DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.04

Пасічник Г. С.

# ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Установлено існування та єдиність класичного розв'язку задачі Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку з зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами лінійної частини. Цей розв'зок належить до класу гельдерових функцій з $t \in (0; T_0]$, де досить мале $T_0 \in (0, T]$. За допомогою цього результату доведено існування та єдиність розв'язку задачі про визначення коефіцієнта при невідомій функції у відповідному лінійному параболічному рівнянні з незалежними від $t$ коефіцієнтами.

*Ключові слова і фрази:* нелінійне параболічне рівняння, зростаючі коефіцієнти, класичнй розв'язок задачі Коші.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна (Пасічник Г. С.)
e-mail: *pasichnyk.gs@gmail.com*

## Вступ

Найповніші результати про розв'язність залачі Коші для параболічних рівнянь на сьогодні отримано для випадку, коли рівняння лінійне [1]. Вагомий внесок у дослідження нелінійних задач зробив С.Д. Ейдельман, чиє 105-річчя з дня народження відзначається у 2025 році. Праця [2] містить огляд результатів С.Д. Ейдельмана та їх розвиток до вивчення квазілінійних параболічних та ультрапараболічних рівеянь і систем рівнянь. Ці результати стосувались, в основному, нелінійних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами.

Питання коректної розв'язності задачі Коші для рівняння $\partial_t u - \Delta u + uKu = f$, де на оператор $K$ накладаються спеціальні умови, вивчались у праці [3]. Аналогічні питання для рівняння $\alpha(t)\partial_t u(t,x) - (Lu)(t,x) + u(t,x)(Ku)(t,x) = f(t,x)$, де $(Lu)(t,x) = \partial^2_{xx} u(t,x) + x\partial_x u(t,x) + u(t,x)$, $\alpha : [0;T] \to [0,\infty)$ – неперервна функція така, що $\alpha(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$ і $\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$, розглянуто в [4].

У цій статті досліджується розв'язність задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку з коефіцієнтами лінійної частини, які зростають при $|x| \to \infty$. Доведення отриманих результатів здійснюється за методикою з [3] з використанням результатів з [5]. Частково результати доповідались на науковій конференції [6].

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K10, 35K55.
Information on some grant ...

## 1 Постановка задачі

Нехай $\Pi_H := \{(t,x)|t \in H,\, x \in \mathbb{R}^n\}$, де проміжок $H \subset \mathbb{R}$. Розглядається задача

$$(Lu)(t,x) + (u\,Ku)(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де $T > 0$, $K$ – локально обмежений та локально ліпшицевий оператор у класі $E^\lambda_\alpha(T)$ неперервних у $\Pi_{[0,T]}$ функцій $u$, для яких

$$\max_{t\in[0,T]} |u(t,x)| \le B \begin{cases} (|x|^2+1)^\alpha \text{ для } \lambda = 0, \\ \exp\{\alpha(|x|^2+1)^{\lambda/2}\} \text{ для } \lambda \in (0,2], \end{cases}$$

$\alpha > 0$, $B > 0$, і диференціальний вираз

$$Lu := \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}\Big(a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}u + a_j(t,x)u\Big) - \sum_{j=1}^n b_j(x)\partial_{x_j}u - c(t,x)u.$$

Припускається, що дійснозначні функції $a_{ij} = a_{ji}$, $\partial_{x_j}a_{ij}$, $a_j$, $\partial_{x_j}a_j$, $b_j$, $\partial_{x_j}b_j$ і $c$ є гельдеровими в кожній компактній підобласті шару $\Pi_{[0,T]}$ та існують додатні сталі $\mu$, $C_j$, $j \in \{1,2,3\}$, і число $\lambda \in [0,2]$ такі, що для будь-яких $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$

$$\mu|\sigma|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\sigma_i\sigma_j \le C_1(|x|^2+1)^{(2-\lambda)/2}|\sigma|^2,$$

$$\max\{|\partial_{x_j}a_{ij}(t,x)|,\, |a_j(t,x)|,\, |b_j(t,x)|\} \le C_2(|x|^2+1)^{1/2},$$

$$\max\{c(t,x) + \partial_{x_j}a_j(t,x),\; c(t,x) - \partial_{x_j}b_j(t,x)\} \le C_3(|x|^2+1)^{\lambda/2}.$$

За сформульованих умов та додаткоаих умов на $K$ вивчається питання існування та єдиності класичного розв'язку задачі (1), (2) та існування та єдиність розв'язку задачі про визначення коефіцієнта при невідомій функції у відповідному лінійному параболічному рівнянні з незалежними від $t$ коефіцієнтами.

