

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2026.02.03>В. В. Собчук ^{iD}, Є. А. Рудик ^{iD}, О. Н. Нестеренко ^{iD}

Цикли порядку Шарковського для імпульсної системи Лієнара

У статті досліджується проблема існування періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь типу Лієнара з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу. Використовуючи метод відображень Пуанкаре, задачу про існування періодичних розв'язків зведено до аналізу ітерацій одновимірного відображення відрізка в себе. За допомогою методу математичної індукції доведено теорему про аналітичний вигляд періодичних точок будь-якого натурального періоду n та встановлено чітку структуру відповідних многочленів з коефіцієнтами ± 1 . Визначено умови на параметри системи, за яких існують цикли, що відповідають $T(n)$ -періодичним розв'язкам, та показано, що ці точки підпорядковуються порядку Шарковського.

Ключові слова і фрази: диференціальне рівняння Лієнара, імпульсна дія, періодичні розв'язки, відображення Пуанкаре, порядок Шарковського.

Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київська, Київ, 01001, Україна (Собчук В. В., Рудик Є. А.); Кафедра математичного аналізу, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 01001, Україна (Нестеренко О. Н.)
e-mail: sobchuk@knu.ua (Собчук В. В.), lizandra.rudyk@gmail.com (Рудик Є. А.), oleksiinesterenko@knu.ua (Нестеренко О. Н.)

Вступ

В загальному випадку, за наявності імпульсної дії поведінка розв'язків диференціальних рівнянь (навіть лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами) може бути суттєво нелінійною і значно відрізнятися від поведінки таких систем за відсутності імпульсної дії.

Дослідження динамічних систем з імпульсною дією становить один із важливих напрямів сучасної теорії диференціальних рівнянь і прикладної математики. Такі системи адекватно описують процеси, що характеризуються миттєвими змінами стану в дискретні моменти часу, і знаходять застосування в технічних, біологічних та економічних моделях [7]. Фундаментальні аспекти теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією систематично викладено у працях М.О. Перестюка, А.М. Самойленка та співавторів [5, 7]. Подальший розвиток цього напрямку пов'язаний із дослідженням якісних властивостей розв'язків, зокрема їх обмеженості та стійкості. У роботах [6, 10, 11] встановлено умови існування обмежених розв'язків для лінійних і слабконелінійних імпульсних систем, що створює необхідне підґрунтя для аналізу періодичних режимів.

УДК 517.9

2020 *Mathematics Subject Classification:* 34A37, 37E05.

Одним із класичних об'єктів дослідження у теорії нелінійних коливань є рівняння Лієнара $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, яке широко використовується для моделювання автоколивальних процесів. Якісна теорія таких рівнянь без імпульсних збурень ґрунтовно розроблена у [12]. Особливу роль відіграє аналіз фазових портретів і граничних циклів, зокрема для рівнянь типу S (за Опялем), що формує методологічну основу для подальшого дослідження систем з імпульсною дією.

Важливим інструментом дослідження періодичних розв'язків є метод відображення Пуанкаре. Побудова такого відображення на трансверсальній множині дозволяє звести задачу про існування періодичних розв'язків неперервної системи до аналізу нерухомих точок відповідного дискретного оператора. У роботах [4, 8] показано, що для імпульсних осциляторів задача про періодичні режими еквівалентна дослідженню одновимірних відображень відрізка. Це відкриває можливість застосування апарату теорії динамічних систем, зокрема результатів, викладених у [3].

Суттєве ускладнення динаміки виникає у випадку імпульсної дії в нефіксовані моменти часу, що призводить до появи складних режимів, включаючи багатоперіодичні та хаотичні коливання. У цьому контексті ключове значення має порядок Шарковського, який встановлює ієрархію існування періодичних точок для одновимірних відображень [13]. Класичні результати О. Шарковського та подальші узагальнення створюють теоретичне підґрунтя для аналізу складної динаміки імпульсних систем [8]. Сучасні дослідження, зокрема роботи [4, 9], демонструють ефективність цих підходів у задачах побудови стабільних гібридних режимів та аналізу імпульсних модифікацій класичних механічних систем, таких як математичний маятник.

