DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.11

Маценко В.Г.

КОМП'ЮТЕРНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ТИПУ СКЕЛЛАМА З НЕМОНОТОННОЮ ФУНКЦІЄЮ РОЗМНОЖЕННЯ ТА ЗБОРОМ УРОЖАЮ

Запропоновано узагальнення дискретної моделі Скеллама з немонотонною функцією розмноження та збором урожаю. Досліджено існування стаціонарних і періодичних розв'язків та їх стійкість. Проведено порівняльний аналіз із моделлю без збору врожаю. Наведено комп'ютерний аналіз розв'язків моделі. Показано, що при збільшенні параметра k збору врожаю стаціонарні та періодичні розв'язки втрачають свою стійкість і навіть можуть повністю щезати, при цьому популяція стає приреченою на вимирання.

Ключові слова і фрази: модель Скеллама з немонотонною функцією розмноження, збір урожаю, стійкість розв'язків, обчислювальні експерименти.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *v.matsenko@chnu.edu.ua*

Вступ

Для опису динаміки чисельності біологічних популяцій із неперекривними поколіннями використовуються дискретні рівняння. Ріст чисельності таких популяцій відбувається в окремі моменти часу (народжуваність має дискретний характер). До таких популяцій належить багато видів комах з однорічною генерацією.

При цьому, в простішому випадку, дискретні моделі задаються рівняннями типу [1]

$$N_{t+1} = f\left(N_t\right) N_t, \; t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

де N_t – чисельність популяції в момент часу t, яка відображає простір R^+ в R^+, $R^+ = [0, +\infty)$; функція $f\left(N_t\right)$ – це єдиний популяційний показник, який характеризує процеси вимирання і народжування. Його називають коефіцієнтом природного відтворення або коефіцієнтом розмноження [1].

Якщо припустити, що вплив саморегулюючих внутріпопуляційних факторів із ростом чисельності тільки посилюється, то коефіцієнт розмноження вибирають у вигляді монотонно

УДК 519.87:574.3

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

спадних функцій. У дискретній логістичній моделі це спадна лінійна функція, в моделі Рікера – монотонно спадна експонента, а в моделі Скеллама – спадна гіперболічна функція.

При цьому модель Скеллама має вигляд [2]

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t}, \ t = 0, 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Параметр a тут відіграє роль найбільшого значення коефіцієнта розмноження, а параметр b описує вплив саморегулюючих факторів на популяційну динаміку. Ця модель допускає тільки монотонну стабілізацію до деякого стаціонарного рівня. Але в природі спостерігаються періодичні і хаотичні поведінки чисельності дискретних популяцій. Для того, щоб вивчати циклічні режими в рамках моделі Скеллама, в [3] запропоновано узагальнення для моделі, коли функція природного відтворення

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}.$$

Але така функція – монотонно спадна. Проте, на практиці спостерігаються й немонотонні функції $f(N_t)$. Це має місце, наприклад, тоді, коли

$$f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^4},$$

а сама модель (1) набуває вигляду [4]

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^4}, \ t = 0, 1, 2, \dots . \tag{3}$$

У праці [4] показано, що модель (3) має як стаціонарні, так і періодичні режими будь-яких періодів, а також режими з хаотичною поведінкою.

Оскільки людина у своїй діяльності використовує різні природні ресурси, то доцільно розглядати дискретні моделі зі збором урожаю. При цьому важливим є екологічно обґрунтований підхід до раціонального використання відновлювального ресурсу, щоб не знищити біологічну популяцію.

Якщо з деякої популяції відловлюється певна кількість особин з інтенсивністю промислу $C(N_t, k)$, де k – параметр, що характеризує цю інтенсивність, то рівняння, що описує зміну чисельності при цьому, має вигляд

$$N_{t+1} = f(N_t)\, N_t - C(N_t, k).$$

Задача моделювання тепер полягає в тому, щоб збільшувати гарантований урожай, причому встановити таку швидкість збору врожаю, щоб підтримувати популяцію в стані виживання.

Для відбору особин з популяції існують два режими відбору, а саме відбір постійної кількості особин за певну одиницю часу (жорстка стратегія) та відбір постійної частки популяції (м'яка стратегія).