## 2 Існування та єдиність розв'язку

Для довільного $\alpha > 0$, як в [5], розглянемо функцію

$$g_\alpha(t,x) = \begin{cases} \ln\frac{(|x|^2+1)^\alpha}{1-\beta t}, & \lambda = 0 \\ (\alpha+\beta t)(|x|^2+1)^{\lambda/2}, & \lambda \in (0;2], \end{cases} \qquad (t,x) \in \Pi_{[0;T_\alpha]},$$

де $\beta = \beta(\alpha)$, а величина $T_\alpha$ буде означена нище. Нехай $v^\alpha(t,x) = u(t,x)\exp\{-g_\alpha(t,x)\}$, $(t,x) \in \Pi_{[0;T_\alpha]}$. Тоді

$$(Lu)(t,x) = \exp\{g_\alpha(t,x)\}\Big(\partial_t v^\alpha(t,x) - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}\Big(a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}v^\alpha(t,x)\Big) -$$

$$- \sum_{j=1}^n a^\alpha_j(t,x)\partial_{x_j}v^\alpha(t,x) - c^\alpha(t,x)v^\alpha(t,x)\Big) \equiv \exp\{g_\alpha(t,x)\}(L^\alpha v^\alpha)(t,x),$$

де

$$a^\alpha_j(t,x) := a_j(t,x) + b_j(t,x) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}g_\alpha(t,x),$$

$$c^{\alpha}(t,x) := c(t,x) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} a_j(t,x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i} g_\alpha(t,x)\partial_{x_j} g_\alpha(t,x) + \sum_{j=1}^{n}\Big(a_j(t,x) + b_j(t,x)\Big)\times$$
$$\times\, \partial_{x_j} g_\alpha(t,x) + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} g_\alpha(t,x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial^2_{x_i x_j} g_\alpha(t,x) - \partial_t g_\alpha(t,x),$$

Очевидно, що $(Lu)(t,x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $(L^{\alpha}v^{\alpha})(t,x) = 0$, $(t,x) \in \Pi_{(0;T_\alpha]}$. Крім того, якщо $Z^{\alpha}(t,x;\tau,\xi)$ є фундаментальним розв'язком рівняння $(L^{\alpha}v^{\alpha})(t,x) = 0$, то

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \exp\{g_\alpha(t,x) - g_\alpha(\tau,\xi)\}Z^{\alpha}(t,x;\tau,\xi) \tag{3}$$

є фундаментальним розв'язком рівняння $(Lu)(t,x) = 0$.

При побудові фундаментального розв'язку $Z^{\alpha}$ важливу роль відіграє знак коефіцієнта $c^{\alpha}$. Якщо $\lambda = 0$, то

$$c^{\alpha}(t,x) \le 4C_1\alpha^2 + 2(n+2)(2C_1 + C_2)\alpha + C_3 - \frac{\beta}{1-\beta t}$$

і тоді, якщо $\beta(\alpha) = 2(4C_1\alpha^2 + 2(n+2)(2C_1+C_2)\alpha + C_3)$, а $T_\alpha = \min\{T, 1/(2\beta(\alpha))\}$, маємо, що $c^{\alpha}(t,x) < 0$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T_\alpha]}$. Якщо $\lambda > 0$, то

$$\begin{aligned} c^{\alpha}(t,x) \le&(|x|^2+1)^{\lambda/2}\Big(C_1\lambda^2(\alpha+\beta t)^2 + (n+2)\lambda(C_1+C_2)(\alpha+\beta t) + C_3 - \beta\Big) \le \\ \le&\delta^{\alpha}(t)(|x|^2+1)^{\lambda/2}. \end{aligned}$$

Тоді за $\beta$ треба взяти $\beta(\alpha) = 2(C_1\lambda^2\alpha^2 + (n+2)\lambda(C_1+C_2)\alpha + C_3$, а $T_\alpha = \min\{T, \tilde{T}_\alpha\}$, де $\tilde{T}_\alpha$ – додатний корінь рівняння $\delta^{\alpha}(t) = -\beta(\alpha)/4$, щоб виконувалась нерівність $c^{\alpha}(t,x) < 0$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T_\alpha]}$.

