ISSN 2309-4001

БУКОВИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Том 13, № 1

Чернівці
Чернівецький національний університет
2025

ISSN 2309-4001

BIKOVINIAN MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 13, № 1

Chernivtsi
Chernivtsi National University
2025

Буковинський математичний журнал. – Т. 13, № 1. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2025. – 172 с.

Журнал входить до переліку наукових фахових видань України категорії "Б"
(наказ МОНУ № 409 від 17.03.2020)
Спеціальності
111 Математика
113 Прикладна математика

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Журнал публікує оригінальні статті англійською та українською мовами із математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей і математичної статистики, математичного моделювання та обчислювальних методів

Реферується Zentralblatt MATH, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia Naukowa, WorldCat

Редколегія:

Петришин Р.І., д. ф.-м.н, проф.,
науковий редактор (Україна);
Городецький В.В., д. ф.-м.н, проф.,
заступник наукового редактора (Україна);
Літовченко В.А. д. ф.-м.н, проф.,
заступник наукового редактора (Україна);
Черевко І.М., д. ф.-м.н, проф.,
відповідальний за випуск
заступник наукового редактора (Україна);
Бігун Я.Й., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Григорків В.С., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Григорчук Р.І., д. ф.-м.н, проф. (США);
Загороднюк А.В., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Зарічний М.М., д. ф.-м.н, проф. (Польща);
Карлова О.О., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Козьма Д.В., д. ф.-м.н, проф. (Молдова);
Конаровський В.В., к. ф.-м.н, проф. (Німеччина);
Лопушанський О.В., д. ф.-м.н., проф. (Польща);
Малик І.В., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Мартинюк О.В., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Маслюченко О.В., д. ф.-м.н, проф. (Польща);
Петрик М.Р., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Попов М.М., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Пукальський І.Д., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Ронто М.Й., д. ф.-м.н, проф. (Угорщина);
Скасків О.Б., д. ф.-м.н, проф.(Україна);
Станжицький О.М., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Ткаченко В.І., д. ф.-м.н, проф.(Україна).
Яшан Б.О., доктор філософії,
відповідальний секретар (Україна);

Адреса редакції:
58012 м.Чернівці, вул. Університетська, 28, тел. (0372)58-48-80, e-mail: bm-journal@chnu.edu.ua

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
Державної реєстраційної служби України: серія КВ № 19465–9265 ПР від 07.11.2012
(Видання є правонаступником Наукового вісника Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика. Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Міністерства юстиції України: серія КВ № 15749–4221Р від 26.10.2009)

Вітчизняне наукове видання
Рік заснування 2013

©Чернівецький національний університет, 2025

Bukovinian Mathematical Journal. – Vol. 13, No 1. - Chernivtsi: Chernivtsi Nat. Univ., 2025. – 172 p.

The journal is included in the List of Scientific Professional Publications of Ukraine of category "B"
(Order of the Ministry of Education and Science №409 of March 17, 2020)
Specialties
111 Mathematics
113 Applied Mathematics

The journal publishes original papers in English and Ukrainian in mathematical analysis, differential equations, probability theory and mathematical statistics, mathematical modelling and methods of computations

Reviewed by Zentralblatt, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia Naukowa, WorldCat

Editorial Board of the issue:

Petryshyn R.I., D.Sc., Prof.,
Scientific editor (Ukraine);
Gorodetskyi V.V., D.Sc., Prof.,
Deputy editor-in chief (Ukraine);
Litovchenko V.A., D.Sc., Prof.,
Deputy editor-in chief (Ukraine);
Cherevko I.M., D.Sc., Prof.,
Executive Editor of the issue,
Deputy editor-in chief (Ukraine);
Bihun Ya.J., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Grygorkiv V.S., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Grygorchuk R.I., D.Sc., Prof. (USA);
Zagorodnyuk A.V., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Zarichnyi M.M., D.Sc., Prof. (Poland);
Karlova O.O., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Cozma D.V., D.Sc., Prof. (Moldova);
Konarovskyi V.V., C.Sc., Prof. (Germany);
Lopushansky O.V., D.Sc., Prof. (Poland);
Malyk I.V.,D.Sc., Prof. (Ukraine);
Martynyuk O.V., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Maslyuchenko O.V., D.Sc., Prof. (Poland);
Petryk M.R., D.Sc., Prof. Ukraine;
Popov M.M., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Pukalskyi I.D., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Ronto M.J., D.Sc., Prof. (Hungary);
Skaskiv O.B., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Stanzhytskyi O.M., D.Sc., Prof. (Ukraine)
Tkachenko V.I., D.Sc., Prof. (Ukraine).
Yashan B.O., Doctor of philosophy,
Managing Editor (Ukraine);

Editorial office address:
58012, Chernivtsi, Universytetska str., 28, tel. (0372)58-48-80, e-mail: bm-journal@chnu.edu.ua

Certificate of state registration of the print mass media of the State Registration Service of Ukraine: Series KB No 19465-9265 PR of 11/07/2012
(The journal is the assignee of Naukovyj Visnyk Chernivets'kogo Universytetu. Matematyka. Chernivets'kyj Universytet, Chernivtsi. Ukrainian. Certificate of state registration of the print mass media of the Ministry of Justice of Ukraine: Series KB No 15749-4221 P of 10/26/2009)

National Scientific Publication
Founded in 2013

©Chernivtsi National University, 2025

ЗМІСТ

Правдивий О.А., Станжицький О.М., Станжицький А.О, Мартинюк О.В. Гранична поведінка інваріантних мір стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу з запізненням у гільбертовому просторі 7

Капустян О.В., Краснєєва А.О. Робастна стійкість глобального атрактору нелінійного параболічного рівняння щодо зовнішніх збурень 25

Пастула М.О. Усереднення в багаточастотних системах першого наближення із залежністю частот від повільних змінних 34

Sheremeta M.M., Dobushovskyy M.S. Equivalence of three topologies in the spaces of Laplace-Stieltjes integrals 45

Маценко В.Г. Узагальнення моделі типу Скеллама з немонотонною функцією розмноження 52

Українець О.З. Неперервні скалярні заряди на $\boldsymbol{L_0}$ із застосуванням до моделі економіки Ерроу-Дебре 66

Косович І.Т., Черевко І.М., Шкільнюк Д.В. Математичний аналіз SIR моделей епідеміологічних процесів 83

Пукальський І.Д., Яшан Б.О. Оптимальне керування у крайовій задачі для $2b$-еліптичних рівнянь 92

Працьовитий М.В., Макарчук. О.П. Про деякі метричні результати для представлення чисел ланцюговими A_2-дробами 100

Працьовитий О.М., Ратушняк С.П. Про властивості одного збуреного двійкового ряду 109

Benner P., Chuiko S.M., Chuiko M.O. Linear $\mathcal{L}$-structured matrix equations 118

Кушнірчук В.В., Малик І.В. Існування та єдиність розв'язків лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із дробовим броунівським рухом 129

Мартинюк С.В., Сидора М.І. Оптимізація маршрутів безпілотних літальних апаратів у логістиці: розширена математична модель 141

Melnyk H.V., Melnyk V.S., Vikovan V.K. Cryptocurrency Price Forecasting with Daubechies Wavelets and Evolutionary Fuzzy Time Series 157

CONTENTS

Pravdyvyi O., Stanzhytskyy O., Stanzhytskyy A., Martynyuk O. Invariant measures and their limiting behaviour for neutral type stochastic delay equations in Hilbert space 7

Kapustyan O.V., Krasnieieva A.O. Robust stability of the global attractor of a nonlinear parabolic equation with respect to external disturbances 25

Pastula M.O. Averaging in multifrequency systems of the first approximation with frequency dependence on slow variables 34

Sheremeta M.M., Dobushovskyy M.S. Equivalence of three topologies in the spaces of Laplace-Stieltjes integrals 45

Matsenko V.G. Generalization of Skellam-type model with non-monotonic reproduction function 52

Ukrainets O.Z. Continuous charges on L_0 with an application to the Arrow-Debreu model of economy 66

Kosovych I.T., Cherevko I.M., Shkilnyuk D.V. Mathematical analysis of SIR madels of epidemiology processes 83

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. Optimal control in a boundary value problem for $2b$-elliptic equations 92

Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P. On some metric results for representation numbers by continued A_2-fractions 100

Pratsiovytyi O.M., Ratushniak S.P. On the properties of a certain perturbed binary sequence 109

Benner P., Chuiko S.M., Chuiko M.O. Linear $\mathcal{L}$-structured matrix equations 118

Kushnirchuk V.V., Malyk I.V. Investigation of the conditions for the existence and uniqueness of solutions of linear stochastic differential functional equations with fractional Brownian motion 129

Martyniuk S.V., Sydora M.I. Optimization of unmanned aerial vehicle routes in logistics: an extended mathematical model 141

Melnyk H.V., Melnyk V.S., Vikovan V.K. Cryptocurrency Price Forecasting with Daubechies Wavelets and Evolutionary Fuzzy Time Series 157

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.01

Правдивий О.А., Станжицький О.М., Станжицький А.О, Мартинюк О.В.

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ІНВАРІАНТНИХ МІР СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ЗАПІЗНЕННЯМ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

У цій роботі вивчаються інваріантні міри для стохастичного еволюційного рівняння нейтрального типу з запізненням у гільбертовому просторі. Встановлено умови існування та єдиності інваріантних мір, та вивчена їх гранична поведінка при $h \longrightarrow 0$.

Ключові слова і фрази: Процес Вінера, запізнення, інваріантна міра, компактність, напівгрупа, м'який розв'язок.

Національний університет імені Тараса Шевченка,
Національний університет імені Тараса Шевченка,
Інститут математики НАН України,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *awxrvtb@gmail.com (Правдивий О.А.)*
stanzhytskyi@knu.ua (Станжицький О.М.)
a.stanzhytskyi@gmail.com (Станжицький А.О)
o.martynyuk@chnu.edu.ua (Мартинюк О.В.)

1 Вступ

Основною метою цієї роботи є дослідження граничної поведінки інваріантної міри для стохастичних рівнянь нейтрального типу з запізненням у гільбертовому просторі вигляду

$$d(u(t) - g(u(t-h))) = (Au(t) + f(u(t-h), u(t)))dt + \sigma(u(t-h), u(t))dW(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]. \quad (2)$$

Тут A - необмежений оператор, що є генератором сильно неперервної напівгрупи $\{S(t), t \geq 0\}$ обмежених лінійних операторів у сепарабельному гільбертовому просторі H. Випадковий шум $W(t)$ є Q-вінеровим процесом у сепарабельному гільбертовому просторі K. Для деякого $h > 0$ позначимо $C_h := C([-h, 0], H)$ простір неперервних H-значних функцій $\varphi : [-h, 0] \longrightarrow H$ з нормою

$$||\varphi||_{C_h} := \sup_{\theta \in [-h,0]} ||\varphi(\theta)||_H.$$

УДК 517.925
2010 *Mathematics Subject Classification:* 37L55, 34F05, 60H15.
Information on some grant ...

© Правдивий О.А., Станжицький О.М., Станжицький А.О, Мартинюк О.В., 2025

Тут $||\cdot||_H$ - норма в просторі H. У цій роботі $||\cdot||_H$ будемо позначати як $||\cdot||$. Розв'язок $u(t)$ рівняння (1) розглядається у м'якому сенсі. Також позначимо $u_t := u(t+\theta)$, де $\theta \in [-h, 0)$. Функції f, g відображають $H \times H$ в H, а $\sigma : H \longrightarrow L_2^0$, де $L_2^0 = L(Q^{\frac{1}{2}}K, H)$ - простір операторів Гільберта-Шмідта з $Q^{\frac{1}{2}}K$ в H. Нарешті, $\varphi : [-h, 0] \times \Omega \longrightarrow H$ - початкова функція, де $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ повний ймовірнісний простір.

Результати цієї роботи базуються на результатах праці [5] щодо існування інваріантної міри μ^h для (1). Ми досліджуємо граничну поведінку сім'ї інваріантних мір $\{\mu^h\}$ при $h \longrightarrow 0$ у сенсі їх слабкої збіжності. Зокрема, доведено, що за певних умов сім'я $\{\mu^h\}$ є компактною, а також показано, що будь-яка гранична точка сім'ї $\{\mu^h\}$ є інваріантною мірою відповідної граничної системи (при $h = 0$)

$$d(u^0(t) - g(u^0(t))) = (Au^0(t) + f(u^0(t), u^0(t)))dt + \sigma(u^0(t), u^0(t))dW(t), t \in [0, T], \tag{3}$$

$$u^0(0) = \varphi(0). \tag{4}$$

Крім того, якщо система (1)-(2) має єдину інваріантну міру, яка є стійкою, тоді $\mu^{h_n} \longrightarrow \mu^0$ для довільної послідовності $h_n \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$.

Стохастичні функціонально-диференціальні рівняння нейтрального типу описують математичні моделі різних складних процесів, еволюція яких відбувається під дією випадкових сил, причому ця еволюція залежить також від попередніх станів об'єкта. У випадку розподілених параметрів такі процеси описуються рівняннями з частинними похідними або, у загальнішому випадку, еволюційними рівняннями в нескінченновимірних просторах.

Подібні ефекти пам'яті виникають у моделі Ходкіна—Хакслі, моделі Доусона—Флемінга з популяційної генетики [12]. Аналогічні задачі з'являються при частковому розподіленому моделюванні динаміки популяцій та в інших моделях.

Питання існування та єдиності розв'язків для рівнянь типу (1) розглядалися в роботах багатьох різних авторів. У [13] автори розглядали існування м'яких розв'язків за умовами Ліпшиця та лінійного зростання коефіцієнтів. Ці умови були дещо послаблені в [14]. Умови існування локального сильного розв'язку були отримані в [15]. У роботі [20] автори розглядали питання існування м'якого розв'язку для нейтральних стохастичних диференціальних рівнянь з дробовою похідною.

Для загального типу запізнення в [14] автори отримали умови існування та єдиності м'яких розв'язків. Крім того, в цій роботі було досліджено асимптотичну поведінку розв'язків у сенсі існування інваріантної міри. Питання асимптотичної поведінки стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з еліптичним оператором як в обмежених, так і в необмежених областях розглядалися в [16] і [17], а для скінченновимірного випадку - в [18] і [19].

Наша робота узагальнює результати робіт [2] та [21] для рівнянь нейтрального типу. У цих роботах автори досліджують поведінку вище згаданої сім'ї $\{\mu^h\}$ при $h \longrightarrow 0$ для звичайних стохастичних рівнянь з запізненням. У цьому випадку автори розглядали оператор A як дискретний лапласіан або як p-лапласіан.

Слід зазначити, що наявність запізнення під похідною (нейтральний тип) значно ускладнює дослідження. Дійсно, у означенні м'якого розв'язку з'являються два додаткові члени: $g(u^h(t-h))$ і $\int_0^t AS(t-s)g(u^h(t-s))ds$. Напівгрупа $S(t)$ не діє на перший член. Ця напівгрупа зазвичай компактна при $t > 0$, тому встановлення компактності сім'ї функцій $g(u^h(t-h, \omega))$ в просторі $C([-h, 0], H)$ не є очевидним. Щодо інтегрального члена, то слід

зазначити, що загалом кажучи, якщо $g(\varphi) \in H$, то цей член має неінтегровну сингулярність при $s = t$. Ми долаємо цю складність, вводячи дробові степені оператора $(-A)$. Зокрема показуємо, що якщо g достатньо регулярна, щоб $g(u^h(s-h)) \in D((-A)^\alpha)$, для $\alpha \in (0,1)$, то ця сингулярність стає інтегровною.

Робота організована наступним чином. В розділі 2 ми вводимо необхідні позначення і попередні результати. Розділ 3 присвячений головному результату роботи: вивченню граничної поведінки сім'ї ін- варіантних мір $\{\mu^h\}$, при $h \longrightarrow 0$. В розділі 4 розглядається приклад використання головних результатів роботи.

2 Попередні відомості

Нехай K, H, V дійсні сепарабельні гільбертові простори, і:

$$V \subset H \subset V',$$

є трійкою Гельфанда, де включення $V \subset H$ щільні і компактні, і V' є дуальним до V.

Норма в V позначається як $||\cdot||_V$. Внутрішній скалярний добуток в H позначається як $(\cdot,\cdot)$ а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означає спарку між V і V'.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - повний ймовірнісний простір, оснащений нормальною фільтрацією $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ що попроджується Q-вінерівським процесом W на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з лінійним обмеженим оператором коваріації так, що $trQ < \infty$.

Ми припускаємо існування повної ортонормованої системи $\{e_k\}$ в K і послідовності невід'ємних дійсних чисел λ_k таких, що $Qe_k = \lambda_k e_k, k = 1, 2, ...,$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Тоді вінерівський процес допускає розвинення $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)e_k$, де $\beta_k(t)$ дійснозначні броунівські процеси, взаємно незалежні на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Нехай $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(K)$ і $L_2^0 = L_2(U_0, H)$ є простором всіх операторів Гільберта-Шмідта з U_0 в H зі скалярним добутком $(\Phi, \Psi)_{L_2^0} = tr[\Phi Q \Psi^*]$ і нормою $||\Phi||_{L_2^0}$, відповідно.

A - необмежений лінійний оператор з $D(A) \to H$, що є генератором аналітичної напівгрупи операторів $S(t) = e^{At}$ - обмежених в H. З [1] це еквівалентно тому, що $(-A)$ секторіальний оператор.

Ми припускаємо, що $S(t)$ є напівгрупою компактних операторів, тому з Теореми 3.2 [3] напівгрупа є неперервною у рівномірній операторній топології.

З [3] також отримуємо, що для всіх $\alpha \in (0,1)$ дробова степінь оператора $(-A)$ є замкненим лінійним оператором в області визначення $D(-A^\alpha)$.

Позначимо H^α гільбертів простір $D(-A)^\alpha$ оснащений нормою

$$\|u\|_\alpha := \|(-A)^\alpha u\|$$

Для доведення існування і єдиності розв'язку накладемо наступні умови на оператор A та відображення f, σ, g.

1. Якщо $\sigma(-A)$ це спектр оператора $(-A)$, тоді маємо $\mathrm{Re}\sigma(-A) > \delta > 0$, і A утворює напівгрупу компактних операторів $S(t)$ в H.

2. Для всіх $u, v, u_1, v_1 \in H$ маємо

$$||f(u,v) - f(u_1,v_1)|| \leq L(||u-u_1|| + ||v-v_1||),$$

і

$$||\sigma(u,v) - \sigma(u_1,v_1)||_{L_2^0} \leq L(||u-u_1|| + ||v-v_1||),$$

3. Для всіх $u, v, u_1, v_1 \in H$ і для кожного $\alpha \in (0,1)$ функція g задовольняє

$$||g(u,v) - g(u_1,v_1)||_\alpha \leq M_g(||u-u_1|| + ||v-v_1||)$$

для деякого $M_g \in (0,1)$

Нескладно помітити, що з умови 2 випливає лінійний ріст для f, σ в H а з умови 3 випливає лінійний ріст в H_α.

Нам знадобиться наступне твердження з [1]:

Твердження 1. *[1] [Th 1.4.3] Існує $C_\alpha > 0$ таке, що*

$$||(-A)^\alpha S(t)|| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},$$

і

$$\|S(t)\| \leq C_0 e^{\delta t},$$

для всіх $t > 0$.

Розв'язок задачі (1)-(2) будемо розуміти у м'якому сенсі:

Означення 1. *Неперервний $\mathcal{F}_t$-узгоджений стохастичний процес $u : [-h, T] \times \Omega \longrightarrow H$ називається м'яким розв'язком для* (1)-(2) *на $t \in [0,T]$ якщо він задовольняє наступне інтегральне рівняння*

$$u(t) = S(t)(\varphi(0) - g(\varphi(0))) + g(u(t-h)) - \int_0^t AS(t-s)g(u(s-h))ds$$

$$+ \int_0^t S(t-s)f(u(s), u(s-h))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(u(s), u(t-s))dW(s),$$

і $u(t) = \varphi(t)$ майже напевно для $t \in [-h, 0]$

Нам знадобляться наступні теореми, що є наслідками відповідних теорем з [5]:

Теорема 1. *[5] [Th 2.6] (Існування і єдиність м'якого розв'язку): За виконання умов 1-3, для всіх $T > 0$ рівняння* (1) *має єдиний м'який розв'язок u на $[0,T]$*

Теорема 2. *[5] [Th 2.8] Нехай виконуються умови Теореми 1, та $u(t,\varphi)$ і $u(t,\psi)$ є двома розв'язками рівняння* (1)*. Тоді*

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \left(\|u(t,\varphi) - u(t,\psi)\|^2 \right) \longrightarrow 0,$$

при $\mathbf{E}\|\varphi - \psi\|^2_{C_h} \longrightarrow 0$.

Позначимо $B_b(C_h)$ - банахів простір обмежених дійсних борелівських функціоналів на C_h а $C_b(C_h)$ - простір обмежених неперервних функціоналів на C_h. Оскільки Теорема 1 гарантує існування та єдиність розв'язку для будь-якого $t \geq 0$ то, замінюючи
початковий інтервал $[-h, 0]$ на $[-h + s, s]$ для будь-якого $s \geq 0$ ми можемо гарантувати існування та єдиність розв'язку на будь-якому інтервалі $[s, t]$ з початковою $\mathcal{F}_s$ вимірною функцією φ, яка задовольняє умови на $[s - h, s]$. Такі розв'язки позначатимуться як $u(t, s, \varphi)$. Аналогічно, позначимо $u_t(s, \varphi) = u(t + \theta, s, \varphi)$, де $\theta \in [-h, 0]$ зсув розв'язку $u(t, \varphi)$ такий, що $u_s(s, \varphi) = u(s + \theta, s, \varphi) = \varphi(\theta)$.

Далі, аналогічно до [10], визначимо сім'ю операторів зсуву

$$U_s^t \varphi := u(t + \theta, s, \varphi) = u_t(s, \varphi). \tag{5}$$

Позначимо $\mathcal{F}_s^t(dW)$ як мінімальну σ-алгебру, що містить множини $\{W(\tau) - W(s), \tau \in [s, t]\}$ і G^t як мінімальну σ-алебру, що містить $\{W(\tau) - W(t), \tau \geq t\}$. Для будь-якої невипадкової функції $\varphi \in C_h$, при $s \geq 0$ і $t \geq s$ розв'язок $U_s^t \varphi \in \mathcal{F}_s^t(dW)$-вимірною випадковою функцією зі значеннями в C_h. Зазначимо, що в цьому випадку, оскільки φ є невипадковою, то $u_t(s, \varphi)$ не залежить від σ-алгебри G^t. Наступне твердження було доведено в [11]:

Твердження 2. *[11] Оператор* (5) *задовольняє рівність*

$$U_\tau^t U_s^\tau \varphi = U_s^t \varphi,$$

для всіх $t \geq \tau \geq s \geq 0$, *і* $\varphi \in C_h$.

Нехай D є σ-алгеброю борелевих підмножин C_h. Для кожного $A \in D$ позначимо

$$\mu_t(A) = P\{u_t(s, t) \in A\} = P\{U_s^t \varphi \in A\} = P(s, \varphi, t, A). \tag{6}$$

Таким чином $u_t(s, \varphi)$ природно визначає міру на D. Формула (6) визначає напівгрупу перехідних ймовірностей, що відповідає випадковому процесу $u_t(s, \varphi)$,$t \geq s \geq 0$.
Подібно до скінченновимірного випадку [10], можна показати, що ця функція
задовольняє властивості перехідних ймовірностей.
Таким чином, ми отримуємо теорему.

Теорема 3. *За припущень Теореми 2, процес* $u_t(s, \varphi)$ *є процесом Маркова на* C_h *з перехідною функцією* (6).

Твердження 3. *[5] [Pr 2.11] Для будь-якого* $t \geq s \geq 0$ *і для будь-якого* $A \in D$ *маємо*

$$P(s, \varphi, t, A) = P(0, \varphi, t - s, A)$$

Для будь-якого $g \in B_b(C_h)$, і для всіх $\varphi \in C_h$ і $t \geq s \geq 0$ позначимо:

$$P_{s,t}(g) := \mathbf{E} g(u_t(s, \varphi)).$$

З Твердження 3 тоді отримуємо, що $P_{s,t}(g) = P_{0,t-s}(g)$ і позначимо $P_t(g) = P_{0,t}(g)$. Наступне твердження говорить про феллеровість цієї напівгрупи.

Твердження 4. *[5] [Pr 2.12] За припущень Теореми 2 перехідна напіврупа* P_t,$t \geq 0$ *є стохастично неперервною і феллеровою:*

$$P_t : C_b(C_h) \longrightarrow C_b(C_h),$$

і

$$\lim_{t \longrightarrow 0} P_t g = g.$$

Теорема 4. *[5] [Th 2.13] Припустимо, що умови Теореми 1 виконуються, а рівняння* (1) *має розв'язок* $u(t)$ *обмежений за ймовірністю для* $t \geq 0$ *в* C_h*, тоді існує інваріантна міра* μ *в* C_h*:*

$$\int_{C_h} P_t g(x) d\mu(x) = \int_{C_h} g(x) d\mu(x),$$

для будь-яких $t \geq 0$ *і* $g \in C_b(C_h)$*.*

Відповідно, для будь-яких $h > 0$ існує інваріантна міра μ^h для (1).

Надалі будемо вважати початкові умови невипадковими. Щоб перейти до основних результатів, нам знадобиться допоміжний результат з [2], адаптований до нашої задачі.

Ми розглядаємо граничну поведінку інварінтних мір рівняння (1)-(2) коли $h \longrightarrow 0$ де h запізнення в (1).

Для кожного $h \in (0,1]$ і $\varphi \in C([-h,0],H)$, $u^h(t,\varphi)$ - розв'язок (1)-(2) і стохастичний процес в фазовому просторі $C([-h,0],H)$. Аналогічно, для кожного $u_0 \in H$, $u^0(t,u_0)$ - розв'язок (3)-(4), такий, що $u^0(0,u_0) = u_0$.

Для $h \in (0,1]$ визначимо оператор $T_h : C([-h,0],H) \longrightarrow H$ як $T_h(\varphi) := \varphi(0)$ для $\varphi \in C([-h,0],H)$ і $\mathcal{T}_h : C([-1,0],H) \longrightarrow C([-h,0],H)$ як $\mathcal{T}_h(\varphi)(s) := \varphi(s)$ для $\varphi \in C([-1,0],H)$.

Далі, припускаємо виконання наступної властивості

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_h K} P\{\|u^h(t,\varphi) - u^0(t,T_h\varphi)\| \geq \eta\} = 0, \tag{7}$$

для кожної компактної підмножини K з $C([-1,0],H)$ і для всіх $\eta > 0$ та $t \geq 0$.

Теорема 5. *[2] [Th 7.1] Нехай виконується умова* (7) *і* $h_n \subset (0,1]$*. Нехай* μ^{h_n} *інваріантна міра* u^{h_n} *в* $C([-h_n,0],H)$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$*. Припустимо, що* $\{\mu^{h_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *щільна, тобто для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує компактна множина* $K_1 \subset C([-1,0],H)$*, така, що для всіх* $n \in \mathbb{N}$

$$\nu^{h_n}(\mathcal{T}_{h_n} K_1) > 1 - \varepsilon. \tag{8}$$

Тоді:

1. *Послідовність* $\{\mu^{h_n} \circ T_{h_n}^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ *щільна.*
2. *Якщо* $h_n \longrightarrow 0$ *і* μ *ймовірнісна міра в* H *така, що* $\mu^{h_n} \circ T_{h_n}^{-1} \longrightarrow \mu$ *слабко, то* μ *буде інваріантною мірою для* u^0

3 Гранична поведінка інваріантних мір

З Теореми 5 випливає, що для отримання збіжності мір нам потрібно довести (7). Для того, щоб показати, що (7) справджується у нашому випадку нам знадобиться наступна лема.

Лема 1. *Нехай виконані умови 1)-3). Тоді, для кожної компактної множини* $K \in C([-1,0],H)$*,* $t > 0$ *і* $\eta > 0$*, існує послідовність* $\{h_n | n \geq 1\}$*,* $h_n \longrightarrow 0$ *при* $n \longrightarrow \infty$ *така, що:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathcal{T}_{h_n} K} P(||u^{h_n}(t,\xi) - u^0(t,T_{h_n}\xi)|| \geq \eta) = 0. \tag{9}$$

Доведення. Маємо:

$$u^h(t,\xi) = S(t)(\xi(0) - g(\xi(-h))) + g(u^h(t-h,\xi)) - \int_0^t AS(t-s)g(u^h(s-h,\xi))ds+$$

$$\int_0^t S(t-s)f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))dW(s), \qquad (10)$$

і

$$u^0(t,T_h\xi) = S(t)(T_h\xi - g(T_h\xi)) + g(u^0(t,T_h\xi)) - \int_0^t AS(t-s)g(u^0(s,T_h\xi))ds+$$

$$\int_0^t S(t-s)f(u^0(s,T_h\xi),u^0(s,T_h\xi))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(u^0(s,T_h\xi),u^0(s,T_h\xi))dW(s). \qquad (11)$$

Тому

$$u^h(t,\xi) - u^0(t,T_h\xi) = S(t)(g(T_h\xi) - g(\xi(-h))) + (g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,T_h\xi)))+$$

$$\int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,T_h\xi)) - g(u^h(s-h,\xi)))ds+$$

$$\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - f(u^0(s,T_h\xi),u^0(s,T_h\xi)))ds+$$

$$\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - \sigma(u^0(s,T_h\xi),u^0(s,T_h\xi)))dW(s).$$

Відповідно

$$u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi(0)) = S(t)(g(\xi(0)) - g(\xi(-h))) + (g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,\xi(0))))+$$

$$\int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))ds+$$

$$\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds+$$

$$\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - \sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))dW(s).$$

Як наслідок отримуємо

$$\mathbf{E}\|u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi(0))\|^2 \le \|S(t)(g(\xi(0)) - g(\xi(-h)))\|^2$$

$$+\mathbf{E}\|S(t)(g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,\xi(0))))\|^2$$

$$+\mathbf{E}\left\|\int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))ds\right\|^2 \qquad (12)$$

$$+\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds\right\|^2$$

$$+\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - \sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))dW(s)\right\|^2.$$

Оцінимо всі доданки починаючи з останнього в (12).

Використавши [4] Теорему 6.10 отримуємо, що існує $K > 0$ таке, що:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi)) - \sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))dW(s)\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}K\int_0^t ||\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-\sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0)))||^2_{L_2^0}ds$$

$$\leq \mathbf{E}KL^2\int_0^t ||u^h(s-h,\xi)-u^0(s,\xi(0))||^2+||u^h(s,\xi))-u^0(s,\xi(0))||^2ds.$$

Для оцінки першого доданку, використаємо [2] (7.14):

$$\int_0^t ||u^h(s-h,\xi)-u^0(s,\xi(0))||^2ds\leq$$

$$2\int_{-h}^0 \|u^h(s,\xi)-\xi(0)\|^2ds+2\int_0^h \|u^0(s,\xi(0))-\xi(0)\|^2ds+2\int_0^t \|u^h(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2ds \quad (13)$$

$$+2\int_0^t \|u^0(s,\xi(0))-u^0(s+h,\xi(0))\|^2dt.$$

Тому, використовуючи (13) отримуємо:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(\sigma(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-\sigma(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))dW(s)\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}KL^2\Big(2\int_{-h}^0 \|u^h(s,\xi)-\xi(0)\|^2ds+2\int_0^h \|u^0(s,\xi(0))-\xi(0)\|^2ds \quad (14)$$

$$+3\int_0^t \|u^h(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2ds+2\int_0^t \|u^0(s,\xi(0))-u^0(s+h,\xi(0))\|^2dt\Big).$$

Далі оцінюємо доданок:

$$\mathbf{E}\|\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds\|^2,$$

наступним чином:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^t \|S(t-s)\|^2ds\cdot\int_0^t \|f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0)))\|^2ds$$

$$\leq \mathbf{E}L^2\int_0^t \|u^h(s-h,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2+\|u^h(s,\xi))-u^0(s,\xi(0))\|^2ds.$$

Також маємо:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)(f(u^h(s-h,\xi),u^h(s,\xi))-f(u^0(s,\xi(0)),u^0(s,\xi(0))))ds\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}L^2\Big(2\int_{-h}^0 \|u^h(s,\xi)-\xi(0)\|^2ds+2\int_0^h \|u^0(s,\xi(0))-\xi(0)\|^2ds \quad (15)$$

$$+3\int_0^t \|u^h(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2ds+2\int_0^t \|u^0(s,\xi(0))-u^0(s+h,\xi(0))\|^2dt\Big).$$

Далі, використавши нерівність Юнга для конволюцій отримуємо:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0)))-g(u^h(s-h,\xi)))ds\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^t \|AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^t \|A^{\alpha-1}S(t-s)\| \cdot \|A^{\alpha}(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^t \|A^{\alpha-1}S(\tau)\| d\tau \cdot \int_0^t \|A^{\alpha}(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}M_\alpha \int_0^t \|(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))\|_\alpha^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}M_\alpha \int_0^t ||u^h(s-h,\xi) - u^0(s,\xi(0))||^2 ds.$$

де $M_\alpha := \int_0^t C_{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}e^{\delta(t-s)}$.
Тому:

$$\mathbf{E}\| \int_0^t AS(t-s)(g(u^0(s,\xi(0))) - g(u^h(s-h,\xi)))ds\|^2$$

$$\leq 2\mathbf{E}M_\alpha L^2\Big(\int_{-h}^0 \|u^h(s,\xi) - \xi(0)\|^2 ds + \int_0^h \|u^0(s,\xi(0)) - \xi(0)\|^2 ds \tag{16}$$

$$+ \int_0^t \|u^h(s,\xi) - u^0(s,\xi(0))\|^2 ds + \int_0^t \|u^0(s,\xi(0)) - u^0(s+h,\xi(0))\|^2 dt\Big).$$

Враховуючи те, що $T_h\xi = \xi(0)$ маємо:

$$||S(t)\cdot(g(\xi(0)) - g(\xi(-h)))||^2 \leq ||S(t)||^2 \cdot ||L(\xi(0) - \xi(-h))||^2.$$

Далі покажемо, що для всіх компактних множин K

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \sup_{\xi\in\mathcal{T}_h K} ||\xi(0) - \xi(-h)||^2 = 0,$$

тут внутрішній супремум існує з теореми Асколі-Арцела. Прийнявши до уваги, що функціонал $\varphi(\xi) := \mathbf{E}\|\xi(0) - \xi(-h)\|^2$ неперервний можемо зробити висновок, що існує деякий $\xi_{sup}^h \in C_h$ на якому супремум досягається, але

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \|\xi_{sup}^h(0) - \xi_{sup}^h(-h)\|^2 = 0,$$

що випливає з неперервності ξ_{sup}^h.
Оцінимо, нарешті, доданок $\mathbf{E}\|g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,\xi(0)))\|^2$. Маємо:

$$\mathbf{E}\|g(u^h(t-h,\xi)) - g(u^0(t,\xi(0)))\|^2$$

$$\leq L^2\mathbf{E}\|u^h(t-h,\xi) - u^0(t,\xi(0))\|^2$$

$$\leq L^2\mathbf{E}\Big(\|u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi)\|^2 + \|u^h(t-h,\xi) - u^h(t,\xi)\|^2\Big)$$

$$\leq L^2\mathbf{E}\Big((\|u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi)\|^2\Big) + L^2\mathbf{E}\Big(\|u^h(t-h,\xi) - u^h(t,\xi)\|^2)\Big).$$

Перший доданок не перевищує $\|u^h(t,\xi) - u^0(t,\xi)\|^2$ з оцінок на сталу L.
Покажемо що:

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \sup_{\xi\in\mathcal{T}_h K} L^2\mathbf{E}\Big(\|u^h(t-h,\xi) - u^h(t,\xi)\|^2\Big) \longrightarrow 0.$$

Враховуючи те, що з Теореми 2 ми маємо неперервну залежність від початкових даних для м'якого розв'язку і $\mathcal{T}_h K$ компакт, можемо зробити висновок, що існує деякий ξ^h_{sup}, залежний від h, такий, що:

$$\sup_{\xi\in\mathcal{T}_h K} L^2\mathbf{E}\Big(\|u^h(t-h,\xi)-u^h(t,\xi)\|^2\Big) = L^2\mathbf{E}\Big(\|u^h(t-h,\xi^h_{sup})-u^h(t,\xi^h_{sup})\|^2\Big)$$

З означення м'якого розв'язку випливає, що

$$\begin{gathered}
u^h(t,\xi^h_{sup})-u^h(t-h,\xi^h_{sup}) = \\
(S(t)-S(t-h))(\xi^h_{sup}(0)-g(\xi^h_{sup}(-h))) \\
+g(u^h(t-h,\xi^h_{sup}))-g(u^h(t-2h,\xi^h_{sup})) \\
-\int_0^t (AS(t-s)-AS(t-h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds \\
+\int_{t-h}^t AS(t-h-s)g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds \\
+\int_0^t (S(t-s)-S(t-h-s))f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds \\
+\int_{t-h}^t S(t-h-s)f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds \\
+\int_0^t (S(t-s)-S(t-h-s))\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s) \\
+\int_{t-h}^t S(t-h-s)\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s),
\end{gathered}$$

Отже, після N кроків маємо

$$\begin{gathered}
L^2\mathbf{E}\|u^h(t,\xi^h_{sup})-u^h(t-h,\xi^h_{sup})\|^2 \le \\
\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\|(S(t-nh)-S(t-(n+1)h))(\xi^h_{sup}(0)-g(\xi^h_{sup}(-h))\|^2 \\
+L^{2n}\mathbf{E}\|g(u^h(t-(N-1)h,\xi^h_{sup}))-g(u^h(t-Nh,\xi^h_{sup}))\|^2 \\
+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\left\|\int_0^{t-nh}(AS(t-nh-s)-AS(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2 \\
+\sum_{n=0}^{N-1} L^{n}\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh} AS(t-(n+1)h-s)g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2 \\
+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\left\|\int_0^{t-nh}(S(t-nh-s)-S(t-(n+1)h-s))f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2 \\
+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh} S(t-(n+1)h-s)f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2
\end{gathered}$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\Big\|\int_0^{t-nh}(S(t-nh-s)$$

$$-S(t-(n+1)h-s))\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s)\Big\|^2$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1} L^{2n}\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh} S(t-(n+1)h-s)\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s)\right\|^2.$$

Для того, щоб довести збіжність до 0 потрібно показати, що існує $C>0$ і деяка функція $\psi(h)\longrightarrow 0$, при $h\longrightarrow 0$, такі, що наступні нерівності справджуються:

$$\|(S(t-nh)-S(t-(n+1)h))(\xi^h_{sup}(0)-g(\xi^h_{sup}(-h))\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^{t-nh}(AS(t-nh-s)-AS(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh} AS(t-(n+1)h-s)g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\left|\int_0^{t-nh}(S(t-nh-s)-S(t-(n+1)h-s))f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2\le C\psi(h), \quad (17)$$

$$\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh} S(t-(n+1)h-s)f(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\Big\|\int_0^{t-nh}(S(t-nh-s)$$

$$-S(t-(n+1)h-s))\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s)\Big\|^2\le C\psi(h),$$

$$\mathbf{E}\left\|\int_{t-(n+1)h}^{t-nh} S(t-(n+1)h-s)\sigma(u^h(s-h,\xi^h_{sup}),u^h(s,\xi^h_{sup}))dW(s)\right\|^2\le C\psi(h).$$

Беручи до уваги, що $\xi^h_{sup}\in\mathcal{T}_hK$, з сюр'єктивності $\mathcal{T}_h$ існує $\hat{\xi}^h_{sup}\in K$ таке, що

$$\mathcal{T}_h\hat{\xi}^h_{sup}=\xi^h_{sup}.$$

Позначимо множину всіх таких $\hat{\xi}$ для кожного h як $\Xi_K\subset K$. Із компактності K можна зробити висновок, що існує збіжна підпослідовність $\hat{\xi}_n$ яка збігається до деякого $\hat{\xi}_0\in\Xi_K$ в K. Із неперервності оператора $\mathcal{T}_h$ отримуємо, що $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|\xi^{h_n}_{sup}-g(\xi^{h_n}_{sup})\|^2$ існує для деякої послідовності $h_n\longrightarrow 0$. Таким чином, нерівність 1 з (17) справджується для деякої послідовності h_n.

З того, що відображення f,g,σ і напівгрупа S обмежені, випливає, що (17) справжується для нерівностей 3,5,7.

З умов на напівгрупу S можемо довести, що (17) справджуєтсья також для нерівностей 1, 4, 6.

Розлянемо ліву частину нерівності 2 з (17) детальніше:

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^{t-nh}(AS(t-nh-s)-AS(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))ds\right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^{t-nh} \|(AS(t-nh-s)-AS(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$= \mathbf{E}\int_0^{t-nh} \|A(S(t-nh-s)-S(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$= \mathbf{E}\int_0^{t-nh} \|A(S(t-(n+1)h-s+h)-S(t-(n+1)h-s))g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$= \mathbf{E}\int_0^{t-nh} \|A(S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2})\right)$$

$$\cdot S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right) g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^{t-nh} \|S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2$$

$$\cdot \|AS\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right) g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$\leq \mathbf{E}\int_0^{t-nh} \|S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2$$

$$\cdot \|A^{\alpha-1}S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2 \|A^{\alpha} g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2 ds$$

$$\leq C_{\alpha,g}\mathbf{E}\int_0^{t-nh} \|S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2$$

$$\cdot \|A^{\alpha-1}S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2 ds,$$

де $C_{\alpha,g} > \int_0^{t-nh} \|g(u^h(s-h,\xi^h_{sup}))\|^2_{\alpha} ds$, що випливає з лінійного росту g.
Позначимо $\frac{t-(n+1)h-s}{2} =: s_1$

$$C_{\alpha,g}\mathbf{E}\int_0^{t-nh} \|S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}+h\right)-S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2$$

$$\cdot \|A^{\alpha-1}S\left(\frac{t-(n+1)h-s}{2}\right)\|^2 ds$$

$$= C_{\alpha,g}\mathbf{E}\int_0^{h} \|S\left(s_1+h\right)-S\left(s_1\right)\|^2 \cdot \|A^{\alpha-1}S\left(s_1\right)\|^2 ds_1,$$

що збігається до 0, коли $h \longrightarrow 0$.
Після цього з (17) отримуємо, що $\mathbf{E}\|u^{h_n}(t-h_n,\xi)-u^{h_n}(t,\xi)\|^2$ збігається до 0, коли h_n приямує до 0.
Тому з (14), (15), (16), отримуємо, що:

$$\mathbf{E}\|u^{h_n}(t,\xi)-u^0(t,\xi(0))\|^2 \leq C\psi(h_n)$$

$$+\mathbf{E}L^2\|u^{h_n}(t,\xi)-u^0(t,\xi(0))\|^2$$

$$+3\mathbf{E}(2L^2+M_\alpha L^2+KL^2)\Big(\int_{-h_n}^{0}\|u^{h_n}(s,\xi)-\xi(0)\|^2 ds+\int_0^{h_n}\|u^0(s,\xi(0))-\xi(0)\|^2 ds \qquad (18)$$

$$+\int_0^t \|u^{h_n}(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2 ds+\int_0^t \|u^0(s,\xi(0))-u^0(s+h_n,\xi(0))\|^2 dt\Big),$$

або, беручи до уваги, що $h_n \longrightarrow 0$:

$$\mathbf{E}\|u^{h_n}(t,\xi)-u^0(t,\xi(0))\|^2 \le C_L C\psi(h_n)$$

$$+3\mathbf{E}C_L(2L^2+M_\alpha L^2+KL^2)\Big(\int_0^t \|u^{h_n}(s,\xi)-u^0(s,\xi(0))\|^2 ds\Big),$$

де $C_L := \frac{1}{1-L^2}$.
Тому, з нерівності Гронуола отримуємо, що:

$$\lim_{n\longrightarrow 0}\sup_{\xi\in\mathcal{T}_{h_n}K}\mathbf{E}\|u^{h_n}(t,\xi)-u^0(t,T_{h_n}\xi)\|^2=0.$$

Останнє, разом з нерівністю Чебишева, доводить твердження теореми. □

Використовуючи Лему 1 ми можемо провести аналогічні міркування до [2] Теореми 7.3:

Теорема 6. *Нехай умови на оператор A і на функції f,g,σ справджуються, тоді:*

1. *Об'єднання $\bigcup_{h\in[0,1]}\mathcal{M}^h$ щільне*
2. *Якщо $h_n\longrightarrow 0$ і $\mu^{h_n}\in\mathcal{M}^{h_n}$, тоді існує підпослідовність $h_{n(k)}$ і інваріантна міра $\mu^0\in\mathcal{M}^0$ такі, що $\mu^{h_{n(k)}}\circ T^{-1}_{h_{n(k)}}\longrightarrow\mu^0$ слабко.*

Для отримання наступного результату, нам знадобиться наступне означення:

Означення 2. *Назвемо розв'язок (1)-(2) стійким за розподілом, якщо існує $K,\gamma>0$, таке, що для всіх $t_0\in\mathbb{R}$ і для кожного $t>t_0+h$ і для будь-якого іншого розв'язку рівняння $\eta(t)$ такого, що $\mathbf{E}\|\eta(t_0)\|^2<\infty$, маємо:*

$$\mathbf{E}\|u_t-\eta_t\|^2_{C_h}\le Ke^{-\gamma(t-t_0)}\mathbf{E}(\|u(t_0)-\eta(t_0)\|^2+\|u(t_0-h)-\eta(t_0-h)\|^2) \tag{19}$$

Тоді, якщо ми маємо стійкість за розподілом і єдину інваріантну міру, то, як прямий наслідок Теорем 1, 2, 4, 5, 6 отримуємо теорему.