У [3] розглядалася модель збору врожаю в популяціях, динаміка чисельності яких описується рівняннями типу Скеллама. У цій праці вивчається модель (3) з урахуванням м'якої стратегії збору врожаю, тобто коли урожай визначається величиною, пропорційною чисельності N_t, тобто $C(N_t, k) = kN_t$. У цьому випадку таке узагальнення моделі має вигляд

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^4} - kN_t \equiv F(N_t), \ t = 0, 1, 2, \dots . \tag{4}$$

1 Існування стаціонарних режимів та їх стійкість

Модель (4) – це нелінійне дискретне рівняння, розв'язок якого в аналітичній формі не можна знайти, тому будемо відшуковувати стаціонарні та періодичні розв'язки й вивчати їх стійкість.

Стаціонарні розв'язки (4) знаходимо з рівняння

$$N = \frac{aN^2}{b+N^4} - kN. \tag{5}$$

Це рівняння має нульовий розв'язок, а ненульові дійсні розв'язки, якщо вони існують, задовольняють співвідношення

$$\frac{aN}{1+k} = b + N^4. \tag{6}$$

Для знаходження ненульових розв'язків застосуємо числовий аналіз. Знайдемо значення N^*, для яких функції правої та лівої частин рівняння (6) мають однаковий кутовий коефіцієнт.

Маємо

$$\frac{a}{1+k} = 4N^{*3}, \quad \text{або} \quad N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4(1+k)}}.$$

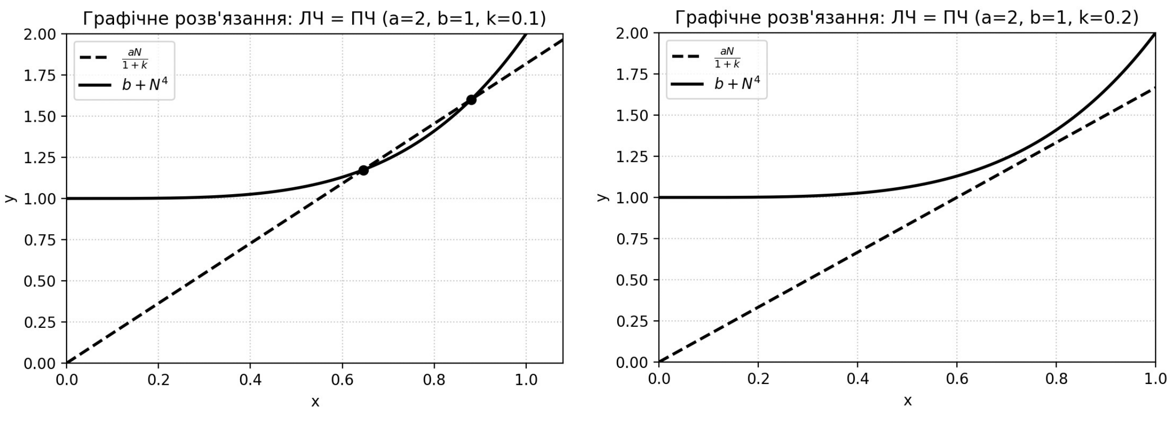
Якщо в точці N^* права та ліва частини рівняння (6) мають однакове значення, то воно є коренем рівняння (6). Це має місце, коли $b = a^*$, де

$$a^* = \frac{3a}{4(1+k)}\sqrt[3]{\frac{a}{4(1+k)}}.$$

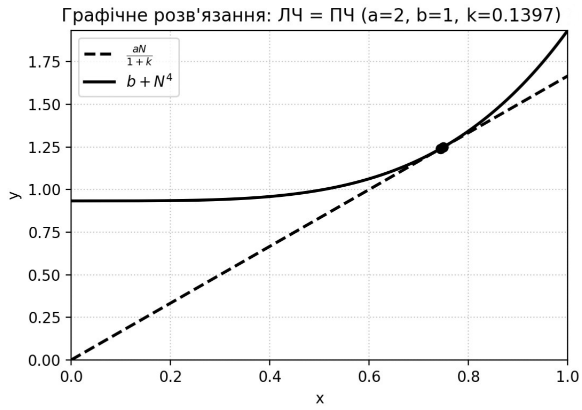
Якщо $b > a^*$, то (6) не має дійсних додатних коренів, якщо $b < a^*$, то існують два дійсні різні додатні корені. Позначимо їх через N_1^* та N_2^* і вважатимемо, що $N_1^* < N_2^*$.