В обох випадках $T_\alpha$ є незростаючою функцією змінної $\alpha$ і $\lim\limits_{\alpha\to 0} T_\alpha = T_0(C_1,C_2,C_3) \le T$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty} T_\alpha = 0$. Тому $0 < T_\alpha \le T_0$, $\alpha \in (0;\infty)$.

У праці [5] для задачі Коші

$$(Lu)(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{4}$$
$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

доведено існування і єдиність розв'язку та одержано інтегральне зображення для нього

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0;T_\alpha)}, \tag{6}$$

якщо функція $\varphi$ неперервна в $\mathbb{R}^n$, $f$ неперервна і задавольняє умову Гельдера за $x$ рівномірно в кожній обмеженій області шару $\Pi_{(0;T]}$, а також $\varphi$ і $f$ належать до класу $E^{\lambda}_{\alpha}(T)$.

Розв'язок задачі (4), (5), який визначається формулою (6), при заданих вище умовах на функції $f$ і $\varphi$ належить до класу $E^{\lambda}_{\alpha_1}(T_{\alpha_1})$ з $\alpha_1 = 2\alpha$ при $\lambda = 0$ і $\alpha_1 = \alpha + \beta(\alpha)T_\alpha$ при $\lambda \in (0;2]$ і він єдиний в класі функцій $E^{\lambda}_{\alpha}(T_\alpha)$ з довільним $\alpha > 0$.

У зображенні (6) $Z$ є фундаментальним розв'язком рівняння $Lu = 0$ має вигляд (3), де $Z^{\alpha}$ є фундаментальним розв'язком рівняння $L^{\alpha}u^{\alpha}(t,x) = 0$, який визначений для $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le \tau < t \le T_\alpha$, причому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^{\alpha}(t,x;\tau,\xi)\,d\xi = 1,$$
$$0 \le Z^{\alpha}(t,x;\tau,\xi) \le C(t-\tau)^{-n/2}, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ 0 \le \tau < t \le T_\alpha,$$

де $C$ – стала, яка залежить від $n$ і $\mu$ і не залежить від $\alpha$.

З того, що розв'язок (6) належить до класу $E^{\lambda}_{\alpha}(T_\alpha)$, випливає нерівність

$$|u(t,x)| \le C(1+T_\alpha)\exp\{g_\alpha(t,x)\}, \quad (t,x)\in \Pi_{(0;T_\alpha]}.$$

Розглядатимемо означені в [4] простори гельдерових функцій $H^{l,l/2}(\Pi_{(0;T]})$ і $H^{l}(\mathbb{R}^n)$, де $l$ – неціле додатне число, і відповідні норми

$$\|u\|_{(0;T]} \equiv \sup_{(t,x)\in\Pi_{(0;T]}} \Big|u(t,x)\exp\{-g_\alpha(t,x)\}\Big|,$$
$$\|\varphi\| \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big|\varphi(x)\exp\{-g_\alpha(0,x)\}\Big|.$$

Вважатимемо, що оператор $K$ задовольняє такі умови:

1) $\|Ku\|_{(0;T]} \le B_1(\|u\|_{(0;T]},T)$,

2) $\|Ku_1-Ku_2\|_{(0;T]} \le B_2(\|u_1\|_{(0;T]},\|u_2\|_{(0;T]},T)\,\|u_1-u_2\|_{(0;T]}$,

де $u\in E^{\lambda}_{\alpha}(T)$ і неперервна в $\Pi_{[0,T]}$, а функції $B_1(a,c)$ і $B_2(a,b,c)$ обмежені, коли аргументи змінюються в обмеженій області.