У наведеному контексті результати, отримані в даній роботі, логічно продовжують зазначені дослідження. Зокрема, здійснено перехід від неперервної динаміки рівняння Лієнара до дискретної динаміки відповідного відображення Пуанкаре. Головним науковим результатом є явна побудова многочленів $P^n(\lambda)$ та визначення інтервалів існування параметра λ , що забезпечують існування циклів довільного періоду n . Такий підхід узгоджується з сучасними тенденціями розвитку нелінійного аналізу та теорії стабільності й розширює можливості дослідження складної динаміки імпульсних систем.

1 СИСТЕМА ЛІЄНАРА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Об'єктом аналізу є динамічна система, рух у якій описується диференціальним рівнянням Лієнара вигляду:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1)$$

($x \in M \subset \mathbb{R}$, M — фазовий простір системи (1), $t \in \mathbb{R}$ — час) і яка зазнає впливу миттєвих сил, які визначаються деяким оператором A , що у моменти проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення $x = x_*$ діє згідно з правилом $(t, x) \rightarrow (t, Ax)$.

Імпульсна дія в такій системі відбувається у нефіксовані моменти часу та збільшує кількість руху в системі на деяку величину $I(\dot{x})$, що залежить від швидкості рухомої точки в момент проходження нею положення $x = x_*$. Далі вважатимемо, що $I(y)$, де $y = \dot{x}$, як функція свого аргументу є неперервною.

Якщо t_i — деякий момент часу, в який рухома точка досягає положення $x = x_*$, коли відбувається імпульсна дія, то імпульсні збурення рухомої точки записують [7]:

$$\Delta \frac{dx}{dt} \Big|_{x=x_*} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_i+0} - \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_i-0} = Ax - x = I(\dot{x}). \quad (2)$$

Опис фізичної інтерпретації рівняння Лієнара та характеристика його фазового портрету

детально вивчено в [12]. Рівняння (1) записується еквівалентним чином у вигляді системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y. \end{cases}$$

В подальшому використовується позначення:

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds. \quad (3)$$

Означення 1. Диференціальне рівняння (1), що задовольняє умови:

$$xg(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \neq 0 \quad (4)$$

та

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = -g(x), \quad (5)$$

згідно з класифікацією Опяля, належить до класу S .

Позначимо $y_* = \sqrt{2G(x_*)}$. Припустимо, що:

- 1⁰. Диференціальне рівняння Лієнара (1) є рівнянням типу S і задовольняє умови існування та єдиності розв'язку.
- 2⁰. Пряма $x = x_*$ трансверсальна потоку (1) всюди, крім траєкторії, для якої пряма $x = x_*$ є дотичною. В цьому випадку вважаємо, що $I(0) = 0$.
- 3⁰. Оператор імпульсної дії є неперервним стосовно своїх змінних.

2 УМОВИ ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІЄНАРА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

За допомогою вивчення руху фазової точки системи (1), (2) у [2] побудовано відображення Пуанкаре для прямої $x = x_*$, яке використовується для дослідження питання про існування періодичних розв'язків задачі (1), (2). Також показано, що задача про існування періодичних розв'язків системи (1), (2) зводиться до задачі про існування періодичних та нерухомих точок деякого відображення відрізка в цей самий відрізок, яке визначається формулою:

$$f(y) = -y + I(-y), \quad y = \dot{x}. \quad (6)$$

Розглянемо задачу про існування періодичних розв'язків задачі (1), (2), коли функція імпульсної дії має вигляд:

$$I(y) = \begin{cases} (\lambda - 1)y + \lambda y_*, & y \leq 0, \\ -(\lambda + 1)y + \lambda y_*, & y > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$f(y) = -y + I(-y) = \begin{cases} \lambda(y_* - y), & y \geq 0, \\ \lambda(y_* + y), & y < 0, \end{cases} \quad (8)$$

де $y = \dot{x}$, λ — деякий параметр, причому $0 < \lambda \leq \sup G(x)$.