Отже, рівняння (5) завжди має нульовий корінь і може мати ненульові корені.

Зокрема, при $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.1$, крім нульового, маємо два стаціонарні корені: $N_1^* = 0.6455$ та $N_2^* = 0.8803$ (рис. 1а), а уже при $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.2$ існує тільки нульовий корінь (рис. 1б), оскільки $1 = b > a^* = \dfrac{3}{2.4}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2.4}} = 0.9336$. При $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.1397$ існує єдиний ненульовий корінь $N^* = 0.7469$ (рис. 1в).



а б



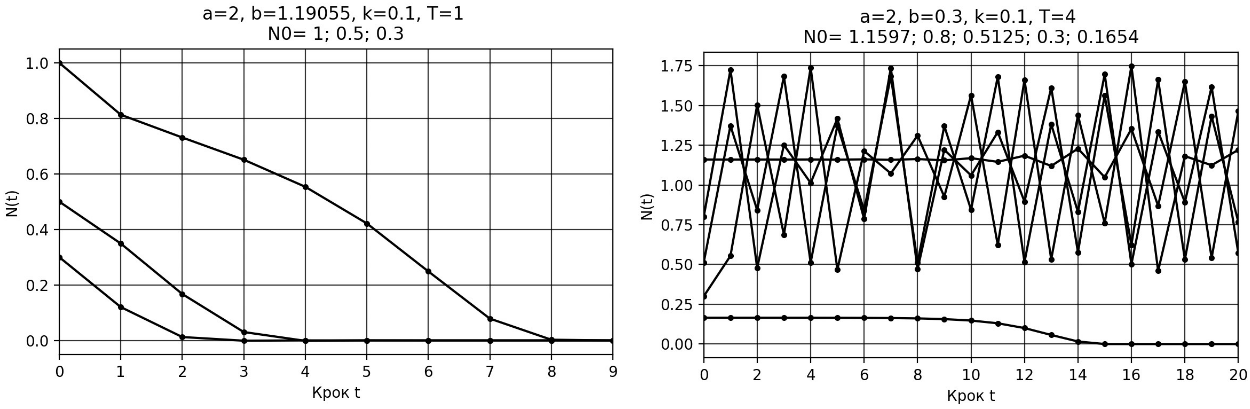
в

Рис. 1. Існування коренів рівняння (6): а – $b < a^*$; б – $b > a^*$; в – $b = a^*$

Проведемо дослідження стійкості стаціонарних точок. Для цього знайдемо їх мультиплікатори

$$\lambda = \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*} = \frac{2aN^*\left(b - N^{*4}\right)}{\left(b + N^{*4}\right)^2} - k.$$

Оскільки для нульового розв'язку $\lambda = -k < 0$, то він завжди локально стійкий при будь-яких $a, b, k > 0$ (рис. 2).



а б

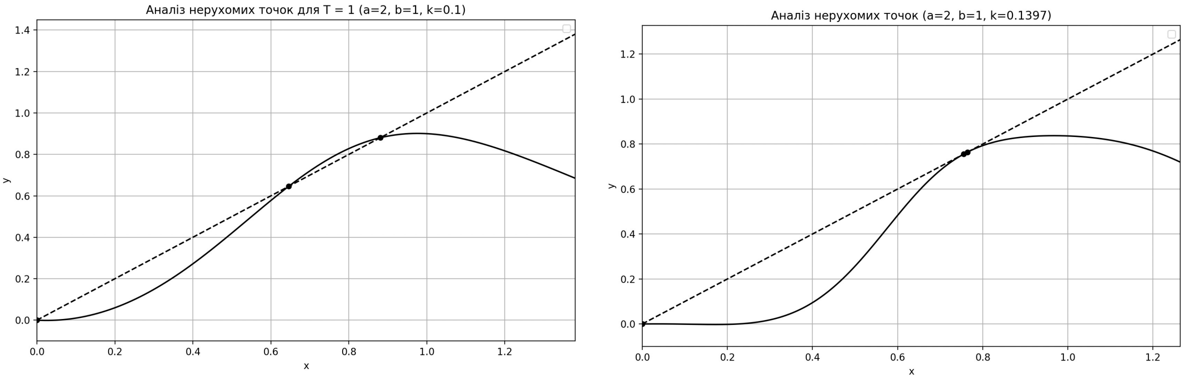
Рис. 2. Стійкість нульового розв'язку: а – $a = 2$, $b = 1.19$, $k = 0.1$;
б – $a = 2$, $b = 0.3$, $k = 0.1$