Теорема 7. *Нехай умови Теореми 5 справджуються і $h_n\longrightarrow 0$. Тоді $\mu^{h_n}\longrightarrow\mu^0$ слабко.*

4 Застосування

Нехай D обмежена область в $\mathbb{R}^d$ з ∂D що задовольняє умову Ляпунова, $H=L^2(D)$, і

$$Au=\sum_{i,j=1}^d (a_{i,j}(x)u_{x_i})_{x_j}=div(a(x)\nabla u).$$

Тут $a_{i,j}$ неперервні за Гельдером коефіцієнти показником Гельдера $\beta\in(0,1)$, що є симетричними, обмеженими і задовольняють умову рівномірної еліптичності:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}\eta_i\eta_j\ge C_0\|\eta\|^2,\eta\in\mathbb{R}^d,$$

для деякого $C_0 > 0$. Нехай $e_n(x)$ - ортонормований базис в H, такий, що $e_n \in L^\infty(D)$. Введемо оператор коваріації $Q \in \mathcal{L}(H)$, такий, що Q невід'ємний, $Tr(Q) < \infty$, і $Qe_n = \lambda_n e_n$. Це дозволяє визначити випадковий процес

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\beta_i(t)e_i(x), t \geq 0,$$

що є Q-вінерівським процесом для $t \geq 0$ зі значеннями в $L^2(D)$. Позначимо $U := Q^{\frac{1}{2}}(L^2(D))$. Із [6] Лема 2.2, випливає, що $U \in L^\infty(D)$. Аналогічно до [6] введемо мультиплікативний оператор $\Psi : U \longrightarrow H$ наступним чином. Для фіксованого $\varphi \in L^2(D)$, $\Psi(\varphi) := \varphi \cdot \psi$ при $\psi \in U$. Оскільки $\varphi \in L^2(D)$ і $\psi \in L^\infty(D)$, оператор Ψ визначений, тому $\Psi \circ Q^{\frac{1}{2}} : L^2(D) \longrightarrow L^2(D)$ визначає оператор Гільберта-Шмідта з

$$\|\Psi \circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2^0} \leq Tr(Q) \sup_{n\geq 1} \|e_n\|^2_\infty \|\varphi\|^2_{L^2(D)}.$$

Розглянемо наступне рівняння з запізненням:

$$\begin{aligned} &d\Big[u(t,x) + \int_D b(x, u(t-h,y), y)dy\Big] \\ &= \Big[div(a(x)\nabla u(t,x)) + f(u(t-h,x))\Big]dt + \sigma(u(t-h,x))dW(t), \end{aligned} \tag{20}$$

для $t > 0$, з $u(t,x) = \varphi(t,x)$ при $t \in [-h, 0]$, і $u(t,x) = 0$ для $x \in \partial D$,$t \geq 0$. Тут $b(x,z,y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ і $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Введемо відображення:

$$g(\varphi)(x) := \int_D b(x, \varphi(-h), y)dy,$$

як відображення з $C([-h, 0], \mathbb{R})$ в $L^2(D)$. Тоді рівняння (20) можна записати в абстрактній формі (1)-(2), з $D(A) := H^2(D) \cap H_0^1(D)$. Припустимо, що виконані наступні умови:

1. Функції f, σ задовольняють умову Ліпшиця з константою Ліпшиця L.
2. Функція b неперервна відносно всіх її змінних і існує $A > 0$ таке, що

   $$|b(x, 0, y)| + |\nabla_x b(x, z, y)| \leq A,$$

   і

   $$|b(x, z_1, y) - b(x, z_2, y)| + |\nabla_x b(x, z_1, y) - \nabla_x b(x, z_2, y)| \leq L|z_1 - z_2|,$$

   для всіх $x, y \in D$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.
3. Нехай також

   $$2L^2(\mu(D))^2 < 1.$$

Перевіримо, що умови Теореми 1 справджуються. Для будь-якого $\varphi \in C_h$ маємо:

$$\|f(\varphi)\|^2 = \int_D |f(\varphi(-h, x))|^2 dx \leq \int_D L^2|\varphi(-h, x)|^2 dx + \int_D |f(0, x)|^2 dx$$

$$\leq L^2 \sup_{\theta\in[-h,0]} \int_D |\varphi(\theta, x)|^2 dx + \int_D |f(0, x)|^2 dx < \infty,$$

і

$$\|\sigma(\varphi)\|^2_{L^0_2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sup_n \|e_n\|^2_\infty \int_D |\sigma(\varphi(-h,x))|^2 dx < \infty.$$

Окрім того:

$$\|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\|^2 \le L^2 \int_D |\varphi_1(-h,x) - \varphi_2(-h,x)|^2 dx \le L^2 \sup_{\theta\in[-h,0]} \int_D |\varphi_1(\theta,x) - \varphi_2(\theta,x)|^2 dx,$$

і

$$\|\sigma(\varphi_1) - \sigma(\varphi_2)\|^2_{L^0_2} \le L^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sup_n \|e_n\|^2_\infty \sup_{\theta\in[-h,0]} \int_D |\varphi_1(\theta,x) - \varphi_2(\theta,x)|^2 dx.$$

Оскільки $(-A)$ секторіальний самоспряжений оператор, то з [7] ст.335, випливає, що $\sigma(-A) > \delta > 0$, і $(-A)^{-1}$ компактний та утворює компактну напівгрупу $S(t)$. Далі, аналогічно [8] введемо інтерполяційний простір $D_A(\frac{1}{2}, 2) = H^1_0$. Але, з Твердження A.17 [9] випливає, що $D_A(\frac{1}{2}, 2)$ ізоморфний до $D((-A)^{\frac{1}{2}})$.

Нехай існує $C_{1/2} > 0$, з Твердження 1, таке що:

$$2L^2 + L^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k + L^2 C < \frac{1}{2},$$

і

$$36L^4 (C_{1/2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k)^2 < \frac{3}{\pi},$$

де $C := \frac{C^2_{1/2}}{2\delta^2}$.

Далі

$$\|g(\varphi)\|^2_{\frac{1}{2}} = \|g(\varphi)\|^2_{H^1_0} = \int_D |g(\varphi(x))|^2 dx + \int_D |\nabla g(\varphi(x))|^2 dx.$$

Тому

$$\int_D |g(\varphi(x))|^2 dx = \int_D dx \left(\int_D b(x, \varphi(-h,y), y) dy \right)^2$$
$$\le L^2 \mu(D)^2 \left(\int_D |\varphi(-h,y)| dy + 1 \right) < \infty.$$

З теореми Лебега про диференціювання інтеграла за параметром маємо, що

$$\nabla g(\varphi(x)) = \int_D \nabla_x b(x, \varphi(-h,y), y) dy,$$

тому

$$\int_D |\nabla g(\varphi(x))|^2 dx < \infty.$$

Нарешті

$$\|g(\varphi_1) - g(\varphi_2)\|^2_{\frac{1}{2}} = \int_D |g(\varphi_1(x)) - g(\varphi_2(x))|^2 dx + \int_D |\nabla_x g(\varphi_1(x)) - \nabla_x g(\varphi_2(x))|^2 dx$$
$$\le \int_D dx \left(\int_D |b(x, \varphi_1(-h,y), y) - b(x, \varphi_2(-h,y), y)|^2 dy \right)$$
$$+ \int_D dx \left(\int_D |\nabla_x b(x, \varphi_1(-h,y), y) - \nabla_x b(x, \varphi_2(-h,y), y)|^2 dy \right)$$

$$\leq 2\mu(D)^2L^2\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{C_h}.$$

Зазаначимо, що з спектральної умови на A випливає, що напівгрупа експоненційно стискаюча

$$\|S(t)\| \leq Ke^{\delta t}, t \geq 0.$$

Тепер, доведемо, що розв'язок глобально обмежений. Маємо:

$$\mathbf{E}\|u(t)\|^2 \leq 2\mathbf{E}\|S(0)(\varphi(0)+g(\varphi))\|^2 + 2\mathbf{E}\|g(u_t)\|^2 + 4\mathbf{E}\left\|\int_0^t AS(t-s)g(u_s)ds\right\|^2$$

$$+4\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)f(u_s)ds\right\|^2 + 4\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\sigma(u_s)dW(s)\right\|^2$$

$$\leq 4K^2e^{-2\delta t}\mathbf{E}\|\varphi(0)+g(\varphi)\|^2 + C^2\mu(D)^2$$

$$+\mathbf{E}\left(\int_0^t \|A^{\frac{1}{2}}S(t-s)\|\cdot\|g(u_s)\|_{\frac{1}{2}}ds\right)^2 + K^2C + K^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k,$$

тому з $\|g(u_s)\|_{\frac{1}{2}} < \infty$, і з експоненційної оцінки на напівгрупу маємо глобальну обмеженість.

Отже, з теореми 4 випливає існування інваріантної міри.

Дослідження частково підтримано грантом Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України 3М-2024 "Якісний аналіз та керування в нелінійних інтегро-диференціальних рівняннях із імпульсними та стохастичними збуреннями державний реєстраційний номер: 0124U002140.

Список літератури

[1] Henry D. Geometric theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer-Verlag. Berlin-New York (1981).

[2] Dingshi Li, Bixiang Wang, Xiaohu Wang. Limiting Behavior of Invariant Measures of Stochastic Delay Lattice Systems// Journal of Dynamics and Differential Equations, 2022, 34:1453–1487.

[3] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag. New York (1983).

[4] G. Da Prato and J. Zabczyk. Ergodicity for Infinite-Dimensional Systems. Cambridge University Press. Cambridge (1992).

[5] Stanzhytsky A.O., Misiats O.O., Stanzhytskyi O.M. Invariant measure for neutral stocahstic functional differential equations with non-Lipshitz coefficients// Evolution equations and control theory,2022,Vol 11(6). P.1029-1953.

[6] Ralf Manthey and Thomas Zausinger. Stochastic evolution equations in $L^{2\nu}_{\rho}$// Stochastics Stochastics Rep., 66(1-2):37–85, 1999.

[7] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[8] P. Grisvald. Commutativite de deux foncteurs d'interpolation et applications// J. Math. Pures.Appl., 45:193–290, 1966.

[9] K. Kenzhebaev, O. Stanzhytskyi, and A. Tsukanova. Existence and uniqueness results, the markovian property of solutions for a neutral delay stochastic reaction-diffusion equation in entire space// Dynamic Systems and Applications, 28(1):19–46, 2019.

[10] E. F. Tsarkov. Random Perturbations of Functional Differential Equations. "Zinatne", Riga (1989).

[11] Oleksandr Misiats, Vikotria Mogilova, and Oleksandr Stanzhytskyi. Invariant measure for stochastic functional differential equations in hilbert spaces. arXiv:2011.07034, 2020.

[12] D. Dawson. Stochastic evolution equations// Mach. Biosci.,15(1972),287-316.

[13] Luo J. Exponental stability for stochastic neutral partial functional differential equations// J. Math. Anal. Appl. , 355(2009), 414-425 p.

[14] Samoilenko A.M. Mahmudov N.I. and Stanzhytsky A.M., Existence , uniqueness and controllability results for neutral ESDES in Hilbert Spaces// Dynam. Syst. Appl., 17(2008),53-70.

[15] A.O.Stanzhytsky. On weak and strong solutions of paired stochastic functional differential equations in infinite–dimentional spaces // Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications,Vol. 29 (2),pp.48–75, (2021).

[16] J. Clark, O. Misiats, V. Mogylova, O. Stanzhytskyi. Asymptotic behaviour of stochastic funtional differential evolution equation// Electr. Journal of Differential Equations, v. 2023(2023), No 35, pp 1-21.

[17] O. Misiats, O. Stanzhytskyi, N.K. Yip. Asymptotic analysis and homogenization of invariant measure// Stochastics and Dynamics, Vol. 19, No. 2, 28 p, (2019).

[18] G.O.Petryna, M.V. Hrysenko, O.M. Stanzhytskyi. On the asymptotic equivalenct of ordinary and functional stochastic differential equations Journal of Optimization// Differential Equations and their Applicationsthis, 31(1), pp. 125–142, (2023).

[19] O. M. Stanzhytskyi. Investigation of exponential dichotomy of ito stochastic systems by using quadratic forms// Ukrainian Mathematical Journal, 53(11), pp. 1882–1894, (2001).

[20] Saifullah S., Shahid S., Zada A. Analysis of Neutral Stochastic Fractional Differential Equations Involving Riemann–Liouville Fractional Derivative with Retarded and Advanced Arguments// Qual. Theory Dyn. Syst. 23, 39 (2024). https://doi.org/10.1007/s12346-023-00894-w.

[21] Mengtao Wu, Shaoyue Mi and Dingshi Li. Limiting behaviour of Invariant Measures for Stochastic Delay Nonlocal lattice Systems// Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, 2024, Volume 29, Issue 10: 4171-4193. Doi: 10.3934/dcdsb.2024039

Надійшло 26.05.2025

Pravdyvyi O., Stanzhytskyy O., Stanzhytskyy A., Martynyuk O. *Invariant measures and their limiting behaviour for neutral type stochastic delay equations in Hilbert space*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 7–24.

In this work we consider invariant measures for neutral type stochastic delay evolution equation in Hilbert space. Established conditions on existence and uniqueness of invariant measures for neutral type stochastic delay evolution equation in Hilbert space. Established limiting behaviour of invariant measures if length of delay interval $h \longrightarrow 0$.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.02

Капустян О.В., Краснєєва А.О.

РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО АТРАКТОРУ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЩОДО ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

В роботі доводиться робастна оцінка типу Asymptotic Gain, що характеризує відхилення розв'язків нелінійної параболічної задачі зі збуреннями на межі просторової області від глобалььного атрактору незбуреної системи в термінах величини збурень.

Ключові слова і фрази: Диференціальне рівняння, параболічне рівняння, атрактор, стійкість, збурення.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: *kapustyan@knu.ua (Капустян О.В.), krasnyeyeva@gmail.com (Краснєєва А.О.)*

Вступ

Добре відомо, що глобально асимптотично стійкий стан рівноваги лінійної системи є робастним в тому сенсі, що для будь-яких обмежених збурень розв'язок з часом опиняється в околі точки рівноваги і розмір цього околу залежить лише від норми збурень. В нелінійних системах це, взагалі кажучи, не так [1] і є предметом вивчення в межах теорії ISS (Input to State Stability) [2]. Основним інструментом як в скінченновимірному, так і в нескінченновимірному випадку виступає ISS функція Ляпунова, в термінах якої і одержуються шукані робастні оцінки [2, 3]. Проте для багатьох нескінченновимірних дисипативних динамічних систем характерною властивістю є наявність в фазовому просторі нетривіальної притягуючої множини – глобального атрактору [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Перенесення основних конструкцій ISS на параболічні та гіперболічні системи з нетривіальним атрактором було здійснено в роботах [11, 12, 13]. При цьому для доведення властивості AG (Asymptotic Gain) виявився продуктивним підхід, пов'язаний з аналізом рівномірних атракторів неавтономних динамічних систем (напівпроцесів) і їх залежністю від збурень.

В даній роботі цей підхід застосовується до нелінійного параболічного рівняння зі збуренням на межі просторової області. Побудовано відповідну сім'ю напівпроцесів, доведено існування рівномірного атрактору, і на основі факту його збіжності до атрактору незбуреної системи встановлено робастну оцінку типу AG.

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55.
Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт № 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою".

© Капустян О.В., Краснєєва А.О., 2025

1 Постановка задачі та основний результат

Розглянемо наступну задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = f(y(t,x)), (t,x) \in Q = (0,+\infty) \times (0,l), \\ y(t,0) = d_1(t), y(t,l) = d_2(t), \\ y(0,x) = y_0(x), x \in (0,l), \end{cases} \tag{1}$$

де функція $d := \{d_1, d_2\} \in \mathcal{U} \subset \left(L^\infty(0,+\infty)\right)^2$ визначає збурення, початкова функція y_0 належить фазовому простору $X = L^2(0,l)$ з нормою $\|.\|$, задана нелінійна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:

$$\begin{gathered} f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 0, \exists C \geq 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0, p \geq 2, \lambda \in \mathbb{R}, \\ -C - \alpha_1 |s|^p \leq f(s) \cdot s \leq C - \alpha_2 |s|^p, \\ f'(s) \leq \lambda. \end{gathered} \tag{2}$$

Позначимо $y(t, y_0, d)$ розв'язок (1) в момент часу $t \geq 0$ (точне означення розв'язку буде дано в частині 3 роботи). Відомо [4], що при $d_1 \equiv 0$, $d_2 \equiv 0$ слабкі розвязки (1) породжують дисипативну динамічну систему $\{S(t) : X \longmapsto X\}_{t \geq 0}; S(t)y_0 = y(t, y_0, 0)$, що має у фазовому просторі X глобальний атрактор Θ - компактну інваріантну множину, що притягує $S(t)y_0$ при $t \to \infty$. При цьому, наприклад, для рівняння Чафе-Інфанте з $f(s) = \lambda(s - s^3)$ при великих $\lambda > 0$ атрактор Θ є нетривіальною зв'язною підмножиною $L^2(0,l)$ зі складною структурою [4]. За наявності неавтономних збурень $d(t)$ ми не можемо стверджувати, що точка $y(t, y_0, d)$ притягується до Θ при $t \to \infty$. Проте виявляється, що оцінка відхилення $y(t, y_0, d)$ від Θ залежить лише від $\|d\|_\infty = max\{\|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty\}$.

Раніше, в роботі [14] для задачі (1) за даних додаткових умов на f та y_0 була одержана властивість local ISS:

$$\begin{gathered} \exists \beta \in KL, \exists \gamma \in K, \exists r > 0, \forall y_0 \in X, \|y_0\|_\Theta \leq r, \\ \forall t \geq 0 \quad \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \end{gathered} \tag{3}$$

де класи функцій порівняння K і KL визначаються рівностями [1]

$$K = \{\gamma \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_1) | \gamma(0) = 0, \gamma \text{ строго зростає}\},$$

$$KL = \{\beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_+ \cdot \mathbb{R}_+) | \beta(\cdot, t) \in K, \beta(s, \cdot) \searrow 0\}.$$

Тут і надалі позначаємо для $A, B, \Theta \subset X$

$$dist(A,B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \ \|A\|_\Theta = dist(A, \Theta).$$

Оцінка (3) була виведена шляхом побудови в околі Θ ISS функції Ляпунова і носить локальний характер.

В даній роботі ми лише за умов (2) встановимо нелокальну властивість AG:

$$\begin{gathered} \exists \gamma \in K, \forall y_0 \in X \\ \overline{\lim_{t \to \infty}} \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \gamma(\|d\|_\infty). \end{gathered} \tag{4}$$

Для доведення (4) ми використаємо техніку напівпроцесів: погрузимо задачу (1) в сім'ю задач $\{(1)_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, де $(1)_{\{0\}} = (1)$, Σ - спеціально побудований простір параметрів, який залежить від збурення d. Далі ми доведемо, що сім'я напівпроцесів $\{(1)_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ має рівномірний атрактор Θ_Σ, причому

$$dist(\Theta_\Sigma, \Theta) \to 0,\ \|d\|_\infty \to 0.$$

Остання збіжність дозволить нам довести оцінку (4).

2 Напівпроцеси та їх атрактори

Нехай Σ - деяка транскрипційно-інваріантна множина функціональних параметрів, тобто

$$\forall h \geq 0, \forall \sigma(\cdot) \in \Sigma, \sigma(\cdot + h) \in \Sigma.$$

Нехай задано сім'ю $S_\sigma(t, \tau, x),$ де $\sigma \in \Sigma, t \geq \tau \geq 0, x \in X$.

Означення 1. *Сім'я $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ називається сім'єю напівпроцесів, якщо для всіх $\sigma \in \Sigma, x \in X$ виконуються наступні властивості:*

$$S_\sigma(\tau, \tau, x) = x, \forall \tau \geq 0,$$

$$S_\sigma(t, s, S_\sigma(s, \tau, x)) = S_\sigma(t, \tau, x), \forall t \geq s \geq \tau \geq 0,$$

$$S_\sigma(t + h, \tau + h, x) = S_{\sigma(\cdot+h)}(t, \tau, x), \forall t \geq \tau \geq 0, \forall h \geq 0.$$

Зауваження 1. *При $\sigma = 0$ (незбурений випадок) ми маємо*

$$S_0(t_1 + t_2, 0, x) = S_0(t_1, 0, S_0(t_2, 0, x)).$$

Тобто S_0 задовольняє напівгрупову властивість.

Покладемо

$$S_\Sigma(t, 0, x) := \bigcup_{\sigma\in\Sigma} S_\sigma(t, 0, x).$$

Означення 2. *Компактна множина $\Theta_\Sigma \subset X$ називається рівномірним атрактором $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, якщо для довільного обмеженого $B \subset X$*

$$dist(S_\Sigma(t, 0, B), \Theta_\Sigma) \to 0,\ t \to \infty,$$

і Θ_Σ є мінімальною замкненою множиною, що задовольняє цю властивість.

Лема 1. *Нехай Σ є компактною множиною і виконуються властивості:*

1) існує обмежена $B_0 \subset X$ така, що для $\forall$ обмеженої $B \subset X$

$$\exists T = T(B), \forall t \geq T, S_\Sigma(t, 0, B) \subset B_0;$$

2) для будь-яких $\{\sigma_n\} \subset \Sigma$, обмеженої $\{x_n\} \subset X, \{t_n \nearrow \infty\}$

$$\text{послідовність } \{S_{\sigma_n}(t, 0, x_n)\} \text{ є предкомпактною в } X.$$

Тоді $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ має рівномірний атрактор $\Theta_\Sigma \subset B_0$.

Якщо, крім того виконується умова:

3) $\forall t > 0$ відображення $(x, \sigma) \to S_\sigma(t, 0, x)$ є неперервним,

то Θ_Σ є інваріантним в наступному сенсі:

$$\Theta_\Sigma \subset S_\Sigma(t, 0, \Theta_\Sigma), \forall t \geq 0.$$

Зауваження 2. *Для $\Sigma = \{0\}$ умови 1)-3) гарантують існування глобального атрактора Θ у напівгрупи S_0.*

Лема 2. *[13] Нехай $\Sigma = \Sigma(\omega), \|\omega\|_\infty \le R$ задовольняє умови Леми 1 з однією і тією самою множиною B_0, $\Sigma(0) = \{0\}, \omega \in \Sigma(\omega)$ і виконуються наступні умови:*

1) $\forall \|\omega_n\|_\infty \to 0, \forall \{x_n\} \subset B_0, \forall t_n \nearrow \infty, \forall \sigma_n \subset \Sigma(\omega_n)$

$$\text{послідовність } \{S_{\sigma_n}(t_n, 0, x_n)\} \text{ - предкомпактна в } X;$$

2) $\forall t > 0, \forall \|\omega\|_\infty \to 0, \forall \sigma_n \in \Sigma(\omega_n), \forall x_n \to x$ по підпослідовності

$$S_{\sigma_n}(t, 0, x_n) \to S_0(t, 0, x).$$

Тоді $\exists \gamma \in K, \forall x \in X, \forall \|\omega\|_\infty \le R$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} dist(S_{\Sigma(\omega)}(t, 0, x), \Theta) \le \gamma(\|\omega\|_\infty). \tag{5}$$

Зауваження 3. *Оскільки $\omega \in \Sigma(\omega)$, то з (5) випливає*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|S_\omega(t, 0, x)\|_\Theta \le \gamma(\|\omega\|_\infty). \tag{6}$$

3 Основні результати

Бедемо розглядати задачу (1) для наступного класу збурень U: множина U складається з тих $d = d\{d_1, d_2\} \in (L^\infty(\mathbb{R}_+))^2$, для яких d_1, d_2 є абсолютно неперервними $d_1(0) = d_2(0) = 0, \dot{d_1}, \dot{d_2} \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ і

$$\|d\|_\infty = max\{\|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty\} \le R. \tag{7}$$

Тоді U є трансляційно інваріантною:

$$\forall h \ge 0 \ \|d(\cdot + h)\|_\infty \le \|d\|_\infty \le R. \tag{8}$$

Нехай ω є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} = 0, (t, x) \in Q, \\ w(t, 0) = d_1(t), w(t, l) = d_2(t), t > 0, \\ w(0, x) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В силу принципу максимуму [16] $w \in L^\infty(Q)$ і

$$\|w\|_\infty \le \|d\|_\infty. \tag{10}$$

Більше того, переходячи заміною $\overline{w} = w - \frac{x}{l} d_2(t) - \frac{l-x}{l} d_1(t)$ до задачі з нульовими початковими і крайовими умовами і правою частиною $-\frac{x}{l}\dot{d_2} - \frac{l-x}{l}\dot{d_1}$ з класу $L^\infty(Q)$, ми в силу [5] одержуємо, що $w \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_+; H_0^1(0, l))$ і існує $L = L(\dot{d}) > 0$:

$$\sup_{t\ge 0} \|w(t)\|_{H_0^1} \le L; \tag{11}$$

$$\|w(t_1) - w(t_2)\| \le L|t_1 - t_2|. \tag{12}$$

Розв'язком (1) на $(0,T)$ будемо називати $y = v+w$, де w - розв'язок (9), $v = v(t,x)$ - слабкий розв'язок задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = f(v(t,x)) + w(t,x)), \ (t,x) \in Q, \\ v(t,0) = 0, v(t,l) = 0, \ t > 0, \\ v(0,x) = y_0(x), \ x \in (0,l). \end{cases} \tag{13}$$

Тобто $\forall T > 0, v \in L^2(0,T; H_0^1(0,l))$, $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T; H^{-1}(0,l))$

$$v|_{t=0} = y_0 \ i \ \forall \eta \in C_0^\infty(0,l), \ \forall \theta \in C_0^\infty(0,T),$$

$$-\int_0^T (v,\eta)\theta_t + \int_0^T (v_x, \eta_x)\theta = \int_0^T (f(v+w),\eta)\theta. \tag{14}$$

Зауважимо, що для будь-якої функції $w \in L^\infty(Q)$, що задовольняє (10), зокрема і для розв'язку (9), функція $\overline{f}(t,x,s) := f(s+w(t,x))$ задовольняє (2) з додатними сталими $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{C}$, що залежать лише від R. Тому згідно з [4], [15] маємо, що $\forall y_0 \in X$ задача (13) має єдиний слабкий розв'язок $v \in \mathbb{C}([0,\infty) : X$ і $\forall t \ge \tau \ge 0$ виконуються оцінки

$$\|v(t)\|^2 \le \|v(\tau)\|^2 e^{-\delta(t-\tau)} + K, \tag{15}$$

$$\|v(t)\|^2 + \int_\tau^t \|v_x(s)\|^2 ds + \int_\tau^t \|v(s)\|_{L^p}^p ds \le \|v(\tau)\|^2 + K(t-\tau), \tag{16}$$

де додатні константи δ, K залежать лише від R.

Зафіксуємо функцію $w \in \mathbb{C}([0,+\infty), H_0^1(0,l))$, що задовольняє оцінки (10)–(12) і розглянемо множину

$$\Sigma(w) = cl_{\mathbb{C}(\mathbb{R}_+;X)}\{w(\cdot + h) | h \ge 0\},$$

де збіжність в $\mathbb{C}(\mathbb{R}; X)$ – це рівномірна збіжність на кожному $[a,b] \subset [0,+\infty)$.

В силу компактності вкладення $H_0^1(0,l) \subset X$ з [15] виводимо, що $\Sigma(w)$ – трансляційно-інваріантна, компактна в $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+; X)$, $w \in \Sigma(w), \Sigma(0) = \{0\}$.

Більше того, оскільки $\forall \sigma \in \Sigma(w), \exists h_n \ge 0$ таке, що

$$\forall T > 0, \ \max_{t\in[0,T]} \|w(t+h_n) - \sigma(t)\| \to 0, \ n \to \infty,$$

то

$$\|\sigma\|_\infty \le \|w\|_\infty \le \|d\|_\infty. \tag{17}$$

Тепер для фіксованого $w \in \mathbb{C}([0,+\infty); H_0^1(0,l))$, що задовольняє (10)-(12), для $t \ge \tau \ge 0$ і $y_\tau \in X$ розглядаємо сукупність $\{S_\sigma(t,\tau,y_\tau)\}, \sigma \in \Sigma(w)$, де $v(0) = S_\sigma(0,\tau,y_\tau)$ – це розв'язок задачі (13) на $[\tau,+\infty)$ з правою частиною

$$f(v(t,x) + \sigma(t,x)) \tag{18}$$

і початковими умовами $v|_{t=\tau} = y_\tau$.

Легко показати, що $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma(w)}$ є сім'єю напівпроцесів.

Тоді для розв'язку (1) маємо

$$y(t, y_0, d) = S_\omega(t, 0, y_0) + \omega(t), \tag{19}$$

де ω - розв'язок (9) зі збуренням d.

Основним результатом роботи є

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1) *виконуються умови* (2), *збурення* d *належать класу* U *і виконуються співвідношення* (7). *Нехай* $\Theta \subset X = L^2(0, l)$ *є глобальним атрактором незбуреної задачі* ($d \equiv 0$). *Тоді* $\exists \gamma \in K$ *така, що для довільних* $y_0 \in X$, $d \in U$ *для розв'язку* (1) $y(t, y_0, d)$ *виконується оцінка*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \le \gamma(\|d\|_\infty). \tag{20}$$

Доведення. Достатньо довести (20) для S_ω з (19). Дійсно, якщо для деякого $\overline{\gamma} \in K$ $\forall y_0 \in X$ $\forall d \in U$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|S_\omega(t, 0, y_0)\|_\Theta \le \overline{\gamma}(\|d\|_\infty), \tag{21}$$

то з (20) виводимо

$$\|y(t, y_0, d)\|_\Theta = dist(S_\omega(t, 0, y_0) + \omega(t), \Theta) \le$$

$$dist(S_\omega(t, 0, y_0), \Theta) + \|\omega(t)\| \le \|S_\omega(t, 0, y_0)\| + l^{\frac{1}{2}}\|\omega\|_\infty \le \gamma(\|d\|_\infty),$$

де $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s) + l^{\frac{1}{2}}s$.

Якщо ми покажемо, що для $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma(\omega)}$ з (18) виконуються умови лем 1, 2 то одержимо, що $\exists \gamma \in K$ $\overline{\lim_{t\to\infty}} \|S_\omega(t, 0, y_0)\|_\Theta \le \gamma(\|\omega\|_\infty)$ і з (17) одержимо шукану оцінку (21).

Отже, перевіримо умови Леми 1 та Леми 2.

Умова 1) леми 1 випливає з оцінок (15), (17) з множиною

$$B_0 = \{v \in X \mid \|v\| \le \sqrt{K+1}\}.$$

Далі для $\forall\|\omega_n\|_\infty \le R$, $\forall\sigma_n \in \Sigma(\omega_n)$, $\forall\|y_n\| \le r$, $\forall t_n \to \infty$ для достатньо великих n маємо:

$$\xi_n = S_{\sigma_n}(t_n, 0, y_n) = S_{\sigma_n}(t_n - \bar{t} + \bar{t}, t_n - \bar{t}, S_{\sigma_n}(t_n - \bar{t}, 0, y_n)) =$$

$$= S_{\sigma_n(t_n-\bar{t}+\cdot)}(\bar{t}, 0, S_{\sigma_n}(t_n - \bar{t}, 0, y_n)) = S_{\overline{\sigma}_n}(\bar{t}, 0, \overline{y}_n),$$

де $\{\overline{y}_n\} \subset B_0$, $\overline{\sigma}_n \subset \Sigma(\omega_n)$. Вважаємо, що по підпослідовності $\overline{y}_n \to \overline{y}$ слабо в X. Розглянемо два випадки, що відповідають умові 2) леми 1 та умові 1) леми 2.

I) $\omega_n \equiv \omega$. Тоді з компактності $\Sigma(\omega)$ в $\mathbb{C}([0, +\infty); X)$ маємо, що $\overline{\sigma}_n \to \overline{\sigma} \in \Sigma(\omega)$ і $\xi_n = v_n(\bar{t})$, де v_n розв'язок задачі (13) з правою частиною $f(v + \overline{\sigma}_n)$ і початковим даним $\overline{y}_n$.

З оцінки(16) виводимо, що $\forall T \ge \bar{t}$

$$\{v_n\} \text{ - обмежена в } L^\infty(0, T; X) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, l)) \cap L^p(Q_T),$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} \text{ - обмежена в } L^2(0, T; H^{-1}(0, l)) + L^q(Q_T),$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді згідно з теоремою про компактність [2] по послідовності одержуємо збіжності

$$\begin{cases} v_n \to v \text{ слабо в } L^2(0, T; H_0^1(0, l)), \\ v_n \to v \text{ сильно в } L^2(0, T, X) \text{ і м.с. в } Q_T, \\ v_n(t) \to v(t) \text{ слабо в } X \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \tag{22}$$

Тоді $f(v_n(t,x)+\overline{\sigma_n}(t,x)) \to f(v(t,x)+\overline{\sigma}(t,x))$ майже скрізь в Q_T.

Оскільки

$$\|f(v_n(t,x)+\overline{\sigma_n}(t,x))\| \le C(R)(1+|v_n(t,x)|^{p-1}),$$

то з обмеженості $\{v_n\}$ в $L^P(Q_T)$ і леми Ліонса виводимо, що $f(v_n+\overline{\sigma}_n) \to f(v+\overline{\sigma})$ слабо в $L^q(Q_T)$.

Цей факт і збіжності (22) дозволяють перейти до границі в рівності (14), записаній для $v_n, \overline{\sigma}_n$ і одержати, що $v \in \mathbb{C}([0,+\infty);X)$ – розв'язок (13) з правою частиною $f(v+\overline{\sigma})$ і початковим даним $\overline{y}$.

Для доведення сильної збіжності

$$v_n(\overline{t}) \to v(\overline{t}) \text{ в } X \tag{23}$$

зауважимо, що в силу (16) функція

$$J_n(t) = \|v_n(t)\|^2 - Kt, J(t) = \|v(t)\|^2 - Kt$$

є монотонною, неперервною на $[0,T]$ і в силу (22) збігається майже скрізь на $[0,T]$.

Тоді з теореми Діні [6] маємо, що

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in [\varepsilon, T]\ J_n(t) \to J(t).$$

Звідси і зі слабкої поточкової збіжності v_n до v в X (див. (22)) випливає, що

$$\xi_n = v_n(\overline{t}) \to \xi := v(\overline{t}) = S_{\overline{\sigma}}(\overline{t}, 0, \overline{y}). \tag{24}$$

Це, зокрема, означає виконнання умови 2) Леми 1.

II) $\|w_n\|_\infty \to 0$. Тоді $\forall \sigma_n \in \Sigma(w_n)$ в силу (17)

$$\|\sigma_n\|_\infty \to 0,\ n \to \infty. \tag{25}$$

Тоді для $\overline{\sigma}_n(\cdot) = \sigma_n(t_n - \overline{t} + \cdot)$ маємо $\overline{\sigma}_n \to 0$ в $\mathbb{C}([0,+\infty);X)$ і, повторюючи міркування пункту I) з $\overline{\sigma}=0$, одержуємо виконання умови 1) Леми 2.

Тепер перевіримо умови 3) Леми 1 і умови 2) Леми 2. Нехай $||\omega_n||_\infty \le R$, $\overline{\sigma}_n \in \Sigma(\omega_n)$ $\overline{y_n} \to \overline{y}$, $\overline{t} > 0$, і розглянемо $\xi_n = S_{\overline{\sigma}_n}(\overline{t}, 0, \overline{y}_n)$.

Знову маємо два випадки: або $\omega_n \equiv \omega$ і $\overline{\sigma}_n \to \overline{\sigma} \in \Sigma(\omega)$, або $||\omega_n||_\infty \to 0$ і $\overline{\sigma}_n \to \sigma = 0$.

В обох випадках ми можемо повторити міркування (22)-(25)), і стверджувати, що принаймні по підпослідовності $\xi_n \to \xi = S_{\overline{\sigma}}(\overline{t}, 0, \overline{y})$.

Звідси ми одержуємо виконання умов Леми 1 і Леми 2, що і доводить теорему.

□

Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт № 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою".

Список літератури

[1] Khalil, Hassan K.. Nonlinear systems. Нью-Йорк: Macmillan Publishing Company, 1992.

[2] Sontag E.D. Mathematical control theory: deterministic finite-dimensional systems // Springer. 1998.

[3] Dashkovskiy S., Mironchenko A. Input-to-state stability of infinite dimensional control systems // Mathematics of Control, Signals and Systems. 2013. Vol. 25, no 1. P. 1–35.

[4] Robinson J.C. Infinite-Dimensional Dynamical Systems // Cambridge University Press. 2001.

[5] R. Temam. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series, Springer, 1997.

[6] A.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, J. Valero. Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation. Appl. Math. Inform. Sciences, 2015, 9, 2257-2264.

[7] O.V. Kapustyan, N.V Gorban, P.O. Kasyanov. Uniform trajectory attractor for non-autonomous reaction-diffusion equations with Caratheodory's nonlinearity. Nonlinear Analysis, 2014, 98, 13-26

[8] P.O. Kasyanov, L. Toscano, N.V. Zadoianchuk. Long-time behaviour of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional reaction-displacement law. Abstract and Applied Analysis, 2012, 450984.

[9] О.В. Капустян, М.О. Перестюк Глобальні атрактори імпульсних нескінченновимірних систем, Укр. мат. журн., 68, №4, 517-528 (2016); English translation: Ukr. Math. J., 68, №4, 517-528 (2016)

[10] S. Dashkovskiy, O.A. Kapustian, O.V. Kapustyan, N.V. Gorban. Attractors for Multi-valued Impulsive Systems: Existence and Applications to Reaction-Diffusion System. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 7385450

[11] S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, J. Schmid A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations. Mathematics of Control, Signals and Systems 80г-є б , 2020, 32, 309–326.

[12] O. Kapustyan, S. Dashkovskiy, J. Schmid. Asymptotic gain results for global attractors of semilinear systems. Mathematical Control and Related Fields, 2022, 12(3), 763–788

[13] O. Kapustyan, S. Dashkovskiy. Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equation. Evolution Equations and Control Theory, 2022, 11(5), 1565-1577

[14] Капустян О.В., Краснєєва А.О. Стійкість глобального атрактора рівняння реакції-дифузії щодо збурень на границі області // Нелінійні коливання, 2024, Т. 27, № 2, с. 229-237.

[15] Vishik M.I., Chepyzhov V.V. Averaging trajectory attractors of evolutionary equations with rapidly oscillating terms // Sb. Math. 2001. Vol. 192, no 11. P. 13–50.

[16] L.C. Evans. Partial differential eqations. AMS, 1997.

Надійшло 21.03.2025

Kapustyan O.V., Krasnieieva A.O. *Robust stability of the global attractor of a nonlinear parabolic equation with respect to external disturbances.*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 25–33.

In the paper we prove a robust estimate of the Asymptotic Gain type, which characterizes the deviation of solutions of a nonlinear parabolic problem with perturbations on the boundary of the spatial domain from the global attractor of the unperturbed system in terms of the magnitude of the perturbations.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.03

Пастула М.О.

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ ІЗ ЗАЛЕЖНІСТЮ ЧАСТОТ ВІД ПОВІЛЬНИХ ЗМІННИХ

У роботі розглядається багаточастотна система із багатоточковими умовами на відрізку [0,L]. У системі рівнянь усереднення здійснено за швидкими змінними. За умови наявності явища резонансу застосовано метод оцінки осциляційних інтегралів і доведено існування та єдиність розв'язку точної задачі. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежна від малого параметра. Побудовано приклад двочастотної системи з крайовими умовами, на якому проілюстровано отриманий результат.

Ключові слова і фрази: метод усереднення, багаточастотна система, осциляційний інтеграл, резонанс.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна (Пастула М.О.)
e-mail: *pastula.mykhailo@chnu.edu.ua (Пастула М.О.)*

Вступ

Багаточастотні системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X_0(\tau, a) + \varepsilon X_1(\tau, a, \varphi), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y_1(\tau, a, \varphi), \tag{2}$$

де вектор–функції X_0, X_1, Y_1 і ω визначені при $\tau \in [0, L]$ і належать певним класам гладких і 2π-періодичних по φ функцій, $a \in D$ - обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$, досліджувалися у монографії А.М. Самойленка і Р.І. Петришина [1] та в багатьох інших працях.

Проблема обґрунтування методу усереднення для двочастотних систем досліджувалася в працях А.М. Самойленка, Р.І. Петришина [1] та інших вчених. Результати для багаточастотних систем із запізненням та додатковими умовами отримано в працях Я.Й. Бігуна, І.Д. Скутара, І.В. Краснокутської [2, 3, 4] та інших. Зокрема, у них обґрунтувано метод усереднення для багаточастотних систем із початковими, багатоточковими та інтегральними умовами.

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39A12.

© Пастула М.О., 2025

Складністю дослідження багаточастотних систем є притаманні для них явища резонансу, які полягають у раціональній чи майже раціональній співвимірності частот [1], умова яких

$$(k,\omega) := k_1\omega_1 + ... + k_m\omega_m \ \simeq 0, k \neq 0.$$

У даній статті метод усереднення застосований для дослідження існування розв'язку на відрізку [0, L] багаточастотних систем вигляду (1),(2) із багатоточковими умовами для повільних і швидких змінних. При накладених умовах отримано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра.

1 Формулювання задачі

Задамо для системи рівнянь (1),(2) багатоточкові умови

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i a\big|_{\tau=\tau_i} = d_1, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{q} \beta_i \varphi\big|_{\tau=\tau_i} = d_2, \tag{4}$$

де α_i, β_i - задані числа, $0 \le \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_q \le L$, $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{q} \beta_i \neq 0$, $d_1 \in \mathbb{R}^n, d_2 \in \mathbb{R}^m$, $q > 0$.

Відповідна (1), (2) усереднена система рівнянь за швидкими змінними $\varphi_1, ..., \varphi_m$ набуває значно простішого вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau,\overline{a}) + \varepsilon X_{10}(\tau,\overline{a}), \tag{5}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau,\overline{a})}{\varepsilon} + Y_{10}(\tau,\overline{a}), \tag{6}$$

розв'язок якої задовільняє багатоточкові умови

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i \overline{a}\big|_{\tau=\tau_i} = d_1, \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{q} \beta_i \overline{\varphi}\big|_{\tau=\tau_i} = d_2, \tag{8}$$

Тепер можна окремо розв'язувати задачу (5),(7) для знаходження розв'язку $\overline{a} = \overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)$, $\overline{a}(0,\overline{y},\varepsilon) = \overline{y}$, після чого розв'язати задачу (6),(8) для знаходження розв'язку $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon), \overline{\varphi}(0,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon) = \overline{\psi}$.

У праці [1] введено матрицю розмірності $p \times m$ вигляду

$$W_p(\tau,a) = (\frac{d^{j-1}}{d\tau^{j-1}}\omega_v(\tau,a))_{j,v=1}^{p,m}, p \ge m. \tag{9}$$

Якщо $p = m$, то $det\ W_m(\tau,a)$ - визначник Вронського. Похідні в елементах матриці $W_p(\tau,a)$ обчислюються згідно з рівнянням першого наближення

$$\frac{da}{d\tau} = X_0(\tau,a). \tag{10}$$

2 Технічна лема

Лема 1. *Нехай виконуються умови*

1) функції $\omega(\tau,a)$ *і* $X_0(\tau,a)$ *мають неперервні частинні похідні по* τ *до порядку* p, $p\geq m$.

2) Для матриці $(W_p^T(\tau,a)W_p(\tau,a))$ *при всіх значеннях* $(\tau,a)\in[0,L]\times D_\rho$ *існує оберненена матриця і* $||(W_p^T(\tau,a)W_p(\tau,a))^{-1}W_p^T(\tau,a)||$ *рівномірно обмежена сталою* σ_1. *Тут* D_ρ *- замикання множини точок, які належать* D *разом із своїм* ρ*-околом,* $W_p^T(\tau,a)$ *- транспонована матриця.*

3) вектор-функція $f(\tau)=(f_1(\tau),...,f_n(\tau))\in C^1_{[0,L]}$.