Відображення (8) є неперервним для всіх $y \in \mathbb{R}$ і має такі властивості: при $0 < \lambda < 1$ існує лише одна нерухома точка, яка є стійкою; при $1 < \lambda \leq \sup G(x)$ нерухомих точок:

$$\left\{ \frac{\lambda}{1 - \lambda} y_* \right\} \quad \text{та} \quad \left\{ \frac{\lambda}{1 + \lambda} y_* \right\}$$

та періодичну точку періоду 2:

$$\left\{ \frac{\lambda - \lambda^2}{1 + \lambda^2} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2}{1 + \lambda^2} y_* \right\}.$$

Точки періоду 3 для відображення (8) утворюють два цикли:

$$\left\{ \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_* \right\}$$

$$\left\{ \frac{\lambda - \lambda^2 + \lambda^3}{1 - \lambda^3} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1 - \lambda^3} y_*; \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1 - \lambda^3} y_* \right\}.$$

Таким чином, диференціальне рівняння (1) з імпульсною дією (2), (7), де $y = \dot{x}$, при $1 < \lambda \leq \sup G(x)$, має $T(n)$ -періодичні розв'язки такі, що фазова точка даної системи при русі вздовж відповідної траєкторії зазнає рівно n імпульсних дій за період, де n — довільне натуральне число (див. [1, 2]). Точки, що задають цикли, які відповідають періодичним розв'язкам задачі (1), (7), задовольняють порядку Шарковського.

Покажемо, що точки, які утворюють періодичні цикли для відображення (8), слід шукати серед дробів вигляду:

$$y = \frac{P^n(\lambda)}{1 \pm \lambda^n} y_*, \quad (9)$$

де $P^n(\lambda)$ — многочлен вигляду:

$$P^n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + \lambda, \quad a_i = \pm 1, \quad i = \overline{2, n}.$$

Доведемо, що для довільного натурального n і для всіх $y \in \mathbb{R}$ n -та ітерація відображення (8), яку позначимо $f^n(y) = \underbrace{f(f(\dots f(y)))}_n$, має вигляд

$$f^n(y) = P^n(\lambda) y_* \pm \lambda^n y, \quad (10)$$

де многочлен $P^n(\lambda)$ задовольняє рекурентне співвідношення $P^1(\lambda) = \lambda$, $P^n(\lambda) = \lambda \pm \lambda P^{n-1}(\lambda)$ ($n \geq 2$), а знак « $\pm$ » відповідає тій гілці відображення (8), у яку потрапляє точка на відповідному кроці ітерування. n -періодичні точки відображення f після цього отримаємо як нерухомі точки відображення f^n . Доведення проведемо методом математичної індукції за n .

1. База індукції. При $n = 1$ безпосередньо з (8) маємо $f(y) = \lambda(y_* \pm y) = \lambda y_* \pm \lambda y$, тобто (10) виконується з $P^1(\lambda) = \lambda$. При $n = 2$:

$$f^2(y) = f(f(y)) = \lambda(y_* \pm (\lambda y_* \pm \lambda y)) = (\lambda \pm \lambda^2) y_* \pm \lambda^2 y,$$

звідки $P^2(\lambda) = \lambda \pm \lambda^2$.

2. Детальний аналіз для $n = 3, 4, 5$. Щоб виявити закономірність формування коефіцієнтів a_i у многочленах $P^n(\lambda)$, обчислимо кілька наступних ітерацій.

Випадок $n = 3$. Використовуючи $f^2(y) = P^2(\lambda) y_* \pm \lambda^2 y$, маємо:

$$f^3(y) = f(f^2(y)) = \lambda(y_* \pm (P^2(\lambda) y_* \pm \lambda^2 y)) = \lambda y_* \pm \lambda P^2(\lambda) y_* \pm \lambda^3 y.$$

Оскільки $\lambda P^2(\lambda) = \lambda(\lambda \pm \lambda^2) = \lambda^2 \pm \lambda^3$, дістаємо

$$f^3(y) = (\lambda \pm \lambda^2 \pm \lambda^3) y_* \pm \lambda^3 y,$$

тобто $P^3(\lambda) = \lambda \pm \lambda^2 \pm \lambda^3$.