Для ненульових N^*, оскільки $N^{*4} = \dfrac{aN^*}{1+k} - b$, маємо

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*} = \frac{2\left(2b - \frac{aN^*}{1+k}\right)(1+k)^2}{aN^*} = \frac{2(1+k)\left(2b(1+k) - aN^*\right)}{aN^*}.$$

Для $N^* = \sqrt[3]{\dfrac{a}{4(1+k)}}$, $b = a^*$ знаходимо $\left.\dfrac{dF}{dN}\right|_{N^*} = 1$, тому неможливо зробити висновок про його стійкість. Для цього проведемо аналіз стійкості стаціонарних розв'язків рівняння $N_{t+1} = F\left(N_t\right)$ на основі аналізу поведінки функції $F\left(N_t\right)$.

Графіки правої та лівої частин цього рівняння при певних значеннях параметрів a, b, k подані на рис. 3.

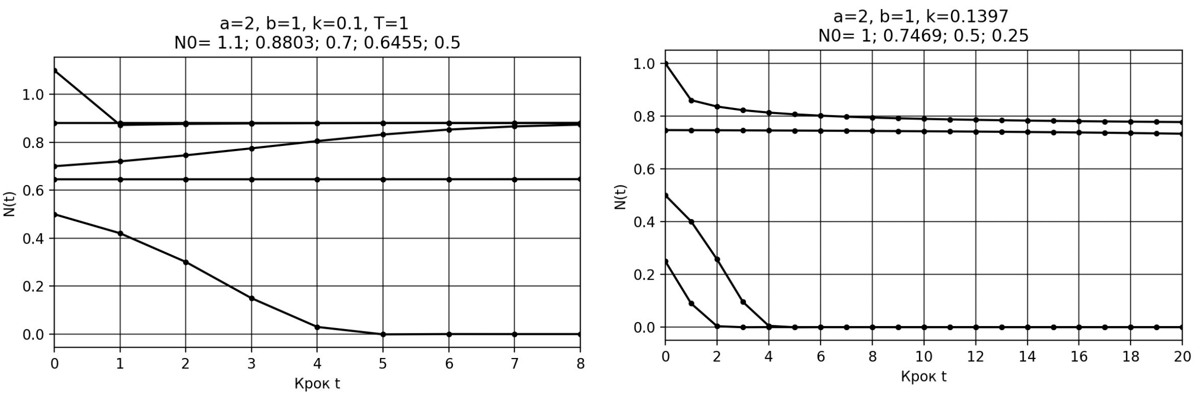


а б

Рис. 3. Існування коренів рівняння (5): а – $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.1$;
б – $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.1397$

Для аналізу стійкості, як і вище, візьмемо $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.1$. У цьому випадку існують два стаціонарних режими: $N_1^* = 0.6455$ та $N_2^* = 0.8803$ $(N_1^* < N_2^*)$ (рис. 3а). Оскільки $F'(N_1^*) = 1.7131 > 1$, а $|F'(N_2^*)| = 0.0258 < 1$, то N_1^* – нестійкий, а $N = N_2^*$ – стійкий (рис. 4а).

При $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.1397$ уже існує єдиний стаціонарний розв'язок $N^* = 0.7469$. Причому при $N < N^*$ маємо $F'(N) > 1$, а при $N > N^*$ – $|F'(N)| < 1$ (рис. 3б), тому такий розв'язок напівстійкий (рис. 4б).



а б

Рис. 4. Графіки розв'язків рівняння (4): а – $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.1$;
б – $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.1397$

Отже, при зростанні інтенсивності збору врожаю, тобто параметра k, відбувається зчезання ненульових стаціонарних розв'язків, а залишається лише варіант зменшення чисельності популяції до нуля, тобто вимирання. Це означає, що існує критичне значення параметра k, перейшовши яке популяція вже вижити не в змозі.