Тоді для осциляційного інтеграла

$$I_k(\tau,\varepsilon)=\int_0^\tau f(s)exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s(k,\omega(z,a(z)))dz\}ds, \tag{11}$$

можна вказати такі сталі $\overline{\varepsilon}_1>0$ *і* $\sigma_2>0$, *не залежні від* k,τ,ε, *що для всіх* $k\in Z^m, k\neq 0, \tau\in[0,L]$ *і* $\varepsilon\in(0,\overline{\varepsilon_1}]$ *правильна оцінка*

$$||I_k(\tau,\varepsilon)||\leq\sigma_2\varepsilon^{\frac{1}{p}}[\max_{[0,L]}||f(y)||+\frac{1}{||k||}\max_{[0,L]}||\frac{df(y)}{dy}||]. \tag{12}$$

Доведення. Для довільного ненульового вектора $k=(k_1,...,k_m)$ з цілочисельними координатами розглянемо рівність $W_p(\tau,a)k=\Omega$, в якій

$$\Omega=(\Omega_0,...,\Omega_{p-1}),\Omega_j=(k,\omega_v^{(j)}(\tau,a)),j=\overline{0,p-1}.$$

За умови $a\in D_{\rho/2}$ одержимо нерівність

$$||\Omega||\geq||k||\ ||(W_p^T(\tau,a)W_p(\tau,a))^{-1}W_p^T(\tau,a)||^{-1}\geq\frac{||k||}{\sigma_1},$$

з якої випливає, що для кожного $\overline{y}\in R$ і $k\neq 0$ існує таке ціле число $r=r(\overline{y},k), 0\leq r\leq p-1$, для якого

$$|(k,\omega^{(r)}(\overline{y},a))|=\max_{0\leq j\leq p-1}|(k,\omega^{(j)}(\overline{y},a))|\geq\frac{||k||}{p\sigma_1}. \tag{13}$$

Оскільки функції $\omega_v^{(j)}(\tau,a), v=\overline{1,m}, j=\overline{0,p-1}$, рівномірно неперервні на $[0,L]\times D_{\rho/2}$, тоді можна вибрати таку сталу $\delta>0$, не залежну від $\overline{y},k,j$ і a, що для всіх $y\in[\overline{y}-\delta,\overline{y}+\delta]$, $j=\overline{0,p-1}$ і $a\in D_{\rho/2}$ виконуються нерівності

$$|(k,\omega^{(r)}(y,a))|\geq\frac{k}{2p\sigma_1},|(k,\omega^{(j)}(y,a))|\leq 4|(k,\omega^{(r)}(y,a))|. \tag{14}$$

Крім того, для кожних $v=\overline{1,m}$ і $j=\overline{0,p-1}$ існує таке $\delta_v^{(j)}>0$, що для довільних $y',y''\in[0,L]$, які задовольняють нерівність $|y'-y''|<\delta_v^{(j)}$, правильна оцінка

$$|\omega_v^{(j)}(y',a)-\omega_v^{(j)}(y'',a)|<\overline{\sigma}_1\equiv\frac{1}{2p\sigma_1}. \tag{15}$$

Позначимо $\delta=\min\limits_{v,j}\delta_v^{(j)}$. Тоді оцінка (15) має місце при $||y'-y''||<\delta$, $0\leq j\leq p-1, 1\leq v\leq m$, а співвідношення

$$|(k,\omega^{(j)}(y,a)-\omega^{(j)}(\overline{y},a))|\leq\sum_{v=1}^m|k_v||\omega^{(j)}(y,a)-\omega^{(j)}(\overline{y},a)|<\overline{\sigma}_1||k||,$$

які правильні при $|y' - y''| < \delta_v$, $a \in D_{\rho/2}$ і $j = \overline{0, p-1}$, ведуть до нерівностей (14).

Позначимо через s цілу частину числа $\frac{\tau}{2\delta}$, $s \le \frac{L}{2\delta}$, і подамо інтеграл (11) у вигляді суми

$$I_k(t, \bar{t}, \tau, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{s-1} \int_{t+2\delta n}^{t+2\delta(n+1)} F dy + \int_{t+2\delta s}^{t+2\tau} F dy, \tag{16}$$

де $F = f(y) \exp\{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{t}}^{y} (k, \omega(z, a) dz)\}$. Для оцінки інтеграла

$$P_n = \int_{t+2\delta n}^{t+2\delta(n+1)} F dy \tag{17}$$

скористаємось методикою, запропонованою в [1] і нерівностями (14) за умови $a \in D_{\rho/2}$. У підсумку, при $r(t + 2\delta n + \delta, k) \ge 1$ і $0 < \mu < \min\{1, \delta\}$ матимемо

$$||P_n|| = [(2^p - 2)\mu + \frac{2^{p+1}}{\overline{\sigma}_1 ||k||} \varepsilon \mu^{1-p}] \max_{[t,t+L]} ||f(y)|| + \frac{2\sigma}{\overline{\sigma}_1 ||k||} \varepsilon \mu^{1-p} \max_{[t,t+L]} ||f^{(1)}(y)||. \tag{18}$$

Якщо ж $r(t + 2\delta n + \delta, k) = 0$, то, інтегруючи частинами, отримаємо

$$||P_n|| = \frac{2}{\overline{\sigma}_1 ||k||} (1 + 4\delta) \varepsilon \max_{t,t+L} ||f(y)|| + \frac{2\delta}{\overline{\sigma}_1 ||k||} \varepsilon \max_{t,t+L} ||f^{(1)}(y)||. \tag{19}$$

З аналізу (17) і (18) випливає, що при $\mu^{p-1} \le 2^p(1 + 4\delta^{-1})$ інтеграл (17) задовольняє нерівність (19) для всіх $r(t + 2\delta n + \delta, k) \ge 0$. Таку ж нерівність задовольняє останній з інтегралів у правій частині (16), тому при

$$\varepsilon = \mu^p, 0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}_1 = min\{\varepsilon_0; (\frac{1}{2}\delta)^p; (\frac{2^p}{1 + 4\delta})^{\frac{p}{p-1}}\}$$

з (17) дістанемо нерівність (12) із сталою

$$\sigma_2 = (2^p - 2 + \frac{2^{p+1}}{\overline{\sigma}_1} + \frac{2\delta}{\overline{\sigma}_1})(1 + \frac{L}{2\delta}).$$

Лему доведено. □

3 Обґрунтування методу усереднення

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

1) вектор–функції X_0, X_1, Y_1, ω визначені і неперервні разом із частинними похідними до порядку $p + 1$ в області $[0, L] \times D \times \mathbb{R}^m$, $p \ge m$, обмежені сталою $\sigma > 0$;

2) існує розв'язок $\overline{a}(\tau, y, \varepsilon)$ усередненої задачі (5), (7), який лежить в D разом із ρ-околом для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

3) для всіх $(a, \tau) \in D_\rho \times [0, L]$ і деякого p, $m \le p$, виконується нерівність

$$det((W_p^T(\tau, a) W_p(\tau, a)) \ne 0;$$

4) для $y \in D_{\rho/2}$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ матриця

$$Q_1(\overline{y}, \varepsilon) = \alpha_0 I + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \frac{\partial \overline{a}(\tau_i, \overline{y}, \varepsilon)}{\partial \overline{y}},$$

невироджена і

$$||Q_1^{-1}(\overline{y},\varepsilon)|| \le M_1.$$

Тоді можна вказати таке $\varepsilon^* \le \varepsilon_0$, *що для всіх* $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*]$ *існує єдиний розв'язок* $(a(\tau,y,\psi,\varepsilon),\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon))$ *задачі* (1)-(4), *який лежить в* $\rho/2$ *околі розв'язку усередненої задачі* (5)-(8) *і цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$\|a(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)\|+\varepsilon\|\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{\alpha}, \tag{20}$$

де стала $c>0$ *і не залежить від* ε, $\alpha = 1+\frac{1}{p}$, $\overline{a}(0,\overline{y},\varepsilon)=\overline{y}, y=\overline{y}+\mu, \varphi(0,\overline{\psi},\varepsilon)=\overline{\psi}, \psi=\overline{\psi}+\xi$.

Доведення. Нехай $\overline{a}=\overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)$ - розв'язок задачі (5),(7). Із рівняння (5) на підставі нерівності Беллмана одержимо

$$||\overline{a}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)|| \le c_1||\mu|| \le \frac{\rho}{2},$$

якщо $||\mu|| \le \frac{\rho}{2c_1}$. Стала $c_1=\exp(\overline{c}_1 L)\ge 0$ і визначається оцінками частинних похідних вектор-функцій X_0 і X_{10}.

Із (3),(7) отримаємо

$$\alpha_0(a(0,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{a}(0,\overline{y},\varepsilon))+\sum_{i=1}^{q}(\alpha_i(a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)))=0. \tag{21}$$

Маємо

$$a(0,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{a}(0,\overline{y},\varepsilon)=\overline{y}+\mu-\overline{y}=\mu.$$

Далі

$$a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)=(a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu))+$$
$$(\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon))=(a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu))+$$
$$(\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)+\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}}\mu)-\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}}\mu.$$

Тут $\tilde{a}(\tau,y)$ - розв'язок рівняння (10), який задовольняє умову $\tilde{a}(0,y)=y$. Тоді, рівність (21) набуває вигляду

$$(\alpha_0+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}})\mu=-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)$$
$$+\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)-\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}}\mu).$$

Із умови 5 теореми одержимо

$$\mu=\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon),$$

де

$$\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i Q_1^{-1}(\overline{y},\varepsilon)(R_{1,i}+R_{2,i}),$$

$$R_{1,i}=\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)-\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial y}\mu,$$

$$R_{2,i}=a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu).$$

Для оцінки $R_{1,i}$ скористаємось нерівністю

$$||h(b) - h(a) - \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial h(a)}{\partial x_v}(b_v - a_v)|| \le c_2||b-a||^2,\ c_2 \text{ - стала,}$$

якщо для $x \in D \subset R^n, h(x) \in C^2(D)$. Тоді

$$||R_{1,i}(\overline{y},\varepsilon)|| = ||\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu) - \overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon) - \mu\frac{\partial \overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial y}|| \le c_3||\mu||^2,$$

де c_3 - додатна стала.

Застосувавши оцінку відхилення розв'язків $a(\tau,y,\varepsilon) - \tilde{a}(\tau,y)$ із монографії [1] та умову 1 теореми, що дозволяє використати оцінку осциляційних інтегралів, у підсумку одержимо

$$||R_{2,i}|| \le c_4\varepsilon^{\alpha}, \alpha = 1 + \frac{1}{p},$$

де c_4 - стала.

Тоді

$$||\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)|| \le \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i|\ ||Q_1^{-1}(\overline{y},\varepsilon)||(||R_{1,i}|| + ||R_{2,i}||) \le \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| M_1(c_3||\mu||^2 + c_4\varepsilon^{\alpha}).$$

Виберемо $\mu \in R^n$ так, що

$$||\mu|| \le c_5\varepsilon^{\alpha},$$

де стала $c_5 = 2\sum_{i=1}^{q}|\alpha_i|c_4M_1$, а параметр $\varepsilon \le \varepsilon_1 = min(\varepsilon_0, (\frac{c_4}{2c_3})^{-1/\alpha})$. Тоді $\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)$ відображає кулю радіуса $c_5\varepsilon^{\alpha}$ в себе для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ і $\xi \in R^m$.

Покажемо, що відображення Φ_1 є стискаюче, якщо $||\mu|| \le c_5\varepsilon^{\alpha}$ і ε - досить мале. Побудуємо для цього оцінку норми

$$\frac{\partial \Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \mu} = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_i {Q_1}^{-1}(\overline{y},\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial \mu}R_{1,i}(\mu,\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \mu}R_{2,i}(\mu,\xi,\varepsilon))$$

Оскільки $||R_{1,i}(\mu)|| = O(||\mu||^2)$, то

$$||\frac{\partial R_{1,i}(\mu,\varepsilon)}{\partial \mu}|| \le c_6||\mu||$$

для $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2], \varepsilon_2 = (2c_5c_6)^{-1/\alpha}$. Тут c_6 - стала.

Відповідна оцінка для $\frac{\partial R_{2,i}}{\partial \mu}$ випливає з оцінки відхилення розв'язків рівнянь (1) і (5) з однаковими початковими умовами [1]:

$$||\frac{\partial R_{2,i}(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \mu}|| \le c_7\varepsilon^{\alpha},$$

коли $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3], \varepsilon_3 = min(\varepsilon_1,\varepsilon_2), \xi \in R^m$. Тут c_7 - додатна стала.

У підсумку маємо

$$||\frac{\partial \Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \mu}|| \le \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| M_1(c_6||\mu|| + c_7\varepsilon^{\alpha}) \le \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| M_1(c_5c_6 + c_7)\varepsilon^{\alpha} = c_8\varepsilon^{\alpha} \le \frac{1}{2},$$

якшо $\varepsilon \le \varepsilon^* = min(\varepsilon_3, (2c_8)^{-1/\alpha})$.

Отже, відображення Φ_1 - стискаюче і в кулі $||\mu|| \le c_5\varepsilon^{\alpha}$ існує єдина нерухома точка μ^*, звідки випливає існування єдиного розв'язку крайової задачі (1) - (4).

Із рівняння (6) на підставі нерівності Беллмана одержимо

$$||\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)||\le c_8||\xi||\le\frac{\rho}{2},$$

якщо $||\xi||\le\frac{\rho}{2c_8}$. Стала $c_8=\exp(\overline{c}_2L)\ge 0$ і визначається оцінками частинних похідних вектор-функцій Y_1 і Y_{10}.

Із (4),(8) отримаємо

$$\beta_0(\varphi(0,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(0,\overline{\psi},\varepsilon))+\sum_{i=1}^{q}(\beta_i(\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{\psi},\varepsilon)))=0. \qquad (22)$$

Маємо

$$\varphi(0,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(0,\overline{\psi},\varepsilon)=\overline{\psi}+\xi-\overline{\psi}=\xi.$$

Крім того,

$$\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)=(\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon))$$

$$+(\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon))=(\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon))$$

$$+(\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)+\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\overline{\psi}}\xi)-\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\overline{\psi}}\xi.$$

Тут $\tilde{\psi}$ - розв'язок $\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau,\overline{a})}{\varepsilon}$, для якого виконується умова $\tilde{\psi}(0,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)=\overline{\psi}+\xi$. Тоді, рівність (22) набуває вигляду

$$(\beta_0+\sum_{i=1}^{q}\beta_i\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\overline{\xi}})\xi=-\sum_{i=1}^{q}\beta_i(\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)$$

$$+\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\overline{\psi}}\xi).$$

Із умови 5 теореми одержимо

$$\xi=\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon),$$

де вектор-фунція

$$\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{q}\beta_iQ_2^{-1}(\overline{\psi},\varepsilon)(R_{3,i}+R_{4,i}),$$

$$R_{3,i}=\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\psi}\xi,$$

$$R_{4,i}=\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon).$$

Для оцінки $R_{3,i}$ скористаємось аналогічними міркуваннями знаходження оцінки $R_{1,i}$. Тоді

$$||R_{3,i}(\mu,\xi,\varepsilon)||=||\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\xi\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\psi}||\le c_9||\xi||,$$

де стала $c_9>0$ і залежить від оцінки других похідних вектор-функції Y_1.

Аналогічно міркуванням відносно $R_{2,i}$ для $R_{4,i}$ одержимо

$$||R_{4,i}||\le c_{10}\varepsilon^{\alpha},$$

де c_{10} - стала.

Тоді

$$||\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)|| \le \sum_{i=1}^{q} |\beta_i|\ ||Q_2^{-1}(\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)||(||R_{3,i}|| + ||R_{4,i}||) \le \sum_{i=1}^{q} |\beta_i| M_2(c_9||\xi|| + c_{10}\varepsilon^{\alpha}).$$

Виберемо $\xi \in R^n$ так, що

$$||\xi|| \le c_{11}\varepsilon^{\alpha},$$

де стала $c_{11} = 2\sum_{i=1}^{q} |\beta_i| c_{10} M_2$, а параметр $\varepsilon \le \varepsilon_4 = min(\varepsilon_3, (\frac{c_{10}}{2c_9})^{-1/\alpha})$. Тоді $\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)$ відображає кулю радіуса $c_{11}\varepsilon^{\alpha}$ в себе для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_4]$ і $\xi \in R^m$.

Покажемо, що відображення Φ_2 є стискаюче, якщо $||\xi|| \le c_{11}\varepsilon^{\alpha}, \varepsilon \in (0,\varepsilon^*]$. Побудуємо для цього оцінку норми

$$\frac{\partial \Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \xi} = -\sum_{i=1}^{q} \beta_i Q_2^{-1}(\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial \xi} R_{3,i}(\mu,\xi,\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \xi} R_{4,i}(\mu,\xi,\varepsilon))$$

Оскільки $||R_{3,i}(\xi)|| = O(||\xi||)$, то

$$||\frac{\partial R_{3,i}(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \xi}|| \le c_{12}$$

для $\varepsilon \in (0,\varepsilon_5], \varepsilon_5 = (2c_{11}c_{12})^{-1/\alpha}$. Тут c_{12} - стала.

Відповідна оцінка для $\frac{\partial R_{4,i}}{\partial \xi}$ випливає з оцінки відхилення розв'язків рівнянь (2) і (6) з однаковими початковими умовами [1]:

$$||\frac{\partial R_{4,i}(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \xi}|| \le c_{13}\varepsilon^{\alpha},$$

коли $\varepsilon \in (0,\varepsilon_6], \varepsilon_6 = min(\varepsilon_5,\varepsilon_4), \xi \in R^m$. Тут c_{13} - додатна стала.

У підсумку маємо

$$||\frac{\partial \Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \xi}|| \le \sum_{i=1}^{q} |\beta_i| M_2(c_{12} + c_{13}\varepsilon^{\alpha}) \le \sum_{i=1}^{q} |\beta_i| M_2(c_{11}c_{12} + c_{13})\varepsilon^{\alpha-1} = c_{14}\varepsilon^{\alpha-1} \le \frac{1}{2},$$

якшо $\varepsilon \le \varepsilon^* = min(\varepsilon_6, (2c_{14})^{-1/\alpha-1})$.

Отже, відображення Φ_2 - стискаюче і в кулі $||\xi|| \le c_{10}\varepsilon^{\alpha}$ існує єдина нерухома точка ξ^*, звідки випливає існування єдиного розв'язку крайової задачі (2) - (5).

Оцінка (20) випливає з нерівностей

$$||a(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)|| \le ||a(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,y,\varepsilon)|| + ||\overline{a}(\tau,y,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)|| \le$$

$$c_7\varepsilon^{\alpha} + c_1||\mu|| \le (c_7 + c_1c_5)\varepsilon^{\alpha} = \tilde{c}_1\varepsilon^{\alpha},$$

$$||\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)|| \le ||\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\psi,\varepsilon)|| + ||\overline{\varphi}(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)|| \le$$

$$c_8\varepsilon^{\alpha} + c_8||\mu|| \le (c_{14} + c_8c_{10})\varepsilon^{\alpha-1} = \tilde{c}_2\varepsilon^{\alpha-1},$$

$$||a(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)|| + \varepsilon||\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)|| \le \tilde{c}_1\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon\cdot\tilde{c}_2\cdot\varepsilon^{\alpha-1} \le c\varepsilon^{\alpha}$$

для всіх $\tau \in [0,L]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*]$.

□

4 Ілюстративний приклад

Приклад 1. *Розглянемо двочастотну систему рівнянь*

$$\frac{da}{d\tau} = -3 + \varepsilon\cos(2\varphi_1 - \varphi_2), \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{a + 3\tau + 2}{\varepsilon}, \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \frac{2a + 4}{\varepsilon},\ 0 \le \tau \le 1. \tag{23}$$

Для системи (23) *задані крайові умови*

$$5a(0) + a(1) = -3, \varphi_1(0) + \varphi_1(1) = 2, \varphi_2(0) - 3\varphi_2(1) = -1. \tag{24}$$

Відповідна усереднена система набуває вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = -3, \frac{d\overline{\varphi}_1}{d\tau} = \frac{\overline{a} + 3\tau + 2}{\varepsilon}, \frac{d\overline{\varphi}_2}{d\tau} = \frac{2\overline{a} + 4}{\varepsilon}, \tag{25}$$

$$5\overline{a}(0) + \overline{a}(1) = -3, \overline{\varphi}_1(0) + \overline{\varphi}_1(1) = 2, \overline{\varphi}_2(0) - 3\overline{\varphi}_2(1) = -1. \tag{26}$$

Розв'язок усередненої задачі, який задовольняє крайові умови (26) *набуває вигляду*

$$\overline{a}(\tau) = -3\tau, \overline{\varphi}_1(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(2\tau + \varepsilon - 1), \overline{\varphi}_2(\tau, \varepsilon) = \frac{\tau(4 - 3\tau)}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon - 3}{2\varepsilon}.$$

Умова резонансу частот виконується:

$$2\omega_1 - \omega_2 = 2\tau = 0$$

при $\tau = 0$.

Визначник Вронського вздовж розв'язку рівняння першого наближення

$$W(\tau, a) = \begin{bmatrix} a + 3\tau + 2 & 2a + 4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = -6(a + 3\tau + 2).$$

Якщо $\rho \le 1/\sqrt{10}$, *то в* ρ*-околі розв'язку* $a(\tau) = -3\tau$ *маємо* $|W(\tau, a)| \ge 6$, *тобто умова 4 виконується.*

Розглянемо відхилення повільних зміних для $\tau \in [0, 1]$. *Маємо*

$$u(\tau, \varepsilon) = a(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y}) = \mu + \varepsilon\int_0^\tau \cos(\frac{3s^2}{\varepsilon} + 2\varphi_1 - \varphi_2)ds =$$

$$\mu + \varepsilon(\int_0^\tau \cos(\frac{3s^2}{\varepsilon})ds)\cos(2\psi_1 - \psi_2) + \varepsilon(\int_0^\tau \sin(\frac{3s^2}{\varepsilon})ds)\sin(2\psi_1 - \psi_2)$$

Оцінимо інтеграли, застосувавши оцінки інтегралів Френеля [5]. Для цього використаємо заміну $t^2 = 3s^2/\varepsilon$. *Одержемо*

$$|u(\tau, \varepsilon)| \le |\mu| + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\int_0^{t_1} \cos(t^2)dt + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\int_0^{t_1} \sin(t^2)dt,$$

де $t_1 = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{\varepsilon}}$. *Якщо* $\tau = 1$ *і* $|\mu| \le c\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$, *то*

$$|u(1, \varepsilon)| \le (c + \frac{\pi}{2\sqrt{6}})\varepsilon\sqrt{\varepsilon} = c_9\varepsilon^{3/2},$$

що узгоджується з висновком теореми.

Отже, для заданої двочастотної системи рівнянь відхилення розв'язків точної і усередненої системи рівнянь має порядок $\varepsilon^\alpha, \alpha = 1/p$ на відрізку $[0, 1]$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon^*$. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні складних коливальних систем у випадку резонансу, а також у мережах зв'язаних фазових осциляторів.

Список літератури

[1] Samoilenko A.M., Petryshyn R.I. Mathematical aspects of the theory of nonlinear oscillations. - K.: Scientific opinion, 2004. – 474 p.

[2] Bihun Ya.Y. Existence of solution and averaging of multipoint boundary problems for multifrequency systems with a linearly transformed argument. Nonlinear Oscillations 2008, 11(4), 462-471

[3] Bihun Ya.Y., Skutar I.D. Averaging in multi-frequency systems with delay and locally integral conditions. Bukovinsk Mathematical Journal. 2020. Vol. 8, № 2. P. 14–23.

[4] Bihun Ya.Y., Petryshyn R.I., Krasnokutska I.V. Averaging in multi-frequency systems with linearly transformed arguments and multi-point and integral conditions. Bukovinsky Mathematical Journal. 2016. T.4, No 3. C. 30-35.

[5] Harry Bateman; Arthur Erdelyi; Higher transcendental functions. New York : McGraw-Hill, 1953. Vol. II. 316 p.

Надійшло 26.01.2025

Pastula M.O. *Averaging in multifrequency systems of the first approximation with frequency dependence on slow variables*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 34–44.

The study focuses on analyzing a multi-frequency system

$$\frac{da}{d\tau} = X_0(\tau, a) + \varepsilon X_1(\tau, a, \varphi),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y_1(\tau, a, \varphi),$$

subjected to multi-point conditions within the subinterval [0, L].

The complexity of the study of multi-frequency systems is the resonance phenomena inhe rent in them, which consist in the rational or almost rational commensurability of frequencies. As a result, the solution of the system of equations averaged over fast variables in the general case may deviate from the solution of the exact problem by the amount O(1).

An asymptotic solution of a system of linear differential equations with a small parameter at some derivatives and coefficients dependent on this parameter is constructed by reducing this system to a simpler form by averaging over fast variables φ. The question of existence and construction of the global solution of systems of differential equations with a deviating argument and a small parameter are investigated. Employing the method of oscillatory integrals estimation, it was demonstrated that solutions for both the averaged and exact problems exhibit unity within small neighborhoods. An unenhanced approximation of the averaging error, the order of which i distinctly reliant on a minor parameter, has been

derived. The obtained outcome is further elucidated through the presentation of a model example.

The acquired findings and methodologies have the potential to further the understanding of multifrequency systems with delayed arguments, aiding in the formulation of theories. Additionally, they can contribute to the creation of asymptotic and comprehensive solutions for singularly perturbed sets of differential equations. These outcomes hold significance in advancing mathematical models for oscillatory processes under conditions of frequency resonance, potentially impacting various domains.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.04

Sheremeta M.M.[1], Dobushovskyy M.S.[2]

EQUIVALENCE OF THREE TOPOLOGIES IN THE SPACES OF LAPLACE-STIELTJES INTEGRALS

For a non-negative nondecreasing unbounded continuous on the right function F and a real-valued function f on $(1,+\infty)$ the integral $I(\sigma)=\int_1^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ is called the Laplace-Stieltjes integral. For some class of such integrals three various topologies are introduced and their equivalence is proven.

Key words and phrases: Laplace-Stieltjes integral, space of functions.

[1]Lviv Ivan Franko National University, Lviv, Ukraine (Sheremeta M. M.)
[2]Subbotin Institute of Geophysics National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine (Dobushovskyy M. S.)
e-mail: *m.m.sheremeta@gmail.com (Sheremeta M. M.), mdobush19@gmail.com (Dobushovskyy M. S.)*

Introduction

Let V be a class of a non-negative nondecreasing unbounded continuous on the right functions F on $(1,+\infty)$. We assume that a real-valued function f on $(1,+\infty)$ is such that the Lebesque-Stieltjes integral $\int_1^A |f(x)|e^{x\sigma}dF(x)$ exists for every $\sigma\in\mathbb{R}$ and $A\in(1,+\infty)$, and the integral

$$I(\sigma)=\int\limits_1^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x),\quad \sigma\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

is called of Laplace-Stieltjes [1]. We also remark that the Dirichlet series $I(\sigma)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n\sigma}$, $1<\lambda_n\uparrow\infty$, can be rewritten in the form (1) with $f(x)=a_n$ for $x=\lambda_n$ and $f(x)=0$ for $x\neq\lambda_n$ and $F(x)=n(x)$, where $n(x)$ is a counting function of (λ_n).

Let

$$M(\sigma)=M(\sigma,I)=\int\limits_1^{\infty} |f(x)|e^{x\sigma}dF(x),\quad \sigma\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

It is clear, that if $f(x)\geq 0$ for all $x\geq 0$ then $M(\sigma,I)=I(\sigma)$, and asymptotic properties of integrals of such kind are studied in a monograph [1]. As in [1, p.21] we say that a function $|f|$ has regular

УДК 517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A42, 30B50.

© Sheremeta M.M.[1], Dobushovskyy M.S.[2], 2025

variation in regard to $F \in V$ if there exist $a \in [0,1)$, $b \in [0,1)$ and $h \in (0,+\infty) > 0$ such that for all $x > a$

$$\int\limits_{x-a}^{x+b} |f(t)|dF(t) \geq h|f(x)|. \tag{3}$$

By σ_M we denote an abscissa of the convergence of integral (2), i. e. integral (2) converges for $\sigma < \sigma_M$ and diverges for $\sigma > \sigma_M$. If integral (2) converges for all $\sigma \in \mathbb{R}$ then we put $\sigma_M = +\infty$. It is known [1, p. 21] that if $\ln F(x) = o(x)$ as $x \to +\infty$ and $|f|$ has regular variation in regard to $F \in V$ then $\sigma_M = +\infty$ if and only if

$$\frac{1}{x} \ln \frac{1}{|f(x)|} \to +\infty, \quad x \to +\infty, \tag{4}$$

i. e. $|f(x)| \leq e^{-Kx}$ for every $K > 0$ and all $x \geq x_0(K)$. Therefore, in [2] and [3] for a positive continuous on $[0,+\infty)$ function h increases to $+\infty$. By LS_h we denote a class of integrals I such that $|f(x)| \exp\{xh(x)\} \to 0$ as $x \to +\infty$ and define $||I||_h = \sup\{|f(x)| \exp\{xh(x)\} : x \geq 0\}$. For example, it is proven [3] that if $F \in V$ and $\ln F(x) = o(x)$ as $x \to +\infty$ then $(LS_h, ||\cdot||_h)$ is a non-uniformly convex Banach space.

In this article we will consider slightly different spaces of integrals (1).

1 Various topologies on $LS(U(F))$

For a fixed function $F \in V$ by $U(F)$ we denote a class of real function on $[1, +\infty)$ such that for every $f_1 \in U(F)$ and $f_2 \in U(F)$ the functions $|f_1|$, $|f_2|$ and $|f_1 - f_2|$ have the regular variation in regard to F, and by $LS(U(F))$ we denote a set of integrals (1) with $f \in U(F)$ and $\sigma_M = +\infty$.

At first we assume that (r_k) is a non-decreasing sequence of positive numbers, $r_k \to +\infty$ with k. If for each $I \in LS(U(F))$

$$||I||_{r_k} = \int\limits_1^{\infty} |f(x)| e^{xr_k} dF(x) \tag{5}$$

then $||I||_{r_k}$ exists for each k and it is easily seen that this is a norm on $LS(U(F))$. It is clear that $||I||_{r_k} \leq ||I||_{r_{k+1}}$ for all $k \geq 1$. With these countable norms $||I||_{r_k}$ $(k \geq 1)$ we define (see [4, p.37]) a metric topology on $I \in LS(U(F))$ with metric d:

$$d(I_1, I_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{||I_1 - I_2||_{r_k}}{1 + ||I_1 - I_2||_{r_k}}, \quad I_1, I_2 \in LS(F(U)). \tag{6}$$

Since $||I||_{r_k} \leq ||I||_{r_{k+1}}$ for all $k \geq 1$, it is clear that the metric topology defined by d is the sup topology which is locally convex (see [4, p. 33-37]).

We remark that there exist integrals (1) such that $M(\sigma, I) \equiv 0$ and $f(x) \not\equiv 0$. Indeed, these is for example if for all $n \in \mathbb{N}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 1 \leq x < 2, \\ n, & 2n \leq x < 2(n+1) \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \alpha_n > 0, & x = 2n-1, \\ 0, & x \neq 2n-1 \end{cases}.$$

However the integral $M(\sigma, I) \in LS(U(F))$ is the additive zero of $LS(U(F))$ if and only if $|f(x)| = 0$ for each $x > 1$. Indeed, from the regular variation in regard to F we have for $\sigma = 0$ and each $x > 1$

(see (3))

$$0 = M(\sigma, I) = \int_1^{\infty} |f(x)| dF(x) \geq \int_{x-a}^{x+b} |f(t)| dF(t) \geq h|f(x)|,$$

i. e. $f(x) = 0$ for each $x > 1$.

Now for each $I \in LS(U(F))$ let

$$p(I) = \sup_{x>1} |f(x)|^{1/x} \tag{7}$$

and

$$||I||_{q_j} = \sup_{1 \leq x \leq q_j} |f(x)|^{1/x}, \tag{8}$$

where (q_j) is a non-decreasing sequence of positive numbers, $1 < q_j \to +\infty$ with j. As (7) is defined by the condition (4). Then the functions $p(f)$ and $||I||_{q_j}$ are paranorms on $LS(U(F))$ (see [5, p.85]).

We define metric topologies on $LS(U(F))$ with the metrics

$$p(I_1, I_2) = \sup_{x>1} |f_1(x) - f_2(x)|^{1/x}, \quad I_1, I_2 \in LS(U(F)),$$

and

$$s(I_1, I_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{||I_1 - I_2||_{q_j}}{1 + ||I_1 - I_2||_{q_j}}, \quad I_1, I_2 \in LS(U(F)).$$

Since $||I||_{q_j} \leq ||I||_{q_{j+1}}$, the topology s is the sup topology which is locally convex.

Theorem 1. *If*

$$\int_1^{\infty} e^{-tx} dF(x) \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{9}$$

then the three topologies represented by d, p and s are equivalent.

Proof. First we show that the topologies given by d and p are equivalent. Let $I_m \in LS(U(F))$ and $I_m \to I \in LS(U(F))$ as $m \to \infty$ in the paranorm p.

Then if

$$I_m(\sigma) = \int_1^{\infty} f_m(x) e^{x\sigma} dF(x), \quad I(\sigma) = \int_1^{\infty} f(x) e^{x\sigma} dF(x),$$

we have $|f_m(x) - f(x)| \leq (1/c)^x$ for an arbitrarily large $c > 1$, all $m \geq m_0(c)$ and all $x > 1$. Therefore, due to (9) we have

$$||I_m - I||_{r_k} = \int_1^{\infty} |f_m(x) - f(x)| e^{xr_k} dF(x) \leq \int_1^{\infty} \exp\{-x(\ln c - r_k)\} dF(x) \to 0$$

as $c \to +\infty$, i. e. $I_m \to I$ as $m \to \infty$ under each norm $||I||_{r_k}$ and $I_m \to I$ as $m \to \infty$ in the metric d.

On the other hand, suppose that $I_m \to I$ as $m \to \infty$ in the metric d, that is under each norm $||I||_{r_k}$. Then for an arbitrarily large $c > 1$, $m \geq m_0(c)$ and all $x > 1$ we have in view of (3) with $|f_m(x) - f(x)|$ instead $f(x)$

$$\frac{1}{c} > \int_1^{+\infty} |f_m(t) - f(t)| e^{tr_k} dF(t) \geq \int_{x-a}^{x+b} |f_m(t) - f(t)| e^{tr_k} dF(t) \geq$$

$$\geq e^{(x-a)r_k} \int\limits_{x-a}^{x+b} |f_m(t) - f(t)| dF(t) \geq h e^{(x-a)r_k} |f_m(x) - f(x)|, \tag{10}$$

i. e. $|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{hc} e^{-(x-a)r_k} \leq \frac{1}{c^x}$, provided $r_k \geq \frac{1}{x-a} \ln \frac{c^{x-1}}{h}$. Thus, for all $m \geq m_0(c)$ all $x > 1$ and all $k \geq k_0(c, x)$ we have $|f_m(x) - f(x)|^{1/x} < 1/c$, i.e. $\sup\limits_{x \geq 1} |f_m(x) - f(x)|^{1/x} \to 0$ as $m \to \infty$ and $I_m \to I$ in the paranorm p. Hence it follows that the topologies given by d and p are equivalent.

To prove the other part of Theorem 1, let $I_m \to I$ as $m \to \infty$ in the paranorm p. Then $|f_m(x) - f(x)| \leq (1/c)^x$ for an arbitrarily large c, all $m \geq m_0(c)$ and all $x > 1$. Therefore,

$$||I_m - I||_{q_j} = \sup_{1 \leq x \leq q_j} |f_m(x) - f(x)|^{1/x} \leq 1/c$$

and

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{||I_m - I||_{q_j}}{1 + ||I_m - I||_{q_j}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(c+1)2^j} \to 0, \quad c \to \infty,$$

i. e. $I_m \to I$ in the paranorm s.

On the other hand, if $I_m \to I$ in the paranorm s then $||I_m - I||_{q_j} \to 0$ as $m \to \infty$ for each q_j and, thus, $|f_m(x) - f(x)|^{1/x} \leq 1/c$ for an arbitrarily large c, all $m \geq m_0(c)$, all $x \in (1, q_j]$ and all q_j, that is for all $x > 1$. Hence $|f_m(x) - f(x)|^{1/x} \to 0$ as $m \to \infty$ for all $x > 1$ and, therefore, $I_m \to I$ in the paranorm p. Thus, the topologies given by p and s are equivalent. Theorem 1 is proved. □

The following theorem establishes a connection between the convergence under $p(I)$ and the convergence on every finite interval.

Theorem 2. *If F satisfies (9) and a sequence $(I_m) \subset LS(U(F))$ converges to $I \in LS(U(F))$ under $p(I)$ then $I_m \to I$ uniformly converges on every finite interval.*

Proof. Let $p(I_m - I) \to 0$ as $m \to \infty$. Then for a given $\varepsilon > 0$, there exists an $m_0 = m_0(\varepsilon)$ such that $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon^x$ for $m \geq m_0$, or $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon^{-nx}$, where $n \in \mathbb{N}$ is arbitrarily large. Therefore, for $m \geq m_0$ and $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ due to (9) we have

$$|I_m(\sigma) - I(\sigma)| < \int\limits_1^{+\infty} e^{x(\sigma_2 - n)} dF(x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Theorem 2 is proved. □

Remark 1. An opposite statement to Theorem 2 does not hold. Indeed, let for every $m \in \mathbb{Z}_+$ and $n \in \mathbb{N}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \, 1 \leq x < 2, \\ n, \, 2n \leq x < 2(n+1) \end{cases}, \quad f_m(x) = \begin{cases} \alpha_{m,n} > 0, \, x = 2n - 1, \\ 0, \, x \neq 2n - 1 \end{cases}.$$

Then for all $m \in \mathbb{Z}_+$

$$I_m(\sigma) = \int\limits_0^{\infty} f_m(x) e^{x\sigma} dF(x) = \sum_n f_m(2n) e^{2n\sigma} = 0,$$

i. e. $I_m(\sigma) \to I_0(\sigma)$ for all $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$. On the other hand,

$$p(I_m, I_0) = \sup\left\{|f_m(x) - f_0(x)|^{1/x} : x > 1\right\} \geq$$

$$\geq |f_m(3) - f_0(3)|^{1/3} = |\alpha_{m,3} - \alpha_{0,3}|^{1/3} \geq h_1 > 0$$

provided $\alpha_{m,3} - \alpha_{0,3} \geq \eta_1 > 0$ for all $m \in \mathbb{N}$.

2 Completeness.

Now we will show the completeness of the space $LS(U(F))$ under various topologies established above. Note that it is sufficient to establish the completeness under one of them, due to Theorem 1.

Theorem 3. *If F satiesfies* (10) *then the space $(LS(U(F)), s)$ is complete.*

Proof. Let (I_ν) be a s-Cauchy sequence on $LS(U(F))$. Then for a given $\varepsilon \in (0, 1)$ there exists a $Q = Q(\varepsilon)$ such that for all $\nu \geq Q$ and $n \geq Q$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{||I_\nu - I_n||_{q_j}}{1 + ||I_\nu - I_n||_{q_j}} < \varepsilon,$$

whence

$$|f_\nu(x) - f_n(x)|^{1/x} < \varepsilon_1, \quad \nu \geq Q, n \geq Q, 1 \leq x \leq q_j,$$

where $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. Hence the sequence (f_ν) in p tends to $f(x)$ for each $x > 1$. Since $\frac{1}{x} \ln \frac{1}{|f_\nu(x)|} \to +\infty$ as $x \to +\infty$, we have $f_\nu(x) \leq \varepsilon_1^x$ for $x \geq x_0(\varepsilon_1)$ and, therefore,

$$|f(x)| \leq |f_\nu(x) - f(x)| + f|_\nu(x)| \leq 2\varepsilon_1^x, \quad x \geq x_0(\varepsilon_1).$$

Thus, (4) holds for f and $I^*(\sigma) = \int\limits_1^\infty |f(x)| e^{x\sigma} dF(x)$ has the abscissa of the convergence $\sigma_M = +\infty$.

Since all $f_\nu \in U$, the function $f \in U$. Indeed, if $|f|$ does not have a regular variation in regard to $F \in V$ then for all $a \geq 0$, all $b \geq 0$ and all $h > 0$ there exists $x* > 1 + a$ such that

$$\int\limits_{x^*-a}^{x^*+b} |f(t)| dF(t) < h|f(x^*)|. \tag{11}$$

Clearly, $|f(x^*)| > 0$ and, therefore, $f_\nu(x^*) > 0$ for $\nu \geq \nu_0$. Since f_ν has regular variation in regard to $F \in V$, there exist $a \in [0, 1)$, $b \in [0, 1)$ and $h_1 > 0$ such that

$$\int\limits_{x^*-a}^{x^*+b} |f_\nu(t)| dF(t) \geq h_1 |f_\nu(x^*)|. \tag{12}$$

But $f_\nu(x^*) \to f(x^*)$ as $\nu \to \infty$. Therefore, from (11) and (12) we obtain for $\nu \to \infty$

$$h_1|f(x^*)| + o(1) = h_1|f_\nu(x^*)| \leq \int\limits_{x^*-a}^{x^*+b} |f_\nu(t)| dF(t)$$

$$= \int\limits_{x^*-a}^{x^*+b} |f(t)| dF(t) + o(1) < h|f(x^*)| + o(1).$$

This is impossible of the arbitrariness of h. Thus, $I \in LS(U(F))$.

Finally,

$$||I_\nu - I||_{q_j} = \sup_{1<x\le q_j} |f_\nu(x) - f(x)|^{1/x} < \varepsilon$$

for all $\nu \ge Q$. Hence

$$s(I_\nu, I) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{||I_\nu - I||_{q_j}}{1 + ||I_\nu - I||_{q_j}} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \nu \ge Q,$$

i. e. $(LS(U(F)), s)$ is complete. Theorem 3 is proved. □

Corollary 1. *If F satisfies* (9) *then the spaces $(LS(U(F)), s)$, $(LS(U(F)), p)$, $(LS(U(F)), d)$ and the space $LS(U(F))$ endowed with the compact open topology (as in Theorem 2) are Frechet spaces and, thus, are barrelled spaces.*

Theorem 4. *If F satiesfies* (9) *then the space $(LS(U(F)), p)$ is a Montel space (see [6, p.32]).*

Proof. Let X be an arbitrary uniformly bounded subset of $(LS(U(F)), p)$, i. e. there exists $C \in (1, +\infty)$ such that $p(I) \le C$ for all $I \in X$. For $I \in X$ as from (7) we have $|f(x)| \le C^x$ for all $x > 1$ and, as above, $|f(x)| \le e^{-nx}$ for each $n > 1$ and all $x \ge x_0 = x_0(n)$. Therefore, for $\sigma \in D := [\sigma_1, \sigma_2]$ we have

$$|I'(\sigma)| \le \int_1^{+\infty} x|f(x)|e^{x\sigma_2} dF(x) \le \left(\int_1^{x_0} + \int_{x_0}^{\infty} \right) |f(x)|e^{x(\sigma_2+1)} dF(x) \le$$

$$\le \max\{C^x e^{x(\sigma_2+1)} : 1 \le x \le x_0\} \int_1^{x_0} dF(x) + \int_{x_0}^{\infty} e^{-(n-\sigma_2-1)x} dF(x).$$

Hence from the arbitrariness of n and (9) we have $|I'(\sigma)| \le C_D$ for all $I \in X$ and $\sigma \in D$, where C_D is a constant depending on D, and for $\sigma', \sigma'' \in D$, $\sigma' < \sigma''$, we obtain for some $\xi \in [\sigma', \sigma'']$

$$|I(\sigma'') - I(\sigma')| = \int_1^{+\infty} x|f(x)|e^{x\xi} dF(x) \le C_D^*(\sigma'' - \sigma')$$

for all $I \in X$, i. e. X is equi-continuos. Now by a well-known argument we can select a subsequence of X which converges uniformly on D to a function I.From the arbitrariness of D and the completeness of $(LS(U(F)), p)$ Theorem 4 is proved. □

REFERENCES

[1] Sheremeta M.M. Asymptotical behaviour of Laplace-Stieltjes integral., VNTL Publishers, Lviv, 2010.

[2] Sheremeta M.M., Dobushovskyy M.S., Kuryliak A.O. *On a Banach space of Laplace-Stieltjes integrals.* Mat. Stud., 2017, **2** (48), 143-149pp., doi: 10.15330/ms.48.2.143-149.

[3] Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. *On a Banach space and Frechet spaces of Laplace-Stieltjes integrals.* Nonlinear Oscilations, 2021, **24** (2), 188-196pp.

[4] Rudin W. Functional analysis. Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1973.

[5] Maddox I.J. Elements of functional analysis. Cambridge University Press, 1988.

[6] Husain T. The opening mapping and closed graph theorems in topological vector spaces. Clarendon Press, Oxford, 1965.

Received 14.03.2025

Шеремета М. М., Добушовський М. С. *Еквівалентність трьох топологій в просторах інтегралів Лапласа-Стілтьєса* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №1. — С. 45–51.

Для невід'ємної, неспадної, необмеженої справа, неперервної функції F та дійснозначної функції f, заданої на $(1, +\infty)$, інтеграл $I(\sigma) = \int_1^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ називається інтегралом Лапласа-Стілтьєса. Для певного класу таких інтегралів введено три топології та доведено їхню еквівалентність.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.05

Маценко В.Г.

Узагальнення моделі типу Скеллама з немонотонною функцією розмноження

Розглянуто узагальнення дискретної моделі Скеллама, яке володіє періодичними режимами, для немонотонної функції розмноження. Вивчено питання існування стаціонарних і періодичних розв'язків моделі та їх стійкість. Наведено комп'ютерні розрахунки динаміки чисельності популяцій.

Ключові слова і фрази: дискретні моделі, модель Скеллама, стаціонарні та періодичні розв'язки, стійкість.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *v.matsenko@chnu.edu.ua*

Вступ

Дискретні моделі, зокрема моделі Скеллама, мають широке застосування при вивченні динаміки біологічних популяцій із неперекривними поколіннями [1, 2]. Ріст їхньої чисельності відбувається в окремі фіксовані моменти часу. До таких популяцій можна віднести дрібних гризунів, багатьох комах з однорічною генерацією, однорічні рослини. Їх дорослі особини, що розмножуються впродовж року, живуть недовго і до появи на світ нового покоління припиняють своє існування.