Випадок $n = 4$. Аналогічно, $f^4(y) = f(f^3(y)) = \lambda y_* \pm \lambda P^3(\lambda) y_* \pm \lambda^4 y$. Оскільки $\lambda P^3(\lambda) = \lambda^2 \pm \lambda^3 \pm \lambda^4$:

$$f^4(y) = (\lambda \pm \lambda^2 \pm \lambda^3 \pm \lambda^4) y_* \pm \lambda^4 y,$$

звідки $P^4(\lambda) = \lambda \pm \lambda^2 \pm \lambda^3 \pm \lambda^4$.

Випадок $n = 5$. $f^5(y) = f(f^4(y)) = \lambda y_* \pm \lambda P^4(\lambda) y_* \pm \lambda^5 y$, і, оскільки $\lambda P^4(\lambda) = \lambda^2 \pm \lambda^3 \pm \lambda^4 \pm \lambda^5$,

$$f^5(y) = (\lambda \pm \lambda^2 \pm \lambda^3 \pm \lambda^4 \pm \lambda^5) y_* \pm \lambda^5 y.$$

3. Індукційний перехід. Припустимо, що формула (10) виконується для $n = k$, тобто для всіх $y \in \mathbb{R}$

$$f^k(y) = P^k(\lambda) y_* \pm \lambda^k y.$$

Застосувавши відображення (8) ще раз, для всіх $y \in \mathbb{R}$ дістаємо:

$$f^{k+1}(y) = f(f^k(y)) = \lambda(y_* \pm f^k(y)) = \lambda(y_* \pm (P^k(\lambda) y_* \pm \lambda^k y)) = \lambda y_* \pm \lambda P^k(\lambda) y_* \pm \lambda^{k+1} y.$$

Доданок при y_* позначимо через $P^{k+1}(\lambda)$:

$$P^{k+1}(\lambda) = \lambda \pm \lambda P^k(\lambda).$$

Ця рекурентна формула при різних виборах знаків породжує в точності весь клас многочленів з коефіцієнтами ± 1 , про що свідчить таке твердження.

Твердження 1. Нехай

$$P^2(\lambda) = \lambda \pm \lambda^2, \quad P^n(\lambda) = \lambda \pm \lambda P^{n-1}(\lambda), \quad n \geq 3,$$

а $\mathcal{P}^n$ — множина всіх многочленів, породжених цією рекурентною формулою при фіксованому $n \geq 2$ (тобто при всеможливих виборах знаків). Нехай також

$$P_*^n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + \lambda, \quad a_i = \pm 1, \quad i = \overline{2, n},$$

а $\mathcal{P}_*^n$ — множина всіх многочленів такого вигляду. Тоді $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}_*^n$.

Доведення. Методом математичної індукції неважко переконатися, що $\mathcal{P}^n \subseteq \mathcal{P}_*^n$: кожне застосування рекурентної формули дає многочлен, у якого коефіцієнт при λ дорівнює 1, а всі інші коефіцієнти набувають значень ± 1 . Позначимо через $|A|$ кількість елементів скінченної множини A . З рекурентної формули випливає, що $|\mathcal{P}^2| = 2$ та $|\mathcal{P}^n| = 2|\mathcal{P}^{n-1}|$ при $n \geq 3$ (на кожному кроці незалежно вибирається знак «+» або «-»), звідки $|\mathcal{P}^n| = 2^{n-1}$, $n \geq 2$. З іншого боку, за правилом добутку кількість наборів знаків $(a_2, \dots, a_n)$, де $a_i = \pm 1$, дорівнює 2^{n-1} , тобто $|\mathcal{P}_*^n| = 2^{n-1}$. Отже, $|\mathcal{P}^n| = |\mathcal{P}_*^n|$, що разом із включенням $\mathcal{P}^n \subseteq \mathcal{P}_*^n$ дає рівність $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}_*^n$. Твердження доведено.

Оскільки $P^k(\lambda)$ складається із суми степенів від λ до λ^k , то $\lambda P^k(\lambda)$ є сумою степенів від λ^2 до λ^{k+1} , а додавання першого члена λ завершує структуру многочлена:

$$P^{k+1}(\lambda) = \lambda \pm a_2 \lambda^2 \pm a_3 \lambda^3 \pm \dots \pm a_{k+1} \lambda^{k+1}.$$

Отже, $f^{k+1}(y) = P^{k+1}(\lambda) y_* \pm \lambda^{k+1} y$, тобто формула (10) справедлива і для $n = k + 1$. За принципом математичної індукції рівність (10) доведено для всіх натуральних n .