2 Існування та стійкість періодичних режимів

Спочатку відшукаємо періодичні режими з періодом $T = 2$. Для них $N_{t+2} = N_t$, $t = 0, 1, \ldots$. Як відомо з [3], при $k = 0$ такі режими мають місце. Для їх знаходження отримуємо систему

$$N_2 = F(N_1),$$
$$N_1 = F(N_2),$$

або рівняння

$$N = F(F(N)). \tag{7}$$

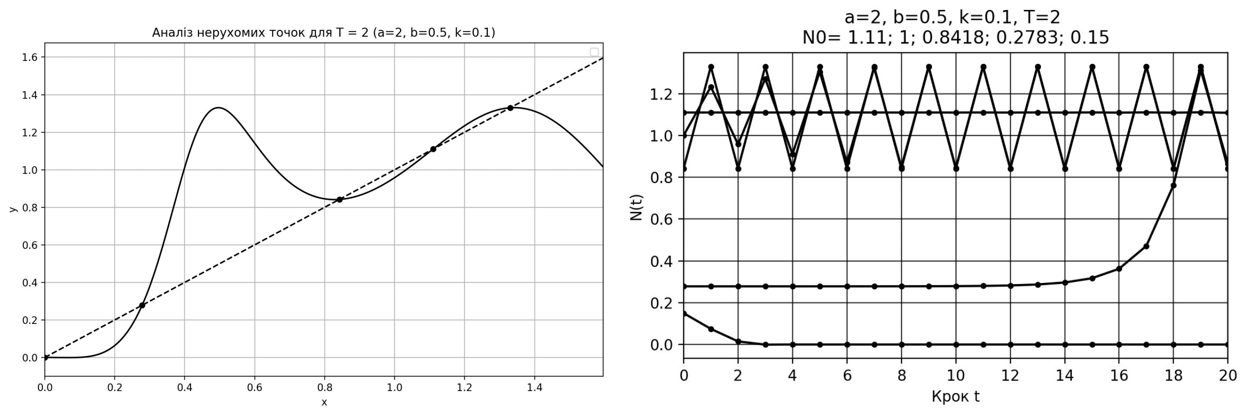
У нашому випадку (7) набуває вигляду

$$b + N^4\bar{N} + k\bar{N}(b + N\bar{N})^4 = aN\bar{N}^2,$$

де $\bar{N} = \dfrac{aN}{b + N^4} - k.$

Таке рівняння аналітично розв'язати не можна, тому для розв'язування (7) застосуємо графічний аналіз.

Як показано в [3], при $k = 0$, $a = 2$, $b = 0.5$ рівняння (4) має стійкий періодичний розв'язок. При зборі врожаю з коефіцієнтом $k = 0.1$ теж існує стійкий періодичний розв'язок (рис. 5).



а б

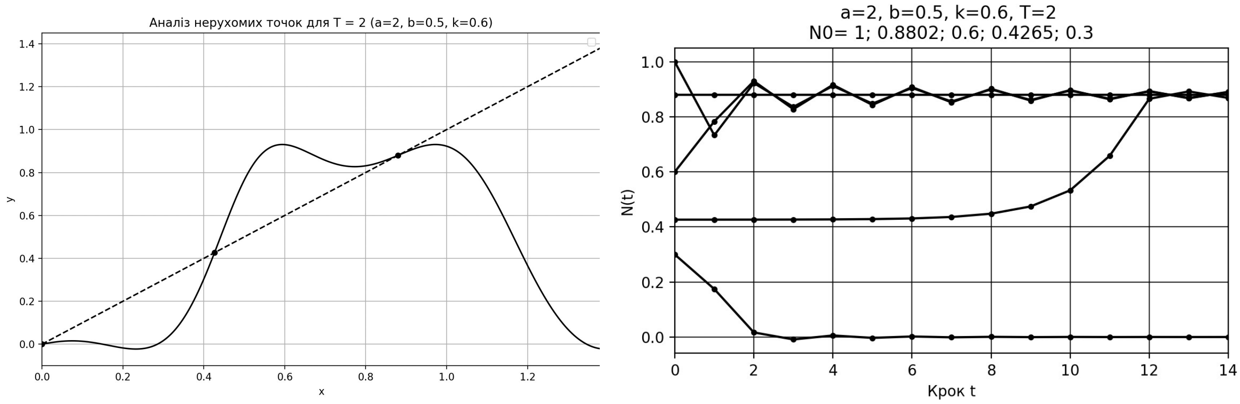
Рис. 5. Існування та стійкість періодичних розв'язків рівняння (4) з періодом $T = 2$ при $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.1$: а – корені рівняння (5); б – графіки розв'язків