Математичні моделі динаміки таких популяцій пов'язують їх чисельності N_{t+1} в момент часу $t+1$ з чисельностями в попередні моменти часу і в простішому випадку – це дискретні рівняння вигляду

$$N_{t+1} = f(N_t)N_t,\ t = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

де N_t – чисельність популяції в момент часу t; $f(\cdot)$ – гладка функція дійсного аргументу, яка відображає простір $R^+ = [0, \infty)$ в R^+.

Функція

$$f(N_t) = \frac{N_{t+1}}{N_t}$$

– це коефіцієнт природного відтворення, або коефіцієнт розмноження. Вона визначає середню кількість потомків, що припадає на одну особину, яка існувала в момент часу t. Це єдиний показник, що виражає характер процесів виживання і народжування в дискретних моделях.

УДК 519.87:574.3

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

© Маценко В.Г., 2025

У припущенні, що вплив саморегулюючих внутрішньопопуляційних факторів з ростом чисельності тільки посилюється, коефіцієнт розмноження описується монотонно спадними функціями.

У моделі Рікера коефіцієнт розмноження – це експоненціально спадна функція, а у моделі Скеллама – це спадна гіперболічна функція вигляду [1]

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t},$$

де параметр a задає найбільше значення розмноження, а параметр b описує вплив саморегулюючих факторів на динаміку дискретної популяції.

У праці [3] вивчаються узагальнення моделі Скеллама для функцій розмноження вигляду

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^2}, \quad f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^2}.$$

Показано, що для цих двох функцій при певних співвідношеннях між параметрами спостерігається лише монотонна стабілізація чисельності популяції до деякого стаціонарного рівня.

Проте на практиці часто виникають періодичні режими. Існування періодичних режимів різних періодів та їх дослідження проведено в праці [4] для монотонної функції розмноження вигляду

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}.$$

Але функція $f(N_t)$ не завжди монотонна. Як показують численні екологічні спостереження динаміки чисельності популяцій, при малих N_t вона може бути зростаючою, а при великих N_t – спадною. Це має місце коли, наприклад,

$$f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^4}.$$

Тоді модель (1), у цьому випадку, набуває вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^4} \equiv F(N_t),\ t = 0, 1, \ldots,\ a, b > 0. \tag{2}$$

Параметри a та b мають той самий екологічний зміст, що описаний вище.

У даній праці встановлено, що модель (2) має як стаціонарні, так і періодичні розв'язки різних періодів, а також режими з хаотичною поведінкою. Тут розглянуто також деякі зміни в моделі (2).

1 Існування стаціонарних режимів та їх стійкість

Модель (2) – це нелінійне дискретне рівняння, розв'язок якого в аналітичній формі знайти не можливо. Тому будемо відшуковувати простіші розв'язки, а саме стаціонарні та періодичні, і вивчатимемо їх стійкість.

Стаціонарні розв'язки рівняння (2) знаходимо зі співвідношення

$$N = \frac{aN^2}{b + N^4}. \tag{3}$$

Очевидно, що розв'язком цього рівняння є тривіальне значення $N_0^* = 0$.

Ненульові розв'язки рівняння (3) знаходяться зі співвідношення

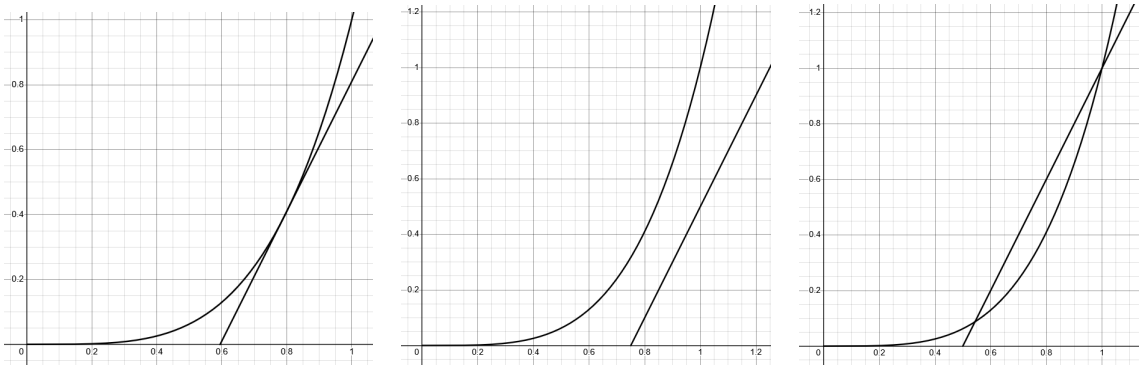
$$N^4 = aN - b. \tag{4}$$

Для знаходження цих розв'язків застосуємо графічний аналіз. Спочатку знайдемо точку, в якій функції правої та лівої частин рівняння (4) мають однаковий кутовий коефіцієнт. Це значення N^*, для якого

$$4N^{*3} = a, \quad \text{або} \quad N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}.$$

Якщо в точці N^* значення правої та лівої частин рівняння (4) збігаються, то це і є корінь цього рівняння, або стаціонарний розв'язок для рівняння (2). Це має місце, якщо $b = \frac{3a}{4}\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$. При цьому рівняння (4) має єдиний (кратний) додатний корінь $N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$ (рис. 1а).

Якщо $b > \frac{3a}{4}\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$, то (4) не має дійсних коренів (рис. 1б), а якщо $b < \frac{3a}{4}\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$, то має два дійсних різних додатних корені (рис. 1в). Позначимо їх через N_1^* та N_2^*.



а) б) в)

Рис. 1. Існування коренів рівняння (4): а) $a = 2$, $b = \frac{3}{2}\sqrt[3]{0.5}$; б) $a = 2$, $b = 1.5$; в) $a = 2$, $b = 1$

Отже, рівняння (3) завжди має нульовий корінь, а ненульових додатних, в залежності від значень a та b, може мати один N^*, два N_1^*, N_2^*, або не мати жодного.

Зокрема, при $a = 2$, $b = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $N^* = 0.7937$, при $a = 2$, $b = 1$, $N_1^* = 0.5436$, $N_2^* = 1$, при $a = 2$, $b = 1.5$ ненульових коренів не існує.

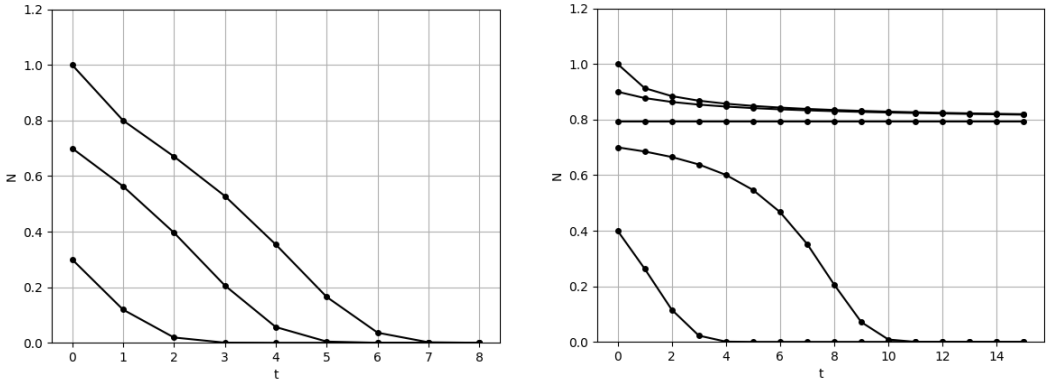
Проведемо дослідження стійкості стаціонарних режимів. Для цього знаходимо мультиплікатори стаціонарних точок:

$$\lambda = \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*} = \frac{2aN^*\left(b - N^{*4}\right)}{\left(b + N^{*4}\right)^2}.$$

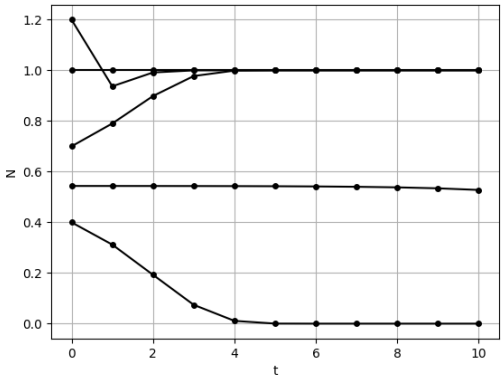
Оскільки для нульового розв'язку $\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_0^*} = 0$, то обчислюємо другу похідну

$$\left.\frac{d^2F}{dN^2}\right|_{N_0^*} = \frac{a}{b}.$$

Тоді стійкість нульового розв'язку в другому наближенні маємо для початкових значень $N_t|_{t=0} = N_0$, для яких $\frac{a}{b}N_0 < 0$. Для виконання цієї умови при $N_0 > 0$ завжди можна підібрати відповідні a та b. Це означає, що нульовий розв'язок завжди локально стійкий (рис. 2)



а) б)



в)

Рис. 2. Стаціонарні стани та їх стійкість. а) $a = 2.0$, $b = 1.5$, $N_0 = \{1, 0.7, 0.3\}$, б) $a = 2.0$, $b = 1.1905507$, $N_0 = \{1, 0.9, 0.7937, 0.7, 0.4\}$, в) $a = 2.0$, $b = 1$, $N_0 = \{1, 0.5436, 1.2, 0.7, 0.4\}$

Обчислимо тепер $\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*}$. Оскільки $N^{*4} = aN^* - b$, то

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*} = \frac{2\,(2b - aN^*)}{aN^*}.$$

Для $N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$, $b = \frac{3a}{4}\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$ знаходимо $\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*} = 1$, тому необхідно зробити додаткові дослідження. Для цього обчислюємо

$$\left.\frac{d^2F}{dN^2}\right|_{N^*=\sqrt[3]{\frac{a}{4}}} = -\frac{b}{a}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{4}}\right)^2.$$

При цьому для поправки x_t, де $x_t = N_t - N^*$ з точністю до величин третього порядку малості маємо рівняння

$$x_{t+1} = x_t - \frac{3}{4}x_t^2,\ t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, що при достатньо малих $x_0 > 0$, $x_1 < x_0$, а отже, $0 < x_{t+1} < x_t$, а для від'ємних x_0 маємо $|x_{t+1}| > |x_t|$. Тому коли $b = \frac{a}{4}\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$ стаціонарний режим $N^* = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$ напівстійкий (рис. 2б).

Дослідимо тепер стаціонарні стани N_1^*, N_2^* на стійкість. Знайдемо їх мультиплікатор

$$\left|\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_{1,2}^*}\right| = \left|\frac{2b}{aN_{1,2}^*} - 1\right|.$$

Ця величина менша за одиницю, якщо

$$\frac{1}{2} < \frac{2b}{aN_{1,2}^*} < \frac{3}{2}$$

і більша за одиницю, якщо

$$\frac{2b}{aN_{1,2}^*} < \frac{1}{2}, \quad \text{або} \quad \frac{2b}{aN_{1,2}^*} > \frac{3}{2}.$$

Зокрема, при $a = 2$, $b = 1$

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*=0.5436} = 1.6792 > 1,$$

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*=1} = 1,$$

тому N_1^* – нестійкий (рис. 2в).

Для дослідження N_2^* на стійкість знаходимо $\left.\frac{d^2F}{dN^2}\right|_{N_2^*=1} = 4$. При цьому послідовність

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2F}{dN^2}\right|_{N_2^*} x_t^2 = 2x_t^2, \ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $x_t = N_t - N_2^*$, збігається до нуля, якщо $2|x_0| < 1$, тобто для $|x_0| < \frac{1}{2}$. Отже, розв'язок $N_2^* = 1$ – локально стійкий (рис. 2в).

У випадку, коли $N_{1,2}^*$ нестійкі, можуть з'являтися періодичні і хаотичні розв'язки.

2 Дослідження періодичних режимів

Спочатку відшукаємо періодичні розв'язки з періодом $T = 2$. Для них $N_{t+2} = N_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Такі розв'язки знаходяться із системи

$$N_2 = F(N_1),$$

$$N_1 = F(N_2),$$

або те саме, що з рівняння

$$N = F(F(N)). \tag{5}$$

Це рівняння, у випадку моделі (2), має вигляд

$$a^3N^3\left(b + N^4\right)^2 = b\left(b + N^4\right)^4 + a^4N^8,$$

яке аналітично не можна розв'язати. Тому застосуємо числові методи.

Візьмемо $a = 2$, $b = 0.5$, тоді графічний аналіз рівняння (5) показує, що воно має чотири корені $N_1^* = 0.2520$, $N_2^* = 1.1622$, $N_3^* = 0.9028$ і $N_4^* = 1.4000$ (рис. 3).

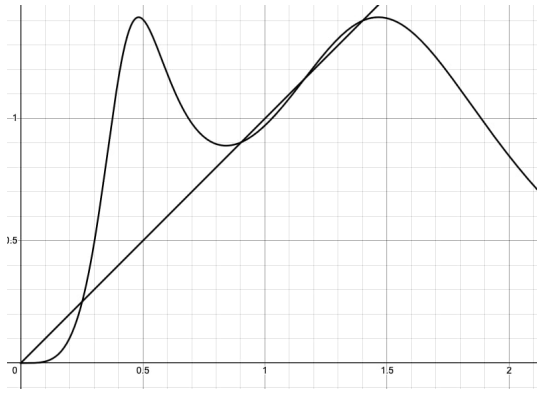


Рис. 3. Графічне визначення коренів рівняння (5) при $a = 2.0$, $b = 0.5$. $N_1^* = 0.2520$, $N_2^* = 1.1622$, $N_3^* = 0.9028$, $N_4^* = 1.4000$

Два перших з них N_1^*, N_2^* – це стаціонарні розв'язки рівняння (2), два інших $N_3^* \neq N_4^*$ – складають періодичний розв'язок з періодом $T = 2$.

Оскільки мультиплікатори

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} = 1.968 > 1, \quad \left|\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*}\right| = 1.143 > 1,$$

$$\left|\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_3^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_4^*}\right| = 0.435 < 1,$$

то стаціонарні розв'язки нестійкі, а періодичний з періодом $T = 2$ – стійкий (рис. 4).

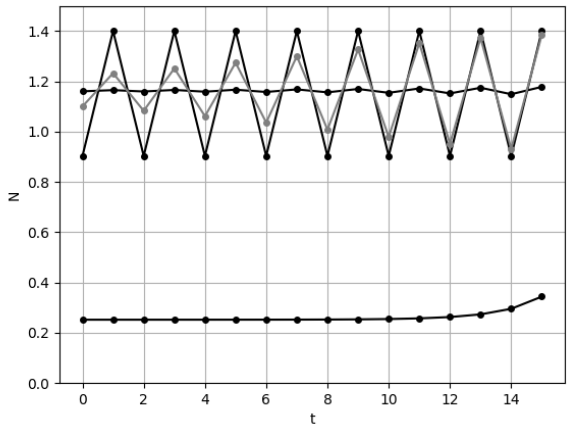


Рис. 4. Нестійкі стаціонарні стани. Періодичний розв'язок рівняння (2) з періодом $T = 2$ та його стійкість. $a = 2.0$, $b = 0.5$, $N_0 = \{0.25202, 0.9028, 1.1, 1.16\}$

Візьмемо тепер інші значення параметрів моделі, а саме $a = 2$, $b = 0.3$. У цьому випадку графік функції $F(F(N))$ поданий на рис. 5 і корені рівняння (5) набувають значень $N_1^* = 0.1502$, $N_2^* = 1.2053$, $N_3^* = 0.6361$, $N_4^* = 1.7451$.

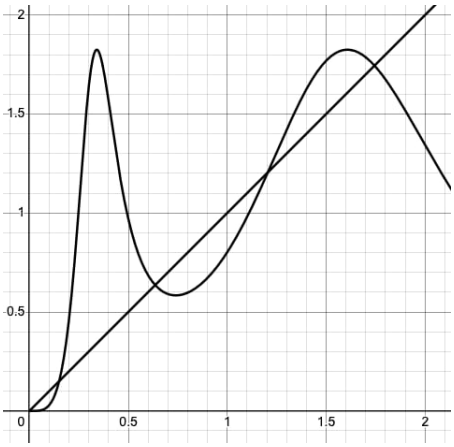


Рис. 5. Існування коренів рівняння (5) при $a = 2.0$, $b = 0.3$. $N_1^* = 0.1502$, $N_2^* = 1.2053$, $N_3^* = 0.6361$, $N_4^* = 1.7451$

Значення N_1^*, N_2^* – це стаціонарні розв'язки, а N_3^*, N_4^* – періодичний розв'язок з періодом $T = 2$.

Мультиплікатори стаціонарних станів

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} = 1.99 > 1, \quad \left|\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*}\right| = 1.502 > 1,$$

тому вони нестійкі (рис. 6). Мультиплікатор періодичного розв'язку

$$\left|\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_3^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_4^*}\right| = 1.1 > 1,$$

тому періодичний розв'язок з періодом $T = 2$ теж нестійкий (рис. 6). Це означає, що можуть з'явитися періодичні розв'язки інших періодів, зокрема, з періодом $T = 4$.

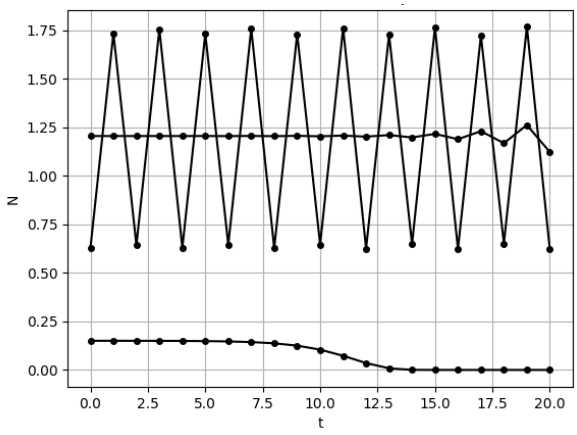


Рис. 6. Нестійкість стаціонарних розв'язків та періодичного розв'язку з періодом $T = 2$ при $a = 2.0$, $b = 0.3$

Для знаходження періодичного розв'язку з періодом $T = 4$ маємо рівняння

$$N = F(F(F(F(N)))). \tag{6}$$

Графічний аналіз коренів цього рівняння наведений на рис. 7.

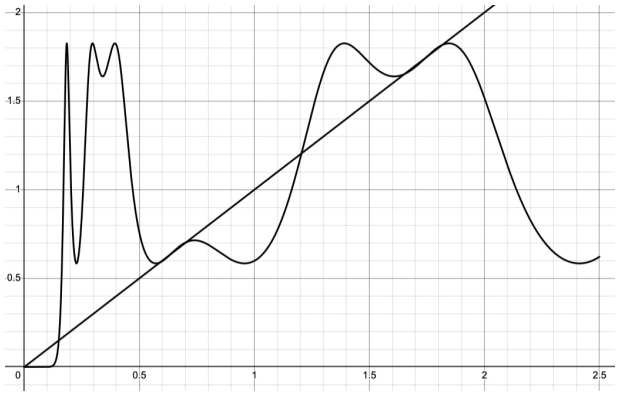
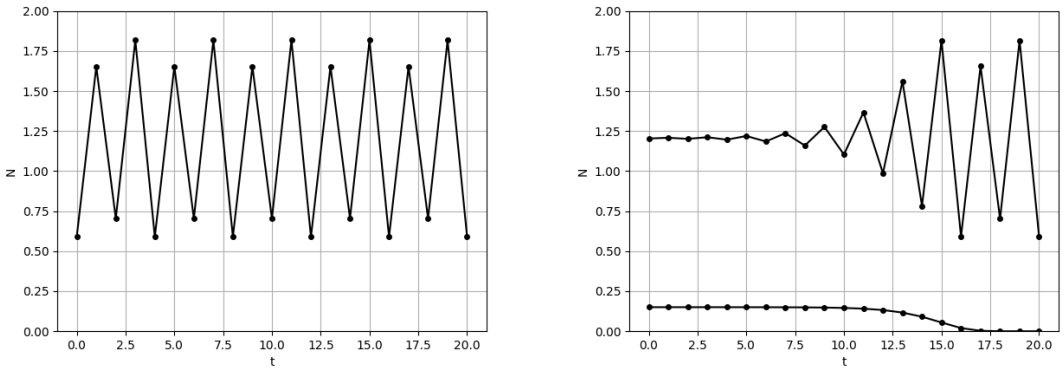


Рис. 7. Розв'язування рівняння (6) при $a = 2.0$, $b = 0.3$. Корені рівняння $N_1^* = 0.1503$, $N_2^* = 1.2053$, $N_3^* = 0.6361$, $N_4^* = 1.7452$, $N_5^* = 0.5897$, $N_6^* = 1.6522$, $N_7^* = 0.7043$, $N_8^* = 1.8168$

При $a = 2$, $b = 0.3$ рівняння (6) має 8 коренів. Два з них – N_1^*, N_2^* – визначають нестійкі стаціонарні режими, N_3^*, N_4^* складають нестійкий періодичний розв'язок із періодом $T = 2$. Чотири значення $N_5^* = 0.5897$, $N_6^* = 1.6522$, $N_7^* = 0.7043$, $N_8^* = 1.8168$ задають періодичний розв'язок з періодом $T = 4$ (рис. 8а). Він стійкий (рис. 8б), оскільки його мультиплікатор

$$\left| \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_5^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_6^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_7^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_8^*} \right| = 0.588 < 1,$$



а) б)

Рис. 8. а) періодичний розв'язок з періодом $T = 4$, б) його стійкість. $a = 2.0$, $b = 0.3$

При зміні параметрів a та b періодичні розв'язки з періодом $T = 4$ перестають бути стійкими. Зокрема, при $a = 3$, $b = 0.1$ маємо 8 коренів (рис. 9): двох нестійких стаціонарних станів N_1^*, N_2^*, нестійкого періодичного розв'язку N_3^*, N_4^* з періодом $T = 2$ та нестійкого періодичного розв'язку $N_5^* = 0.2542$, $N_6^* = 0.8591$, $N_7^* = 1.8609$, $N_8^* = 3.4341$ з періодом $T = 4$, оскільки його мультиплікатор дорівнює $9.9706 > 1$ (рис. 10).

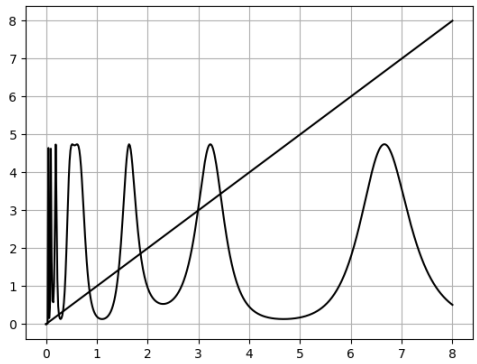


Рис. 9. Графічна ілюстрація розв'язків рівняння (6) при $a = 3$, $b = 0.1$. Корені рівняння $N_1^* = 0.0333$, $N_2^* = 1.4309$, $N_3^* = 0.33503$, $N_4^* = 2.9905$, $N_5^* = 0.2542$, $N_6^* = 0.8591$, $N_7^* = 1.8609$, $N_8^* = 3.4341$

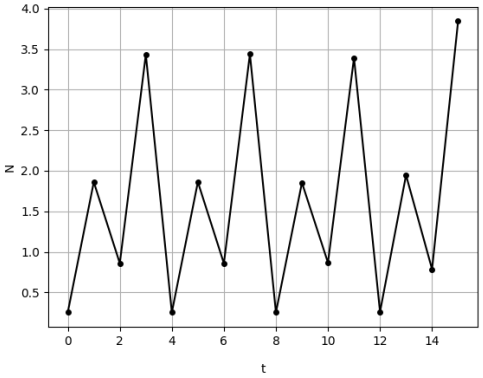


Рис. 10. Нестійкість періодичного розв'язку з періодом $T = 4$ при $a = 3$, $b = 0.1$

Перейдемо до знаходження періодичних розв'язків із періодом $T = 3$ ($N_{t+3} = N_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$). Такі розв'язки знаходяться з рівняння

$$N = F(F(F(N))). \tag{7}$$

При $a = 3$, $b = 0.05$ рівняння (7) має 8 коренів (рис. 11). Два з них задають стаціонарні точки, які є нестійкими, а шість інших визначають два періодичні розв'язки з періодом $T = 3$.

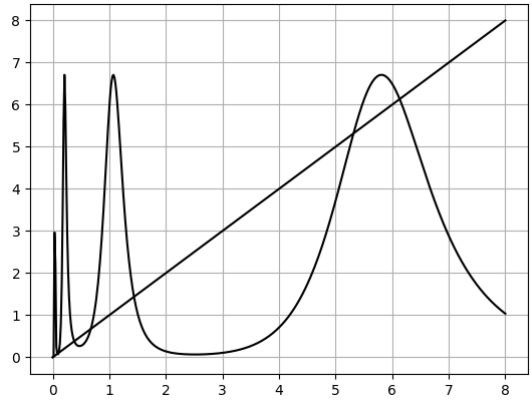


Рис. 11. Графічна ілюстрація існування коренів рівняння (7) при $a = 3$, $b = 0.05$. Корені рівняння $N_1^* = 0.01666$, $N_2^* = 1.4366$, $N_3^* = 0.07976$, $N_4^* = 0.3814$, $N_5^* = 6.1327$, $N_6^* = 0.1061$, $N_7^* = 0.6738$, $N_8^* = 5.3169$

Вони – нестійкі (рис. 12), оскільки їхні мультиплікатори більші за одиницю.

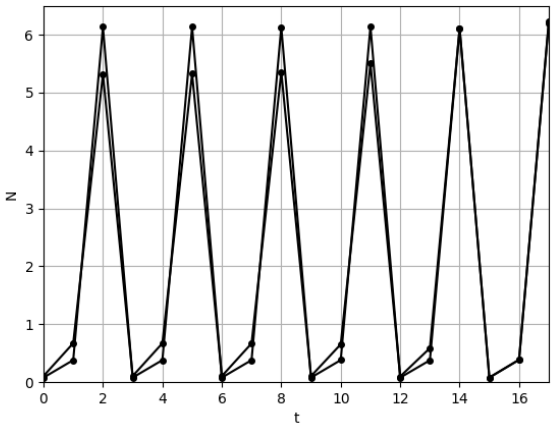
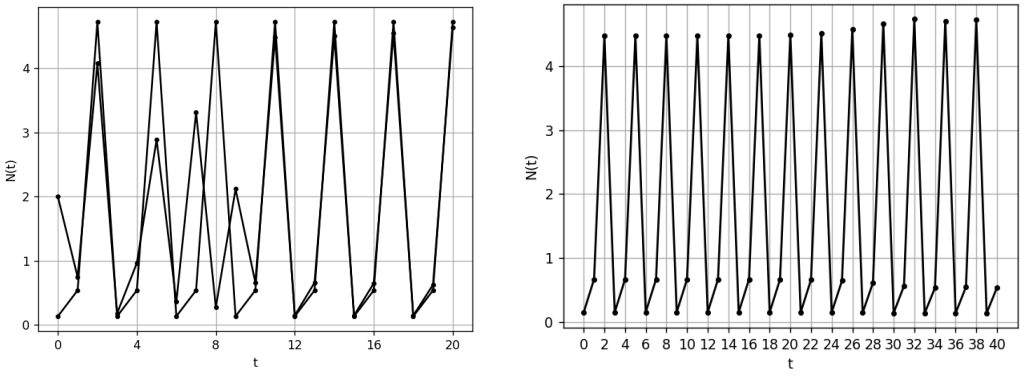


Рис. 12. Періодичні розв'язки рівняння (2) з періодом $T = 3$ при $a = 3$, $b = 0.05$ та їх нестійкість

При $a = 3$, $b = 0.1$ теж маємо існування двох періодичних розв'язків із періодом $T = 3$ (рівняння (7) має вісім коренів). Але один із них, що визначається значеннями $N_3^* = 0.1343$, $N_4^* = 0.5393$, $N_5^* = 4.7269$, – стійкий (рис. 13а), оскільки його мультиплікатор дорівнює $0.6629 < 1$. А другий періодичний розв'язок ($N_3^* = 0.1495$, $N_4^* = 0.6672$, $N_5^* = 4.4791$) – нестійкий (рис. 13б). Його мультиплікатор $\lambda = 2.603 > 1$.



а) б)

Рис. 13. Періодичні розв'язки з періодом $T = 3$ при $a = 3$, $b = 0.1$. а) $N_3^* = 0.1343$, $N_4^* = 0.5393$, $N_5^* = 4.7269$ – стійкий, б) $N_3^* = 0.1495$, $N_4^* = 0.6672$, $N_5^* = 4.4791$ – нестійкий

Оскільки, за теоремою Шарковського [5], з існування періодичних розв'язків з періодом $T = 3$ випливає існування періодичних розв'язків з періодом $T = 5$, то знайдемо їх. Для цього потрібно знаходити корені рівняння

$$N = F(F(F(F(F(N))))). \tag{8}$$

При $a = 3$, $b = 0.05$ рівняння (8) має 12 коренів (рис. 14). Два з них N_1^*, N_2^* – нестійкі стаціонарні розв'язки, а десять інших визначають два періодичних розв'язки з періодом $T = 5$, це N_3^*, N_4^*, N_5^*, N_6^*, N_7^* та N_8^*, N_9^*, N_{10}^*, N_{11}^*, N_{12}^*. Обидва вони нестійкі (рис. 15), оскільки їх мультиплікатори більші за одиницю.

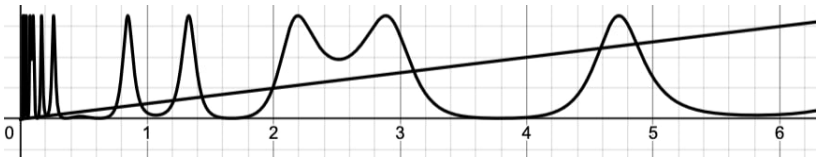
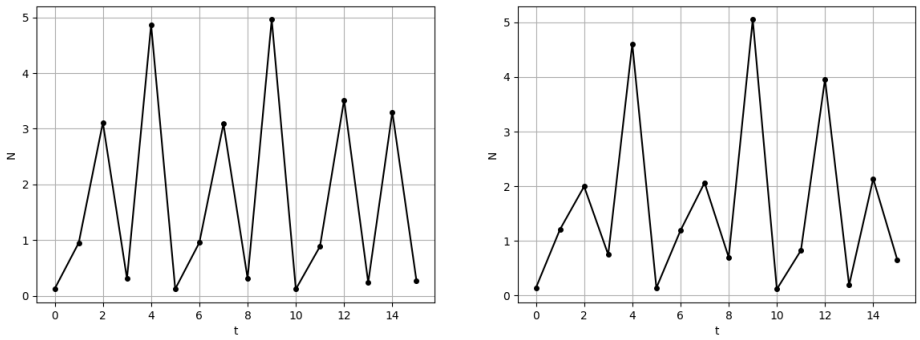


Рис. 14. Корені рівняння (8) при $a = 3$, $b = 0.05$: $N_1^* = 0.01666$, $N_2^* = 1.4366$, $N_3^* = 0.1264$, $N_4^* = 0.9537$, $N_5^* = 3.1090$, $N_6^* = 0.3102$, $N_7^* = 4.8713$, $N_8^* = 0.1427$, $N_9^* = 1.2127$, $N_{10}^* = 1.9936$, $N_{11}^* = 0.7524$, $N_{12}^* = 4.5838$



а) б)

Рис. 15. Нестійкість розв'язків рівняння (2) з періодом $T = 5$ при $a = 3$, $b = 0.05$. а) $N_0 = 0.1264$, б) $N_0 = 0.1427$

Якщо дискретне рівняння (2) має періодичні розв'язки з періодом $T = 3$, то, за теоремою про хаос [6], існують початкові значення N_0, для яких розв'язки мають хаотичну поведінку (рис. 16).

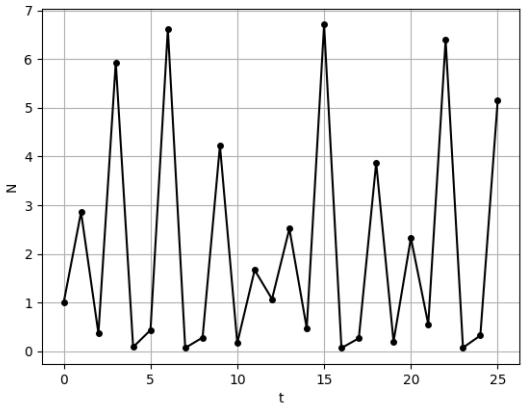


Рис. 16. Хаотична поведінка розв'язків при $a = 3$, $b = 0.05$, $N_0 = 1$

3 Аналіз моделі з монотонною стабілізацією

Розглянемо модель (2) з кубічною функцією в знаменнику, тобто

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^3} \equiv \mathcal{F}(N_t), \quad a, b > 0, \ t = 0, 1, \ldots. \tag{9}$$

Покажемо, що в цій моделі вже відсутні періодичні режими, а має місце тільки монотонна стабілізація до деякого стаціонарного рівня.

Рівняння (9), крім нульового розв'язку $N_0^* = 0$, має і ненульові стаціонарні точки, які знаходяться з рівняння

$$N^3 = aN - b. \tag{10}$$

Очевидно, що це рівняння має завжди один дійсний від'ємний корінь.

Дискримінант цього рівняння $\Delta = \frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}$. При цьому, якщо $\Delta = 0$, тобто $b = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$, то (10) має три дійсні корені, два з яких додатні і рівні між собою. При $\Delta > 0$, тобто при $b > \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ рівняння (10) не має дійсних додатних коренів, якщо $\Delta < 0$, або те саме, що $b < \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$, то (10) має два дійсних різних додатних корені $N_1^* < N_2^*$.

Дослідження стійкості стаціонарних точок аналогічне дослідженню їх стійкості для рівняння (2).

Для тривіального стану $\mathcal{F}'(0) = 0$, тому для величини $x_t = N_t - N_0^*$ з точністю до величин третього порядку малості маємо

$$x_{t+1} = 2\frac{a}{b}x_t^2,$$

що означає локальну стійкість тривіального розвитку для будь-яких $a, b > 0$.

Для $N_{1,2}^*$ маємо $\mathcal{F}'\left(N_{1,2}^*\right) = \frac{4b}{aN_{1,2}^*} - 2$. Оскільки для $N_2^* > N_1^*$ виконуються умови $b < \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ і $3N_2^{*2} > a$, то $\mathcal{F}'\left(N_2^*\right) = \frac{4b}{aN_2^*} - 2 < \frac{4\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}}{a\sqrt{\frac{a}{3}}} - 2 = \frac{2}{3} < 1$, що дає нам стійкість стаціонарного стану N_2^*.

Розглянемо тепер приклади числових розрахунків розв'язків рівняння (9). При $a = 3$, $b = 2.5$ існує тільки стійкий тривіальний стан N_0^*. При $a = 3$, $b = 1.5$ рівняння (9) має два ненульових стаціонарних розв'язки $N_1^* = 0.5579$ і $N_2^* = 1.3844$, причому N_2^* – стійкий, оскільки його мультиплікатор дорівнює $0.084 < 1$, а N_1^* – нестійкий (його мультиплікатор становить $1.689 > 1$). При $a = 3$, $b = 2$ стаціонарний стан $N^* = 1$ напівстійкий. Картина стійкості цих стаціонарних станів така ж сама як на рис. 2.

Перейдемо до знаходження періодичних розв'язків. Спочатку обчислимо цикли з періодом $T = 2$. З умови $N_{t+2} = N_t$, $t = 0, 1, \ldots$, одержуємо рівняння

$$b\left(b + N_t^3\right)^3 + a^3 N_t^6 = a^3 N_t^3\left(b + N_t^3\right),$$

або те саме, що $N_t^3 = aN_t - b$. А це рівняння (10), з якого знаходили стаціонарні розв'язки. Тобто рівняння (9) не має циклів з періодом $T = 2$, а отже, за теоремою Шарковського [5], не існує і періодичних розв'язків будь-яких інших періодів.

Отже, як висновок, зазначимо, що запропоноване узагальнення (2) моделі Скеллама з немонотонною функцією народжуваності володіє стаціонарними і періодичними режимами будь-яких періодів. При зміні параметрів a та b у цій моделі спостерігаються різні типи поведінки чисельності N_t. Одні періодичні режими втрачають стійкість, натомість з'являються інші стійкі періодичні режими. Оскільки модель має періодичні розв'язки з періодом $T = 3$, то існують і хаотичні розв'язки. Тобто, відносно проста дискретна модель має досить складну поведінку розв'язків. Результати досліджень підтверджуються комп'ютерними експериментами.

А для моделі (9), коли змінили степінь величини N_t в знаменнику на значення 3, періодичні режими взагалі відсутні, а має місце тільки монотонна стабілізація розв'язків до деяких стаціонарних точок.

Список літератури

[1] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica, 1951. **38**. 196-218.

[2] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model.* Population Ecolody. Online Version, 2023. https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169.

[3] Маценко В.Г. *Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю.* Буковинський матем. журнал. **12**(1). 2024. 74-83.

[4] Маценко В.Г. *Аналіз моделей типу Скеллама з періодичними режимами.* Буковинський матем. журнал. **12**(2). 2024. 128-142.

[5] Шарковський А. Н. *Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя.* Украинский математический журнал, 1964. **XVI** (1). С. 61-71.

[6] Li T., Yorke I. *Period three implies chaos.* The American Mathematical Monthly, 1975. **82** (10). Pp. 985-992.

Список літератури

[1] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica, 1951. **38**. 196-218.

[2] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model.* Population Ecolody. Online Version, 2023. https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169.

[3] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy.* Bukovinian Math. Journal. **12**(1). 2024. 74-83. (in Ukrainian)

[4] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam-type models width with periodic regimes.* Bukovinian Math. Journal. **12**(2). 2024. 128–142. (in Ukrainian)

[5] Sharkovskii A. N. *Coexistence of cycles of continuous transformation straight into itself.* Ukrainian Mathematical Journal, 1964. **XVI** (1). P. 61-71. (in Russian)

[6] Li T., Yorke I. *Period three implies chaos.* The American Mathematical Monthly, 1975. **82** (10). Pp. 985-992.

Надійшло 20.05.2025

Matsenko V.G. *Generalization of Skellam-type model with non-monotonic reproduction function*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 52–65.

Difference equations are used in order to model the dynamics of population with non-overlapping generations. In the simplest case such equations have the form $N_{t+1} = f(N_t)\, N_t$,

where $N_t > 0$ is the population size at a moment of time t, $f(N_t) = \dfrac{N_{t+1}}{N_t}$ is a coefficient of natural reproduction.

In Skellam's model this coefficient has the form of a decreasing hyperbolic function: $f(N_t) = \dfrac{a}{b + N_t}$, $a, b > 0$. Parameter a here plays the role of the largest value of the reproduction coefficient, and b describes the influence of self-regulating mechanisms on population dynamics.

The papers [3, 4] consider a generalization of the Skellam model. It is shown that in the case when $f(N_t) = \dfrac{a}{b + N_t^2}$ and $f(N_t) = \dfrac{aN_t}{b + N_t^2}$ the models only monotonic stabilization of the number to some stationary level is observed. If $f(N_t) = \dfrac{a}{b + N_t^3}$, then the model has periodic solutions of different periods.

This paper studies the behavior of solutions of the generalized Skellam model for a non-monotonic multiplication function of the form $f(N_t) = \dfrac{aN_t}{b + N_t^4}$. It is shown that the equation $N_{t+1} = f(N_t) N_t$ has stationary and periodic solutions of any period. The stability of these solutions is investigated. In the exponent of the quantity N_t in the denominator or is reduced to three, than the Skellam model with the function $f(N_t) = \dfrac{aN_t}{b + N_t^3}$ no longer has periodic solution, but has only monotonic stabilization to stationary regimes.

The paper presents the results of a number of computer experiments with such generalizations of the Skellam model.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.06

Українець О. З.

НЕПЕРЕРВНІ СКАЛЯРНІ ЗАРЯДИ НА L_0 ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДО МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ ЕРРОУ-ДЕБРЕ

У недавній статті автора, спільній з М. М. Поповим і О. Г. Фотій, в ролі прикладу ненульового ортогонально адитивного функціоналу на L_0, неперервного в нулі, використовувався ортогонально адитивний проектор на латеральну смугу, породжену одиничною функцією. Проте такого типу функціонали є розривними в деяких інших точках. Виникає природне питання про існування ненульового ортогонально адитивного функціоналу на L_0, неперервного в кожній точці. Ми даємо позитивну відповідь на це питання, побудувавши два типи таких прикладів. Далі ми застосовуємо отримані результати до економічної моделі Ерроу-Дебре.

Ключові слова і фрази: модель Ерроу-Дебре, відношення переваги, товарний вектор, функція попиту.

Jury Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *o.ukrainets@chnu.edu.ua*

Вступ

Ми використовуємо загальноприйняту термінологію і позначення з теорії векторних ґраток (= просторів Рісса), які детально описані, наприклад, у стандартному підручнику [2]. У вступному розділі ми надаємо необхідну інформацію як із загальної теорії векторних ґраток, так і спеціальної теорії латерального порядку на векторних ґратках і технікою операторів ε-штрихування, необхідною для основного результату. Щодо необхідної інформації про модель економіки Ерроу-Дебре, найкращим, на наш погляд, джерелом є підручник [1].

Деякі стандартні відомості з теорії векторних ґраток.

Нагадаємо означення деяких важливих понять. Нехай E – векторна ґратка. Елементи $x, y \in E$ називаються *диз'юнктними* (позначають цей факт так: $x \perp y$), якщо $|x| \wedge |y| = 0$. Диз'юнктним доповненням підмножини $A \subseteq E$ називають підмножину $A^d = \{x \in E : (\forall a \in A)\, x \perp a\}$. Підмножина $A \subseteq E$ називається:

- *тілесною*, якщо для довільних $x \in E$ та $a \in A$ з умови $|x| \leq |a|$ випливає, що $x \in A$;

УДК 519.865
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 47B38; Secondary 47B65.

© Українець О. З., 2025

- *ідеалом*, якщо A є тілесним лінійним підпростором E;
- *смугою*, якщо A є ідеалом з такою властивістю: для довільної підмножини $B \subseteq A$, якщо існує $a = \sup B$, то $a \in A$.

Очевидно, перетин будь-якої кількості ідеалів (чи смуг) є ідеалом (відповідно, смугою). *Ідеалом* (чи *смугою*), *породженим підмножиною* $A \subseteq E$, називається перетин всіх ідеалів (відповідно, смуг), що містять A. Смуга, породжена одноелементною підмножиною $\{e\}$, стандартно позначається через B_e. Для довільної підмножини $A \subseteq E$ множина A^d є смугою, а смуга, породжена підмножиною A, дорівнює $A^{dd} := (A^d)^d$, див. [2, с. 34].

Елемент $e \in E$ називається *проективним*, якщо для довільного $e \in E$ має місце розклад E у пряму суму смуг $E = B_e \oplus B_e^{dd}$, тобто, для довільного $x \in E$ існують єдині елементи $y \in B_e$ та $z \in B_e^{dd}$ такі, що $x = y + z$. При цьому відповідний проектор P_e на B_e є лінійним додатним оператором, дія якого обчислюється за формулою:

$$P_y\, x = \bigvee_{n=1}^{\infty} (x \wedge n|y|), \;\; x \in E^+, \tag{1}$$

див. [2, Theorem 1.47]. Кажуть, що векторна ґратка E має *головну проективну властивість* (principal projection property), якщо кожний її елемент є проективним. Кожна порядково повна векторна ґратка E (тобто, в якій кожна непорожня порядково обмежена підмножина має супремум) має головну проективну властивість [2, с. 36]. Так, векторні ґратки $L_p := L_p[0,1]$ є порядково повними при $0 \le p \le \infty$, а векторна ґратка $C[0,1]$ не має головної проективної властивості, оскільки, наприклад, елемент $e(t) \equiv t$ не є проективним.

Кажуть, що сітка (= напрямленість) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в E *порядково збігається* до елемента $x \in E$ (пишуть $x_\lambda \xrightarrow{o} x$), якщо існує сітка $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в E (з тією ж самою множиною індексів) така, що $|x_\lambda - x| \le u_\lambda$ для всіх $\lambda \in \Lambda$, а також $u_\lambda \downarrow 0$ (тобто $u_\beta \le u_\alpha$ при $\alpha < \beta$ та $\inf_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda = 0$). Відображення $f\colon E \to F$ між векторними ґратками E та F називається *порядково неперервним*, якщо для довільної сітки $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в E та довільного $x \in E$ з умови $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ випливає $f(x_\lambda) \xrightarrow{o} f(x)$.

Ми використовуємо позначення $A \sqcup B = C$ та $x \sqcup y = z$ як для множин A, B, C, так і для елементів x, y, z векторної ґратки E для диз'юнктної суми, тобто, наведена рівність для множин означає виконання двох умов $A \cup B = C$ та $A \cap B = \varnothing$, а для елементів E означає $x + y = z$ та $x \perp y$.

Латеральний порядок та оператори ε-штрихування.