4. Періодичні точки. n -періодична точка відображення (8) є нерухомою точкою його n -ї ітерації, тобто розв'язком рівняння $f^n(y) = y$. Підставляючи (10), дістаємо $y = P^n(\lambda) y_* \pm \lambda^n y$, звідки $(1 \mp \lambda^n) y = P^n(\lambda) y_*$ і

$$y = \frac{P^n(\lambda)}{1 \mp \lambda^n} y_*,$$

що збігається з формулою (9). Таким чином, справедливність формули (9) доведено для довільного натурального n .

Твердження 2. Диференціальне рівняння (1) з імпульсною дією (2), (7), де $y = \dot{x}$, при $1 < \lambda \leq \sup G(x)$ має $T(n)$ -періодичні розв'язки такі, що фазова точка даної системи при русі вздовж відповідної траєкторії зазнає рівно n імпульсних дій за період, де n — довільне натуральне число. При цьому точки дії імпульсних сил, що відповідають $T(n)$ періодичним розв'язкам, слід шукати серед дробів вигляду:

$$y = \frac{P^n(\lambda)}{1 \pm \lambda^n} y_*, \quad (11)$$

де $P^n(\lambda)$ — многочлен вигляду:

$$P^n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + \lambda, \quad a_i = \pm 1, \quad i = \overline{2, n}.$$

Вивчимо детальніше задачу про вигляд періодичних точок відображення (8), які відповідають $T(n)$ -періодичним розв'язкам задачі (1), (7). Побудуємо многочлени $P^n(\lambda)$ в явному вигляді. Побудову почнемо з точки:

$$y = \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_*. \quad (12)$$

Подіємо на цю точку відображенням (8):

$$f(y) = \lambda \left(y_* \pm \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_* \right) = \lambda y_* \frac{1 + \lambda^n \pm (\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n)}{1 + \lambda^n}. \quad (13)$$

Згідно з Твердженням 2, многочлен у чисельнику дробу повинен мати степінь n , а тому знак перед дробом у (13) буде «+» (оскільки $y < 0$). Провівши відповідні перетворення (13), отримуємо наступну точку:

$$y = \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_*, \quad (14)$$

причому:

$$\frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_* < 0, \quad (15)$$

або, що те саме,

$$\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n < 0. \quad (16)$$

Повторивши аналогічні міркування для (14), отримуємо точку:

$$y = \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_*,$$

де знову ж $\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n < 0$.

Продовжуючи аналогічні міркування, отримуємо, що якщо знаменник дробу (9) буде рівним $1 + \lambda^n$, то многочлени $P^n(\lambda)$ у чисельнику відповідних точок циклу матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} & \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n \\ & \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n \\ & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n \\ & \dots \\ & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n \\ & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n \end{aligned} \quad (17)$$

Крім того, для λ повинна виконуватися система нерівностей:

$$\begin{cases} \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0 \\ \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0 \\ \dots \\ \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0 \\ \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n > 0 \end{cases} \quad (18)$$

Очевидно, що для того, щоб число λ задовольняло систему нерівностей (18), достатньо, щоб воно задовольняло передостанній нерівності системи (18), тобто $\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0$. Таким чином, можна показати, що при збільшенні n звужується інтервал, з якого можна вибирати значення параметра λ .

Повторивши вищенаведені міркування для випадку, коли знаменник дробу (9) рівний $1 - \lambda^n$, тобто коли початкова точка має вигляд:

$$y = \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 - \lambda^n} y_*,$$

отримаємо вигляд відповідних многочленів $P^n(\lambda)$. Ці многочлени матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} & \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n \\ & \lambda - \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n \\ & \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n \\ & \dots \\ & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n \end{aligned} \quad (19)$$

При цьому має виконуватись система нерівностей:

$$\begin{cases} \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0 \\ \lambda - \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n > 0 \\ \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n > 0 \\ \dots \\ \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} + \lambda^n > 0 \\ \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0 \end{cases} \quad (20)$$

Якщо $\lambda > 1$, то усі нерівності системи (20), крім останньої, виконуються автоматично (оскільки $\lambda^{k+1} - \lambda^k > 0$ при $\lambda > 1$ і $k \geq 1$). Тому, як і для системи (18), для того, щоб число λ задовольняло систему нерівностей (20), достатньо, щоб воно задовольняло останній нерівності системи (20), тобто $\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0$. Отже, ми отримали для обох розглянутих випадків однакову нерівність, що визначає проміжок для параметра λ .

