-inversion problems can be extended to adaptive data processing tasks.

The theory of pseudo-inversion was further developed in the works of domestic and foreign scientists. Notably, the research of M.F. Kyrychenko and his students and followers – Yu.V. Krak, F.H. Garashchenko, and V.S. Donchenko – should be highlighted. They established a powerful scientific school in the fields of systems analysis, control theory, pattern recognition, gesture synthesis, and intelligent control. The main research directions of this school include perturbation theory of pseudoinverse matrices, constructive methods, and specific algorithms (recurrence formulas) that can be implemented for real-world technical systems.

This paper proposes new mathematical results in the classical theory of matrix pseudoinversion for cases where the initial matrix is expanded or narrowed by a matrix of corresponding dimensions. The obtained results include generalizations of Greville's formulas for the case of matrix addition (expansion) and M.F. Kyrychenko's formulas for the case of matrix removal (narrowing). The results are presented in the form of theorems with corresponding proofs.