На кожній векторній ґратці E визначається ще один частковий порядок: $x \sqsubseteq y$ для $x, y \in E$ тоді і лише тоді, коли x є фрагментом y, тобто, $x \perp y - x$. Дане бінарне відношення на E є відношенням порядку і називається *латеральним порядком*; див. [8], [9] для детального знайомства з цим порядком. Для довільного $e \in E$ множина всіх фрагментів елемента e позначається через $\mathfrak{F}_e$. Латеральний супремум (інфімум) двоелементної підмножини $\{x, y\} \subset E$ позначається через $x \bigcup y$ (відповідно, $x \bigcap y$). Для кожного $e \in E \setminus \{0\}$ множина $\mathfrak{F}_e$ є булевою алгеброю відносно латерального порядку з найменшим елементом 0 та найбільшим e [8, Proposition 3.4]. Отже, для довільних $x, y \in \mathfrak{F}_e$ існують $x \bigcup y$ та $x \bigcap y$, але не кожна двоелементна підмножина $\{x, y\} \subset E$ є латерально обмеженою зверху, тобто, $x, y \sqsubseteq e$ для деякого e (наприклад, $\{x, 2x\}$ при $x \ne 0$ не є латерально обмеженою зверху). Очевидно, кожна підмножина латерально

обмежена знизу нулем. Але не в кожній векторній ґратці латеральний інфімум $x \bigcap y$ (який фактично є найбільшим спільним фрагментом елементів x та y) існує для довільної пари x, y [8, Example 3.11]. Кажуть, що векторна ґратка E має *властивість перетинів*, якщо двоелементна підмножина $\{x, y\} \subset E$ має латеральний інфімум $x \bigcap y$. З головної проективної властивості довільної векторної ґратки E випливає властивість перетинів для E [8, Theorem 3.13].

Нехай E – векторна ґратка і X – дійсний лінійний простір. Відображення $T\colon E \to X$ називається *ортогонально адитивним оператором* (чи, коротко, *зарядом*, в термінології [13]), якщо для довільних диз'юнктних елементів $x, y \in E$, $x \perp y$, має місце рівність $T(x + y) = T(x) + T(y)$. Очевидно, кожний лінійний оператор є зарядом, а також кожний заряд T має властивість $T(0) = 0$. Якщо $E = \mathbb{R}$, то кожна функція $T\colon E \to X$ з властивістю $T(0) = 0$ є зарядом, оскільки умова $x \perp y$ для $x, y \in \mathbb{R}$ означає, що або $x = 0$, або $y = 0$. Якщо E має властивість перетинів, то для довільного $e \in E\backslash\{0\}$ відображення $Q_e\colon E \to E$, що визначається рівністю

$$Q_e(x) = x \bigcap e, \;\; x \in E, \tag{2}$$

є зарядом, який проектує E на $\mathfrak{F}_e$ (тобто, $(\forall x \in E)\, Q_e(x) \in \mathfrak{F}_e$ та $(\forall x \in \mathfrak{F}_e)\, Q_e(x) = x$), див. [6, Theorem 4] для випадку, коли E має головну проективну властивість та [12, Proposition 2.6] у загальному випадку. Легко бачити, що оператор Q_e не є порядково неперервним в точці e (більш того, в довільній ненульовій точці множини $\mathfrak{F}_e$), адже послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot e$, $n \in \mathbb{N}$ порядково збігається до e, проте $Q_e(x_n) = 0$ для всіх n, у той час як $Q_e(e) = e \neq 0$.

Нехай E – векторна ґратка, $0 < e \in E$ та $0 < \varepsilon < 1$. *Оператор ε-штрихування $Q_e^\varepsilon\colon E \to E$, побудований на векторі e*, визначається рівністю

$$Q_e^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\big(x - (1-\varepsilon)\, e\big)^+ \wedge \big((1+\varepsilon)\, e - x\big)^+\Big), \;\; x \in E. \tag{3}$$

З іншого боку, згідно з лемою 3.1 з [10], цей же самий оператор дорівнює:

$$Q_e^\varepsilon(x) = \left(e - \frac{1}{\varepsilon}|x - e|\right)^+ = e - e \wedge \frac{1}{\varepsilon}|x - e|. \tag{4}$$

Основні властивості оператору ε-штрихування, частина з яких нам буде потрібною, сформульовані у наступній теоремі.

Теорема 1 (Теорема 3.2, [10]). *Нехай E – векторна ґратка, $0 < e \in E$ та $0 < \varepsilon < 1$. Тоді відображення Q_e^ε, що задане формулою (3), є додатним порядково неперервним ортогонально адитивним оператором, що зберігає диз'юнктність, причому виконуються наступні властивості.*

(i) $(\forall x \in E)\;\; 0 \le Q_e^\varepsilon(x) = Q_e^\varepsilon(x^+) \le x^+ \wedge e.$

(ii) $(\forall x, y \in E)\;\; |Q_e^\varepsilon(x) - Q_e^\varepsilon(y)| \le \frac{2}{\varepsilon}\,|x - y|.$

(iii) $(\forall x \in \mathfrak{F}_e)\;\; Q_e^\varepsilon(x) = x;$

(iv) Для довільного $x \in E$ такого, що або $x \le (1-\varepsilon)\, e$, або $x \ge (1+\varepsilon)\, e$, виконується рівність $Q_e^\varepsilon(x) = Q_e(x) = 0$.

(v) Для довільного $x \in E$, якщо $0 < \varepsilon' < \varepsilon'' < 1$, то $Q_e^{\varepsilon'}(x) \le Q_e^{\varepsilon''}(x)$.

(vi) *Якщо $x-e$ – проективний елемент E, то $\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_e^{1/n}(x)$ та $x \mathbin{\mathbf{\cap}} e$ існують і*

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_e^{1/n}(x) = e - P_{x-e}\, e = x \mathbin{\mathbf{\cap}} e = Q_e(x) = x - P_{x-e}\, x. \tag{5}$$

(vii) *Нехай $e = e' \sqcup e''$. Тоді $Q^{\varepsilon}_{e'}(x) \sqcup Q^{\varepsilon}_{e''}(x) = Q^{\varepsilon}_{e}(x)$ для всіх $x \in E$. Якщо, більш того, e' та e'' – проективні елементи E, то $Q^{\varepsilon}_{e'} \sqcup Q^{\varepsilon}_{e''} = Q^{\varepsilon}_{e}$.*

Властивості (v) та (vi) пояснюють назву оператору ε-штрихування (латерального інфімуму), адже з них, як наслідок, дістаємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай E – векторна ґратка з головною проективною властивістю та $0 < e \in E$. Тоді для довільного $x \in E$ маємо $Q^{\varepsilon}_{e}(x) \downarrow Q_e(x)$ при $\varepsilon \to 0$.*

Таким чином, порядково неперервні оператори ε-штрихування Q^{ε}_{e} поточково наближають порядково розривний оператор Q_e.

Постановка задачі.

Нагадаємо, що векторна ґратка E називається *латерально повною*, якщо кожна диз'юнктна підмножина $A \subseteq E^+$ (тобто, $(\forall x, y \in A)\, x \neq y \Rightarrow x \perp y$) має супремум $\sup A$ в E (еквівалентно, кожна диз'юнктна підмножина $A \subseteq E$ має латеральний супремум $\bigcup A$), [8, Proposition 5.3]. Стандартні приклади латерально повних нескінченновимірних векторних ґраток є L_0 та ℓ_0. Векторна ґратка L_0 всіх класів еквівалентності вимірних за Лебеґом функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ з природним порядком $f \leq g$ тоді і лише тоді, коли $f(t) \leq g(t)$ для майже всіх $t \in [0,1]$, $f, g \in L_0$ є у багатьох розуміннях "найширшою" з усіх безатомних векторних ґраток зі зліченною властивістю супремумів, що є ґратковим аналогом сепарабельності (кажуть, що векторна ґратка E має зліченну властивість супремумів, якщо для довільної підмножини $A \subset E$, що має супремум $a = \sup A$ існує не більш, ніж зліченна підмножина $A_1 \subseteq A$ з тим же самим супремумом $a = \sup A_1$). Водночас, L_0 є F-простором (тобто, повним метричним лінійним простором X з метрикою ρ, інваріантною відносно зсувів: $(\forall x, y, z \in X)\, \rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$) з метрикою

$$\rho(f, g) = \int_{[0,1]} \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}\, d\mu, \quad f, g \in L_0,$$

який має цікаві патологічні властивості. Наприклад, існує замкнений нескінченновимірний лінійний підпростір $X \subset L_0$, в якому кожний лінійний неперервний оператор $T\colon X \to X$ є кратним до тотожного оператора I_X на X (тобто, $T = \lambda I_X$ при деякому $\lambda \in \mathbb{R}$), [5, Theorem 3.6] (детальніше про цікаві властивості простору L_0 написано в [4]).

З іншого боку, "найширшою" з усіх чисто атомних векторних ґраток зі зліченною властивістю супремумів є векторна ґратка ℓ_0 всіх послідовностей $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ дійсних чисел $x_n \in \mathbb{R}$ з покоординатним порядком $x \leq y$ тоді і лише тоді, коли $x_n \leq y_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, де $x, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_0$. Крім того, ℓ_0 є F-простором з метрикою

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad x, y \in \ell_0.$$

Для зручності відстань між нулем та довільним елементом x F-простору (X, ρ) називають F-нормою і позначають так: $\|x\| = \rho(x, 0)$ (див. [14] для детальнішого знайомства з F-просторами).

Основний результат спільної роботи автора даної статті з М. М. Поповим та О. Г. Фотій [4, Theorem 1] характеризує F-простори, які містять підпростір, ізоморфний до ℓ_0 (наприклад, таким є L_0, в якому кожний найменший підпростір, що містить диз'юнктну систему ненульових функцій, ізоморфний до ℓ_0). Для формулювання цього результату наведемо пару означень. Під словом "оператор" ми розуміємо довільну функцію $T\colon X \to Y$ між лінійними просторами X та Y таку, що $T0 = 0$.

Означення 1. *Нехай X, Y – F-простори. Ненульовий оператор $T\colon X \to Y$ називається* ***однорідно не зникаючим****, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що*

$$(\forall x \in X)(\forall a > 0)(\exists b > 0)\,\big(\|aTx\| \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; \|T(bx)\| \geq \delta\big).$$

Щоби побачити, що умова бути однорідно не зникаючим не є обтяжливою, зазначимо, що кожний додатний p-однорідний оператор при $p > 0$ (тобто, $T(\lambda x) = \lambda^p Tx$ для всіх $x \in X$ та $\lambda > 0$) є однорідно не зникаючим.

Означення 2. *Нехай X – лінійний простір. Ненульовий оператор $f\colon L_0 \to X$ називається* ***горизонтально не зникаючим****, якщо для кожного $x \in L_0$ такого, що $Tx \neq 0$, та кожного розкладу $x = y \sqcup z$ має місце або $Ty \neq 0$, або $Tz \neq 0$.*

Тепер ми готові сформулювати [4, Theorem 1].

Теорема 2. *Для довільного F-простору X наступні умови еквівалентні.*

(i) Існує ненульовий неперервний в нулі оператор $T\colon L_0 \to X$, який є водночас однорідно не зникаючим та горизонтально не зникаючим.

(ii) X містить підпростір, ізоморфний до ℓ_0.

Для обґрунтування істотності умов, які фігурують в теоремі 2, було побудовано приклад ненульового неперервного в нулі скалярного заряду на L_0, який автоматично є горизонтально не зникаючим (як кожний заряд) і не є однорідно не зникаючим (згідно з теоремою 2, адже числова пряма не містить підпросторів, ізоморфних до ℓ_0). Проте запропонований метод побудови не надавав прикладів неперервних в кожній точці ненульових скалярних зарядів на L_0, а саме неперервні скалярні заряди можуть бути векторами цін у економічній моделі Ерроу-Дебре. Отже, наступну задачу сформулював М. М. Попов.

Задача 1. *Чи існує ненульовий неперервний скалярний заряд на L_0?*

Трудність даного питання полягає в тому, що очевидні приклади неперервних скалярних зарядів на просторах L_p при $1 \leq p \leq \infty$ використовують інтеграл Лебеґа від елементів L_p, проте не всі елементи L_0 – інтегровні функції.

Добре відомо (і не важко бачити), що збіжність послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ у просторі L_0 до елемента x рівносильна збіжності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ до x за мірою, тобто:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \lim_{n\to\infty} \mu\{t \in [0,1] :\, |x_n(t) - x(t)| \geq \varepsilon\} = 0, \tag{6}$$

де μ – міра Лебеґа.

1 Основні результати

Теореми 3 та 4 дають позитивну відповідь на задачу 1.

Теорема 3. *Для довільних $e \in L_1^+$ та $\varepsilon > 0$ відображення $\mathbf{p}_e^\varepsilon\colon L_0 \to \mathbb{R}$, яке задається формулою для довільного $x \in L_0$*

$$\mathbf{p}_e^\varepsilon(x) = \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x)\, d\mu,\ x \in L_0, \tag{7}$$

де Q_e^ε – оператор ε-штрихування на L_0, побудований на векторі e, є неперервним додатним зарядом.

Доведення. Зафіксуємо довільні $e \in L_1^+$ та $\varepsilon > 0$ і визначимо відображення $T\colon L_0 \to \mathbb{R}$, поклавши для кожного $x \in L_0$

$$Tx = \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x)\, d\mu,\ x \in L_0. \tag{8}$$

Згідно з п. (i) теореми 1,

$$0 \le Q_e^\varepsilon(x) \le x^+ \wedge e \le e, \tag{9}$$

звідки дістаємо, що підінтегральна функція в (8) є вимірною та обмеженою, а отже, відображення T є коректно визначеним формулою (8).

Оскільки відображення T є композицією $\mathrm{Int} \circ Q_e^\varepsilon$ ортогонально адитивного оператора $Q_e^\varepsilon\colon L_0 \to L_\infty \subseteq L_0$ справа на лінійний оператор $\mathrm{Int} : L_\infty \to \mathbb{R}$ зліва, який довільному елементу $z \in L_\infty$ ставить у відповідність $\int_{[0,1]} z\, d\mu$, то T також є ортогонально адитивним оператором. Дійсно, для довільних $x, y \in L_0$ таких, що $x \perp y$, маємо

$$\begin{aligned} T(x+y) &= \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x+y)\, d\mu = \int_{[0,1]} \left(Q_e^\varepsilon(x) + Q_e^\varepsilon(y)\right)\, d\mu \\ &= \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x)\, d\mu + \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon\, d\mu = T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Доведемо неперервність відображення T. Нехай $x, x_n \in L_0$ для $n \in \mathbb{N}$ та $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ за метрикою L_0, а отже, за мірою, тобто, має місце умова (6).

Доведемо таке твердження:

$$\begin{aligned} &\textit{З кожної підпослідовності } (y_n)_{n=1}^\infty \textit{ послідовності } (x_n)_{n=1}^\infty \textit{ можна} \\ &\textit{виділити рідшу підпослідовність } (z_n)_{n=1}^\infty \textit{ таку, що } \lim_{n\to\infty} Tz_n = Tx_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Цього буде достатньо для доведення неперервності, адже (10) фактично означає, що з кожної підпослідовності $(Ty_n)_{n=1}^\infty$ послідовності $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ можна виділити рідшу підпослідовність $(Tz_n)_{n=1}^\infty$ таку, що $\lim_{n\to\infty} Tz_n = Tx_0$. Для послідовності чисел це означає, що $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$. Дійсно, якщо припустити, що це не так, то можна вибрати дійсне число $\delta > 0$ таке, що для довільного $m \in \mathbb{N}$ існує $n \ge m$ таке, що $|Tx_n - Tx_0| \ge \delta$. Таким чином, існує підпослідовність $(Ty_n)_{n=1}^\infty$ послідовності $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ така, що $|Ty_n - Tx_0| \ge \delta$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Ясно, що з такої підпослідовності не можна виділити жодну рідшу підпослідовність $(Tz_n)_{n=1}^{\infty}$ таку, що $\lim_{n\to\infty} Tz_n = Tx_0$, що суперечить умові (10). Отже, з (10) випливає, що $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$, і на цьому доведення неперервності T завершиться. Для доведення (10) зафіксуємо довільну підпослідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Як і сама послідовність, так і її підпослідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ прямує за мірою до x_0. Виберемо, згідно з [7, Теорема 4, с.40], рідшу підпослідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовності $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, яка прямує до x_0 майже скрізь на $[0,1]$. Оскільки порядкова збіжність послідовностей на векторній ґратці L_0 рівносильна до збіжності майже скрізь [15], то послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ порядково збігається до x_0. Згідно з теоремою 1, оператор Q_e^{ε} є порядково неперервним, а отже, послідовність $(Q_e^{\varepsilon} z_n)_{n=1}^{\infty}$ порядково збігається до $Q_e^{\varepsilon} x_0$ в L_0. Знову, згідно з вищезгаданим критерієм, $(Q_e^{\varepsilon} z_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається до $Q_e^{\varepsilon} x_0$ майже скрізь. Згідно з теоремою Лебеґа про обмежену збіжність [7, с. 104], враховуючи (9), $\lim_{n\to\infty} Tz_n = Tx_0$. Таким чином, (10) доведено. □

Зауваження 1. *Для всіх значень $e \in L_0^+ \setminus \{0\}$ та $\varepsilon > 0$ заряд $\mathbf{p}_e^{\varepsilon}$ не є монотонно неспадним, оскільки $e = \mathbf{p}_e^{\varepsilon}(e) > 0 = \mathbf{p}_e^{\varepsilon}\big((1+\varepsilon)\,e\big)$, згідно з пп. (3) і (4) теореми 1, в той час як $e < (1+\varepsilon)\,e$. Наступний приклад неперервного заряду буде монотонно неспадним, як потрібно для застосувань до економіки.*

Другий приклад базується на іншому нелінійному операторі. Нехай E – векторна ґратка, $e \in E^+$. Умовна порядкова проекція $Q_e\colon E \to E$ *відносно вектору e в роботі [11] визначається так:*

$$Q_e(x) = x^+ \wedge e - x^- \wedge e. \tag{11}$$

Серед властивостей умовної порядкової проекції, встановлених у [11], немає саме тих двох, які нам потрібні. Тому почнімо з допоміжних лем.

Лема 1. *Нехай E – векторна ґратка, $u, v, w \in E^+$ та $u \perp v$. Тоді виконуються такі рівності:*

(i) $u + v = u \vee v$;

(ii) $(u+v) \wedge w = (u \wedge w) + (v \wedge w)$;

(iii) $(u+v)^+ = u^+ + v^+$ та $(u+v)^- = u^- + v^-$.

Доведення. Зазначимо, що для додатних u і v умова $u \perp v$ означає $u \wedge v = 0$.

(i) Згідно з [2, Theorem 1.3 (2)], $u + v = u \vee v + u \wedge v = u \vee v$, оскільки в нашому випадку $u \wedge v = 0$.

(ii) З умов $0 \le (u \wedge w) \wedge (v \wedge w) \le u \wedge v = 0$ випливає, що $(u \wedge w) \perp (v \wedge w)$. Тому, використовуючи дистриб'ютивність ґраткових операцій [2, Theorem 1.8], отримуємо

$$\begin{aligned}(u+v) \wedge w &\overset{(i)}{=} (u \vee v) \wedge w = \\ &= (u \wedge w) \vee (v \wedge w) \overset{(i)}{=} \\ &= (u \wedge w) + (v \wedge w).\end{aligned}$$

(iii) $(u+v)^+ \overset{(i)}{=} (u \vee v) \vee 0 = (u \vee 0) \vee (v \vee 0) = u^+ \vee v^+ \overset{(i)}{=} u^+ + v^+$. Друга рівність доводиться аналогічно. □

Перші два пункти наступної леми – це добре відомі нерівності Біркгофа, див. теорему 1.9 (2), [2].

Лема 2. *Нехай E – векторна ґратка, $u, v, w \in E$. Тоді виконуються такі нерівності:*

(i) $|u \wedge w - v \wedge w| \le |u - v|$;

(ii) $|u \vee w - v \vee w| \le |u - v|$, *а отже,* $|u^+ - v^+| \le |u - v|$ *при* $w = 0$.

(iii) якщо, крім того, $u, v, w \ge 0$, *то* $|u \wedge w - v \wedge w| \le |u - v| \wedge 2w$.

Доведення. *(iii)* Оскільки $|u \wedge w - v \wedge w| \le u \wedge w + v \wedge w \le w + w = 2w$, то, враховуючи *(iii)*, отримуємо $|u \wedge w - v \wedge w| \le |u - v| \wedge 2w$. □

Лема 3. *Нехай послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів L_0 збігається до $x_0 \in L_0$ за метрикою. Тоді для довільного елементу $w \in L_1^+$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu = 0.$$

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Згідно з абсолютною неперервністю інтеграла Лебеґа, виберемо $\delta > 0$ так, щоби для довільної вимірної підмножини $A \subseteq [0,1]$ виконувалась імплікація

$$\mu(A) \le \delta \quad \Rightarrow \quad \int_A w \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Використовуючи, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається до x_0 за мірою, виберемо $n_0 \in \mathbb{N}$ так, щоби

$$(\forall n \ge n_0) \quad \mu(A_n) \le \delta, \ \text{ де } \ A_n = \left\{ t \in [0,1] : \ |x_n(t) - x_0(t)| \ge \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \tag{13}$$

Тоді для кожного $n \ge n_0$ з врахуванням (12), (13) та нерівностей $|x_n - x_0| \wedge w \le |x_n - x_0|$, $|x_n - x_0| \wedge w \le w$ дістаємо

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu &= \int_{A_n} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu + \int_{[0,1]\setminus A_n} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu \le \\ &\le \int_{A_n} w \, d\mu + \int_{[0,1]\setminus A_n} \frac{\varepsilon}{2} \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Теорема 4. *Нехай $0 < e \in L_0^+$. Тоді відображення $\boldsymbol{q}_e \colon L_0 \to \mathbb{R}$, що задане рівністю*

$$\boldsymbol{q}_e(x) = \int_{[0,1]} Q_e(x) \, d\mu = \int_{[0,1]} (x^+ \wedge e - x^- \wedge e) \, d\mu, \tag{14}$$

є неперервним монотонно неспадним на L_0^+ зарядом.

Доведення. Доведемо диз'юнктну адитивність $\boldsymbol{q}_e$. Нехай $x, y \in L_0$ $x \perp y$. Тоді, враховуючи, що $x^+ \wedge y^+ \leq |x| \wedge |y| = 0$, а отже, $x^+ \perp y^+$ та аналогічно $x^- \perp y^-$, отримуємо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_e(x+y) &= (x+y)^+ \wedge e - (x+y)^- \wedge e \overset{\text{Лема 1 }(iii)}{=} \\ &= (x^+ + y^+) \wedge e - (x^- + y^-) \wedge e \overset{\text{Лема 1 }(ii)}{=} \\ &= x^+ \wedge e + y^+ \wedge e - x^- \wedge e + y^- \wedge e = \boldsymbol{q}_e(x) + \boldsymbol{q}_e(y).\end{aligned}$$

Отже, $\boldsymbol{q}_e$ є зарядом. Доведемо неперервність $\boldsymbol{q}_e$. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність в L_0, яка збігається до $x_0 \in L_0$ за метрикою. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{q}_e(x_n) - \boldsymbol{q}_e(x_0)| &= \left| \int_{[0,1]} \left(x_n^+ \wedge e - x_n^- \wedge e - x_0^+ \wedge e + x_0^- \wedge e\right) d\mu \right| \leq \\ &\leq \int_{[0,1]} \left| \left(x_n^+ \wedge e - x_n^- \wedge e - x_0^+ \wedge e + x_0^- \wedge e\right) \right| d\mu \leq \\ &\leq \int_{[0,1]} \left| x_n^+ \wedge e - x_0^+ \wedge e \right| d\mu + \int_{[0,1]} \left| x_0^- \wedge e - x_n^- \wedge e \right| d\mu \overset{\text{Лема 2 }(iii)}{\leq} \\ &\leq \int_{[0,1]} \left| x_n^+ - x_0^+ \right| \wedge 2e \, d\mu + \int_{[0,1]} \left| x_0^- - x_n^- \right| \wedge 2e \, d\mu \overset{\text{Лема 2 }(ii)}{\leq} \\ &\leq 2 \int_{[0,1]} \left| x_n - x_0 \right| \wedge 2e \, d\mu\end{aligned}$$

З отриманих нерівностей та леми 3 дістаємо $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{q}_e(x_n) = \boldsymbol{q}_e(x_0)$. Таким чином, неперервність $\boldsymbol{q}_e$ доведено. Залишається показати, що $\boldsymbol{q}_e$ є неспадною на L_0^+. Нехай $x, y \in L_0$ та $0 \leq x \leq y$. Тоді

$$\boldsymbol{q}_e(x) = \int_{[0,1]} x \wedge e \, d\mu \leq \int_{[0,1]} y \wedge e \, d\mu = \boldsymbol{q}_e(y),$$

що і треба було встановити. □

2 Застосування до моделі економіки Ерроу-Дебре

Нагадаємо, що бінарне відношення $\succeq$ на множині P називається відношенням переваги *(див. [1, Definition 1.1.1]), якщо виконуються наступні умови для довільних $x, y, z \in P$:*

1. *$x \succeq x$ (рефлексивність);*
2. *$x \succeq y$ або $y \succeq x$ (лінійність);*
3. *якщо $x \succeq y$ та $y \succeq z$, то $x \succeq z$ (транзитивність).*

Очевидно, що кожне відношення нестрогого лінійного порядку є відношенням переваги, але, наприклад, максимальне відношення P^2, тобто, $(\forall x, y \in P)\, x \succeq y$ є відношенням переваги, яке не є відношенням порядку. З іншого боку, на фактор-множині по

відношенню еквівалентності $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли $x \succeq y$ та $y \succeq x$, відношення переваги індукує відношення порядку. Запис $x \not\succeq y$ означає заперечення $x \succeq y$. "Строга" версія відношення переваги визначається так: $x \succ y$ означає, що $x \succeq y$ та $y \not\succeq x$. Вживають також $y \preceq x$, як рівносильну версію запису $x \succeq y$ (аналогічне правило стосується відношень $\succ$ та $\not\succeq$). Відношення $x \not\succ y$ означає заперечення $x \succ y$.

Нехай $\succeq$ – відношення переваги на множині P. Елемент $q_0 \in Q$ підмножини $Q \subseteq P$ називається $\succeq$-максимальним (чи просто максимальним, якщо зрозуміло, про яке відношення переваги йдеться), якщо не існує $x \in Q$ такого, що $x \succ q_0$.

Нехай $(G, \sqsubseteq)$ – частково впорядкована множина з найменшим елементом $0 \in G$. Супремум та інфімум двоелементної підмножини $\{x, y\} \subset G$ позначатимемо через $x \bigcup y$ та $x \bigcap y$ відповідно. Запис $x = y \oplus z$ означає, що $y \bigcup z = x$ та $y \bigcap z = 0$.

Частково впорядкована множина $(G, \sqsubseteq)$ з найменшим елементом 0 називається комплементарним простором, *якщо виконуються наступні умови:*

$(CS1)$ *для довільних $x, y \in G$ таких, що $y \sqsubseteq x$, існує елемент $z \in G$ такий, що $x = y \oplus z$;*

$(CS2)$ *для довільних $x, y, u, v \in G$ таких, що $x \oplus y = u \oplus v$ існують елементи $a, b, c, d \in G$ такі, що $x = a \oplus b$, $y = c \oplus d$, $u = a \oplus c$ та $v = b \oplus d$.*

Нехай G – комплементарний простір та X – лінійний простір. Відображення $T\colon G \to X$ називається зарядом, *якщо для довільних $x, y, z \in G$ з умови $x = y \oplus z$ випливає, що $T(x) = T(y) + T(z)$. Стандартний приклад комплементарного простору є довільна векторна ґратка E з латеральним порядком $(E, \sqsubseteq)$, а нове поняття заряду на комплементарному просторі $(E, \sqsubseteq)$ збігається із поняттям заряду на векторній ґратці E. Інший стандартний приклад комплементарного простору є довільна булева алгебра $\mathcal{B}$ відносно свого порядку, а поняття заряду збігається з поняттям скінченно-адитивної X-значної міри на $\mathcal{B}$.*

Класична модель економіки Ерроу-Дебре [3], [1] базується на додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$ d-вимірної векторної ґратки $\mathbb{R}^d$, де $d \in \mathbb{N}$ – це кількість товарів даної економіки. Вектори $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d_+$ розглядаються як вибірки кількостей товарів і називаються товарними векторами, які можуть вироблятися, продаватися, обмінюватися та споживатися. У деяких версіях моделі економіки замість скінченновимірної векторної ґратки $\mathbb{R}^d$ розглядається довільна векторна ґратка E, або ще загальніше, комплементарний простір [13].

Традиційно, ціною *на векторній ґратці E, додатний конус якої E^+ розглядається, як множина всіх товарних векторів, називається звуження на E^+ довільного додатного лінійного функціоналу $\mathbf{p}\colon E \to \mathbb{R}$ (додатність лінійного функціоналу $\mathbf{p}$ означає, що $\mathbf{p}(\mathbf{x}) \geq 0$ для довільного $\mathbf{x} \in E^+$). Значення $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ визначає ціну довільного товарного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^+$.*

Ціною *на комплементарному просторі $(G, \sqsubseteq)$ називатимемо довільний додатний неспадний скалярний заряд $\mathbf{p}\colon G \to [0, +\infty)$.*

Кожна фіксована ціна $\mathbf{p}$ та фіксований товарний вектор $\boldsymbol{\omega} \in E^+$ на векторній ґратці E або $\boldsymbol{\omega} \in G$ на комплементарному просторі $(G, \sqsubseteq)$, який називається початковим

запасом, *визначають* бюджетну множину *товарних векторів за допомогою рівності:*

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) := \big\{x \in E^+ : \mathbf{p}(\mathbf{x}) \le \mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})\big\} \text{ чи відповідно } \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) := \big\{x \in G : \mathbf{p}(\mathbf{x}) \le \mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})\big\}.$$

У скінченновимірному випадку $E = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, де простір лінійних функціоналів на E ототожнюється із самим E, геометрично бюджетна множина – це багатовимірна піраміда, яка за умови строгої додатності ціни $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ (тобто, $\mathbf{p}(\mathbf{e}_k) > 0$ для всіх елементів $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \dots, d$ стандартного базису простору $\mathbb{R}^d$) компактною підмножиною $\mathbb{R}^d$, і яка цілком природно має $\succeq$-максимальні елементи для широкого класу відношень переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ (див. [1, Subsection 1.2]), а при певних умовах на відношення переваги максимальний елемент єдиний [1, Theorem 1.2.3]. Оскільки умова строгої додатності $\mathbf{p}$ є, очевидно, необхідною для обмеженості бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$, то максимальні елементи бюджетних множин розглядаються лише для строго додатних цін $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$.

Для побудови моделі економіки Ерроу-Дебре важливим є питання існування та єдиності максимальних елементів бюджетних множин (див. підрозділ 1.2 монографії [1]).

Носієм *елемента* $\mathbf{z} \in L_0$ *називається множина* $\operatorname{supp}\mathbf{z} = \{t \in [0,1] : \mathbf{z}(t) \neq 0\}$, *яка визначена з точністю до множини нульової міри.*

Розглянемо в ролі комплементарного простору G порядковий інтервал $[0, \mathbf{f}_0]$ у векторній ґратці L_0 з додатним вектором $\mathbf{f}_0 \in L_0$, носій якого є максимальним: $\operatorname{supp}\mathbf{f}_0 = [0,1]$, *тобто,*

$$G = [0, \mathbf{f}_0] = \big\{\mathbf{x} \in L_0 : 0 \le \mathbf{x} \le \mathbf{f}_0\big\}$$

і наступне відношення переваги на G, залежне від параметру $\mathbf{e} \in L_0^+$, задане для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$:

$$\mathbf{x} \succeq_{\mathbf{e}} \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}\| \ge \|\mathbf{y} \wedge \mathbf{e}\|,$$

де норма розглядається у просторі L_0.

Наступне означення є аналогом строгої додатності ціни для випадку скінченновимірних векторних ґраток.

Наступний результат є аналогом теореми 1.2.3 з [1] для нашого випадку.

Теорема 5. *Для довільного $\mathbf{f}_0 \in L_0$, $G = [0, f_0]$, довільного $\mathbf{e} \in L_1 \cap G$ та довільного початкового товарного запасу $\boldsymbol{\omega} \in G$ існує $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальний елемент $\mathbf{x}^*$ бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$, який має вигляд $\mathbf{x}^* = (\gamma_0 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}) \wedge \mathbf{f}_0$, $\gamma_0 \in [0, +\infty)$.*

Доведення ґрунтується на двох лемах.

Лема 4. *Для довільної вимірної підмножини $A \subseteq [0,1]$, $\mu(A) > 0$ та довільного $x \in L_1^+$ виконується нерівність:*

$$\int_A \frac{x}{1+x}\, d\mu \le \frac{\int_A x\, d\mu}{1 + \frac{1}{\mu(A)} \int_A x\, d\mu}. \tag{15}$$

Доведення леми 4. Згідно з відомими властивостями інтеграла Лебеґа, достатньо довести (15) для випадку простої функції $x \in L_1^+$. Отже, нехай $x = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$, де

$a_k \in [0, +\infty)$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_k$. Зазначимо, що $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. У нових позначеннях нерівність (15) набуває вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \mu(A_k)}{1 + a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)}{1 + \frac{1}{\mu(A)} \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)}{\frac{1}{\mu(A)} \sum_{k=1}^{n} (1 + a_k) \mu(A_k)}. \tag{16}$$

Здійснімо кілька послідовних еквівалентних перетворень нерівності (16), яку потрібно довести:

$$\frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (1 + a_k) \mu(A_k) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \mu(A_i)}{1 + a_i} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} (1 + a_k) \mu(A_k) - \mu(A);$$

$$\sum_{k=1}^{n} (1 + a_k) \mu(A_k) - \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (1 + a_k) \mu(A_k) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \mu(A_i)}{1 + a_i} \geq \mu(A);$$

$$\sum_{k=1}^{n} (1 + a_k) \mu(A_k) \left(1 - \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_i \mu(A_i)}{1 + a_i} \right) \geq \mu(A). \tag{17}$$

Помножимо (17) на $\mu(A)$ та, з урахуванням рівності

$$1 = \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + a_i}{1 + a_i} \mu(A_i),$$

перепишемо (17) у наступній еквівалентній формі:

$$\sum_{k=1}^{n} (1 + a_k) \mu(A_k) \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(A_i)}{1 + a_i} \geq \big(\mu(A)\big)^2. \tag{18}$$

Але нерівність (18) є відомою нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \right)^2, \quad u_k, v_k \geq 0$$

при $u_k = \sqrt{(1 + a_k)\mu(A_k)}$, $v_i = \sqrt{\frac{\mu(A_i)}{1 + a_i}}$, адже тоді $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \mu(A)$. □

Лема 5. *Нехай $a > 0$ – дійсне число та $u, v, w \in L_1$ такі елементи, що $0 < v \leq w \leq a \cdot \mathbf{1}_Y$ та $a \cdot \mathbf{1}_X \leq u$. Нехай для вимірних множин $X, Y \subseteq [0, 1]$ виконується нерівність*

$$\int_X (u - a)\, d\mu \leq \int_Y (w - v)\, d\mu.$$

Тоді

$$\int_X \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u} \right) d\mu \leq \int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w} \right) d\mu.$$

Доведення леми 5. Використовуючи умови леми, запишемо:

$$\begin{aligned}\int_X \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{u}\right)\,d\mu &= \int_X \frac{u-a}{au}\,d\mu \le\\ &\le \int_X \frac{u-a}{a^2}\,d\mu =\\ &= \frac{1}{a^2}\int_X (u-a)\,d\mu \le\\ &\le \frac{1}{a^2}\int_Y (w-v)\,d\mu =\\ &= \int_Y \frac{w-v}{a^2}\,d\mu \le\\ &\le \int_Y \frac{w-v}{vw}\,d\mu =\\ &= \int_Y \left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)\,d\mu.\end{aligned}$$

□

Доведення теореми 5. Зафіксуємо довільні $\mathbf{f}_0 \in L_0$, $\mathbf{e} \in L_1$ та $\boldsymbol{\omega} \in G$. Зазначимо, що $\boldsymbol{q_e}(\boldsymbol{\omega}) \le \int_{[0,1]} \mathbf{e}\,d\mu$ і розглянемо два випадки.

Випадок (*i*): $\boldsymbol{q_e}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{[0,1]} \mathbf{e}\,d\mu$. Тоді $\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_0$ є $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальним елементом бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$, оскільки в цьому випадку $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$ і $\mathbf{f}_0$ є $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальним елементом G.

Випадок (*ii*): $\boldsymbol{q_e}(\boldsymbol{\omega}) < \int_{[0,1]} \mathbf{e}\,d\mu$. Для довільного $\gamma \in [0,+\infty)$ покладемо:

$$\mathbf{x}_\gamma = (\gamma \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}) \wedge \mathbf{f}_0.$$

Крім того, визначимо функцію $\varphi\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, поклавши для кожного $\gamma \in [0,+\infty)$

$$\varphi(\gamma) = \mathbf{q}_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}_\gamma) = \int_{[0,1]} \mathbf{x}_\gamma \wedge \mathbf{e}\,d\mu.$$

З неперервності ґраткових операцій на L_0 та інтеграла Лебеґа випливає неперервність функції φ. Оскільки $\varphi(0) = 0$ та $\lim_{\gamma\to+\infty} \varphi(\gamma) = \int_{[0,1]} \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_0\,d\mu$, то існує (не обов'язково єдине) значення $\gamma_0 \in [0,+\infty)$ таке, що $\mathbf{q}_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}_{\gamma_0}) = \mathbf{q}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\omega})$. Покладемо $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{\gamma_0}$ і доведемо максимальність $\mathbf{x}^*$. Згідно з вибором, маємо

$$\mathbf{q}_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{q}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\omega}), \tag{19}$$

а отже, $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$. Розглянемо довільний $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$ і доведемо, що

$$\|\mathbf{x}^*\| \ge \|\mathbf{x}\|. \tag{20}$$

З умови $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$ та (19) випливає

$$\int_{[0,1]} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\,d\mu \le \int_{[0,1]} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\,d\mu. \tag{21}$$

Покладемо

$$A := \{t \in [0,1] : \mathbf{x}^*(t) < \boldsymbol{e}(t)\}, \;\; A^C = [0,1] \setminus A.$$

Тоді

$$\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{1}_A = \gamma_0 \cdot \mathbf{1}_A \quad \text{та} \quad \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{1}_{A^C} = \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{1}_{A^C}. \tag{22}$$

Розглянемо два підвипадки.

Підвипадок (*ii.a*): $\int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu \le \int_A (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu$. Оскільки $\int_A (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu = \int_A \gamma_0\, d\mu = \gamma_0 \cdot \mu(A)$, то

$$\int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu \le \gamma_0 \cdot \mu(A). \tag{23}$$

Отже, згідно з лемою 4, використовуючи імплікацію (яка є добре відомою вправою)

$$(\forall s,t \in \mathbb{R})\; 0 \le s \le t \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{1+s} \le \frac{t}{1+t}, \tag{24}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\| &= \int_A \frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}}{1 + \mathbf{x} \wedge \mathbf{e}}\, d\mu \overset{(15)}{\le} \\ &\le \frac{\int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu}{1 + \frac{1}{\mu(A)} \int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu} \overset{(23)}{\le} \\ &\le \frac{\gamma_0 \cdot \mu(A)}{1+\gamma_0} = \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\|. \end{aligned} \tag{25}$$

Крім того,

$$\|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\| \le \|(\mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\| \overset{(22)}{=} \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\|. \tag{26}$$

Нарешті, з (25) і (26) випливає:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\| &= \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\| + \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\| \le \\ &\le \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\| + \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}\| = \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\|, \end{aligned}$$

тобто, $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \preceq_e (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})$.

Підвипадок (*ii.a*):

$$\alpha := \int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu - \int_A (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu = \int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu - \gamma_0 \cdot \mu(A) > 0. \tag{27}$$

Покладемо $B := \{t \in A^C : \mathbf{x}(t) < \mathbf{e}(t)\}$ і зазначимо, що $\mu(B) > 0$, оскільки у протилежному випадку було б $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C} = \mathbf{e} = (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, що разом з (27) суперечило би (21). Далі покладемо для кожного $s \in [0,1]$

$$A_s = \{t \in A \cap [0,s] : (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})(t) > \gamma_0\} = \{t \in A \cap [0,s] : (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})(t) > (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})(t)\}.$$

Визначимо функцію $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, поклавши

$$\varphi(s) = \int_{A \setminus A_s} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu - \int_{A \setminus A_s} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu, \quad s \in [0,1].$$

Зазначимо, що $\varphi(0) > 0$ завдяки (27), а також $\varphi(1) \le 0$, згідно з означенням множини A_s. З відомих властивостей інтеграла Лебеґа випливає неперервність функції φ. А отже, виберемо $s_0 \in (0, 1]$ так, щоби $\varphi(s_0) = 0$, тобто,

$$\int_{A\setminus A_{s_0}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\, d\mu = \int_{A\setminus A_{s_0}} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\, d\mu. \tag{28}$$

Тепер покладемо $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{[0,1]}$, $X = A_{s_0}$, $Y = A^C$, $v = (\mathbf{1} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, $w = (\mathbf{1} + \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, $a = 1 + \gamma_0$, $u = (\mathbf{1} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{A_{s_0}}$. Тоді $v > 0$, оскільки $\mathbf{x} \ge 0$, $B \subseteq A^C$ і $\mu(B) > 0$. Крім того, з (22) дістаємо, що $v \le w$. Далі, з означення $\mathbf{f}_0$ випливає, що $\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{1}_{A^C} \le \gamma_0 \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, а отже, $w \le a \cdot \mathbf{1}_Y$. Нарешті, з означення множини A_s отримуємо $a \cdot \mathbf{1}_X = (1 + \gamma_0) \cdot \mathbf{1}_{A^C} \le (\mathbf{1} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{A^C} = u$. Таким чином, виконуються умови леми 5: $0 < v \le w \le a \cdot \mathbf{1}_Y$ та $a \cdot \mathbf{1}_X \le u$.

Позначимо $\mathbf{z} = (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) - (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})$. Згідно з (28),

$$\int_{A\setminus A_{s_0}} \mathbf{z}\, d\mu = 0. \tag{29}$$

Тому

$$\int_Y (w - v)\, d\mu - \int_X (u - a)\, d\mu = \int_{A^C} \mathbf{z}\, d\mu + \int_{A_{s_0}} \mathbf{z}\, d\mu \overset{(29)}{=} \int_{[0,1]} \mathbf{z}\, d\mu \overset{(21)}{\ge} 0.$$

Згідно з лемою 5, має місце нерівність

$$\int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right) d\mu - \int_X \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u}\right) d\mu \ge 0. \tag{30}$$

Зазначимо, що для довільного $\mathbf{y} \in L_0^+$ та довільної вимірної підмножини $D \subseteq [0, 1]$

$$\|\mathbf{y} \cdot \mathbf{1}_D\| = \int_D \frac{\mathbf{y}}{1 + \mathbf{y}}\, d\mu = \int_D \left(1 - \frac{1}{1 + \mathbf{y}}\right) d\mu = \mu(D) - \int_D \frac{d\mu}{1 + \mathbf{y}}\,.$$

Із врахуванням останньої рівності запишемо:

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_Y\| - \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_Y\| = \\
&= \mu(Y) - \int_Y \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} - \mu(Y) + \int_Y \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} = \\
&= \int_Y \left(\frac{1}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} - \frac{1}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})}\right) d\mu = \\
&= \int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right) d\mu;
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_X\| - \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_X\| = \\
&= \mu(X) - \int_X \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} - \mu(X) + \int_X \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} = \\
&= \int_X \left(\frac{1}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} - \frac{1}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})}\right) d\mu = \\
&= -\int_X \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{a}\right) d\mu.
\end{aligned} \tag{32}$$

Крім того, згідно з лемою 4,

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\| &= \int_{A\setminus A_{s_0}}\frac{\mathbf{x}\wedge\mathbf{e}}{1+(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})}\,d\mu \le\\ &\le \frac{\int_{A\setminus A_{s_0}}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\,d\mu}{1+\frac{1}{\mu(A\setminus A_{s_0})}\int_{A\setminus A_{s_0}}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\,d\mu}\overset{(28)}{=}\\ &= \frac{\int_{A\setminus A_{s_0}}(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})\,d\mu}{1+\frac{1}{\mu(A\setminus A_{s_0})}\int_{A\setminus A_{s_0}}(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})\,d\mu}\overset{(24)}{\le}\\ &\le \frac{\int_{A\setminus A_{s_0}}\gamma_0\,d\mu}{1+\frac{1}{\mu(A\setminus A_{s_0})}\int_{A\setminus A_{s_0}}\gamma_0\,d\mu} =\\ &= \frac{\gamma_0\cdot\mu(A\setminus A_{s_0})}{1+\gamma_0} = \int_{A\setminus A_{s_0}}\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0}\,d\mu =\\ &= \|\gamma_0\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\|\overset{(22)}{=}\|(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\|.\end{aligned}$$

Отже, доведено нерівність

$$\|(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\|-\|(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\cdot\mathbf{1}_{A\setminus A_{s_0}}\|\ge 0. \tag{33}$$

Враховуючи, що $X\sqcup Y\sqcup(A\setminus A_{s_0})=[0,1]$ і додаючи нерівності (31), (32) та (33), отримуємо $\|\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e}\|-\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{e}\|$, тобто, $(\mathbf{x}\wedge\mathbf{e})\preceq_e(\mathbf{x}^*\wedge\mathbf{e})$. □

Зауваження 2. *Легко бачити, що в умовах теореми 5, $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальний елемент бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$ не завжди єдиний у випадку, коли $\mathbf{e}<\mathbf{f}_0$. Наприклад, у випадку* ***(i)****: $\boldsymbol{q_e}(\boldsymbol{\omega})=\int_{[0,1]}\mathbf{e}\,d\mu$ кожний вектор $\mathbf{x}\in[\mathbf{e},\mathbf{f}_0]$ є $\succeq_{\mathbf{e}}$-максимальним для $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$.*

Зазначимо, що практичний сенс поняття бюджетної множини – це множина всіх можливих закупівель, які можна здійснити у межах даного запасу коштів, а максимальний елемент бюджетної множини – це саме той вибір закупівлі, який матиме максимальний ефект з точки зору певного відношення переваги, яке має властивості 1-3, згідно з означенням.