Твердження 3. Точки, що визначають періодичний цикл періоду n відображення (8) на проміжку $(1, \sup G(x))$, коли фазова точка імпульсної системи Ліенара при русі фазовою траєкторією рівняння (1) зазнає імпульсної дії (7) рівно n разів за період, мають вигляд:

$$\frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n} \quad \text{та} \quad \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n}. \quad (21)$$

При цьому значення λ слід вибирати з інтервалу $(\alpha, \sup G(x))$, де α є розв'язком рівняння

$$r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1} - r^n = 0 \quad (22)$$

на проміжку $(1, \sup G(x))$. Насправді, для кожного натурального $n \geq 2$ рівняння (22) має рівно один додатний корінь α_n , причому $\alpha_2 = 1$, $\alpha_n \in (1, 2)$ при $n \geq 3$, і $\alpha_n \rightarrow 2$ при $n \rightarrow \infty$. Зауважимо, що всі міркування проводились для випадку, коли в якості початкової точки відображення (8) вибирали точки $y = \frac{\lambda - \lambda^2 - \dots - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n} y_*$. Якщо ж в якості початкової точки вибрати іншу точку, то отримаємо набір точок, які визначають періодичний цикл відображення (8), відмінний від наведених вище.

3 ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Проілюструємо отримані результати на прикладі циклу періоду $n = 3$, оскільки, згідно з порядком Шарковського, існування циклу періоду 3 гарантує існування циклів усіх натуральних періодів.

Приклад. Розглянемо відображення (8) з параметрами $y_* = 1$ та $\lambda = \frac{17}{10}$. Додатним коренем рівняння (22) при $n = 3$ є $\alpha_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, причому $\frac{17}{10} > \alpha_3$ (оскільки $\sqrt{5} < \frac{12}{5}$), а відповідний корінь α_4 при $n = 4$ задовольняє $\frac{17}{10} < \alpha_4$. Отже, виконується умова $\alpha_3 < \lambda < \alpha_4$ (за умови $\sup G(x) \geq \frac{17}{10}$), тобто для вибраного λ вже існує цикл періоду 3.

За формулами Твердження 3 (випадок зі знаменником $1 + \lambda^3$) точки циклу мають вигляд:

$$y_1 = \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*, \quad y_2 = \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*, \quad y_3 = \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*.$$

При $\lambda = \frac{17}{10}$ маємо $\lambda^2 = \frac{289}{100}$, $\lambda^3 = \frac{4913}{1000}$, $1 + \lambda^3 = \frac{5913}{1000}$, тому (при $y_* = 1$):

$$y_1 = -\frac{6103}{5913}, \quad y_2 = -\frac{323}{5913}, \quad y_3 = \frac{9503}{5913}.$$

Безпосередня перевірка ітеруванням відображення (8) підтверджує, що ці три точки утворюють цикл періоду 3:

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \lambda(y_* + y_1) = \frac{17}{10} \left(1 - \frac{6103}{5913} \right) = \frac{17}{10} \cdot \left(-\frac{190}{5913} \right) = -\frac{323}{5913} = y_2, \\ f(y_2) &= \lambda(y_* + y_2) = \frac{17}{10} \left(1 - \frac{323}{5913} \right) = \frac{17}{10} \cdot \frac{5590}{5913} = \frac{9503}{5913} = y_3, \\ f(y_3) &= \lambda(y_* - y_3) = \frac{17}{10} \left(1 - \frac{9503}{5913} \right) = \frac{17}{10} \cdot \left(-\frac{3590}{5913} \right) = -\frac{6103}{5913} = y_1. \end{aligned}$$