**Теорема 1.** *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *і оператор $K$ задовольняють умови, сформульованя вище, $f\in H^{l,l/2}(\Pi_{(0;T]})\cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$, $\varphi\in H^{l+2}(\mathbb{R}^n)\cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші* (1), (2) *з простору $H^{l+2,(l+2)/2}(\Pi_{(0;T]})\cap E^{\lambda}_{\alpha_1}(T_0)$, де $T_0$ – досить мале додатне число, $l\in(0;1)$, $\alpha_1=2\alpha$ при $\lambda=0$ і $\alpha_1=\alpha+\beta(\alpha)T_\alpha$ при $\lambda\in(0;2]$.*

*Доведення.* Доведення проводиться за методикою з [4]. У просторі $C^{1,2}(\Pi_{(0;T]})\cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$ задача (1), (2) еквівалентна рівнянню

$$u(t,x)=(Nu)(t,x), \tag{7}$$

де

$$(Nu)(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi-$$
$$-\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)u(\tau,\xi)(Ku)(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{(0;T]}. \tag{8}$$

Переконаємось, що в просторі $C^{1,2}(\Pi_{(0;T]})\cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$ рівняння (7) для досить малих $T$ має розв'язок. Скориставшись властивостями потенціалів, ядрами яких є фундаментальний розв'язок $Z$, одержуємо

$$|(Nu)(t,x)| \le \Big(\|\varphi\|+T_\alpha\|f\|_{(0;T_\alpha]}+T_\alpha\|u\|_{(0;T_\alpha]}\|Ku\|_{(0;T_\alpha]}\Big)\exp\{g_\alpha(t,x)\}.$$

Тому

$$\|Nu\|_{(0;T_\alpha]} \le \|\varphi\|+T_\alpha\|f\|_{(0;T_\alpha]}+T_\alpha\|u\|_{(0;T_\alpha]}\|Ku\|_{(0;T_\alpha]}. \tag{9}$$

Нехай $M=2(\|\varphi\|+T_\alpha\|f\|_{(0;T_\alpha]})$. Тоді з (9), використавши умову 1), отримаємо для розв'язку $u\in C^{1,2}(\Pi_{(0;T]})\cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$ такого, що $\|u\|_{(0;T_\alpha]}\le M$, нерівність

$$\|Nu\|_{(0;T_\alpha]} \le \frac{M}{2}+T_\alpha M\,B_1(M,T_\alpha). \tag{10}$$

Виберемо $T_\alpha$ так, що $2T_\alpha B_1(M,T_\alpha) \le 1$. Такий вибір можливий, бо $B_1(M,T_\alpha)$ є обмеженою величиною. Тому з (10) отримуємо $\|Nu\|_{(0;T_\alpha]} \le M$.

Нехай $\{u_1,u_1\} \subset C^{2,1}(\Pi_{(0;T]}) \cap E^\lambda_\alpha(T)$ і $\|u_1\|_{(0;T_\alpha]} \le M$, $\|u_2\|_{(0;T_\alpha]} \le M$. Тоді

$$(Nu_1)(t,x)-(Nu_2)(t,x) = -\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\Big((u_1(\tau,\xi)-u_2(\tau,\xi))(Ku_1)(\tau,\xi)+$$
$$+u_2(\tau,\xi)\Big((Ku_1)(\tau,\xi)-(Ku_2)(\tau,\xi)\Big)\Big)\,d\xi.$$

Звідси, згідно з умовою 1), одержується

$$\|Nu_1-Nu_2\|_{(0;T_\alpha]} \le T_\alpha\Big(\|u_1-u_2\|_{(0;T_\alpha]}\|Ku_1\|_{(0;T_\alpha]} + \|u_2\|_{(0;T_\alpha]}\|Ku_1-Ku_2\|_{(0;T_\alpha]}\Big) \le$$
$$\le T_\alpha\|u_1-u_2\|_{(0;T_\alpha]}\Big(B_1(M,T_\alpha)+MB_2(M,M,T_\alpha)\Big). \tag{11}$$

Взявши $T_\alpha$ так, щоб $2B_1(M,T_\alpha)+MB_2(M,M,T_\alpha) \le 1$, з (11) отримуємо

$$\|Nu_1-Nu_2\|_{(0;T_\alpha]} \le \frac{1}{2}\|u_1-u_2\|_{(0;T_\alpha]}.$$

Скориставшись принципом стиснених відображень, одержуємо, що оператор $N$ має єдину нерухому точку в просторі $C^{1,2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$ з $T_0$ таким, що $2T_\alpha B_1(M,T_\alpha) \le 1$ і $2B_1(M,T_\alpha)+MB_2(M,M,T_\alpha) \le 1$.