Автор висловлює щиру подяку М. М. Попову за постановку основної задачі і корисні консультації.

Список літератури

[1] Aliprantis C. D., Brown D. J., Burkinshaw O. Existence and Optimality of Competitive Equilibria, *Springer-Verlag, Berlin. (1989). DOI 10.1007/978-3-662-21893-8*

[2] Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators, Springer, Dordrecht, 2006.

[3] Arrow K. J., Debreu G. Existence of an equilibrium for a competetive economy, *Econometrica 1954, 22, 265–290.*

[4] Fotiy O., Popov M., Ukrainets O. A characterization of F-spaces containing an isomorph of $\boldsymbol{\ell_0}$, Carpathian Math. Publ. 77 (2025), no 1, 777–777. https://doi.org/10.

[5] Kalton N. J., Roberts J. W. A rigid subspace of L_0. *Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), no 3, 353–381.*

[6] A. Kamińska, I. Krasikova, M. Popov. Projection lateral bands and lateral retracts, *Carpathian Math. Publ., 12 (2020), no. 2, 333–339. DOI: 10.15330/cmp.12.2.333-339*

[7] Maslyuchenko V. K. Lectures on measure and integral theory. *Part 2. Chernivtsi: Chernivtsi National University (2011), 175 p.*

[8] V. Mykhaylyuk, M. Pliev, M. Popov, The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators, *Positivity 25, no 2 (2021), 291-327. DOI: https://doi.org/10.1007/s11117-020-00761-x*

[9] V. Mykhaylyuk, M. Pliev, M. Popov, The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators II. *Positivity 28, 8 (2024). https://doi.org/10.1007/s11117-023-01025-0*

[10] V. Mykhaylyuk, M. Popov. ε-shading operator on Riesz spaces and order continuity of orthogonally additive operators. Results in Math. 77, 209 (2022). https://doi.org/10.1007/s00025-022-01742-0

[11] M. Popov, Horizontal Egorov property of Riesz spaces. *Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), no 1, 323–332. DOI: https://doi.org/10.1090/proc/15235*

[12] M. Popov, Banach lattices of orthogonally additive operators, *J. Math. Anal. Appl. 514, no 1 (2022), Paper No. 126279, 26 pp. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126279*

[13] Popov M. M., Ukrainets O. Z. A maximal Riesz-Kantorovich theorem with applications to markets with an arbitrary commodity set. Mat. Studii. 62 (2024), no 2, 199–210. https://doi.org/10.30970/ms.62.2.199-210

[14] S. Rolewicz, Metric linear spaces, *PWN, Warszawa (1985).*

[15] Vulikh B. Z. Introduction to the theory of partially ordered spaces. Wolters-Noordhoff Sci. Publ. Ltd. Groningen (1967), 387 p.

Надійшло 31.05.2025

Ukrainets O. Z. Continuous charges on L_0 with an application to the Arrow-Debreu model of economy, Bukovinian Math. Journal. ***13****, 1 (2025), 66–82.*

In a recent paper by the author, joint with O. G. Fotiy and M. M. Popov, we used the orthogonally additive projection of L_0 onto the lateral band generated by the unit function, to construct an example of a nonzero orthogonally additive functional on L_0, which is continuous at zero. However, all examples of the kind are discontinuous at some other points. So the question on the existence of a nonzero orthogonally additive functional on L_0, which is continuous at every point, naturally arises. We give an affirmative answer to this question by constructing of two different types of such examples. Next we apply the obtained results to the Arrow-Debreu model of economy.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.07

Косович І.Т., Черевко І.М., Шкільнюк Д.В.

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ SIR МОДЕЛЕЙ ЕПІДЕМІОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Наведено базові припущення та структуру узагальненої епідеміологічної SIR моделі. Досліджено ряд якісних властивостей SIR моделі: існування розв'язку початкової задачі, аналіз динаміки здорових, інфікованих та одужавших осіб, які дозволяють зробити висновки про поведінку пандемії на макрорівні. Досліджено граничні властивості розв'язків SIR моделі, одержано співвідношення яке дозволяє оцінити максимальне число можливих інфікованих осіб.

Ключові слова і фрази: SIR модель, структура популяції при пандемії, моделювання процесів епідеміології, математичний аналіз SIR моделі.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *kosovych.ihor@chnu.edu.ua, i.cherevko@chnu.edu.ua, d.skilnjuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Складність та різноманітність процесів, що відбуваються у живих організмах, часто перевищують можливості отримати повний та докладний опис їх функціонування. Враховуючи цю обмеженість при розробці нових методів дослідження та діагностики процесів, часто звертаються до заміни реального об'єкта дослідження (оригіналу) іншим, схожим об'єктом (моделлю). За допомогою моделі можна моделювати та вивчати найрізноманітніші процеси, змінюючи часові масштаби, встановлюючи різні початкові умови, змінюючи характеристики об'єкта дослідження та впливи на нього. Це дозволяє спостерігати та аналізувати, як зміни впливають на систему та які результати можуть бути отримані.

Поширення інфекційних захворювань являє собою складне явище з великою кількістю непередбачуваних факторів. Створення математичних моделей поширення інфекцій є важливим елементом для дослідження складної динаміки захворювання. У цій роботі ми розглядатимемо версію SIR моделі Кермака–Маккендріка, представлену в багатьох класичних виданнях [1, 2, 3, 4], як прототип моделі інфекційної хвороби в якій адаптована Мальтузіанська модель зростання популяції.

УДК 519.87:574.3
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

© Косович І.Т., Черевко І.М., Шкільнюк Д.В., 2025

Поширеним підходом для моделювання процесів у епідеміології є імітаційне моделювання за допомогою мультиагентного методу, який забезпечує можливість експериментувати з параметрами моделі та отримати різні сценарії розвитку подій [5, 6, 7].

Дослідження SIR моделей у вигляді системи диференційних рівнянь дозволяє описати поведінку динаміки захворювання на макрорівні зберігаючи високий рівень абстрагування [8, 9, 10, 11].

1 Побудова математичних моделей епідеміології

У найпростіших SIR моделях здійснюються базові припущення, наприклад, що кожен має однакові шанси підхопити вірус від інфікованої людини, оскільки популяція ідеально і рівномірно змішана, і що всі люди з хворобою однаково заразні, поки не помруть або не одужають.

Згідно класичної SIR моделі є набір агентів, які рухаються і тим самим імітують місто. Населення в моделі ділиться на три групи в залежності від статусу: S (suspectible) – здоровий і сприйнятливий до хвороби (особи, які ще не піддавалися цьому захворюванню і, отже, ризикують заразитися), I (infected) – інфікований (це ті, хто зараз є носіями хвороби та можуть передати її іншим), R (recovered) – особи, що вже перенесли інфекцію та виробили імунітет, тому вони більше не можуть підхопити чи поширити хворобу. В даній задачі люди переходять із фази у фазу поступово

$$S \to I \to R.$$

Ця базова модель інфекційного захворювання має багато різних модифікацій та базується на ряді припущень щодо швидкостей зміни агентів у виділених групах [12]:

1. Зміна чисельності сприйнятливих осіб S пропорційна до кількості контактів між сприйнятливими особами та інфікованими.

2. Зміна чисельності інфікованих осіб I залежить від швидкості інфікування осіб S та швидкості одужання осіб I.

3. Зміна чисельності осіб, що одужали R пропорційна чисельності інфікованих осіб I.

Кількість осіб у кожному з цих класів змінюється з часом, тобто $S(t)$, $I(t)$ і $R(t)$ є функціями часу t. Загальний розмір популяції припускаємо N є сумою кількостей осіб цих трьох класів

$$N = S(t) + I(t) + R(t).$$

Одержимо диференціальні рівняння, які описують динаміку осіб в кожному класі, які вперше були отримані Кермаком і Маккендріком в роботі [13]. Для цього будемо розглядати як чисельність осіб змінюється з часом.

Коли сприйнятлива до захворювання особа вступає в контакт з інфекційною то ця сприйнятлива особа з певною ймовірністю заражається і переходить із класу сприйнятливих до класу інфікованих. Сприйнятлива популяція зменшується за одиницю часу на всіх індивідів, які інфікуються за цей час. При цьому клас інфекційних збільшується на стільки ж нових інфікованих осіб. Кількість осіб, які інфікуються за одиницю часу в епідеміології, називається швидкістю захворюваності, та характеризує швидкість зміни класу сприйнятливих осіб $S(t)$.

Розглянемо представника класу $I(t)$ (заражена особа) і будемо припускати, що cN кількість контактів цього представника за одиницю часу є пропорційна загальній чисельності популяції з показником пропорційності c. Оскільки S/N – це імовірність того, що відбувся контакт із сприятливою особою, тоді cS – це кількість контактів із сприятливими особами, яку здійснює один представник класу $I(t)$ за одиницю часу.

Припустимо, що p – це імовірність того, що контакт сприятливої особи із інфікованою особою призведе до її зараження. Позначивши

$$\beta = cp$$

маємо, що βS – це кількість сприятливих осіб, що будуть інфіковані однією особою із класу $I(t)$ за одиницю часу. Тоді βSI – це кількість усіх інфікованих осіб за одиницю часу.

Таким чином дістаємо таке диференціальне рівняння, що описує динаміку в класі S:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta IS. \tag{1}$$

Сприйнятливі особи, що інфікувалися, переходять до класу I, в той же час особи, що одужали, покидають клас I та переходять в клас R. Нехай α – це частка інфікованих осіб, що одужали за одиницю часу, тоді маємо диференціальні рівняння, що описують динаміку в класах інфікованих осіб I:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta IS - \alpha I, \tag{2}$$

та в класі осіб, що перенесли інфекцію і одужали

$$\frac{dR(t)}{dt} = \alpha I. \tag{3}$$

Таким чином, одержали систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta IS, \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta IS - \alpha I, \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \alpha I, \end{aligned} \tag{4}$$

яка відома в літературі як SIR модель Кермака–Маккендріка [1]-[4], [8]-[13].

2 Існування та єдиність розв'язку SIR моделі

Введемо позначення

$$x = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta IS \\ \beta IS - \alpha I \\ \alpha i \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тоді систему диференціальних рівнянь (4) запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{6}$$

Встановимо одну допоміжну нерівність для векторної функції

$$f(x) = \left(f_1\left(x_1, \ldots, x_n\right), \ldots, f_n\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right),$$

що визначено на випуклій множині $x \in D$.

Лема. *Якщо справджуються нерівності*

$$\left\| \frac{\partial f_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_j} \right\| \leq K, \quad i, j = \overline{1, n},\ x \in D,\ K > 0, \tag{7}$$

тоді має місце нерівність

$$\|f(x) - f(y)\| \leq n^{\frac{3}{2}} K \|x - y\|, \quad x, y \in D. \tag{8}$$

Доведення. Нехай $x, y \in D$, введемо відрізок, що їх з'єднує

$$u(t) = y + t(x - y).$$

Якщо $0 \leq t \leq 1$, то $u(t)$ пробігає відрізок, що з'єднує точки x та y, оскільки множина D випукла. Застосуємо формулу Лагранжа

$$f_i(x) - f_i(y) = f_i(u(1)) - f_i(u(0)) = \left. \frac{df_i(u(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Для похідної $\dfrac{df_i(u(t))}{dt}$ маємо співвідношення

$$\frac{df_i(u(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i\left(u_i(t), \ldots, u_n(t)\right)}{\partial x_k} \cdot \frac{du_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i\left(u_i(t), \ldots, u_n(t)\right)}{\partial x_k} \left(x_k - y_k\right).$$

Отже,

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \sum_{k=1}^{n} K \left|x_k - y_k\right| \leq nK\|x - y\|.$$

Тепер одержуємо потрібну нерівність

$$\|f(x) - f(y)\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \left[f^i(x) - f^i(y)\right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} n^2 K^2 \|x - y\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(n^3 K^2 \|x - y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{3}{2}} K \|x - y\|.$$

Наслідок 1. *Якщо частинні похідні функції $f(x) = \left(f_1\left(x_1, \ldots, x_n\right), \ldots,\ f_n\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)$ обмежені на випуклій множині D, то ця функція є локально Ліпшицевою в довільному обмеженому циліндрі, що міститься в D.*

Дійсно, із нерівності (8) маємо

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|,$$

де $L = n^{\frac{3}{2}} K$, тобто виконується умова Ліпшиця.

Наслідок 2. *([14] Теорема 5.6) Якщо функція $f(x)$ є локально ліпшицевою на випуклій множині D, тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші для рівняння (6).*

Повертаємось тепер до SIR моделі (4).

Враховуючи позначення (5), можемо виписати Якобіан для функції $f(x)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta i & -\beta S & 0 \\ \beta i & \beta S - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Оскільки Якобіан складається із лінійних функцій змінних S, I, R, то вони є неперервними, а отже і обмеженими на обмеженій множині D. Тоді функція f, визначена співвідношенням (5), є локально Ліпшицевою.

На підставі наслідка 2 одержуємо наступне твердження про існування розв'язку для системи диференціальних рівнянь (4).

Теорема. *Розв'язок початкової задачі для SIR моделі Кермака–Маккендріка (4) існує та єдиний.*

3 Математичні властивості SIR моделі

Модель епідемії Кермака–Маккендріка (4) – це система нелінійних диференціальних рівнянь із специфічною динамікою розв'язків. У роботах [8]-[10] представлено наближення аналітичних розв'язків, виходячи з їх інтегральних зображень.

У попередньому підпункті встановлено, що розв'язки моделі (4) існують локально, хоча очевидно, що система (4) має глобальний розв'язок.

Позначимо через N загальний об'єм популяції в початковий момент часу

$$N = S(0) + I(0) + R(0).$$

Додавши всі три рівняння системи (4), маємо

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0.$$

Отже, $N(t)$ є сталою, яка дорівнює своєму початковому значенню: $N(t) = N$.

Оскільки $\dfrac{dS(t)}{dt} < 0$ для всіх t, то кількість осіб, сприятливих до захворювання, завжди зменшується, незалежно від початкової умови $S(0)$.

Так як $S(t)$ є монотонно спадною і додатною функцією, то існує [15]

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = S_\infty.$$

Оскільки $\dfrac{dR(t)}{dt} > 0$ для всіх t, то число осіб, що одужали, завжди монотонно зростає, незалежно від початкових умов. Таким чином, $R(t)$ монотонна і обежена функція, тоді існує

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = R_\infty.$$

З іншого боку, число інфікованих $I(t)$ може мати немонотонну поведінку, спочатку збільшуватись до деякого максимального рівня, а потім зменшуватись до нуля.

На початку відбувається збільшення числа інфікованих $I(t)$, якщо

$$\frac{dI(0)}{dt} = (\beta S(0) - \alpha) I(0) > 0. \tag{10}$$

Таким чином, необхідною і достатньою умовою збільшення кількості інфікованих є

$$\beta S(0) - \alpha > 0,$$

або

$$\frac{\beta S(0)}{\alpha} > 1. \tag{11}$$

Щоб оцінити межі граничних значень S_∞ та R_∞, розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta IS, \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \alpha I. \end{aligned} \tag{12}$$

Розділивши рівняння одне на друге, одержимо

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{\beta}{\alpha} S.$$

Розв'язуючи одержане рівняння, маємо

$$S = S(0)e^{-\frac{\beta}{\alpha}R} \geq S(0)e^{-\frac{\beta}{\alpha}N} > 0.$$

Ми бачимо, що не всі сприйнятливі особи захворіють. Цей факт підтверджується спостереженнями, зробленими під час пандемії COVID-19.

Проінтегрувавши перше рівняння системи (12)

$$\int_0^\infty S'(t)dt = -\beta \int_0^\infty S(t)I(t)dt.$$

Одержимо

$$S(0) - S_\infty = \beta \int_0^\infty S(t)I(t)dt > \beta S_\infty \int_0^\infty I(t)dt.$$

Із останньої нерівності, оскільки $\int_0^\infty I(t)dt$ збіжний, то

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0.$$

Таким чином, це означає, що епідемія з часом спадає і закінчується.

Зауважимо, що змінна $R(t)$ не входить у перші два рівняння системи (4). Тому спочатку розглянемо тільки перші два рівняння для змінних $S(t)$ та $I(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta IS, \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta IS - \alpha I. \end{aligned} \tag{13}$$

Змінну $R(t)$ можна буде отримати із співвідношення

$$R(t) = N - S(t) - I(t). \tag{14}$$

Поділивши друге рівняння системи (13) на перше, дістаємо

$$\frac{dI(t)}{dS(t)} = \frac{\beta IS - \alpha I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S}.$$

Розділивши змінні, маємо

$$dI(t) = \left(-1 + \frac{\alpha}{\beta S}\right) dS.$$

Інтегруючи тепер, дістаємо

$$I(t) = -S(t) + \frac{\alpha}{\beta} \ln S(t) + C,$$

де C – довільна стала.

Таким чином, орбіти розв'язку задані неявно

$$I + S - \frac{\alpha}{\beta} \ln S(t) = C. \tag{15}$$

Припустимо, що початкові умови $S_0 = S(0)$ та $I_0 = I(0)$ задані. Ми також маємо, що $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$, а $S_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} S(t)$ визначає кількість сприйнятливих осіб на кінець епідемії.

Співвідношення (15) вірне для точок (S_0, I_0) та $(S_\infty, 0)$. Тоді

$$I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 = S_\infty - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_\infty.$$

Із останньої рівності одержуємо

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\ln \frac{S_0}{S_\infty}}{S_0 + I_0 - S_\infty}. \tag{16}$$

Оскільки функція $S(t)$ є спадною, то

$$S_\infty < S_0 + I_0.$$

Неявне співвідношення (15) дозволяє нам оцінити максимальну кількість інфікованих осіб. Це досягається, коли $\dfrac{dI(t)}{dt} = 0$, тобто

$$S = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{17}$$

Тепер у співвідношенні

$$I + S - \frac{\alpha}{\beta} \ln S = I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0,$$

замінюючи S виразом (17), одержуємо максимальну кількість інфікованих, що може досягатися при епідемії

$$I_{\max} = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{\alpha}{\beta} + S_0 + I_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0. \tag{18}$$

Якщо на практиці можна оцінити $I_{\max}$, то можна спрогнозувати, коли почне зменшуватися пік епідемії.

Зауваження. *Відзначимо, що досліджена в цьому пункті SIR модель є дещо спрощеною. Вона не враховує таких факторів як народжуваність та смертність, передбачає добру змішуваність популяції та її закритість.*

В основі цих моделей є система диференційних рівнянь, яка описує поведінку динаміки захворювання на макрорівні зберігаючи високий рівень абстрагування від реальності. При

цьому не враховуються індивідуальні властивості об'єктів, оскільки процес поширення інфекції дискретний та неможливо передбачити наслідки системи обмежувальних заходів, які активно впроваджуються.

Перевагою цієї SIR моделі є те, що вона достатньо адекватно описує поведінку епідеміологічних процесів на макрорівні. Простота моделі SIR полегшує її як числове так і аналітичне дослідження, але також, ймовірно, надто спрощує складні процеси захворювання.

Список літератури

[1] Bacaer N. McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926-1927). A Short History of Mathematical Population Dynamics. Springer, London. 2011. 89-96.

[2] Murray J.D. Mathematical Biology. 3rd edition. New York : Springer, 2002. 576 p.

[3] Brauer F. Compartmental models in epidemiology, in Mathematical epidemiology. Vol. 1945 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin. 2008. 19-80.

[4] Brauer F., Driessche P., Wu J., Allen L.J.S. Mathematical epidemiology. Berlin : Springer, 2008. 414 p.

[5] Chumachenko D.I., Chumachenko T.O. Simulation modeling of epidemic processes: applied aspects : monograph. X.: Individual entrepreneur Panov A.M. 2023. 300 p.

[6] Cherevko I.M., Kosovych I.T. *Simulation modeling of SIR models using the cellular automaton method.* Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series "Mathematics and Computer Science". Uzhhorod: Publishing House of UzhNU "Hoverla". 2024. **45**(2). 276-285.

[7] Kosovych I., Cherevko I., Shchur T., Shkilniuk D. *Computer Modeling of the Dynamics of Epidemiological Processes.* 2024 14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT), Ceske Budejovi ce, Czech Republic. 2024. 32-35.

[8] Khan H., Mohapatra R.N., Vajravelu K., Liao S.J. *The explicit series solution of SIR and SIS epidemic models.* Appl. Math. Comput. 2009. **38**. 653-669.

[9] Carvalho A.M., Goncalves S. *An analytical solution for the Kermack–McKendrick model.* Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2021. **566**(15), 125659.

[10] Adamu A.A., Muhammad M., Jingi A.M., Usma M.A. *Mathematical modelling using improved SIR model with more realistic assumptions.* International Journal of Engineering and Applied Sciences. 2019. **6**(1). 64-69.

[11] Kosovych I.T., Cherevko I.M. *Mathematical analysis of the Kermack-McKendrick SIR model.* Materials of the Tenth International Scientific and Practical Conference "Mathematics in a Modern Technical University", February 20-21, 2025, Kyiv, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. 85-88.

[12] Martsenyuk V. P., Andreychyn M. A., Sverstyuk A. S., Kopcha V. S., Chaychuk O. T., Panychev V. O. *Identification of parameters in SIR models based on the results of the COVID-19 pandemic in the Ternopil region.* Infectious diseases. 2020. № 2. 15-20.

[13] Kermack W.O., McKendrick A.G. *A contribution to the mathematical theory of epidemics.* Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1927. **115**. 700-721.

[14] Samoilenko A. M., Perestyuk M. O., Parasyuk I. O. Differential equations. Kyiv: Kyiv University., 2010. 527 p.

[15] Natanson I. P. Theory of functions of a real variable. New York : F. Ungar Pub. Co., 1955. 277 p.

Надійшло 20.05.2025

Kosovych I.T., Cherevko I.M., Shkilnyuk D.V. *Mathematical analysis of SIR madels of epidemiology processes*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 83–91.

The construction of mathematical models of infection spread is an important element in the study of complex disease dynamics. In the paper, we investigating the classical mathematical SIR (Susceptible-Infected-Recovered) model of Kermack-McKendrick, in which a population is divided into three distinct groups: susceptible individuals who can contract the infection (S), infected individuals who carry the disease (I), and recovered individuals who are no longer infectious (R). The simplest SIR models rely on fundamental assumptions, such as that everyone has the same chance of contracting the infection from an infected person due to the population being perfectly and evenly mixed, and that all infected individuals are equally contagious until they recover or die.

The conditions for local Lipschitz continuity of the right-hand sides of the considered mathematical models are investigated. Based on this, it is established that the classical Kermack–McKendrick SIR model, which describes the dynamics of the disease at the macro level, has a unique solution. The limit properties of the SIR model solutions are also investigated, and a relationship is derived that allows estimating the maximum possible number of infected individuals.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.08

Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ У КРАЙОВІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ $2B$-ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується задача оптимального керування системою, що описується загальною крайовою задачею для $2b$-еліптичних рівнянь. Розглянуто випадки обмеженого внутрішнього і межового керування. Критерій якості задається сумою об'ємного та поверхневого інтегралів. Використовуючи інтегральне зображення, за допомогою функції Гріна, розв'язків крайової задачі для $2b$-еліптичних рівнянь та формулу Тейлора, знайдено необхідні і достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується загальною крайовою задачею для еліптичних рівнянь.

Ключові слова і фрази: крайова задача, задача оптимізації, функція Гріна, $2b$-еліптичні рівняння, межове керування.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), b.yashan@chnu.edu.ua (Яшан Б.О.)*

Вступ

Теорія оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, багата результатами і активно розвивається в наш час. Її основи вперше систематично описано в монографії [1]. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема, гідро- і газодинаміки, фізики тепла, фільтрації, дифузії, теорії біологічних популяцій. Важливі результати цієї теорії у випадку еволюційних рівнянь отримані, зокрема, у працях [2], [3], [4], [5], [6].

Вивченню задачі розподілу ресурсів, яка полягає у максимізації чисельності певного виду, присвячена праця [7]. В ній популяційна модель являє собою рівняння для щільності популяції, яка залежить від керування, що є ресурсним коефіцієнтом. Доведено існування та єдиність оптимального розвитку, а також знайдено співвідношення, що його характеризують.

У [8] розглянуто задачу оптимального керування, яка регулюється напівлінійним еліптичним рівнянням, причому керування підлягає обмеженням; обґрунтовано умови оптимальності першого та другого порядку; апроксимовано задачу керування дискретними задачами; доведено збіжність дискретизації та отримано деякі оцінки похибок.

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.
Information on some grant ...

© Пукальський І.Д., Яшан Б.О., 2025

Дослідженню класичної векторної задачі неперервного граничного керування для нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу з граничним керуванням Неймана присвячено працю [9]. В ній доведено існування класичного неперервного граничного вектора оптимального керування, керованими нелінійними диференціальними рівняннями в частиних похідних еліптичного типу з обмеженнями рівності та нерівності.

Замінивши диференціальне рівняння в частиних похідних на еквівалентну задачу оптимального керування, у праці [10] обґрунтовано новий підхід для знаходження чисельного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь.

В [11] доведено теореми існування та єдиності розв'язку вектора стану лінійних еліптичних рівнянь у частинних похідних для фіксованого неперервного вектора оптимального керування. Отримано похідну Фреше від функції витрат, доведено теорему про необхідні умови оптимальності розглянутої задачі.

Встановленню необхідних і достатніх умов існування межового та внутрішнього оптимального керування системами, що описуються крайовими задачами для еліптичних рівнянь з виродженням другого порядку, присвячено праці [12, 13]. Функціонали якості визначаються об'ємними та поверхневими інтегралами.

У цій статті розглядається задача вибору оптимального керування системи, що описується загальною еліптичною крайовою задачею з обмеженим внутрішнім та межовим керуванням. Критерій якості задається сумою об'ємного та поверхневого інтегралів. Використовуючи інтегральне зображення, за допомогою функції Гріна розв'язків крайової задачі для 2b-еліптичних рівнянь та формулу Тейлора, встановлено необхідні та достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується загальною крайовою задачею для еліптичних рівнянь.

1 Постановка задачі та основний результат

Нехай D обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$. Розглянемо в області D задачу знаходження функцій (u, p), $p = (p_1, p_2)$, на яких функціонал

$$I(p) = \int\limits_D F_1\left(x; u; p_1\right) dx + \int\limits_{\partial D} F_2\left(x; u; p_2\right) d_x S \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $p \in V = \left\{p | p_1 \in C^{\alpha}(D), p_2 \in C^{2b-r+\alpha}(\partial D)\right.$, $\left.\nu_{11}(x) \leq p_1(x) \leq \nu_{12}(x), \nu_{21}(x) \leq p_2(x) \leq \nu_{22}(x)\right\}$, r_i - порядки крайових операторів, $r = \min\limits_i r_i$, із яких $u\left(x; p_1(x), p_2(x)\right)$ задовольняє при $x \in D$ рівняння

$$L(u) \equiv \sum_{|k| \leq 2b} A_k(x) \partial_x^k u - \lambda u = f_0\left(x, p_1(x)\right), \tag{2}$$

а на межі області ∂D крайові умови

$$\lim_{x \to z \in \partial D} \left[\sum_{|k| \leq r_i} b_k^{(i)}(x) \partial_x^k u - f_i\left(x, p_2(x)\right) \right] = 0, \tag{3}$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, λ – параметр, $i \in \{1, 2, \ldots, b\}$.

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(x) \in C^{l+\alpha}(D)$, $l = 4b - 2r + 1$, $0 < \alpha < 1$, $A_0(x) < \lambda$, $0 < \lambda < \infty$ і оператор $L_0 = \sum\limits_{|k|=2b} A_k(x) \partial_x^k$ – рівномірно еліптичний ([14], с. 10);

б) коефіцієнти крайових умов $b_k^{(i)}(x) \in C^{2b+l-r_i+\alpha}(\partial D)$, $\partial D \in C^{2b+l+\alpha}$ і для операторів $B_i \equiv \sum\limits_{|k|=r_i} b_k^{(i)}(x)\partial_x^k$ виконуються умови доповняльності ([14], с. 22), $r_i \le 2b-1$, $i \in \{1,\dots,b\}$;

в) функції $f_0\left(x, p_1(x)\right) \in C^{\alpha}(D)$, $f_i\left(x, p_2(x)\right) \in C^{2b-r_i+\alpha}(\partial D)$ і мають похідні другого порядку за змінними (p_1, p_2), які належать як функції змінних x відповідно просторам $C^{\alpha}(D)$, $C^{2b-r_i+\alpha}(\partial D)$;

г) функції $F_1\left(x; u, p_1\right)$, $F_2\left(x; u, p_2\right)$ мають похідні другого порядку за змінними $(u; p_1, p_2)$, які належать як функції змінних x відповідно просторам $C(D)$, $C(\partial D)$, $\nu_{1m} \in C^{\alpha}(D)$, $\nu_{2m} \in C^{2b-r_i+\alpha}(\partial D)$, $m \in \{1,2\}$.

При виконанні умов а)–в) існує єдиний розв'язок задачі (2), (3) в просторі $C^{2b+\alpha}(D)$ при $l \ge 0$ ([15], теорема 1.20, с. 120). Встановимо формулу зображення розв'язку задачі (2), (3) при $l = 4b - 2r + 1$.

За умов, накладених на гладкість коефіцієнтів рівняння (2), і крайових умов (3) існує функція Гріна $(G_0, G_1, \dots, G_b)$ крайової задачі ([16], теорема 1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{|k|\le 2b} A_k(x)\partial_x^k v = f_0\left(x, p_1(x)\right),\ v(0,x) = \varphi(x),$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|\le r_i} b_k^{(i)}(x)\partial_x^k v - f_i\left(x, p_2(x)\right)\right] = 0, \tag{4}$$

за допомогою якої розв'язок задачі (4) при $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $Q = [0,T)\times D$ визначається формулою

$$v(t,x;p) = \int_0^t d\tau \int_D G_0\left(t-\tau, x; \xi\right) f_0\left(\xi, p_1(\xi)\right) d\xi + \int_D G_0\left(t, x; \xi\right)\varphi(\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b}\int_0^t d\tau \int_{\partial D} G_i\left(t-\tau, x; \xi\right) f_i\left(\xi, p_2(\xi)\right) d_\xi S. \tag{5}$$

В області $(0,\infty)\times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|\le 2b} A_k(x)\partial_x^k u - \lambda u = f_0\left(x, p_1(x)\right), \tag{6}$$

початкову умову за змінною t

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x \in D, \tag{7}$$

а на межі області крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|\le r_i} b_k^{(i)}(x)\partial_x^k u - f_i\left(x, p_2(x)\right)\right] = 0. \tag{8}$$

Цій задачі відповідає еліптична задача ([15], с. 230)

$$\sum_{|k|\le 2b} A_k(x)\partial_x^k u - \lambda u = f_0\left(x, p_1(x)\right),$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|\le r_i} b_k^{(i)}(x)\partial_x^k u - f_i\left(x,p_2(x)\right)\right]=0.$$

Розв'язок задачі (6)–(8) з параметром λ згідно з формулою (5) має вигляд

$$\omega(t,x)=\int\limits_D E_0\left(t,x;\xi;\lambda\right)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D E_0\left(t-\tau,x;\xi;\lambda\right)f_0\left(\xi,p_1(\xi)\right)d\xi+$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D} E_i\left(t-\tau,x;\xi;\lambda\right)f_i\left(\xi,p_2(\xi)\right)d_\xi S, \tag{9}$$

де $E_i\left(t,x;\xi;\lambda\right)=G_i\left(t,x;\xi\right)e^{-\lambda t}$, $j\in\{0,1,\ldots,b\}$.

Якщо у формулі (9) поміняти порядок інтегування і перейти до границі при $t\to\infty$, вважаючи що $\lambda>0$, то приходимо до формули зображення єдиного розв'язку задачі (2), (3)

$$u(x)=\int\limits_D Z_0\left(x,\xi\right)f_0\left(\xi,p_1(\xi)\right)d\xi+\sum_{i=1}^{b}\int\limits_{\partial D} Z_i\left(x,\xi\right)f_i\left(\xi,p_2(\xi)\right)d_\xi S, \tag{10}$$

у якій

$$Z_j\left(x,\xi\right)=\int\limits_0^\infty G_j(t,x;\xi)e^{-\lambda t}dt.$$

При виконанні умов а)–в) згідно з теоремою 1 [17] існує єдиний розв'язок задачі (2)–(3) в просторі $C^{2b+\alpha}(D)$ при довільних $p\in V$ і для нього правильна оцінка

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(D)}\le c\left(\|f_0\|_{C^\alpha(D)}+\sum_{i=1}^{b}\|f_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\partial D)}\right).$$

2 Задача оптимального керування

В області D розглянемо задачу (1)–(3). Будемо вважати, що виконані умови а) – г).

Позначимо через

$$\lambda_1(\xi)=\int\limits_D\frac{\partial F_1(x;u;p_1)}{\partial u}Z_0(x,\xi)dx+\int\limits_{\partial D}\frac{\partial F_2(x;u;p_2)}{\partial u}Z_0(x,\xi)d_xS,$$

$$\mu_i(\xi)=\int\limits_D\frac{\partial F_1(x;u;p_1)}{\partial u}Z_i(x,\xi)dx+\int\limits_{\partial D}\frac{\partial F_2(x;u;p_2)}{\partial u}Z_i(x,\xi)d_xS,$$

$$H_1(\xi,u,\lambda_1,p_1)=\lambda_1(\xi)f_0\left(\xi;p_1(\xi)\right)+F_1(\xi;u;p_1),$$

$$H_2(\xi,u,\mu,p_2)=\sum_{i=1}^{b}\mu_i(\xi)f_i\left(\xi;q_2(\xi)\right)+F_2(\xi;u;p_2),$$

$p^{(0)}=\left(p_1^{(0)},p_2^{(0)}\right)$ – оптимальне керування, $u(x;p^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (1)–(3).

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови а)–в). Тоді для задачі (1) – (3)*

1) якщо $\partial_{p_m} H_m > 0$, $m \in \{1,2\}$, *то оптимальне керування* $p^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{21})$;

2) якщо $\partial_{p_1} H_1 < 0$, $D_{p_2} H_2 > 0$, *то оптимальне керування* $p^{(0)} = (\nu_{12}, \nu_{21})$;

3) якщо $\partial_{p_1} H_1 > 0$, $D_{p_2} H_2 < 0$, *то оптимальне керування* $p^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{22})$;

4) якщо $\partial_{p_m} H < 0$, $m \in \{1,2\}$, *то оптимальне керування* $p^{(0)} = (\nu_{12}, \nu_{22})$,

де $p_m \in \{p_1, p_2\}$.

Доведення. Розглянемо випадок 1. Нехай $\Delta p = (\Delta p_1, \Delta p_2)$ – допустимий приріст керування $p = (p_1, p_2)$. Через $\Delta u = \Delta_{p_1} u + \Delta_{p_2} u$ позначимо приріст функції $u(x; p_1, p_2)$. Тоді $\Delta_{p_m} u$ в області D будуть розв'язками відповідних крайових задач

$$L\left(\Delta_{p_m} u\right)(x) = \delta_{1m} \Delta f_0(x, p_1),$$

$$B_i\left(\Delta_{p_m} u\right)(x)|_{\partial D} = \delta_{2m} f_i(x, p_2), \tag{11}$$

де δ_{im} – символ Кронекера, $m \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2\}$.

Використовуючи функцію Гріна $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_b)$ задачі (2), (3) і формулу (10), одержимо зображення приростів $\Delta_{p_m} u$ формулами

$$\Delta_{p_1} u = \int\limits_D Z_0(x,\xi) \Delta_{p_1} f_0\left(\xi, p_1(\xi)\right) d\xi,$$

$$\Delta_{p_2} u = \sum_{i=1}^{b} \int\limits_{\partial D} Z_i(x,\xi) \Delta_{p_2} f_i\left(\xi; p_2(\xi)\right) d_\xi S. \tag{12}$$

Розглянемо приріст функціоналу:

$$\Delta I(p) = \Delta_{p_1} I(p) + \Delta_{p_2} I(p). \tag{13}$$

Скориставшись формулою Тейлора, маємо

$$\Delta_{p_1} I = \int\limits_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial u} \Delta_{p_1} u + O\left(|\Delta_{p_1} u|^2\right) + \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \Delta p_1 + O\left(|\Delta p_1|^2\right)\right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\partial D} \left[\frac{\partial F_2}{\partial u} \Delta_{p_1} u + O\left(|\Delta p_1|^2\right)\right] d_x S,$$

$$\Delta_{p_2} I = \int\limits_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial u} \Delta_{p_2} u + O\left(|\Delta p_2|^2\right)\right] dx + \int\limits_{\partial D} \left[\frac{\partial F_2}{\partial u} \Delta_{p_2} u + O\left(|\Delta p_2|^2\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial F_2}{\partial p_2} \Delta p_2 + O\left(|\Delta p_2|^2\right)\right] d_x S. \tag{14}$$

Підставляючи (12), (14) у (13) і змінюючи при цьому порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(p) = \int\limits_D \left[\partial_{p_1} H_1(\xi, u, \lambda_1, p_1) \Delta p_1 + O\left(|\Delta p_1|^2\right)\right] d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\partial D} \left[\partial_{p_2} H_2(\xi, u, \mu, p_2) \Delta p_2 + O\left(|\Delta p_2|^2\right)\right] d_\xi S.$$

Якщо $p_1(x) = \nu_{11}(x)$, $p_2(x) = \nu_{21}(x)$ і $\partial_{p_1} H_1 > 0$, $\partial_{p_2} H_2 > 0$, то при досить малих Δp_1, Δp_2 маємо $\Delta I(p) > 0$.

Нехай $p^{(0)}$ – оптимальне керування, тобто $\Delta I(q) > 0$. Перевіримо виконання умови 1) теореми 1. Якщо вирази $\partial_{p_1} H_1$, $\partial_{p_2} H_2$ – знакозмінні величини, тобто $\partial_{p_1} H_1 > 0$ в $D_1 \subset D$, $\partial_{p_2} H_2 > 0$ в $\partial D_2 \subset \partial D$ і $\partial_{p_1} H_1 < 0$ в $D \setminus D_1$, $\partial_{p_2} H_2 < 0$ в $\partial D \setminus \partial D_2$, то, використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(p) = \partial_{p_1} H_1(x^+, u^+, \lambda_1^+, p_1^+) \int\limits_{D_1} \Delta p_1 dx - \left|\partial_{p_1} H_1(x^-, u^-, \lambda_1^-, p_1^-)\right| \int\limits_{D\setminus D_1} \Delta p_1 dx +$$

$$+ \partial_{p_2} H_2(x^+, u^+, \mu^+, p_2^+) \int\limits_{\partial D_2} \Delta p_2 d_x S - \left|\partial_{p_2} H_2(x^-, u^-, \mu^-, p_2^-)\right| \int\limits_{\partial D\setminus \partial D_2} \Delta p_2 d_x S +$$

$$+ \int\limits_D O\left(|\Delta p_1|^2\right) dx + \int\limits_{\partial D} O\left(|\Delta p_2|^2\right) d_x S.$$

При досить малих Δp_1, Δp_2 знак $\Delta I(p)$ визначається першими чотирма доданками суми. Різниця перших двох і наступної пари двох доданків змінює знак $\Delta I(p)$ в залежності від величин mesD_1, mes$D \setminus D_1$, mes∂D_2, mes$\partial D \setminus \partial D_2$, Δp_1, Δp_2.

При досить малих величинах mesD_1, mes∂D_2, $\Delta p_1 > 0$, $\Delta p_2 > 0$ маємо $\Delta I(p) < 0$ і навпаки $\Delta I(p) > 0$, якщо малі величини mes$D \setminus D_1$, mes$(\partial D \setminus \partial D_2)$ і $\Delta p_1 > 0$, $\Delta p_2 > 0$. Отже, функціонал $I(p)$ не досягає мінімуму. Знаходження оптимального керування $p^{(0)}$ у інших випадках, які залежать від знаку величин $\partial_{p_1} H_1$, $\partial_{p_2} H_2$ доводяться аналогічно. □

Нехай умови теореми 1 не виконані.

Тоді правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконані умови а)–г). Для того, щоб керування* $p^{(0)} = \left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}\right)$, *для задачі (1) – (3), було оптимальним, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:*

1) функції $H_1(\xi, u, \lambda_1, p_1)$, $H_2(\xi, u, \mu, p_2)$ *за аргументами* p_1, p_2 *мають в точці* $\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}\right)$ *мінімальні значення;*

2) для довільного вектора $\left(l_m^{(1)}, l_m^{(2)}\right) \neq 0$ *виконувалась нерівність*

$$\partial_u^2 F_m\left(x, u, p_m^{(0)}\right)\left(l_m^{(1)}\right)^2 - 2\partial_u \partial_{p_m} F_m\left(x, u, p_m^{(0)}\right) l_m^{(1)} l_m^{(2)} +$$

$$+ \partial_{p_m}^2 F_m\left(x, u, p_m^{(0)}\right)\left(l_m^{(2)}\right)^2 > 0,\ m \in \{1, 2\}.$$

Доведення теореми 2 проводиться за допомогою методики доведення теореми 2.14 [18].

Список літератури

[1] Lions J.-L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Mir. Moscow. 1972. 416. (in Russian)

[2] Zgurovsky M. Z., Melnik V.S., Novikov A. N. Applied methods of analysis and control of nonlinear processes and fields. Naukova dumka. Kiev. 2004. 588. (in Russian)

[3] Bermudez A. Some applications of optimal control theory of distributed systems. Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2002. 8. 195-218.

[4] Casas E., Vexler B., Zuazua E. Sparse initial data identification for parabolic PDE and its finite element approximations. Mathematical Control and Related Fields. 2015. 5(3). 377-399.

[5] Feiyue He, Leung A., Stojanovic S. Periodic optimal control for parabolic Volterra–Lotka type equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1995. 18. 127–146.

[6] Homberg D., Krumbiegel K., Rehberg J. Optimal control of a Parabolic Equation with Dynamic Boundary Condition. Applied Mathematics and Optimization. 2013. 67(1). 3-31.

[7] Bintz J., Finotti H., Lenhart S. Optimal control of resourse coefficient in a parabolic population model, edited by R. Mondaini. BIOMAT 2013 International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Press. Singapure. 2013. 121–135.

[8] Casas E., Mateos M. Optimal control of partial differential equations. Computational Mathematics, Numerical Analysis and Applications. SEMA SIMAI Springer Series. 2017. 13. Springer, Cham.

[9] Jamil Al-Hawasy, Nabeel A., Thyab Al-Ajeeli. The Continuous Classical Boundary Optimal Control of Triple Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations with State Constraints. Iraqi Journal of Science. 2021. 62(9). 3020-3030. Mathematics

[10] Zarepour M., Loghmani G.B. Numerical solution of arbitrary-order linear partial differential equations using an optimal control technique. Mathematical and Computers in Simulation. 187. September 2021. 77-96.

[11] Al-Hawasy J.A., Jasim D.K. The Continuous Classical Optimal Control Problems for Triple Elliptic Partial Differential Equations. Ibn Al-Haitham Journal for Pure and Applied Sciences. 2020. 33, 1. 143-151.

[12] Pukal'skyi I.D., Yashan B.O. Optimal control in the boundary value problem for elliptic equations with degeneration. Matematychni Studii. 2023. 59(1). 76-85.

[13] Pukal'skyi I.D., Yashan B.O. Optimal control in the Dirichlet problem for elliptic equations with degeneration. Bukovinian Math. Journal. 2023. 11(1). 115-125.

[14] Agmon S., Douglas A., Nirenberg L. Estimates near the boundary of solutions of elliptic equations in partial derivatives under common boundary conditions. M. : IL, 1962. 205 p.

[15] Matiychuk M. I. Parabolic and elliptic problems in Dini spaces: – Chernivtsi, 2010 – 248 p.

[16] Ivasishen S.D. Green's matrices of general inhomogeneous boundary value problems for parabolic ones according to I.G. Petrovsky systems. Preprint of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Kiev, 1968, 2-52. (in Russian)

[17] Luste I.P., Pukal's'kyi I.D. Boundary-Value Problem for Nonuniformly Elliptic Equations with Power Singularities. J. Math. Sci. 2024. 278. 748–760.

[18] Pukalskyi I.D., Luste I.P. Boundary value problems for parabolic equations of the second order. Tutorial Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2021, 284. (in Ukrainian)

Надійшло 08.05.2025

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. *Optimal control in a boundary value problem for* 2*b-elliptic equations*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 92–99.

The problem of an optimal control system describing a general boundary value problem for 2*b*-elliptic levels is investigated. The cases of constrained internal and boundary control are considered. The quality criterion is given by the sum of the volume and surface integrals. Using

the integral representation, with the help of the Green's function, solutions of the boundary value problem for $2b$-elliptic levels and the Taylor formula, the provided and sufficient conditions for ensuring the optimal solution of the system describing the general boundary value problem for elliptic levels are found.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.09

Працьовитий М.В., Макарчук. О.П.