Таким чином, $f^3(y_1) = y_1$, причому $y_1, y_2 \neq y_3$, тобто це справді цикл найменшого періоду 3. Відповідний чисельник кожної точки є многочленом $P^3(\lambda)$ з коефіцієнтами ± 1 структури (17), що узгоджується з Твердженням 2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Samoilenko A. M., Samoilenko V. G., Sobchuk V. V. *On periodic solutions of the equation of a nonlinear oscillator with impulse action*. Ukr. Mat. Zh. 1999, **51** (6), 827–834.
- [2] Samoilenko V. G., Sobchuk V. V. *Periodic solutions of the Lienar equation with impulse action*. Nonlinear oscillations 2000, **3** (2), 256–265.
- [3] Pichkur V.V., Kapustian O.V., Sobchuk V.V. (2023). Stability and attractors of evolutionary equations: a textbook. – K: VPC "Kyiv University". 367 p.
- [4] Sobchuk V.V. Nedbaylo V. A. Periodic modes in the model of a mathematical pendulum with impulse action. // Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies, No. 1 ' 2023. P. 184 – 191. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.27

- [5] Perestyuk, Nikolai A., Plotnikov, Viktor A., Samoilenko, Anatolii M. and Skripnik, Natalia V.. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities, Berlin, Boston: De Gruyter, 2011. <https://doi.org/10.1515/9783110218176>
- [6] Kapustyan, O.V.; Asrorov, F.A.; Perestyuk, Y.M. (2019). On the Exponential Stability of a Trivial Torus for One Class of Nonlinear Impulsive Systems//Journal of Mathematical Sciences (United States), 238(3), 263-270. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04234-9>.
- [7] Samoilenko, A.M. and Perestyuk, N.A. (1995) Impulsive Differential Equations. Vol. 14, World Scientific, Singapore. 472 p. <https://doi.org/10.1142/2892>
- [8] Samoilenko A.M., Samoilenko V.G., Sobchuk V.V. On periodic solutions of the equation of a nonlinear oscillator with pulse influence // Ukrainian Mathematical Journal, 1999 (51), 6 Springer New York – P. 926-933.
- [9] Sobchuk V., Kapustyan O., Pichkur V. and Kapustian O. Design of Stable Periodic Regimes for one Class of Hybrid Planar Systems. // II International Scientific Symposium “Intelligent Solutions” September 28-30, 2021, Kyiv-Uzhhorod, Ukraine. pp. 111–120. URL: https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_10.pdf
- [10] Asrorov F., Sobchuk V., Kurylko O. Finding of bounded solutions to linear impulsive systems // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, vol. 6, no. 4, 2019, pp. 14-20, doi:10.15587/1729-4061.2019.178635.
- [11] Asrorov, F., Perehuda, O., Sobchuk, V., Sukretna, A. (2021). Establishing conditions for the existence of bounded solutions to the weakly nonlinear pulse systems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 4 (4 (112)), 6–12. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.238208>.
- [12] Reissig, R., Sansone, C. and Conti, R. (1963). Qualitative theorie nichtlinearer differentialgleichungen, Edizioni Cremonese, Rome. 320 p.
- [13] A. N. Sharkovsky, S. F. Kolyada, A. G. Sivak, V. V. Fedorenko Dynamics of One-Dimensional Maps. Springer-Science+Business Media, B.Y. (1997) 262 p.

Надійшло 08.06.2026

Прийнято 22.09.2026

Опубліковано 02.10.2026

Sobchuk V. V., Rudyk Ye. A., Nesterenko O. N. *Sharkowski order cycles for the Lienard impulse system*, Bukovinian Math. Journal **14** (2) (2026), 28–36.

The paper investigates the problem of the existence of periodic solutions for nonlinear Lienard-type differential equations with impulse action at non-fixed moments of time. Using the Poincare map method, the problem of finding periodic solutions is reduced to the analysis of the iterations of a one-dimensional map of an interval into itself. By means of mathematical induction, a theorem on the analytical form of periodic points of any natural period n is proved, and a strict structure of the corresponding polynomials with coefficients ± 1 is established. The conditions on the system parameters under which cycles corresponding to $T(n)$ -periodic solutions exist are determined, and it is shown that these points obey Sharkovsky's order.