Його складають числові значення $N_1^* = 0.8418$ та $N_2^* = 1.3300$. Мультиплікатор цього розв'язку

$$\lambda = \left| \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} \right| \cdot \left| \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} \right| = 0.1075 \cdot 1.1620 = 0.1249 < 1.$$

При цьому існують два нестійких стаціонарних стани: $N_3^* = 0.2783$ та $N_4^* = 1.1100$. Їх мультиплікатори, відповідно, становлять числа 2.0478 та 1.2099.

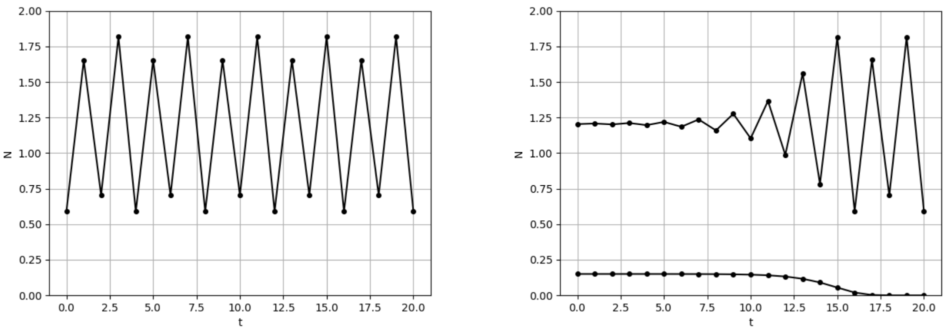
А уже при $k = 0.6$ періодичний розв'язок відсутній. Натомість ненульовий стаціонарний стан $N_1^* = 0.4265$ – нестійкий $\left(\left| \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} \right| = 2.20321 > 1\right)$, а другий $N_2^* = 0.8802$ – стійкий $\left(\left| \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} \right| = 0.892 < 1\right)$ (рис. 6).



а б

Рис. 6. Графічне розв'язування рівняння (7) при $a = 2$, $b = 0.5$, $k = 0.6$: а – стаціонарні точки рівняння (7); б – відсутність періодичних режимів з періодом $T = 2$

Проведемо дослідження періодичних розв'язків із періодом $T = 4$ ($N_{t+4} = N_t$, $t = 0, 1, \ldots$). При $k = 0$, $a = 2$, $b = 0.3$, тобто без збору врожаю рівняння (4) має стійкий періодичний розв'язок із періодом $T = 4$ [3] (рис. 7).



а) б)

Рис. 7. Періодичний розв'язок з періодом $T = 4$ при $a = 2$, $b = 0.3$, $k = 0$: а – графік розв'язку; б – його стійкість

Але уже при $k = 0.1$ періодичний розв'язок із періодом $T = 4$ ще існує, у той же час перестає бути стійким (рис. 8). Його складають значення $N_1^* = 0.5125$, $N_2^* = 1.3725$, $N_3^* = 0.8417$, $N_4^* = 1.6828$, мультиплікатор $\lambda = 4.34 > 1$.