Отже, рівняння (7) має єдиний розв'язок $u$ в просторі $C^{1,2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$ з досить малим $T_0$.

Переконаємось, що цей розв'язок належить до простору $H^{l+2,(l+2)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$. З рівності (8), використовуючи властивості потенціалів, ядрами яких є фундаментальний розв'язок $Z$ та його похідні, одержуємо, що $(Nu) \in H^{l+1,(l+1)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$. Тоді з (7) випливає, що $u \in H^{l+1,(l+1)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$, а тому $(Ku) \in H^{l,l/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$ і, отже, $(u(Ku)) \in H^{l,l/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$. Продовжуючи ці міркування, з (8) дістаємо $(Nu) \in H^{l+2,(l+2)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$. а тому й $u \in H^{l+2,(l+2)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$. □

**Теорема 2.** *Якщо для функцій $f_i \in H^{l,l/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$ і $\varphi_i \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$ існують розв'язки $u_i \in H^{l+2,(l+2)/2}(\Pi_{(0;T_0}) \cap E^\lambda_\alpha(T_0)$, $i \in \{1,2\}$, задачі Коші (1), (2), а оператор $K$ задовольняє умову 2), то*

$$\|u_1-u_2\|_{(0;T_0]} \le C_4\|f_1-f_2\|_{(0;T_0]} + C_5\|\varphi_1-\varphi_2\|_{(0;T_0]},$$

*де сталі $C_4$ і $C_5$ залежать від $T_0$, $\|u_i\|_{(0;T_0]}$, $i \in \{1,2\}$, $\|Ku_1\|_{(0;T_0]}$.*

*Доведення.* Оскільки $u_i$, $i \in \{1,2\}$, є розв'язками задачі Коші (1), (2), то для $w = u_1-u_2$ маємо задачу

$$(Lw)(t,x)+w(t,x)(Ku_1)(t,x) = f_1(t,x)-f_2(t,x)-u_2(t,x)\Big((Ku_1)(t,x)-(Ku_2)(t,x)\Big),$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]},$$
$$w(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x)-\varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Розв'язок задачі (12) можна подати у вигляді

$$w(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)(\varphi_1(\xi)-\varphi_2(\xi))\,d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times w(\tau,\xi)(Ku_1)(\tau,\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)u_2(\tau,\xi)\Big((Ku_1)(\tau,\xi)-(Ku_2)(\tau,\xi)\Big)\,d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\big(f_1(\tau,\xi)-f_2(\tau,\xi)\big)\,d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{(0;T_0)},$$

З цього зображення, скориставшись оцінками потенціалів з [5] і умовою 2), одержуємо нерівність

$$\|w\|_{(0;T_0]} \le \Big(\|\varphi_1-\varphi_2\| + T_0\|f_1-f_2\|_{(0;T_0]} + \|Ku_1\|_{(0;T_0]} + C_1(\|u_1\|_{(0;T_0]}, \|u_2\|_{(0;T_0]}, T_0)\times$$

$$\times\|u_2\|_{(0;T_0]})\Big)\int\limits_0^{T_0}\|w\|_{(0;\tau]}d\tau.$$

Застосувавши лему Гронуолла [1], з останньої нерівності отримуємо оцінку

$$\|w\|_{(0;T_0]} \le \Big(\|\varphi_1-\varphi_2\| + T_0\|f_1-f_2\|_{(0;T_0]}\Big)\times$$
$$\times\exp\{\|Ku_1\|_{(0;T_0]} + C_1(\|u_1\|_{(0;T_0]}, \|u_2\|_{(0;T_0]}, T_0)\,\|u_2\|_{(0;T_0]}\},$$

з якої випливає твердження теореми 2. □

## 3 Визначення коефіцієнта при невідомій функції

Розглянемо задачу визначення коефіцієнта при невідомій функції в параболічному рівнянні другого порядку. Задача полягає у знаходженні функцій $u \in H^{l+4,(l+4)/2}(\Pi_{(0;T)} \cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$ і $q \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E^{\lambda}_{\alpha}(T_0)$ з умов

$$\begin{gathered}(Lu)(t,x) + q(x)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\\ u(t,x)|_{t=0} = 0, \quad u(t,x)|_{t=T} = \psi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,\end{gathered} \tag{13}$$

де $f \in H^{l+2,(l+2)/2}(\Pi_{(0;T)} \cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$, $\psi \in H^{l+4}(\mathbb{R}^n)\cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$, $f(0,x)=0$, $\psi(x)\ge\psi_0>0$, $x\in\mathbb{R}^n$. Вважатимемо, що коефіцієнти $L$ не залежать від $t$.