ПРО ДЕЯКІ МЕТРИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ ЛАНЦЮГОВИМИ A_2-ДРОБАМИ

В роботі розглядаються деякі метричні результати типу Леві-Хінчина для ланцюгового A_2-представлення дійсних чисел з алфавітом $\{\alpha_1;\alpha_2\}$. Акцент здійснюється на використанні теорії динамічних систем, зокрема теореми Біркхофа-Хінчина для динамічної системи з оператором лівостороннього зсуву символів відповідного A_2-зображення дійсних чисел з алфавітом $\{\alpha_1;\alpha_2\}$.

Ключові слова і фрази: ланцюгове A_2-представлення, піхідний дріб, метричні властивості, частота цифри, динамічна система, ергодична теорема.

Mykhailo Drahomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine; Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Tereshchenkivska St., 3, Kyiv, 01024, Ukraine (Pratsiovytyi M.V.)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Tereshchenkivska St., 3, Kyiv, 01024, Ukraine (Makarchuk O.P.)
e-mail: *prats4444@gmail.com(Pratsiovytyi M.V.),makolpet@gmail.com (Makarchuk O.P.)*

Вступ

Для послідовності додатних чисел (a_n) та натурального k позначимо скінченний ланцюговий дріб

$$[a_0;a_1,a_2,...,a_k]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+...\cfrac{1}{a_{k-1}+\cfrac{1}{a_k}}}}.$$

Нехай

$$[a_0;a_1,a_2,...,a_k,...]=\lim_{k\to+\infty}[a_0;a_1,a_2,...,a_k] \tag{1}$$

при умові, що остання границя існує. Відповідно до теореми Зейделя-Штерна [6, 12, 13] границя (існує тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ розбіжний.

УДК 511.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 11K50.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, M.P., O.M.).

© Працьовитий М.В., Макарчук. О.П., 2025

На вимірному просторі $([0;1];B[0;1])(B[a;b]$ – σ-алгебра борелівських множин $[a;b])$ для класичного ланцюгового представлення розглянемо оператор Гаусса

$$T([0;a_1,a_2,...,a_n,...]) = [0;a_2,a_3,...,a_{n+1},...] \tag{2}$$

та міру Лебега-Стілтьєса $\psi(\cdot)$, що відповідає функції розподілу

$$g(x) = \log_2(x+1), x \in [0;1].$$

Відповідна міра $\psi(\cdot)$ називається мірою Гаусса. Добре відомо [11], що динамічна система $([0;1];B[0;1];\psi(\cdot);T)$ є ергодичною, більш того [3] перетворення T є сильно перемішуючим, тобто

$$\lim_{n\to+\infty} \psi(A \cap T^{-n}(B)) = \psi(A)\psi(B) \ \ \forall A,B \in B[0;1],$$

де

$$T^n(x) = \underbrace{T(T(...T(x)))}_{n}, \quad T^{-n}(B) = \{x|\ T^n(x) \in B\}.$$

Як показав О.Хінчін [7] для майже всіх (в розумінні міри Лебега $\lambda(\cdot)$) чисел x з ланцюговим зображенням $x = [a_0;a_1,a_2,...,a_k,...]$ виконуються умови

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \to +\infty \ \ (n \to +\infty),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)^{\log_2(k)} \approx 2,6854 - \text{стала Хінчина},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log_2(n+1)}{n(n+1)}\right)^{-1} \approx 1,7154.$$

Нехай $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)$ — послідовність підхідних дробів, що відповідають числу x. Як показав П. Леві [8] для майже всіх чисел $x = [a_0;a_1,a_2,...,a_k,...]$ виконуються умови

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\#\{1 \le j \le n; a_j = l\} = \log_2\left(1+\frac{1}{l(l+1)}\right) \ \ \forall l \in N,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(q_n(x))}{n} = \frac{\pi^2}{12\ln(2)} \approx 1,1866 - \text{стала Хінчина-Леві},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\lambda(\Delta_n^*(x))}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|}{n} = -\frac{\pi^2}{6\ln(2)} \approx -0,5933,$$

де $\Delta_n^*(x)$ – множина чисел, перші $n+1$ цифр ланцюгового представлення яких рівні відповідно $a_0,a_1,...,a_n$.

Відомо [4], що для кожного числа $t \in [\alpha_1;\alpha_2]$, де $\alpha_1 < \alpha_2$ — додатні числа такі, що $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$, існує послідовність (b_n) кожен член якої рівний α_1 або α_2 і відповідно

$$t = [0;b_1,...,b_n,...].$$

Відповідне зображення називається ланцюговим A_2-зображенням з алфавітом $\{\alpha_1;\alpha_2\}$. Деяка зчисленна множина чисел (A_2-бінарних) відрізку $[\alpha_1;\alpha_2]$ має відповідно два A_2-зображення виду

$$[0;b_1,...,b_{n-1},\alpha_1,(\alpha_1,\alpha_2)] = [0;b_1,...,b_{n-1},\alpha_2,(\alpha_2,\alpha_1)],$$

де круглі дужки символізують період. Усі решта числа відрізку $[\alpha_1;\alpha_2]$ (A_2-унарні) мають єдине A_2-зображення. В подальшому для A_2-бінарних чисел відрізку $[\alpha_1;\alpha_2]$ будемо використовувати A_2-зображення, що містить період (α_1,α_2).

Тополого-метрична теорія ланцюгового A_2-зображення побудована в роботі [4]. Лебегівська та фрактальна структура розподілів, заданих в термінах ланцюгового A_2-зображення досліджувалась в роботах [9, 10]. Як було показано в [9] для майже всіх чисел $x\in[\alpha_1;\alpha_2]$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{q_n(x)}\le\sqrt{2},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{q_n(x)}{(\sqrt{2})^n}=0.$$

Нехай $\eta(\cdot)$ — міра Лебега-Стілтьєса, що відповідає абсолютно неперервній функції розподілу

$$f(x)=\frac{\ln\left(\frac{x+2\alpha_1}{x+2\alpha_2}\right)+\ln\left(\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3\alpha_1}\right)}{2\ln(\alpha_1+\alpha_2)-\ln(2)}\quad\forall x\in[\alpha_1;\alpha_2],$$

з щільністю

$$p(x)=\frac{2\alpha_2-2\alpha_1}{2\ln(\alpha_1+\alpha_2)-\ln(2)}\cdot\frac{1}{(x+2\alpha_1)(x+2\alpha_2)}\quad\forall x\in[\alpha_1;\alpha_2].$$

Наукова робота присвячена дослідженню метричних властивостей для ланцюгового A_2-зображення з алфавітом $\{\alpha_1;\alpha_2\}$, зокрема побудові відповідних аналогів результатів Хінчина-Леві на основі теорії динамічних систем.

1 Ергодичність динамічної системи $([\alpha_1;\alpha_2];B[\alpha_1;\alpha_2];\eta(\cdot);T)$ для ланцюгового A_2-зображення з алфавітом $\{\alpha_1;\alpha_2\}$.

Нехай ланцюгове A_2-зображення числа x має вигляд

$$x=[0;a_1,a_2,...,a_k,...]. \tag{3}$$

Розглянемо послідовності

$$q_n(x)=q_n(a_1,a_2,...,a_n)=a_nq_{n-1}(a_1,a_2,...,a_{n-1})+q_{n-2}(a_1,a_2,...,a_{n-2}),$$

$$p_n(x)=p_n(a_1,a_2,...,a_n)=a_np_{n-1}(a_1,a_2,...,a_{n-1})+p_{n-2}(a_1,a_2,...,a_{n-2}),$$

$$p_{-1}=1,\ \ q_{-1}=0,\ \ p_0=0,\ \ q_0=1.$$

Добре відомо [4, 6], що

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n(x)}{q_n(x)}=x;\quad p_n(x)q_{n-1}(x)-p_{n-1}(x)q_n(x)=(-1)^{n+1}\ \ \forall n\in N,$$

$$\frac{q_n(x)}{q_{n-1}(x)}=[a_n;a_{n-1},a_{n-2},...,a_1]\in[\alpha_1;3\alpha_2]\quad\forall n\in N, \tag{4}$$

$$q_n(x)\ge\frac{1}{\alpha_1^2+4}\left(\left(\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+4}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{\alpha_1-\sqrt{\alpha_1^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right)=w_n, \tag{5}$$

$$q_n(x)\le\frac{1}{\alpha_2^2+4}\left(\left(\frac{\alpha_2+\sqrt{\alpha_2^2+4}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{\alpha_2-\sqrt{\alpha_2^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Для числа x з ланцюговим A_2-зображенням (в подальшому, там де це необхідно, будемо використовувати еквівалентні позначення q_n, $q_n(x)$, $q_n(a_1;a_2;...;a_n)$ та відповідно p_n, $p_n(x)$, $p_n(a_1;a_2;...;a_n)$. Позначимо

$$[x;y]^* = [\min(x;y);\max(x;y)].$$

Нехай число x має ланцюгове A_2-зображенням (. Відомо [4], що множина чисел виду

$$\{[0;a_1,a_2,\ldots,a_n,\xi_1,\xi_2,...]|\xi_k \in \{\alpha_1;\alpha_2\}\forall k \in N\}$$

є відрізком

$$\Delta_n(x) = \Delta_n(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \left[\frac{p_n+\alpha_1 p_{n-1}}{q_n+\alpha_1 p_{n-1}};\frac{p_n+\alpha_2 p_{n-1}}{q_n+\alpha_2 p_{n-1}}\right]^*$$

(циліндром n-го рангу), причому довільні різні циліндри n-го рангу мають щонайбільше одну спільну точку.

Теорема 1. *Динамічна система* $([\alpha_1;\alpha_2];B([\alpha_1;\alpha_2]);\eta(\cdot);T)$ *ергодична.*

Доведення. Покажемо, що перетворення T зберігає міру $\eta(\cdot)$. Для цього достатньо показати, що для довільного відрізку $[\alpha;\beta] \subseteq [\alpha_1;\alpha_2]$ виконується умова

$$\eta(T^{-1}([\alpha;\beta])) = \eta(T([\alpha;\beta])).$$

Оскільки [1]

$$T^{-1}([\alpha;\beta]) = \left[\frac{1}{\beta+\alpha_1};\frac{1}{\alpha+\alpha_1}\right] \cup \left[\frac{1}{\beta+\alpha_2};\frac{1}{\alpha+\alpha_2}\right],$$

маємо

$$\eta(T^{-1}([\alpha;\beta])) = \eta(T([\alpha;\beta])) \Leftrightarrow$$

$$f(\beta)-f(\alpha) = f\left(\frac{1}{\alpha+\alpha_1}\right) - f\left(\frac{1}{\beta+\alpha_1}\right) + f\left(\frac{1}{\alpha+\alpha_2}\right) - f\left(\frac{1}{\beta+\alpha_2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\beta) + f\left(\frac{1}{\beta+\alpha_2}\right) + f\left(\frac{1}{\beta+\alpha_1}\right) = f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha+\alpha_2}\right) + f\left(\frac{1}{\alpha+\alpha_1}\right),$$

що вірно, адже для кожного $x \in [\alpha_1;\alpha_2]$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x+\alpha_2}\right) + f\left(\frac{1}{x+\alpha_1}\right) = 3d + c\left(v(x) + v\left(\frac{1}{x+\alpha_2}\right) + v\left(\frac{1}{x+\alpha_1}\right)\right) =$$

$$= 3d + c\ln\left(\frac{x+2\alpha_1}{x+\frac{1}{\alpha_1}} \cdot \frac{2\alpha_1 x + 2\alpha_1^2+1}{\frac{x}{\alpha_1}+2} \cdot \frac{2\alpha_1 x+2}{\frac{x}{\alpha_1}+\frac{1}{2\alpha_1^2}+1}\right) =$$

$$= 3d + c\ln\left(\frac{x+2\alpha_1}{\frac{x\alpha_1+1}{\alpha_1}} \cdot \frac{2\alpha_1 x + 2\alpha_1^2+1}{\frac{x+2\alpha_1}{\alpha_1}} \cdot \frac{2\alpha_1 x+2}{\frac{2\alpha_1 x+2\alpha_1^2+1}{2\alpha_1^2}}\right) = 3d + c\ln(4\alpha_1^4) - const,$$

де

$$c = \frac{1}{2\ln(\alpha_1+\alpha_2)-\ln(2)},\quad d = \frac{\ln\left(\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3\alpha_1}\right)}{2\ln(\alpha_1+\alpha_2)-\ln(2)},\quad v(x) = \ln\left(\frac{x+2\alpha_1}{x+2\alpha_2}\right).$$

Покажемо, що перетворення T ергодичне, тобто для довільної інваріантної множини W $(T^{-1}(W)=W)$ виконується умова $\eta(W) \in \{0;1\}$. Нехай $[a;b] \subseteq [\alpha_1;\alpha_2]$, $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ — набір чисел з множини $\{\alpha_1;\alpha_2\}$.

Зрозуміло, що

$$\lambda\left(T^{-n}([a;b])\cap\Delta_n(c_1,c_2,\ldots,c_n)\right)=\lambda\left(\left[\left[0;c_1,c_2,\ldots,c_n,\frac{1}{a}\right];\left[0;c_1,c_2,\ldots,c_n,\frac{1}{b}\right]\right]^*\right)=$$

$$=\left|\frac{p_{n-1}+\frac{1}{b}p_n}{q_{n-1}+\frac{1}{b}q_n}-\frac{p_{n-1}+\frac{1}{a}p_n}{q_{n-1}+\frac{1}{a}q_n}\right|=\frac{(b-a)}{(bq_{n-1}+q_n)(aq_{n-1}+q_n)}=$$

$$=\lambda([a;b])\cdot\lambda(\Delta_n)\cdot\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\cdot\frac{(q_n+\alpha_1q_{n-1})(q_n+\alpha_2q_{n-1})}{(bq_{n-1}+q_n)(aq_{n-1}+q_n)}.$$

Легко бачити, що функція $h(z)=\frac{z+\alpha_1}{z+\alpha_2}=1-\frac{\alpha_2-\alpha_1}{z+\alpha_2}$ є зростаючою на проміжку $[\alpha_1;\alpha_2]$. Враховуючи умову (маємо

$$\frac{(q_n+\alpha_1q_{n-1})(q_n+\alpha_2q_{n-1})}{(bq_{n-1}+q_n)(aq_{n-1}+q_n)}\geq\frac{(q_n+\alpha_1q_{n-1})(q_n+\alpha_2q_{n-1})}{(q_n+\alpha_2q_{n-1})(q_n+\alpha_2q_{n-1})}=$$

$$=\frac{(q_n+\alpha_1q_{n-1})}{(q_n+\alpha_2q_{n-1})}=h\left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)\geq h(\alpha_1).$$

Нехай E — інваріантна множина відносно перетворення T, причому $\lambda(E)>0$.

Оскільки $T^{-n}(E)=E$, то маємо

$$\lambda\left(E\cap\Delta_n\right)=\lambda\left(T^{-n}(E)\cap\Delta_n\right)\geq\frac{h(\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1}\cdot\lambda(E)\lambda(\Delta_n)$$

і враховуючи лему Кноппа [2, 5], отримаємо

$$\lambda(E)=\alpha_2-\alpha_1.$$

Оскільки міра $\eta(\cdot)$ еквівалентна мірі $\lambda(\cdot)$, то маємо $\eta(E)=1$. □

2 Метричні результати для ланцюгового A_2-представлення чисел відрізку $[\alpha_1;\alpha_2]$.

Для числа x з ланцюговим A_2-зображенням (для набору цифр $(b_1,b_2,\ldots,b_k)$, де $b_j\in\{\alpha_1;\alpha_2\}$ для кожного $j\in\{1;2;\ldots;k\}$, позначимо границю (за умови, що вона існує)

$$\nu((b_1,b_2,\ldots,b_k);x)=\lim_{n\to\infty}\frac{N_n((b_1,b_2,\ldots,b_k);x)}{n},$$

де $N_n((b_1,b_2,\ldots,b_k);x)$ — кількість наборів цифр $(b_1;b_2;\ldots;b_k)$ серед

$$(a_1,a_2,\ldots,a_k),(a_2,a_3,\ldots,a_{k+1}),\ldots,(a_{n-k+1},\ldots,a_n).$$

Теорема 2. *Для майже всіх чисел $t\in[\alpha_1;\alpha_2]$ є вірною умова: для кожного набору $(b_1;b_2;\ldots;b_k)$ такого, що $b_j\in\{\alpha_1;\alpha_2\}$ для кожного $j\in\{1;2;\ldots;k\}$, виконується рівність*

$$\nu((b_1,b_2,\ldots,b_k);t)=\int\limits_{\Delta_k(b_1,b_2,\ldots,b_k)}p(x)dx.$$

Доведення. Для заданого циліндру $\Delta_k(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ розглянемо функцію

$$r(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_k(b_1, b_2, \ldots, b_k), \\ 0, & x \notin \Delta_k(b_1, b_2, \ldots, b_k). \end{cases}$$

За теоремою Біркхофа-Хінчина множина $C(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ чисел x таких, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(T(x)) + \ldots + r(T^n(x))}{n} = \int\limits_{\Delta_k(b_1,b_2,\ldots,b_k)} p(x)dx$$

має міру $\eta(\cdot)$ рівну 1 і відповідно

$$\lambda(C(b_1, b_2, \ldots, b_k)) = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Нехай множина C^* є перетином всіх множин $C(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ по всіх натуральних k та відповідних наборах $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$. Зрозуміло, що $\eta(C^*) = 1$.

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{n} r\left(T^k(x)\right) = N_n((b_1, b_2, \ldots, b_k); x)$$

маємо потрібне. □

Враховуючи попередню теорему легко отримати наступний наслідок

Наслідок 1. *Для майже всіх чисел x з ланцюговим A_2-зображенням (виконуються умови*

$$\nu((\alpha_1); x) = f(\alpha_2) - f\left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) = D(\alpha_1),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \alpha_1 D(\alpha_1) + \alpha_2(1 - D(\alpha_1)),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \alpha_1^{D(\alpha_1)} \cdot \alpha_2^{1-D(\alpha_1)}.$$

Теорема 3. *Позначимо*

$$G = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} ln(x)p(x)dx.$$

Для майже всіх чисел $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$ виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n(x)} = e^G.$$

Доведення. Легко бачити, що

$$p_n(a_1; a_2; \ldots; a_n) = q_{n-1}(a_2; a_3; \ldots; a_n),$$

тобто $p_n(x) = q_{n-1}(T(x))$ і відповідно маємо

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-1}(T(x))} \cdot \ldots \cdot \frac{p_1(T^{n-1}(x))}{q_1(T^{n-1}(x))} = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \frac{p_{n-1}(T(x))(p_{n-1}(T^2(x)))...p_1(T^{n-1}(x))}{p_n(x)p_{n-1}(T(x))...p_2(T^{n-2}(x))} = \frac{1}{q_n(x)},$$

адже $p_1(T^{n-1}(x)) = 1$. Маємо

$$-\ln(q_n(x)) = \ln\frac{p_n(x)}{q_n(x)} + \ln\frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-1}(T(x))} + \ldots + \ln\frac{p_1(T^{n-1}(x))}{q_1(T^{n-1}(x))}.$$

Для $z \in \Delta_k(z)$, маємо

$$\left|\ln(z) - \ln\frac{p_k(z)}{q_k(z)}\right| \le \left|\max_{\Delta_k}(\ln t)'\right| \cdot \lambda(\Delta_k(z)) \le 2\alpha_2\lambda(\Delta_k(z)).$$

Враховуючи (маємо

$$\lambda(\Delta_k) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(\alpha_1 q_{k-1} + q_k)(\alpha_2 q_{k-1} + q_k)} \le \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(\alpha_1 w_{k-1} + w_k)(\alpha_2 w_{k-1} + w_k)} = c_k,$$

причому ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ збігається до деякої сталої $L > 0$.

Таким чином, для кожного $j \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$ виконується умова

$$\ln\left(\frac{p_{n-j}(T^j(x))}{q_{n-j}(T^j(x))}\right) = \ln(T^j(x)) + A_j(x),$$

де $A_j(x) \le 2\alpha_2 c_{n-j}$. За теоремою Біркхофа-Хінчина, для η-майже всіх $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \ln T^k(x) = G.$$

Оскільки $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k(x)\right| \le \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2\alpha_2 c_k \le 2\alpha_2 L$ маємо, що для η-майже всіх $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$

$$\frac{1}{n}\ln(q_n(x)) = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(T^k(x)) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) \to G \quad (n \to +\infty),$$

звідки випливає потрібне. □

Твердження 1. *Предметом подальшого дослідження можуть бути тополого-фрактальні властивості множин, які не задовольняють метричні умови теорем*

Список літератури

[1] Pratsiovytyi M.V. Two-character encoding systems for real numbers and their applications. *Kyiv: Scientific Opinion, 316 (2022).*

[2] Dajani K., Kraaikamp C. Ergodic theory of numbers. *Mathematical Association of America, Washington, DC, 190 (2002).*

[3] Dinaburg E, Sinai Ya. Statistics of solutions of the integral equation $ax - by = \pm 1$. *Funct. Anal., Appl 1990.* ***24****,№3, 1–13.*

[4] Dmytrenko S., Kyurchev D., Pratsiovytyi M. Continued fraction A_2 representation of real numbers and its geometry. *Ukr. Math. J 2009,****61****(4), 452–463. (in Ukrainian) DOI:10.1007/s11253-009-0236-7*

[5] Knopp K. Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen-Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten. *Math. Annalen 1926,* ***85****, 409–426.*

[6] Khinchin A. Ya. Continued fractions. *Chicago: The University of Chicago Press, 112 (1964).*

[7] Khintchine A. Metrische Kettenbruchprobleme. *Compositio Math. France 1935,* ***1****, 361–382.*

[8] Levy P. Sur les lois de probabilite dont dependent les quotients complets et incomplets dune fraction continue. *Bull. Soc. Math. France 1929,* ***57****, 178–194. DOI: 10.24033/bsmf.1150*

[9] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. Singularity of the distribution of a random variable represented by a continued A_2-fraction with independent elements. *Teor. Imovir. ta Matem. Statyst 2009,* ***81****, 139–154. (in Ukrainian)*

[10] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements. *Random Oper. Stochastic Equations 2009,* ***17****(1), 91–101. DOI:10.1515/ROSE.2009.006*

[11] Ryll-Nardzewski C. On the ergodic theorems II (Ergodic theory of continued fractions). *Studia Mathematica 1951,* ***12****, 74–79.*

[12] Seidel L. Untersuchungen *ü*ber die Konvergenz und Divergenz der Kettenbr*ü*che. *Habilschrift, München (1846).*

*[13] Stern M. Ü*ber die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 1848,* ***37****, 255–272.*

Надійшло 13.06.2025

Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P On some metric results for representation numbers by continued A_2-fractions, Bukovinian Math. Journal. ***13****, 1 (2025), 100–108.*

The classical problem of metric number theory is the search for properties that hold almost everywhere in the sense of the Lebesgue measure for the corresponding representation. An important result in the corresponding context is the well-known result of E. Borel for the classical s-adic representation of real numbers, which was subsequently significantly developed and deepened, in particular, by means of the theory of probability and dynamical systems. The rapid development of the theory of Diophantine approximations is associated, in particular with the classical continued fraction representation as a means of finding the best, in some sense, approximations of irrational numbers to rational ones. The latter aspect undoubtedly created the need to find metric properties for numbers given by continued fractions with natural elements. The first metric results for the classical continued fraction representation were obtained by O. Khinchyn, by rather complex methods, on the basis of a thorough analysis of the topological-metric properties of the corresponding representation. Other metric results were subsequently obtained by P.Levi. An important step in the development of methods of metric number theory was played by the theory of dynamical systems, in particular, the Birkhoff-Khinchin theorem. A relatively new concept is the continued fraction A_2-representation of real numbers. This representation involves the use of only two positive digits of the alphabet, the product of which is equal to 0.5. Thus, the continued fraction A_2-representation of real numbers occupies an intermediate place between the classical binary representation and the

classical chain one, which in turn is characterized by an infinite alphabet. The corresponding similarity, on the other hand, does not allow using the means of the laws of large numbers to find metric properties of numbers that have a continued fraction A_2-representation. It should also be noted that the direct methods used by O. Khinchin and P. Levi are also difficult to obtain the corresponding results for the continued fraction A_2-representation. The paper considers some metric results given in terms of the continued fraction A_2-representation of real numbers with the alphabet $\{\alpha_1;\alpha_2\}$. The ergodic properties of the dynamical system are studied of the system corresponding to the Bernoulli shift of the symbols of the corresponding A_2-representation of real numbers of the segment $[\alpha_1;\alpha_2]$.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.10

Працьовитий О.М., Ратушняк С.П.

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО ЗБУРЕНОГО ДВІЙКОВОГО РЯДУ

This paper investigates the properties of the series $a_1+a_2+...+a_n+...$, where $a_{2k-1}=\frac{1}{2^{2k-1}}$, $a_{2k}=\frac{1}{2^{2k}+1}$, which is referred to as the perturbed binary series. It is shown that for the tails of the series, defined as $r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+...$ and for the terms of the series, the inequalities

$$a_{2k-1}>r_{2k-1},\ \ a_{2k}<r_{2k}$$

hold for any $k\in N$. These inequalities ensure that the set

$$E(a_n)=\left\{x: x=\sum_{n\in M\subset N} a_n,\ M\in 2^N\right\}$$

of all subsums of the series satisfies the necessary conditions for Cantor-type structure, in particular, nowhere denseness.

Explicit expressions are obtained for the differences a_n-r_n, which characterize the lengths of certain intervals adjacent to the set E specifically the intervals of the form $(r_{2k-1};a_{2k-1})$ as well as the overlaps of cylindrical segments $\Delta_{c_1...c_m}=[u;v]$, where $(c_1,...,c_m)$ is an ordered tuple of zeros and ones, $u=c_1a_1+...+c_ma_m$, $v=u+r_m$.

The asymptotic behavior of the ratio $\frac{r_n-a_n}{r_{n-1}}$, is described; it reflects the progressive "reduction" of overlaps and "gaps" in the corresponding cylindrical segments.

Several other properties of the given series are also established.

Key words and phrases: subsum set of a series, cylinder sets, gaps (adjacency intervals) in the subsum set, overlaps of cylinder sets, Cantorval.

Ukrainian State Dragomanov University,
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: *alexandr.pratsiovytyi@gmail.com, ratush404@gmail.com*

Вступ

Одним з магістральних напрямів розвитку геометрії числових рядів є тополого-метричний аналіз множин їх неповних сум (підсум) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 16, 17]. Результати таких досліджень важливі для теорії сингулярних ймовірнісних мір, нескінченних згорток Бернуллі, теорії локально складних функцій, теорії фракталів.

УДК 514.8, 517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 40A05,11B05,28A80.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, S.R.).

© Працьовитий О.М., Ратушняк С.П., 2025

Нагадаємо, що множиною неповних сум (підсум) збіжного числового ряду

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n = r_0$$

називається множина

$$E(a_n) = \{x : x = \sum_{n\in M\subset N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,\ (\varepsilon_n) \in \{0,1\},\ M \in 2^N\}.$$

Добре відомо, що множина неповних сум абсолютно збіжного ряду є обмеженою, континуальною, досконалою множиною, симетричною відносно точки $\frac{r_0}{2}$. Також відомо, що існує лише три топологічні типи множин підсум з монотонною послідовністю членів. Це скінченне об'єднання відрізків; множина, гомеоморфна класичній множині Кантора; канторвал. У загальній постановці задача встановити топологічний тип множини непов- них ряду є непростою. Сьогодні відомі необхідні і достатні умови належності множини підсум ряду до першого типу (теорема Какея), але невідомі критерії канторвальності та ніде не щільності множини підсум ряду. І лише у доволі вузьких класах її вдається вичерпно розв'язати. В переважній більшості це класи мультигеометричних рядів (зрозуміло, що існують виключення). Очевидним є те, що коли $a_n = 2^{-n}$,тобто коли ряд є класичним двійковим, $E(a_n) = [0;1]$. Якщо $a_n = 2 \cdot 3^{-n}$, то множиною неповних сум відповідного ряду є класична множина Кантора – один з найпростіших прикладів лінійних фракталів (ніде не щільна множина нульової міри Лебега).

Дана робота присвячена властивостям збіжного додатного ряду

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4+1} + \ldots + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2k}+1} + \ldots, \tag{1}$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} > r_0 \approx 0,94582279,\ a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}}, a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}+1},$$

які мають суттєво спростити для нього доволі непросту задачу про тополого-метричні властивості множини підсум. Цей ряд ми називаємо *збуреним двійковим.*

Remark 1. *Очевидною є рівність:*

$$\frac{1}{2^n+1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n(2^n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n(2^n+1)}. \tag{2}$$

Lemma 1. *Має місце співвідношення*

$$\frac{14}{15} < r_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(4^k+1)}. \tag{3}$$

Proof. Оскільки (див. (2))

$$\frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}+1} = \frac{1}{2^{2k}(2^{2k}+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{2k}+1} = \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}(2^{2k}+1)}, \tag{4}$$

то

$$\begin{aligned} r_0 =& \frac{1}{2} + (\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2(2^2+1)}) + \frac{1}{2^3} + (\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^4(2^4+1)}) + \ldots = \\ =& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(4^k+1)} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(4^k+1)} > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

□

1 Співвідношення між членами та залишками ряду

Theorem 1. *Для будь-якого натурального k виконуються нерівності*

$$a_{2k-1} > r_{2k-1}, \;\; a_{2k} < r_{2k}.$$

Proof. Оскільки

$$r_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k}+1} + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}+1} + \frac{1}{2^{2k+3}} + \ldots < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+i}} = \frac{1}{2^{2k-1}} = a_{2k-1},$$

то $a_{2k-1} > r_{2k-1}$.

Доведемо другу нерівність. Спочатку розглянемо

$$r_2 = r_0 - a_1 - a_2 = r_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} > \frac{14}{15} - \frac{7}{10} = \frac{28-21}{30} = \frac{7}{30} > \frac{1}{5} = a_2.$$

Тепер розглянемо загальний випадок. Доведемо, що

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}+1} < \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}+1} + \frac{1}{2^{2k+3}} + \frac{1}{2^{2k+4}+1} + \ldots = r_{2k}.$$

Використовуючи рівність (4), остання нерівність набуває вигляду

$$\frac{1}{2^{2k}+1} < \frac{1}{2^{2k+1}} + (\frac{1}{2^{2k+2}} - \frac{1}{2^{2k+2}(2^{2k+2}+1)}) + \frac{1}{2^{2k+3}} + (\frac{1}{2^{2k+4}} - \frac{1}{2^{2k+4}(2^{2k+4}+1)}) + \ldots$$

Вона рівносильна нерівностям

$$\frac{1}{2^{2k}+1} < \frac{1}{2^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} \cdot 2^{2m}(2^{2k+2m}+1)},$$

$$\frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)} < \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}+1} = \frac{1}{2^{2k}(2^{2k}+1)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)} < \frac{1}{2^{2k}+1}. \tag{5}$$

Остання нерівність рівносильна нерівності $a_{2k} < r_{2k}$. Доведемо нерівність (5). Оскільки

$$2^2(2^{2k+2}+1) > 2^{2k+4} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2(2^{2k+2}+1)} < \frac{1}{2^{2k+4}},$$

$$2^4(2^{2k+4}+1) > 2^{2k+8} \Leftrightarrow \frac{1}{2^4(2^{2k+4}+1)} < \frac{1}{2^{2k+8}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^{2m}(2^{2k+2m}+1) > 2^{2k+4m} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)} < \frac{1}{2^{2k+4m}}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Тому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)} < \frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{15}.$$

Тепер порівняємо вирази $\frac{1}{15\cdot 2^{2k}}$ і $\frac{1}{2^{2k}+1}$, розглянувши різницю

$$\frac{1}{2^{2k}+1}-\frac{1}{15\cdot 2^{2k}}=\frac{15\cdot 2^{2k}-2^{2k}-1}{15\cdot 2^{2k}(2^{2k}+1)}=\frac{14\cdot 2^{2k}-1}{15\cdot 2^{2k}(2^{2k}+1)}>0.$$

Отже,

$$\frac{1}{15\cdot 2^{2k}}<\frac{1}{2^{2k}+1} \text{ і } \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m}+1)}<\frac{1}{2^{2k}+1}.$$

Таким чином, $a_{2k}<r_{2k}$. Теорему доведено. □

Corollary 1. *Для будь-яких натуральних k і m виконуються нерівності:*

$$a_{2k-1}>a_{2k}+a_{2k+1}+\ldots+a_{2k+m}.$$

Theorem 2. *Мають місце рівності*

$$r_{2k-1}=a_{2k-1}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}, r_{2k}=\frac{1}{4^k}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}.$$

Proof. Використовуючи рівність (2), виразимо

$$\begin{aligned}
r_{2k-1}=&\frac{1}{2^{2k}+1}+\frac{1}{2^{2k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}+1}+\frac{1}{2^{2k+3}}+\ldots=\\
=&(\frac{1}{2^{2k}}-\frac{1}{2^{2k}(2^{2k}+1)})+\frac{1}{2^{2k+1}}+(\frac{1}{2^{2k+2}}-\frac{1}{2^{2k+2}(2^{2k+2}+1)})+\ldots=\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+n}}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)}=\frac{1}{2^{2k-1}}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\
=&a_{2k-1}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2k}=&\frac{1}{2^{2k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}+1}+\frac{1}{2^{2k+3}}+\frac{1}{2^{2k+4}+1}+\ldots=\\
=&\frac{1}{2^{2k+1}}+(\frac{1}{2^{2k+2}}-\frac{1}{2^{2k+2}(2^{2k+2}+1)})+\frac{1}{2^{2k+3}}+(\frac{1}{2^{2k+4}}-\frac{1}{2^{2k+4}(2^{2k+4}+1)})+\ldots=\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+n}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)}=\frac{1}{2^{2k}}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\
=&\frac{1}{2^{2k}+1}+\frac{1}{2^{2k+1}(2^{2k+1}+1)}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\
=&a_{2k}+\frac{1}{2^{2k+1}(2^{2k+1}+1)}-\frac{1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\
=&a_{2k}+\frac{1}{4^k}(\frac{2}{2\cdot 4^k+1}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}).
\end{aligned}$$

□

Corollary 2. *Мають місце рівності*

$$a_{2k-1} - r_{2k-1} = \frac{1}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)},$$

$$r_{2k} - a_{2k} = \frac{1}{4^k}\left(\frac{2}{2 \cdot 4^k + 1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}\right).$$

Lemma 2. *Якщо для довільного збіжного додатного ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + ... + a_k + r_k = S_{k-1} + a_k + S_{k,m} + r_{k+m}$$

з монотонно спадними членами для деякого k виконується нерівність $r_k > a_k$, то існує таке $m = m(k)$, що

$$S_{k,m} \equiv a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+m} > a_k.$$

Proof. Оскільки $r_k > a_k$, то $r_k - a_k \equiv c = const > 0$. Тоді

$$r_k - a_k = S_{k,m} - a_k + r_{k+m} = c > 0.$$

Звідки

$$S_{k,m} - a_k = c - r_{k+m}.$$

Оскільки ряд збіжний, а його члени a_{k+m} $(m = 1, 2, ...)$ утворюють строго спадну послідовність, то послідовність (r_{k+m}) є строго спадною нескінченно малою.

Взявши $r_{k+m} < c$, отримаємо $S_{k,m} > a_k$. Лему доведено. □

Corollary 3. *Для будь-якого натурального k існує таке $m = m(k)$, що для членів ряду* (1) *виконується нерівність $a_{2k+1} + a_{2k+2} + ... + a_{2k+m} > a_{2k}$.*

Remark 2. *Теорема засвідчує виконання необхідних умов канторвальності (як і ніде не щільності) множини неповних сум ряду* (1).

2 Щілини та перекриття

Definition 1. *Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ – впорядкований набір нулів та одиниць. Відрізок $[a; b]$, де $a = \sum_{i=1}^{m} c_i a_i$, $b = a + r_m$, називається циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ і позначається $\Delta_{c_1c_2...c_m}$.*

Безпосередньо з означення випливають наступні властивості циліндричних відрізків.

1. Всі циліндри рангу m мають рівну довжину r_m, яка прямує до нуля з ростом m.

2. Має місце вкладення: $\Delta_{c_1...c_mi} \subset \Delta_{c_1...c_m}$.

3. Для будь-якої послідовності (c_n) нулів та одиниць послідовність вкладених цилі- ндричних відрізків стягується в точку множини підсум ряду.

4. $\min \Delta_{c_1...c_m0} < \min \Delta_{c_1...c_m1}$.

Циліндричні відрізки $\Delta_0 = [0; r_1]$ і $\Delta_1 = [a_1; r_0]$ першого рангу не перекриваються, оскільки $r_1 < a_1$. Інтервал $(r_1; a_1)$ є суміжними з множиною $E(a_n)$, його називатимемо щілиною рангу 1.

Для циліндричних відрізків рангу 2 маємо перетини:

$$\Delta_{00} \cap \Delta_{01} = [a_2; r_2],\ \Delta_{10} \cap \Delta_{11} = [r_0 - r_2; r_0 - a_2].$$

Аналогічно,

$$\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1}0} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1}1} = [c + a_{2k}; c + r_{2k}],$$

де $c = c_1 a_1 + \dots + c_{2k-1} a_{2k-1}$.

Легко довести наступне загальне твердження, що стосується всіх збіжних додатних рядів з монотонною послідовністю членів, включаючи ряд (1).

Lemma 3. *Кожен інтервал $(r_{2k-1}; a_{2k-1})$ є суміжним з множиною E підсум ряду* (1).

Proof. Те, що a_n і r_n належать E очевидно. Розглянемо довільне число x з множини E, тобто $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, де $(\varepsilon_n) \in L$.

Якщо $\varepsilon_i = 1$ для деякого $i \le 2k-1$, то $x \ge a_i > a_{2k-1}$. Тому $x \notin (r_{2k-1}; a_{2k-1})$.

Якщо $\varepsilon_i = 0$ для всіх $i \le 2k-1$, але $\varepsilon_i = 1$ для всіх $i > 2k-1$, то $x = r_{2k-1} = a_{2k} + a_{2k+1} + \dots$. Якщо ж деяке $\varepsilon_{2k-1+i} = 0$, то $x < r_{2k-1}$.

Отже, $x \notin (r_{2k-1}; a_{2k-1})$. З довільності вибору x отримуємо $(r_{2k-1}; a_{2k-1}) \cap E = \varnothing$. □

Corollary 4. *Для довільного натурального k маємо $(r_0 - a_{2k-1}; r_0 - r_{2k-1}) \cap E = \varnothing$.*

Дане твердження слідує з симетричності множини підсум ряду відносно точки $\frac{r_0}{2}$.

Remark 3. *Оскільки згідно з наслідком з теореми*

$$a_{2k-1} - r_{2k-1} = \frac{1}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m (4^{k+m} + 1)},$$

то міра Лебега множини $E(a_n)$ задовольняє нерівність

$$\lambda(E(a_n)) < r_0 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} - r_{2k-1}) = r_0 - \frac{2}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m (4^{k+m} + 1)}.$$

Ця груба оцінка міри Лебега множини E є наслідком її симетрії відносно точки $\frac{r_0}{2}$.

3 Асимптотична поведінка перекриттів та щілин

Lemma 4. *Для членів та залишків ряду* (1) *має місце рівність*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{r_n}{a_n} = 1.$$

Proof. Розглянемо спочатку відношення

$$\begin{aligned}\frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}} =&\frac{2^{2k+1}}{2^{2k+2}+1}+\frac{2^{2k+1}}{2^{2k+3}}+\frac{2^{2k+1}}{2^{2k+4}+1}+\frac{2^{2k+1}}{2^{2k+5}}+\ldots=\\ =&(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots)+2^{2k+1}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+2m}+1}=\\ =&\frac{1}{3}+2^{2k+1}\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{1}{4^{k+m}}-\frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)})=\\ =&\frac{1}{3}+2^{2k+1}\cdot\frac{1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m}-2^{2k+1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)}=\\ =&\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\ =&1-2\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}\to 1\ (k\to\infty).\end{aligned}$$

Тепер розглянемо відношення

$$\begin{aligned}\frac{r_{2k}}{a_{2k}} =&\frac{2^{2k}+1}{2^{2k+1}}+\frac{2^{2k}+1}{2^{2k+2}+1}+\frac{2^{2k}+1}{2^{2k+3}}+\frac{2^{2k}+1}{2^{2k+4}+1}+\ldots=\\ =&\frac{2^{2k}+1}{2^{2k+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}+(4^k+1)\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k+m}+1}=\\ =&\frac{2}{3}(1+\frac{1}{4^k})+(4^k+1)\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{1}{4^{k+m}}-\frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m}+1)})=\\ =&\frac{2}{3}(1+\frac{1}{4^k})+\frac{4^k+1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m}-\frac{4^k+1}{4^k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}=\\ =&1+\frac{1}{4^k}-(1+\frac{1}{4^k})\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m(4^{k+m}+1)}\to 1\ (k\to\infty),\end{aligned}$$

оскільки $\frac{1}{4^m(4^{m+k}+1)}<\frac{1}{4^{2m}\cdot 4^k}$. □

Theorem 3. *Мають місце співвідношення*

$$\frac{a_{2k+1}-r_{2k+1}}{r_{2k}}=\frac{1-\frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}}{1+\frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}}\to 0\ (k\to\infty),\tag{6}$$

$$\frac{r_{2k}-a_{2k}}{r_{2k-1}}=\frac{\frac{r_{2k}}{a_{2k}}-1}{\frac{r_{2k}}{a_{2k}}+1}\to 0\ (k\to\infty).\tag{7}$$

Proof. Оскільки

$$\frac{a_{2k+1}-r_{2k+1}}{r_{2k}}=\frac{a_{2k+1}-r_{2k+1}}{a_{2k+1}+r_{2k+1}}=\frac{1-\frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}}{1+\frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}},$$

$$\frac{r_{2k}-a_{2k}}{r_{2k-1}}=\frac{r_{2k}-a_{2k}}{r_{2k-1}+a_{2k}}=\frac{\frac{r_{2k}}{a_{2k}}-1}{\frac{r_{2k}}{a_{2k}}+1},$$

то враховуючи лему 4, отримуємо (6) і (7). □

References

[1] *Anisca R., Ilie M.* On the structure of arithmetic sums of Cantor sets associated with series // Results Math. – 2023. – **78**, № 5. article no. 5.

[2] *Banakh T., Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Topological and measure properties of some self-similar sets // Topol. Methods Nonlinear Anal. – 2015. – **46**, № 2. – P. 1013–1028.

[3] *Banakiewicz M.* The Lebesgue measure of some M-Cantorval // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2019. – **471**, № 1-2. – P. 170–179.

[4] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Multigeometric sequences and Cantorvals // Central European Journal of Mathematics. – 2014. – **12**, № 7. – P. 1000–1007.

[5] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Prus-Wisniowski F.* Topological and algebraic aspects of subsums of series // Traditional and present-day topics in real analysis. – 2013. – P. 354 – 366.

[6] *Bielas W., Plewik S., Walczyńska M.* On the center of distances // European Journal of Mathematics. – 2018. – **4**. – P. 687–698.

[7] *Ferdinands J., Ferdinands T.* A family of Cantorvals // Open Math. – 2019. – **17**, № 1. – P. 1468–1475.

[8] *Filipczak T., Nowakowski P.* Conditions for the difference set of a central Cantor set to be a Cantorval // Results Math. – 2023. – **78**, article no. 166.

[9] *Glab S., Marchwicki J.* Set of Uniqueness for Cantorvals // Results Math. – 2023. – **78**, № 9. art. 9.

[10] *Guthrie J., Nymann J.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – **55**, № 2. – P. 323–327.

[11] *Karvatskyi D., Murillo A., Viruel A.* The achievement set of generalized multigeometric sequences // Results Math. – 2024. – **79**, article no. 132.

[12] *Mendes P., Oliveira F.* On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets // Nonlinearity. – 1994. – **7**, № 2, – P. 329–343.

[13] *Nymann J., Sáenz R.* On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math. – 2000. – **83**, № 1. – P. 1–4.

[14] *Pratsiovytyi M., Karvatskyi D.* Cantorvals as sets of subsums for a series related with trigonometric functions // Proceedings of the International Geometry Center. – 2023. – **15**, № 3-4, – P. 262–271.

[15] *Pratsiovytyi M.V., Karvatsky D.M.* Jacobsthal-Lucas series and their applications // Algebra and discrete mathematics.–2017, 24 (1), P. 169-180.

[16] *Vynnyshyn Ya., Markitan V., Pratsiovytyi M., Savchenko I.* Positive series whose sum sets are cantorvals // Proceedings of the International Geometry Center. – 2019. – **12**, № 2. – P. 26–42.

[17] *Pratsiovytyi M., Karvatskyi D.* The set of incomplete sums of the modified Guthrie-Nymann series // Bukovinian Math. Journal. – 2022. – **10**, № 2. – P. 195–203.

Received 01.06.2025

Працьовитий О.М., Ратушняк С.П. *Про властивості одного збуреного двійкового ряду* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №1. — С. 109–117.