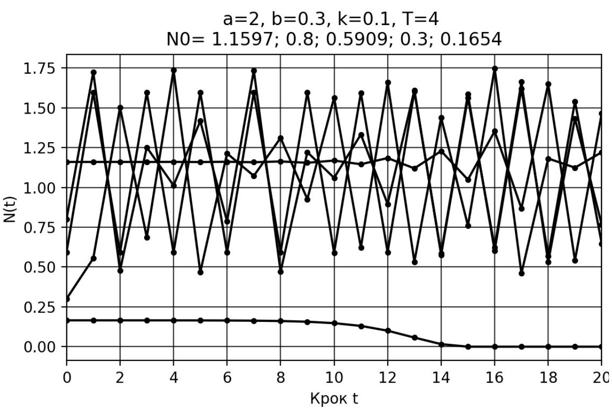


Рис. 8. Нестійкість періодичного розв'язку з періодом $T = 4$. $a = 2$, $b = 0.3$, $k = 0.1$

Перейдемо до знаходження періодичних розв'язків із періодом $T = 3$ ($N_{t+3} = N_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$). Вони відіграють особливу роль у теорії дискретних динамічних систем. Їх знаходять із рівняння

$$N = F(F(F(N))). \tag{8}$$

При $k = 0$, $a = 3$, $b = 0.1$ рівняння (8) має два нестійких стаціонарних розв'язки та два розв'язки з періодом $T = 3$ [3]. Один із них, що визначається значеннями 0.1343, 0.5360, 4.726, 0.1343, стійкий (рис. 9). Його мультиплікатор $\lambda = 0.637 < 1$.

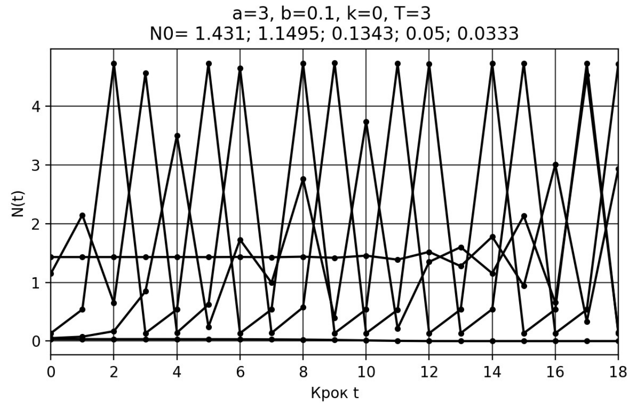


Рис. 9. Існування та стійкість періодичних розв'язків із періодом $T = 3$ при $a = 3$, $b = 0.1$, $k = 0$

При $k = 0.05$ (8) теж має два стаціонарних розв'язки та два періодичних із періодом $T = 3$ (рис. 10).

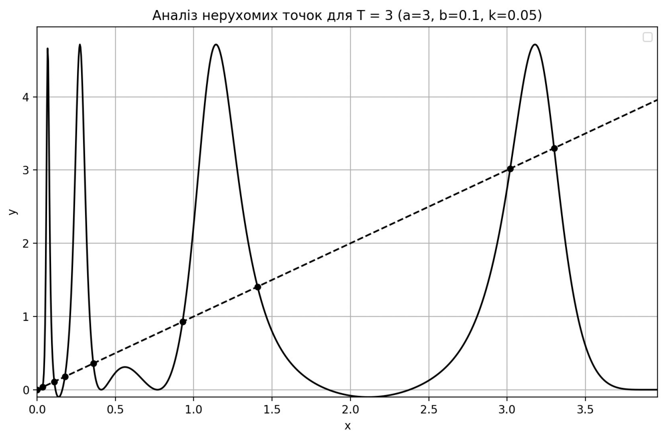
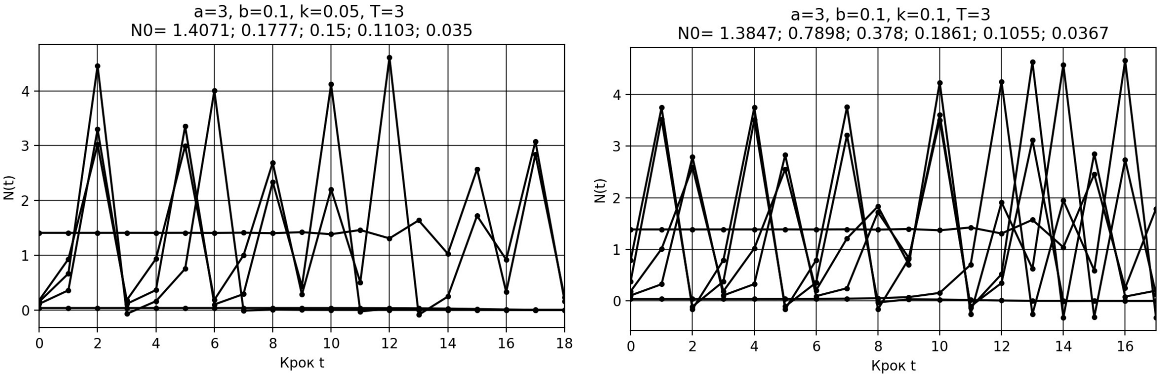