Ввівши позначення $v(t,x) := \partial_t u(t,x)$, для функцій $v \in H^{l+2,(l+2)/2}(\Pi_{(0;T]}) \cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$ і $g \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E^{\lambda}_{\alpha}(T)$ з (13) отримуємо задачу

$$\begin{gathered}(Lv)(t,x) + q(x)v(t,x) = \partial_t f(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\\ v(t,x)|_{t=0} = 0, \quad v(t,x)|_{t=T} = (L\psi)(x) - q(x)\psi(x) + f(T,x), \quad x\in\mathbb{R}^n.\end{gathered} \tag{14}$$

Якщо з третьої умови в (14) знайти $q$ і підставити його в рівняння, то одержимо, що $v$ є розв'язком задачі

$$\begin{gathered}(Lv)(t,x) + v(t,x)\frac{1}{\psi(x)}\Big((L\psi)(x) + f(T,x) - v(T,x)\Big) = \partial_t f(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\\ v(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n.\end{gathered} \tag{15}$$

Застосувавши до задачі (15) теорему 1, отримаємо, що вона має єдиний розв'язок $v \in H^{l+2,(l+2)/2}(\Pi_{(0;T_1]}) \cap E^{\lambda}_{\alpha}(T_1)$, де $T_1$ – досить мале додатне число. Звідси випливає, що й задача (13) має єдиний розв'язок.

## 4 Висновки

У просторах гельдерових функцій установлено існування та єдиність класичного розв'язку задачі Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку з зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами лінійної частини. За допомогою цього результату доведено існування та єдиність розв'язку задачі про визначення коефіцієнта при невідомій функції у відповідному лінійному параболічному рівнянні з незалежними від $t$ коефіцієнтами.

Отримані результати можуть бути використані для дослідження розв'язності задачі Коші для нелінійних параболічних рівнянь довільного порядку, в тому числі й з виродженням на початковій гіперплощині, і зростаючими коефіцієнтами при $|x| \to \infty$.

## Список літератури


[1] Eidelman S. D. Parabolic systems. North-Holland, Amsterdam, 1969.

[2] Medynsky I. P. *Eidelman's study of nonlinrar problems and their development.* Nauk. Visnyk Cherniv. Univer. 2011. **1.** (1–2). 114–128. (in Ukrainian)

[3] Beznoshchenko N.Ya. *On the Cauchy problem for the equation $u_t - \Delta u + u\,Au = f$.* Diff. Eq. 1983. **19**, (6), 991–1000.

[4] Lavrenchuk V. P. *Cauchy problem for a nonlinear secon-jrder parabolic equation with unlimited coefficient and degenerate.* Nauk. Visnyk Cherniv. Univer. 2000. (76). 50–53. (in Ukrainian)

[5] Aronson D.G., Besala P. *Parabolic equations with unbounded coefficients.* J. of Diff. Eq. 1967. **3** (1), 1–14.

[6] Ivasyshen S.D., Lavrenchuk V.P., Pasichnyk H.S. *On the Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with increasing coefficients.* Diff. Eq. and their applications: Proceedings of the Intern. Scientific Conf. dedicated to the 70th anniversary of Prof. V.V. Marints. Uzhgorod, 2012. 36. (in Ukrainian)


*Надійшло 15.09.2025*

Pasichnyk H. S. *Cauchy problem for a nonlinear second-order parabolic equation with increasing coefficients*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 32–38.

The existence and uniqueness of a classical solution to the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation of the second order with coefficients of the linear part increasing as $|x| \to \infty$ are established. This solution belongs to the class of H?lder functions with $t \in (0;T_0]$, where $T_0 \in (0,T]$ is sufficiently small. With the help of this result, the existence and uniqueness of a solution to the problem of determining the coefficient of an unknown function in the corresponding linear parabolic equation with coefficients independent of $t$ are proved.