Рис. 10. Графічне зображення коренів рівняння (8) при $a = 3$, $b = 0.1$, $k = 0.05$

Стаціонарні точки – це значення $N_1^* = 0.0350$ та $N_2^* = 1.4071$. Вони нестійкі, оскільки їх мультиплікатори відповідно дорівнюють $2.050 > 1$ та $2.046 > 1$.

Періодичні розв'язки складають значення $N_3^* = 0.1103$, $N_4^* = 0.3589$, $N_5^* = 3.2964$ та $N_6^* = 0.1777$, $N_7^* = 0.9290$, $N_8^* = 3.0195$. Ці періодичні розв'язки також уже нестійкі (рис. 11).



а б

Рис. 11. Графіки розв'язків рівняння (4): а – $a = 3$, $b = 0.1$, $k = 0.05$;
b – $a = 3$, $b = 0.1$, $k = 0.1$

Відзначимо, що при зміні параметра k збору врожаю від 0 до 0.05 відбулася втрата стійкості періодичного розв'язку. Далі при збільшенні k комп'ютерні експерименти показали появу нових нестійких періодичних розв'язків із періодом $T = 3$.

Як видно з досліджень, збір урожаю в популяціях може призвести, в рамках даної моделі, до втрати стійкості існуючих стаціонарних періодичних режимів, а також до їх зчезання. Отже, при експлуатації популяції важливо знати критичні значення параметрів збору врожаю, які спричиняють зміну поведінки чисельності популяцій.

Список літератури

[1] Маценко В.Г. Математичне моделювання екологічних процесів : навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. 376 с.

[2] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica. 1951. **38**. 196-218.

[3] Маценко В.Г. *Аналіз моделей типу Скеллама з немонотонною функцією розмноження.* Буковинський матем. журнал. 2025. **13**(1). 52–65.

[4] Маценко В.Г. *Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю.* Буковинський матем. журнал. 2024. **12**(1). 74-83.

Список літератури

[1] Matsenko V.G. Mathematical modelling of ecological processes : study guide. Chernivtsi : Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2019. 376 p. (in Ukrainian)

[2] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica. 1951. **38**. 196-218.

[3] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam-type models with non-monotonic reproduction function.* Bukovinian Math. Journal. 2025. **13**(1). 52–65. (in Ukrainian)

[4] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy.* Bukovinian Math. Journal. 2024. **12**(1). 74-83. (in Ukrainian)

Надійшло 26.02.2026

Matsenko V.G. *Computional analysis of Skellam-type models with non-monotonic reproduction functions and soft harvesting strategy*, Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 124–133.

Difference equations are used in order to model the dynamics of population with overlapping generations. In the symple case such equations have the form $N_{t+1} = f(N_t) N_t$, where $N_t > 0$, in the population size at a moment of time t, $f(N_t)$ is a coefficient of natural reproductions.

The paper [3] consider a generalization of Skellam models when $f(N_t) = \dfrac{a}{b + N_t^2}$ and $f(N_t) = \dfrac{aN_t}{b + N_t^2}$ with a tough harvesting strategy. Functions are monotonic. But as ecological observations show, functions $f(N_t)$ are not always monotonic, at small $N_t > 0$ they increase and at large N_t they decrease. Such model where studied in [4].

Since Humans use various natural resources in their activities, it is important that the exploitation of populations does not lead to their destruction. Therefore, it is important to study models with harvesting.

This paper studies behavior of solution of the generalized Skellam model for a non-monotonic multiplication function of the form (3). This show that the equation (5) has stationary and periodic solution of any period. It is shown that with an incase in the harvest intensity coefficient, stationary and periodic solutions lose their stability and may disappear altogether.

For practice, it is extremely important to know the critical values of the parameter k, the fragments of which will lead to a decrease in the population.