У роботі вивчаються властивості ряду $a_1+a_2+...+a_n+...$, де $a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}+1}$, який названо збуреним двійковим. Встановлено, що для залишків $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$

і членів ряду виконуються нерівності $a_{2k-1} > r_{2k-1}$, $a_{2k} < r_{2k}$ для довільного $k \in N$, а це забезпечує виконання необхідних умов канторвальності (як і ніде не щільності) множини $E(a_n) = \left\{ x : x = \sum\limits_{n \in M \subset N} a_n,\ M \in 2^N \right\}$ всіх підсум ряду.

Отримано вирази різниць $a_n - r_n$, що характеризують довжини деяких суміжних з множиною E інтервалів $(r_{2k-1}; a_{2k-1})$ та перекриття циліндричних відрізків: $\Delta_{c_1 \dots c_m} = [u; v]$, де $(c_1, ..., c_m)$ – впорядкований набір нулів та одиниць $u = c_1 a_1 + ... + c_m a_m$, $v = u + r_m$.

Описано асимптотичну поведінку відношення $\frac{r_n - a_n}{r_{n-1}}$, яке характеризує процес "зменшення" долі перекриттів та "щілин" у відповідних циліндричних відрізках. Встановлено низку інших властивостей даного ряду.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.11

Benner P., Chuiko S.M., Chuiko M.O.

LINEAR $\mathcal{L}$-STRUCTURED MATRIX EQUATIONS

We obtained constructive necessary and sufficient conditions for the solvability and a scheme for constructing solutions of a linear matrix equation in the form of structured matrices. In particular case we obtained constructive necessary and suf- ficient conditions for the solvability and a scheme for constructing solutions of a linear matrix equation with an $\mathcal{L}$-structure. Particular instances of the $\mathcal{L}$-structure are magic squares, Hilbert, Hankel and Toeplitz matrices, Hermitian, symmetric and skew-symmetric matrices, as well as quaternions and biquaternions.

Key words and phrases: Linear matrix equation, structured matrices, Hilbert, Hankel and Toeplitz matrices, Hermitian, symmetric and skew-symmetric matrices, quaternions, biquaternions..

Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg; Germany, Donbas State Pedagogical University, 84,112, Ukraine, Donetsk region, Sloviansk, (Chuiko S.M.)
Taras Shevchenko National University of Kyiv 64 Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine (Chuiko M.O.)
e-mail: *chujko-slav@ukr.net (Chuiko S.M.), chuikomykhail@gmail.com (Chuiko M.O.)*

1 Problem setup

We study the problem of constructing solutions [2, 6]

$$X \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

of a linear matrix equation

$$L(X) = F, \quad F \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}, \tag{1}$$

where

$$L: \ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$$

is a linear bounded matrix functional. Particular cases of the matrix algebraic equation (1) are the well-known Sylvester and Lyapunov equations [2, 3, 4]. In the article [14], the definition of several partial cases was introduced for a matrix algebraic equation (1) with an $\mathcal{L}$-structure

$$\mathcal{L}X = \mathcal{F}, \tag{2}$$

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A24.
Information on some grant ...

© Benner P., Chuiko S.M., Chuiko M.O., 2025

which determines the linear relationship between the elements of the solution of the matrix algebraic equation. In particular, the $\mathcal{L}$-structure defines symmetric, skew-symmetric, diagonal matrices, as well as quaternions. Thus, we obtain the problem of finding solutions of a linear matrix equation (1) with an $\mathcal{L}$-structure defined by a linear bounded matrix functional

$$\mathcal{L}: \ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\lambda\times\mu};$$

here $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}$ is a known matrix. Partial instances of the $\mathcal{L}$-structure are magic squares [15], Hilbert, Hankel and Toeplitz matrices [10], Hermitian [12], symmetric and skew-symmetric matrices, as well as quaternions and biquaternions [1, 13].

2 Conditions for the solvability of a linear matrix equation

We define the operator [6]

$$\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

as vectorization operator, which puts a matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ into the column vector

$$\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

composed of n columns of the matrix A and the inverse operator

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\mathcal{B}\right]: \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

which puts the matrix A in correspondence to the vector $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$. Denote by [6]

$$\left\{\Theta_j\right\}_{j=1}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

the natural basis of the space $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. We look for the general solution of the equation (1) in the form of a sum

$$X = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Denote the matrices

$$\Xi_j := L(\Theta_j) \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}, \quad j = 1, 2, \ \dots \ , \ \alpha\beta.$$

Equation (1) is equivalent to the following equation

$$Q_0\, c = \mathcal{M}[F]$$

with respect to the vector $c \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}$; here

$$Q_0 := \left\{ \ \mathcal{M}[\Xi_1] \ \ \mathcal{M}[\Xi_2] \ \dots \ \mathcal{M}[\Xi_{\alpha\beta}] \ \right\} \in \mathbb{R}^{\gamma\delta\times\alpha\beta}.$$

Denote

$$P_{Q_0}: \ \mathbb{R}^{\alpha\beta} \to \mathbb{N}(Q_0), \quad P_{Q_0^*}: \ \mathbb{R}^{\gamma\delta} \to \mathbb{N}(Q_0^*)$$

the orthoprojectors corresponding matrices Q_0 and Q_0^*. Solvability conditions and the scheme for constructing solutions of a linear matrix equation 1 are determined by the following lemma Fredholm [6].

Lemma. *The matrix equation* (1) *is solvable iff*

$$P_{Q_0^*}\mathcal{M}[F] = 0. \tag{3}$$

Under the condition (3) *and only under it, the equation* (1) *has an r-parametric family of solutions*

$$X = K[F] + V[c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

where

$$K[F] := \mathcal{M}^{-1}\left\{Q_0^+\mathcal{M}[F]\right\}, \quad V[c_r] := \mathcal{M}^{-1}\left[P_{Q_r}c_r\right].$$

The matrix P_{Q_r} is formed from r linearly independent columns of the matrix-orthoprojector P_{Q_0}.

Linear operator

$$K[F]: \ \mathbb{R}^{\gamma\times\delta} \to \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

determines the partial solution of the inhomogeneous equation (1) and is an analogue of the Green's operator of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations [5, 7], at the same time, unlike Cauchy problems for a system of ordinary differential equations, the matrix equation (1) is not solvable for all right-hand sides. The matrix $V[c_r]$ determines the general solution of the homogeneous part of the equation (1).

3 Conditions for the solvability of a $\mathcal{L}$-structured matrix equations

Equation (2) is equivalent to the following equation

$$Q_1\, c = \mathcal{M}[\mathcal{F}]; \tag{4}$$

where

$$Q_1 := \left\{ \ \mathcal{M}[\Xi_1] \ \ \mathcal{M}[\Xi_2] \ ... \ \mathcal{M}[\Xi_{\alpha\beta}] \ \right\} \in \mathbb{R}^{\lambda\mu\times\alpha\beta}.$$

Denote martix

$$\mathcal{Q} := Q_1 P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\lambda\mu\times r},$$

as well as matrices-orthoprojectors [5, 7]

$$P_{\mathcal{Q}}: \ \mathbb{R}^r \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}), \quad P_{\mathcal{Q}^*}: \ \mathbb{R}^{\lambda\mu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*).$$

Thus, we obtain an equation equivalent to the problem of finding solutions of a linear matrix equation (1) with a $\mathcal{L}$-structure (2):

$$\mathcal{Q}\, c = \mathcal{M}[\mathcal{F}] - Q_1 Q_0^+ \mathcal{M}[F],$$

is solvable iff [5]

$$P_{\mathcal{Q}^*}\left\{\mathcal{M}[\mathcal{F}] - Q_1 Q_0^+ \mathcal{M}[F]\right\} = 0. \tag{5}$$

Under the conditions (3) and (5), the problem of finding solutions of the linear matrix equation (1) with $\mathcal{L}$-structure (2) has a ρ-parametric family of solutions

$$X = \mathcal{M}^{-1}\left\{\mathcal{Q}^+\left\{\mathcal{M}[\mathcal{F}] - Q_1 Q_0^+ \mathcal{M}[F]\right\}\right\} + \mathcal{M}^{-1}\left[P_{\mathcal{Q}_\rho}c_\rho\right], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

The matrix $P_{\mathcal{Q}_\rho}$ is formed from ρ linearly independent columns of the orthoprojector matrix $P_{\mathcal{Q}}$. The conditions for solvability and the structure of solutions of a matrix equation (1) are determined by the following theorem.

Theorem. *The problem of finding solutions of a linear matrix equation* (1) *with a* $\mathcal{L}$*-structure* (2) *under the conditions* (3) *and* (5) *has a* ρ*-parametric family of solutions*

$$X = G[F] + W[c_\rho], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

where

$$G[F] := \mathcal{M}^{-1}\left\{\mathcal{Q}^+\left\{\mathcal{M}[\mathcal{F}] - Q_1 Q_0^+ \mathcal{M}[F]\right\}\right\}, \quad W[c_\rho] := \mathcal{M}^{-1}\left[P_{\mathcal{Q}_\rho} c_\rho\right].$$

In the case of $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, the problem of finding solutions of a linear matrix equation (1) with a $\mathcal{L}$-structure (2) is solvable under the conditions (3) and (5). Therefore, we will call the case $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ critical, and the opposite case $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ noncritical.

Example 1. *The conditions of the proven theorem are fulfilled in the case of a linear matrix equation with a* $\mathcal{L}$*-structure*

$$LX = F, \quad \mathcal{L}X := MXN = \mathcal{F}. \tag{6}$$

Here

$$LX := \int_0^{2\pi} U(t)XV(t)dt, \quad V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

besides

$$U(t) := \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

and

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The following matrix is key when studying the equation (6).

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

defines the orthoprojectors $P_{Q_0^*} = 0$ and

$$P_{Q_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As a consequence of the equality $P_{Q_0^*} = 0$, the condition (3) is fulfilled, so the equation (6) has a two-parameter family of solutions

$$X = K[F] + V[c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^2;$$

here

$$K[F] := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V[c_r] := \begin{pmatrix} 1 & -c_1 & 1-c_2 \\ c_1 & 1+c_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_r := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Matrix

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

defines the orthoprojectors $P_{\mathcal{Q}} = 0$ and

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

The condition (5) is fulfilled, therefore the equation (6) with $\mathcal{L}$ - structure has a unique solution

$$X = G[F] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In the noncritical case ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$), under the condition (3) the problem of finding solutions of the linear matrix equation (1) with the $\mathcal{L}$-structure (2) is solvable for any right parts.

Corollary. *In the noncritical case* ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$), *under the condition* (3) *the problem of finding solutions of the linear matrix equation* (1) *with the* $\mathcal{L}$*-structure* (2) *has a* ρ*-parametric family of solutions*

$$X = G[F] + W[c_\rho], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

where

$$G[F] := \mathcal{M}^{-1}\left\{\mathcal{Q}^+\left\{\mathcal{M}[\mathcal{F}] - Q_1 Q_0^+ \mathcal{M}[F]\right\}\right\}, \quad W[c_\rho] := \mathcal{M}^{-1}\left[P_{\mathcal{Q}_\rho} c_\rho\right].$$

Example 2. *The conditions of the proven corollary are fulfilled in the case of a linear matrix equation with a* $\mathcal{L}$*-structure*

$$LX = F, \quad \mathcal{L}X := MX + XN = \mathcal{F}. \tag{7}$$

Here

$$LX := \int_0^{2\pi} U(t) X V(t) dt, \quad V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

besides

$$U(t) := \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

as well as

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

The matrix Q_0, as well as the orthoprojectors $P_{Q_0^*} = 0$ and P_{Q_0} are given in example 1. As a consequence of the equality $P_{Q_0^*} = 0$, the condition (3) is fulfilled, so the equation (6) has a two-parameter family of solutions, given in example 1. Matrix

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

is non-degenerate, therefore, according to the proven corollary, the linear matrix equation with the $\mathcal{L}$-structure (7) has a unique solution

$$X = G[F] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In the partial case, the $\mathcal{L}$-structure defines real matrices of the form

$$A := \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}^1,$$

to which quaternions correspond

$$q = a + bi + cj + dk;$$

here i, j, k — imaginary units [13], [11, p. 91].

Example 3. *The conditions of the proved theorem are fulfilled in the case of the problem of finding a solution of a linear matrix equation*

$$LX = B, \quad \mathcal{L}X := MXN \tag{8}$$

in the form of a quaternion. Here

$$LX := R_1 X S_1 + R_2 X S_2,$$

besides

$$R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

The matrix is key when studying the equation (8)

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

defines orthoprojectors

$$P_{Q_0^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$P_{Q_0} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

besides

$$P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

The condition (3) is fulfilled, therefore the equation (8) has an eight-parameter family of solutions

$$X = K[F] + V[c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^8;$$

here

$$K[F] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad V[c_r] = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & c_7 \\ c_2 & c_4 & c_6 & c_8 \\ -c_1 & -c_3 & -c_5 & -c_7 \\ -c_2 & -c_4 & -c_6 & -c_8 \end{pmatrix}, \quad c_r := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_8 \end{pmatrix}.$$

Matrix

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

defines the orthoprojectors $P_{Q_1} = 0$ and

$$P_{Q_1^*} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

The condition (5) is fulfilled, so the equation (8) with the $\mathcal{L}$-structure has a unique solution in the form of a quaternion

$$X = G[F] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

The scheme proposed in the article for studying the solvability conditions and constructing solutions of the matrix equation with $\mathcal{L}$-structure can be transferred to linear matrix equations of a more general form [6], as well as to nonlinear matrix equations with $\mathcal{L}$-structure [8, 9], in particular, to nonlinear Riccati matrix equations [4].

References

[1] Ahmad S.S., Bhadala N. *L-structure least squares solutions of reduced biquaternion matrix equations with applications.* ArXiv.2311.06461. Doi.org/10.48550/arXiv.2311.06461.

[2] Benner P., Bollhofer M., Kressner D., Mehl C., Stykel T. Numerical Algebra, Matrix Theory, Differential-Algebraic Equations and Co Numerical Algebra, Matrix Theory, Differential-Algebraic Equations and Control Theory. Springer International Publishing, 2015. Doi 10.1007/978-3-319-15260-8

[3] Boichuk A.A., Krivosheya S.A. *Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type.* Ukrainian Mathematical Journal 1998, **50 (8)**, 1162 – 1169. Doi.org/10.1007/BF02513089.

[4] Boichuk A.A., Krivosheya S.A. *A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation.* Differential Equations 2001, **37 (4)**, 464 — 471. Http://dx.doi.org/10.1023/A:1019267220924.

[5] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition.* — Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p. — doi:10.1007/s11071-022-08218-4.

[6] Chuiko S.M. *On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem.*, 2017, Journal of Mathematical Sciences **220(5)**, 591 — 602. DOI 10.1007/s10958-016-3202-6.

[7] Chuiko,S.M. *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, **38(2)**, 236 — 244. Doi 10.1007/s10958-017-3571-5.

[8] Chuiko,S.M. *On the generalization of the Newton-Kantorovich theorem in Banach space*, Reports of the NAS of Ukraine, 2018, **6**, 22 — 31. DOI: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.022.

[9] Chuiko S.M., Shevtsova K.S. *Solvability conditions for nonlinear matrix equations.* Journal of Mathematical Sciences, 2023. **270(3)**, 407 — 419. Doi 10.1007/s10958-023-06354-9

[10] Fiedler M. *Hankel and Loewner Matrices.* Linear algebra and its application 1984, **58**, 75 — 95. Doi 10.1007/s12190-023-01916-1.

[11] Ishlinsky A.O. Orientation, gyroscopes and inertial navigation. Moscow: Science. 1976. — 672 p.

[12] Khatri C.G., Mitra K. *Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations.* SIAM Journal on Applied Mathematics 1976, **31 (4)**, 579 — 585. Https://doi.org/10.1137/0131050.

[13] Long-Sheng Liu, Shuo Zhang. *A coupled quaternion matrix equations with applications.* Journal of Applied Mathematics and Computing, 2023, **69**, 4069 — 4089. Doi 10.1007/s12190-023-01916-1.

[14] Magnus J.R. *L-structured matrices and linear matrix.* Linear and multilinear algebra 1983, **14**, 67 — 88. Https://doi.org/10.1080/03081088308817543.

[15] Pinn K., Wieczerkowski C. *Number of magic squares from parallel tempering Monte Carlo*. arxiv.org, April 9, 1998. Https://doi.org/10.1142/S0129183198000443.

Received 18.06.2025

Беннер П., Чуйко С.М., Чуйко М.О. *Лінійні $\mathcal{L}$-структуровані матричні рівняння* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №1. — С. 118–128.

Ми отримали конструктивні необхідні та достатні умови розв'язності та схему побудови розв'язків лінійного матричного рівняння у вигляді структурованих матриць. У окремому випадку ми отримали конструктивні необхідні та достатні умови розв'язності та схему побудови розв'язків лінійного матричного рівняння зі структурою $\mathcal{L}$. Окремими випадками структури $\mathcal{L}$ є магічні квадрати, матриці Гільберта, Ганкеля та Тепліца, ермітові, симетричні та кососиметричні матриці, а також кватерніони та бікватерніони.

Bukovinian Math. Journal. 2025, **13**, 1, 129–140 Буковинський матем. журнал 2025, Т.13, №1, 129–140

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.12

Кушнірчук В.В., Малик І.В.

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДРОБОВИМ БРОУНІВСЬКИМ РУХОМ

The work is devoted to the study of sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of linear stochastic differential-functional equations with integral with fractional Brownian motion $B^{(H)}(t),\ H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. The work also considers an analogue of the method of variation of constants for such equations, which is an important result in the study of conditions for exponential stability in the mean square trivial solution of these equations.

Key words and phrases: stochastic differential equations, fractional Brownian motion, exponential stability, method of variation of constants.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *kushnirchuk.volodymyr@chnu.edu.ua (Кушнірчук В.В.), i.malyk@chnu.edu.ua (Малик І.В.)*

1 Вступ

Теорії стохастичних диференціальних рівнянь та їх властивостям присвячена велика кількість робіт, основна увага в яких зазвичай зосереджена на якісних характеристиках розв'язків. Активного розвитку теорія випадкових процесів в цілому набула на початку XX століття, а теорія стохастичних диференціальних рівнянь зокрема бере початок із визначення стохастичного інтегралу [5]. Як виявилося, дана теорія має велику кількість застосувань в різних прикладних областях, включаючи фізику, хімію, біологію тощо. Теорія стійкості стохастичних диференціальних рівнянь Ito включає ряд підходів, а саме використання функцій Ляпунова та прямого підходу [2]. Слід зауважити, що хоча стохастичні диференціальні рівняння і розширюють область використання даних моделей для аналізу реальних явищ та процесів, проте володіють рядом обмежень. Одне із таких обмежень пов'язано із відсутністю післядії для стохастичних диференціальних рівнянь Ito. Тому, поряд із звичайними стохастичними диференціальними рівняннями, розвитку набуло дослідження стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням [3, 6, 8–10], де було розглянуто ряд реальних процесів, які описуються стохастичними диференціальними рівняннями із запізненням. Основна увага в цих дослідженнях звернена на умови стійкості

УДК 519.21

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60H10, 60G22.

© Кушнірчук В.В., Малик І.В., 2025

стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням. Інший підхід для врахування післядії в стохастичних диференціальних рівняннях ґрунтується на використанні дробового броунівського руху [1, 7]. Згідно даних джерел дробовим броунівським рухом називається процес Гаусса із коваріаційною функцією

$$E\left(B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}\right),\ t,s \geq 0,$$

де $H \in (0,1)$ – індекс Херста випадкового процесу $B^{(H)}(t)$. При $H = \frac{1}{2}$ дробовий броунівський рух є звичайним вінерівським процесом, $B^{\frac{1}{2}}(t) = W(t)$. У роботах Царькова Є.Ф. [9] та його учнів [6, 10] було визначено ряд необхідних та достатніх умов експоненціальної стійкості стохастичних диференціально-функціональних рівнянь запізнюючого типу та нейтрального типу для лінійного випадку, причому схема доведення ґрунтувалася на розгляді перетворення Лапласа від розв'язку. У випадку наявності стохастичного диференціального рівняння із індексом Херста $H \neq \frac{1}{2}$ дана методика потребує вдосконалення, оскільки виникає додатковий доданок при використанні ізометрії інтегралу Віка–Іто–Скорохода [1, 7].

Дана робота є першим кроком у дослідженні умов асимптотичної стійкості для лінійних стохастичних диференціальних рівнянь із інтегралом з дробовим вінерівським процесом $B^{(H)}(t),\ H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, тобто процесом із довготривалою пам'яттю. У роботі доведено два результати, один із яких наводить достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші, а другий результат присвячено аналогу методу варіації сталих для стохастичних диференціальних рівнянь.

2 Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Розглянемо лінійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння (СДФР) нейтрального типу

$$dDx_t = Lx_t dt + Gx_t dB^H(t), \quad t \in [0,T] \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x_t = \varphi. \tag{2}$$

У рівнянні (1) та (2) x_t визначає відрізок траєкторії випадкового процесу $x : [0,\ \infty) \times \Omega \to R^1$, тобто

$$x_t \coloneqq \{x(s), s \in [t-h, t]\}.$$

Лінійні функціонали $D,\ L,\ G$ визначені на просторі обмежених неперервних функцій $C([-h,0])$ наступними співвідношеннями

$$D\varphi = \varphi(0) - \int_{-h}^{0} \varphi(s) dr_D(s),$$

$$L\varphi = l\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \varphi(s) dr_L(s),$$

$$G\varphi = g\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \varphi(s) dr_G(s),$$

де функції $r_D,\ r_L,\ r_G : [-h,0] \to R^1$ – вимірні функції скінченної варіації неперервні в точці 0, причому

$$V_{-h}^0 r_D \le K_D < 1. \tag{3}$$

Поряд із лінійним СДФР (1) розглянемо звичайне диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу

$$dDy_t = Ly_t dt. \tag{4}$$

Lemma 1. *Має місце представлення*

$$x(t) = y(t) + \int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s),\ t \in [0,T] \tag{5}$$

де $y(t)$ – розв'язок задачі Коші (4), (2), *$X(t)$ – розв'язок диференціально-функціонального рівняння* (4) *з початковою умовою*

$$X(t) = \begin{cases} 1,\ t = 0, \\ 0,\ t \in [-h, 0). \end{cases}$$

Proof. Перевіримо вірність початкової умови (2) та той факт, що випадковий процес (5) задовольняє стохастичне диференціальне рівняння (1). Початкова умова виконується, оскільки

$$x(t) = y(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0].$$

Перевіримо тепер той факт, що випадковий процес $x(t)$ (5) задовольняє СДФР (1). Для цього подіємо функціоналом D на обидві частини рівняння (5):

$$Dx_t = Dy_t + D\left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s)\right).$$

Взявши диференціал від обох частин, отримаємо

$$dDx_t = dDy_t + dD\left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s)\right) =$$

$$= Ly_t dt + dD\left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s)\right)$$

Враховуючи лінійність функціонала D та обмеженість функції $X(t)$, отримаємо

$$dD\left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s)\right) = X(t-t)Gx_t dB^H(t) + \left(\int_0^t dDX(t-s)Gx_s dB^H(s)\right) =$$

$$= Gx_t dB^H(t) + \left(\int_0^t LX(t-s)Gx_s dB^H(s)\right) dt =$$

$$= Gx_t dB^H(t) + L\left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s)\right) dt.$$

Таким чином,

$$dDx_t = Ly_t dt + Gx_t dB^H(t) + L\left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s)\right) dt =$$

$$= L\left(y(t) + \int_0^t X(t-s)Gx_s dB^H(s)\right)dt + Gx_t dB^H(t) =$$

$$= Lx_t dt + Gx_t dB^H(t),$$

що і доводить твердження Леми 1. □

Слід відмітити, що представлення (5) може бути використане для моделювання траєкторій випадкового процесу $x(t)$, крім того, дане представлення дає більш чітке розуміння того, що функція $y(t)$ є середнім значенням випадкового процесу $x(t)$, тобто

$$y(t) = Ex(t).$$

Надалі в дослідженні стійкості розв'язку СДФР (1) ми будемо користуватися еквівалентністю стійкості для розв'язку $x(t)$ та перетвореного розв'язку

$$\gamma_x(t) = Gx_t$$

у разі, коли G є ненульовим функціоналом, тобто $r_G(t) \not\equiv 0$. В цьому випадку асимптотична поведінка $x(t)$ та $\gamma_x(t)$ повністю співпадають. Для подальшого дослідження зауважимо, що має місце співвідношення

$$Gx_t = Gy_t + \int_0^t GX(t-s)Gx_s dB^H(s),$$

або в термінах позначень

$$\gamma_x(t) = \gamma_y(t) + \int_0^t \gamma_X(t-s)\gamma_x(s)dB^H(s). \tag{6}$$

Розглянемо питання існування та єдиності розв'язку задачі Коші (1), (2) за умови $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, що відповідає наявності довгострокової пам'яті. Зауважимо, що достатні умови існування та єдиності будуть зводитися до умов на коефіцієнти лінійного функціоналу $D\varphi$, а саме має місце теорема.

Theorem 1. *Нехай функція r_D задовольняє умову* (3)*, мають місце оцінки*

$$V_{-h}^0 r_L = K_L < \infty,\ V_{-h}^0 r_G = K_G < \infty$$

та початкова умова $\varphi \in L_2([-h, 0])$.

Тоді задача Коші (1), (2) *має єдиний розв'язок на скінченному інтервалі $[0, T]$, $T < \infty$ з точністю до стохастичної еквівалентності, тобто для двох довільних розв'язків $x(t)$ та $\widetilde{x}(t)$ задачі* (1), (2) *та довільного $t \in [0, T]$ має місце співвідношення*

$$E\left|x(t) - \widetilde{x}(t)\right|^2 = 0. \tag{7}$$

Proof. Доведемо спочатку існування розв'язку, використовуючи наближення розв'язку задачі Коші (1), (2) за допомогою наближень Пікара. Припустимо, що наближення будуються за наступним принципом

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \varphi(t),\ t \in [-h, 0], \\ \varphi(0),\ t \in (0, T] \end{cases}$$

та наступні наближення

$$x^{(n+1)}(t) - D^0 x_t^{(n)} = \varphi(0) + \int_0^t L x_s^{(n)} ds + \int_0^t G x_s^{(n)} dB^{(H)}(s),$$

де лінійний функціонал $D^0\varphi$ визначається за таким правилом

$$D^0\varphi = \int_{-h}^0 \varphi(s) dr_D(s).$$

Зауважимо, що згідно нашого припущення норма оператора D^0 менша 1. Використовуючи означення інтегралу з дробовим броунівським рухом, отримаємо

$$E\left(x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)\right)^2 - E\left(D^0 x_t^{(n)} - D^0 x_t^{(n-1)}\right)^2 \le 2\left(\int_0^t \left(L x_s^{(n)} - L x_s^{(n-1)}\right) ds\right)^2 +$$

$$+2\left(\int_0^t \left(G x_s^{(n)} - G x_s^{(n-1)}\right) dB^{(H)}(s)\right)^2.$$

Знаходячи sup від правої та лівої частини, отримаємо наступну нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left(x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)\right)^2 \le$$

$$\le \sup_{t\in[0,T]} E\left(D^0 x_t^{(n)} - D^0 x_t^{(n-1)}\right)^2 + 2\sup_{t\in[0,T]} E\left(\int_0^t \left(L x_s^{(n)} - L x_s^{(n-1)}\right) ds\right)^2 + \tag{8}$$

$$+ 2\sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t \left(G x_s^{(n)} - G x_s^{(n-1)}\right) dB^{(H)}(s)\right)^2$$

Для першого доданку скористаємося нерівністю для функціонала D^0:

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left(D^0 x_t^{(n)} - D^0 x_t^{(n-1)}\right)^2 \le K_D \sup_{t\in[0,T]} E\left(x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t)\right)^2.$$

Для другого доданку скористаємося нерівністю Коші – Буняковського, тобто

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left(\int_0^t \left(L x_s^{(n)} - L x_s^{(n-1)}\right) ds\right)^2 \le T \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t E\left(L x_s^{(n)} - L x_s^{(n-1)}\right)^2 ds \le$$

$$\le\ T^2 K_L \int_0^T \sup_{t\in[0,t]} E\left(x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s)\right)^2 dt.$$

Для третього доданку нерівності (8) скористаємося властивостями дробового броунівського руху, а саме зазначимо, що для довільного $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$\int_0^T z(t) dB^{(H)}(t) = \int_0^T \left(K_H^* u\right)[t] dW(t),$$

де інтеграл в правій частині слід розуміти як інтеграл Ito, а $\left(K_H^* u\right)[t]$ визначається наступним чином

$$\left(K_H^* \varphi\right)[t] = c_H \Gamma\left(H - \frac{1}{2}\right) t^{\frac{1}{2}-H} \left(I_{T-}^{H-\frac{1}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} \varphi(u)\right)(t),$$

де в свою чергу константа c_H визначена таким співвідношенням

$$c_H = \sqrt{\frac{\left(2H+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+H\right)\Gamma(2-2H)}},$$

а $(I^{\alpha}_{t-}f)(s)$ визначає дробову похідну

$$\left(I^{-\alpha}_{t-}f\right)(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{ds}\int_s^t f(z)(z-s)^{-\alpha}dz.$$

Використовуючи дані факти та властивості дробової похідної, приходимо до висновку, що третій доданок правої частини нерівності (8) буде задовольняти наступну нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t\left(Gx^{(n)}_s - Gx^{(n-1)}_s\right)dB^{(H)}(s)\right)^2 \leq$$

$$\leq K_{G,H}\left(T+T^2\right)\int_0^T \sup_{t\in[0,T]} E\left(x^{(n)}(s)-x^{(n-1)}(s)\right)^2 ds.$$

Слід зауважити, що аналогічна нерівність отримується з використанням ізометрії інтегралу Віка – Іто – Скорохода [1, 7].

Враховуючи отримані нерівності, має місце наступна нерівність

$$\begin{aligned}(1-K_D)\sup_{t\in[0,T]} E\left(x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)\right)^2 \leq \\ \leq\ 2T^2K_L\int_0^T \sup_{s\in[0,t]} E\left(x^{(n)}(s)-x^{(n-1)}(s)\right)^2 dt\ + \\ +\ 2K_{G,H}(T+T^2)\int_0^T \sup_{s\in[0,t]} E\left(x^{(n)}(s)-x^{(n-1)}(s)\right)^2 dt\ \leq \\ \leq L(T+T^2)\int_0^T \sup_{s\in[0,T]} E\left(x^{(n)}(s)-x^{(n-1)}(s)\right)^2 ds,\end{aligned} \tag{9}$$

де $L = 2\left(K_L + K_{G,H}\right)$. Використовуючи нерівність (9), отримаємо оцінку для $\sup_{t\in[0,T]} E\left(x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)\right)^2$

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left(x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)\right)^2 \leq \frac{L}{1-K_D}\left(T+T^2\right)\int_0^T \sup_{t\in[0,t]} E\left(x^{(n)}(s)-x^{(n-1)}(s)\right)^2 dt,$$

або ітераційно продовжуючи дану нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left(x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)\right)^2 \leq \left(\frac{L}{1-K_D}\right)^n \frac{Pol(T,n+1)}{n!},$$

де $Pol(T,n+1)$ – поліном степеня $n+1$ від T з обмеженими деякою константою коефіцієнтами. Таким чином можна стверджувати, що ряд $x^{(0)}+x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots$ є збіжним до деякого випадкового процесу в середньому квадратичному, тобто існує границя

$$x(t) = l.i.m._{n\to\infty}\ x^{(n)}(t),\ t\in[0,T],$$

крім того випадковий процес $x(t)$ задовольняє задачу Коші (1), (2).

Розглянемо тепер єдиність розв'язку в термінах стохастичної еквівалентності (7). Доведення проведемо від супротивного, припустивши що існують два розв'язки задачі

Коші (1), (2) та позначимо їх через $x(t)$ та $\widetilde{x}(t)$. Використовуючи аналог нерівності (9), одержимо, що функція

$$u(t) = \sup_{t\in[0,t]} E\left(x(t) - \widetilde{x}(t)\right)^2$$

задовольняє нерівність

$$u(t) \le \frac{L}{1 - K_D}\left(T + T^2\right)\int_0^t u(s)ds.$$

Використовуючи лему Гронуолла – Белмана, отримаємо що $u(t) \equiv 0$, тобто два розв'язки є стохастично еквівалентними, що і потрібно було показати.

Теорема 1 доведена.

□

3 Чисельне моделювання

У цьому розділі досліджено поведінку розв'язку стохастичного диференціального рівняння з фіксованим запізненням, у якому випадкове збурення моделюється дробовим броунівським рухом:

$$dx(t) = \left(-a\,x(t) - b\,x(t-r)\right)dt + \sigma\,x(t)\,dB^H(t), \quad x(t) = \varphi(t),\ t \in [-r, 0],$$

де $r > 0$ — затримка, $\varphi(t) \equiv 1$, $B^H(t)$ — дробовий броунівський рух з параметром Херста $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Чисельне моделювання проведено методом Ейлера з дискретизацією 2000 кроків на відрізку $[0, 10]$ та методом Монте-Карло (10 реалізацій).

У першій серії експериментів параметри a та b підібрано згідно з аналітичною областю стійкості, наведеною у [4], стор. 108:

$$a = -b\cos(\hat{\zeta}r), \quad b\sin(\hat{\zeta}r) = \hat{\zeta}, \quad 0 < \hat{\zeta} < \frac{\pi}{r}.$$

При $\hat{\zeta} = 2.0$ та $r = 0.5$ отримаємо: $a \approx -1.0806$, $b = 2.0$. Побудовано сітку графіків для трьох значень $H \in \{0.5;\ 0.7;\ 0.95\}$ та двох значень інтенсивності шуму $\sigma \in \{0.6;\ 0.3\}$.

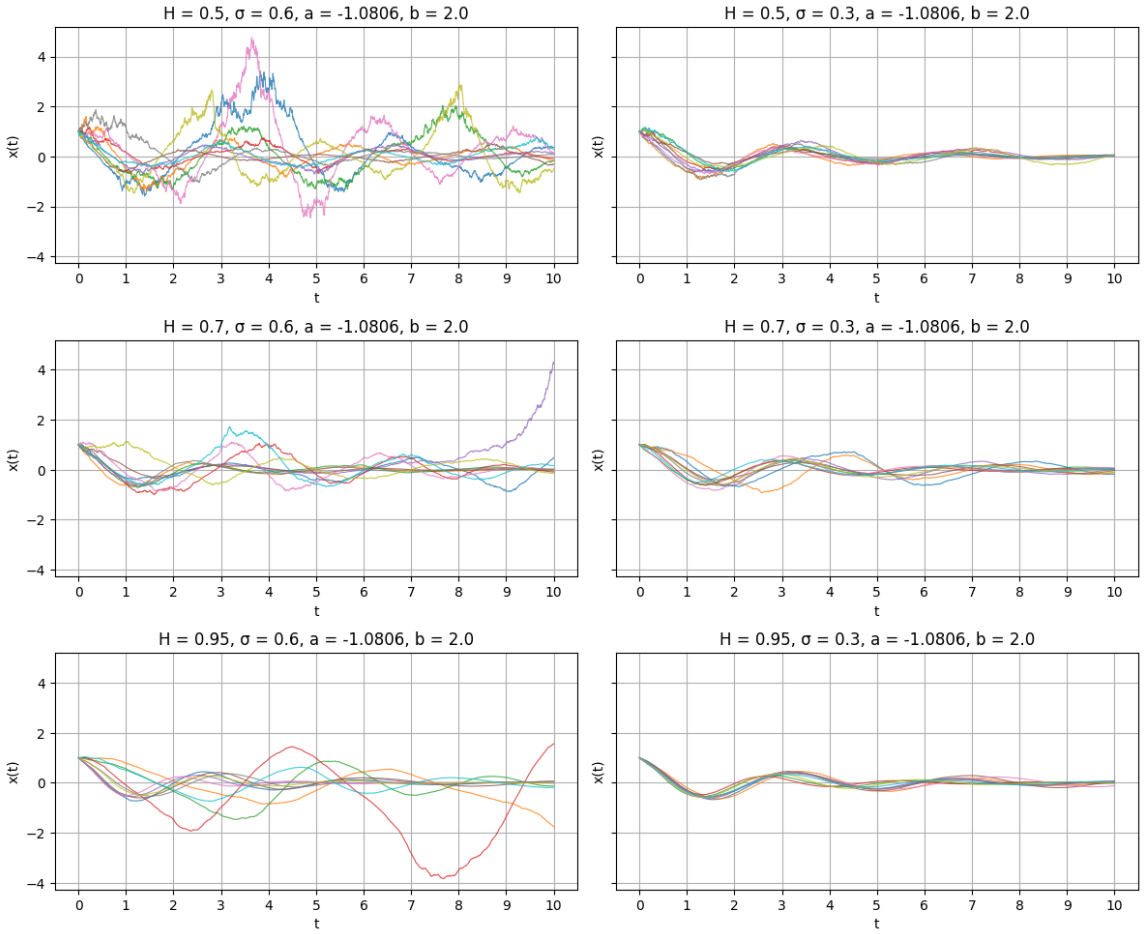


Figure 1: Стохастичні траєкторії при $a = -1.0806$, $b = 2.0$ (область стійкості з [4]).

У другій серії експериментів параметри a та b свідомо підібрано поза межами класичної області стійкості: $a = 0.2$, $b = 2.0$. Побудовано аналогічну сітку графіків для тих самих значень H та σ.

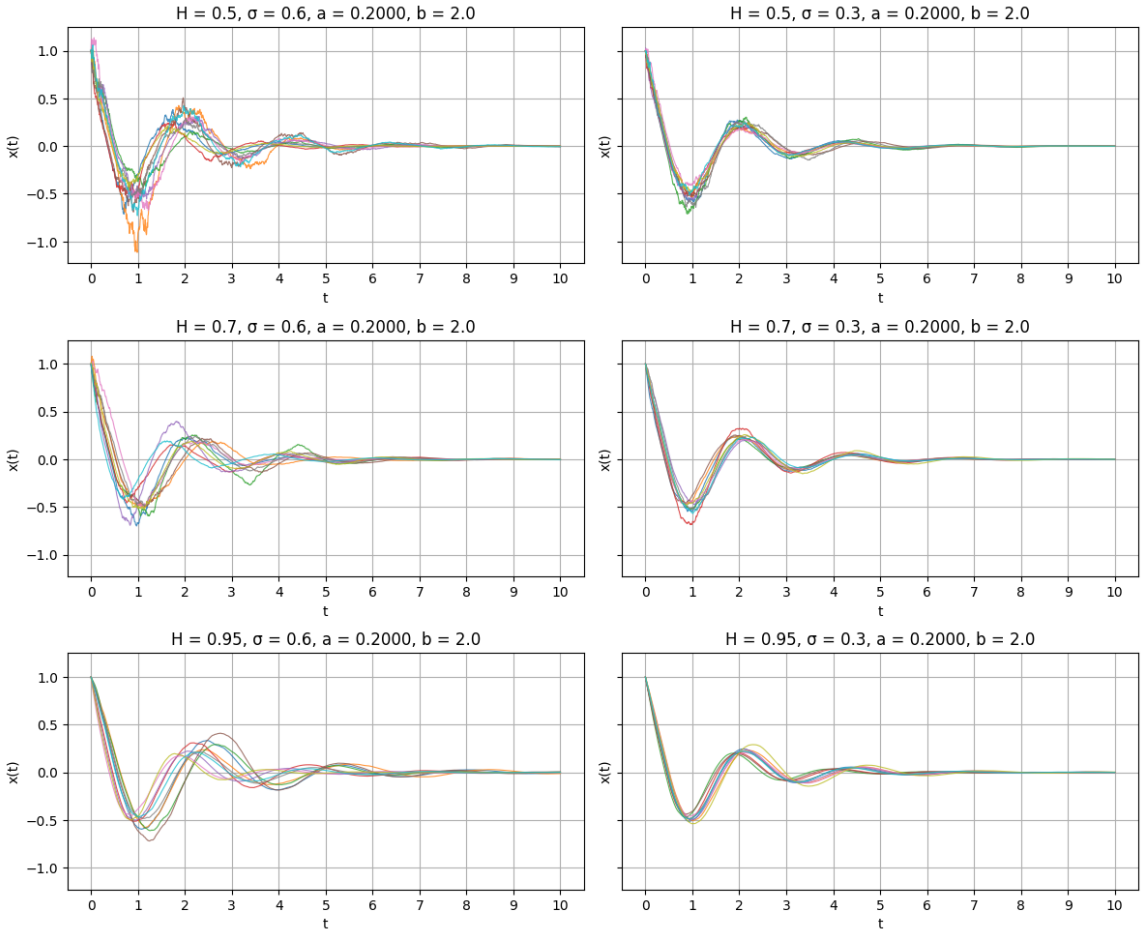


Figure 2: Стохастичні траєкторії при $a = 0.2$, $b = 2.0$ (поза областю стійкості).

Результати чисельного експерименту демонструють очікувану поведінку у випадку параметрів $a = -1.0806$, $b = 2.0$, які відповідають області стійкості із [4]. При таких значеннях параметрів стохастичні траєкторії залишаються обмеженими та згладженими — особливо при малих значеннях σ та великих значеннях H.

У другій серії експериментів параметри $a = 0.2$, $b = 2.0$ виходять за межі цієї області. Парадоксально, але при таких номінально нестійких коефіцієнтах система все одно демонструє стабілізацію траєкторій у випадках, коли H є великим (довготривала пам'ять), а інтенсивність збурення σ — малою. Виникає візуальний ефект "стійкості", хоча аналітично така поведінка не гарантується. Це пояснюється тим, що при великому значенні параметра Херста флуктуації стають менш різкими, а низький рівень шуму зменшує загальний вплив збурень.

Ці результати наголошують на тому, що оцінювати стійкість лише за формою траєкторій може бути хибним. Важливо спиратися на математичний аналіз та розглядати взаємодію всіх параметрів системи: a, b, H, σ. У цьому контексті параметр Херста H відіграє роль індикатора пам'яті процесу, здатного як стабілізувати, так і розбалансувати поведінку системи.

4 Висновки

У роботі отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з дробовим броунівським рухом. Також запропоновано аналог методу варіації сталих, який може бути використаний для дослідження умов експоненціальної стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку.

Чисельне моделювання проведено для стохастичного рівняння з фіксованим запізненням при різних значеннях параметрів Херста H, інтенсивності шуму σ та коефіцієнтів a, b. У першій серії експериментів використано параметри a та b, які належать до області стійкості, описаної у [4]. У цьому випадку стохастичні траєкторії демонструють стійку поведінку, особливо при зменшенні σ або збільшенні H.

У другій серії параметри a та b були навмисно вибрані поза межами аналітичної області стійкості. Парадоксально, але при таких нестійких значеннях коефіцієнтів система в окремих випадках демонструє візуально стабільну поведінку. Це спостерігається, зокрема, при високих значеннях H (які відповідають сильній довготривалій пам'яті) та малих значеннях σ. Така стабілізація пояснюється тим, що дробовий броунівський шум із великим параметром Херста сприяє згладженню траєкторій. Це підкреслює, що стійкість слід оцінювати не лише за формою траєкторій, а на основі математичних критеріїв.

Отримані результати показують важливість аналізу взаємодії між параметрами a, b, H та σ при вивченні поведінки розв'язків. У перспективі планується розширити дослідження на нелінійні рівняння з запізненням, а також вдосконалити чисельні методи для моделювання у випадку дробового шуму. У майбітніх роботах в цьому напрямку планується розглянути достатні умови стійкості задачі Коші (1), (2) за аналогом відповідних критеріїв для випадку $H = \frac{1}{2}$ [6, 10].

References

1. Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., Zhang, T. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Springer, London, 2008. doi:10.1007/978-1-84628-797-8.

2. Гихман, И.И., Скороход, А.В. *Стохастические дифференциальные уравнения*. Наукова думка, Киев, 1968. (in Russian)

3. Guo, Q., Mao, X., Yue, R. *Almost Sure Exponential Stability of Stochastic Differential Delay Equations*. SIAM J. Control Optim. 2016, **54**(4), 1919–1933. doi:10.1137/15M1019465.

4. Hale, J.K. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer, New York, 1977. ISBN: 978-1-4612-9894-5.

5. Itô, K. *On a Stochastic Integral Equation*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1946, **22**(1), 32–35. doi:10.3792/pja/1195572371.

6. Малик, І.В., Ясинський, В.К. *Асимптотична поведінка в середньому квадратичному розв'язків систем стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу*. Доп. Нац. Акад. Наук Укр. 2009, **10**, 15–20. (in Ukrainian)

7. Mishura, Y. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Springer, Berlin, 2008. doi:10.1007/978-3-540-75873-0.

8. Shaikhet, L. *Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations*. Springer, Cham, 2013. doi:10.1007/978-3-319-00101-2.

9. Царьков, Є.Ф., Ясинський, В.К. *Квазілійні стохастичні диференціально-функціональні рівняння*. Ориентир, Рига, 1992. (in Ukrainian)

10. Ясинская, Л.И., Ясинский, В.К. *Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастического дифференциально-функционального уравнения*. Укр. Мат. Ж. 1980, **32**(1), 78–83. (in Russian)

References

1. Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., Zhang, T. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Springer, London, 2008. doi:10.1007/978-1-84628-797-8.

2. Gikhman, I.I., Skorokhod, A.V. *Stochastic Differential Equations*. Naukova Dumka, Kyiv, 1968. (in Russian)

3. Guo, Q., Mao, X., Yue, R. *Almost Sure Exponential Stability of Stochastic Differential Delay Equations*. SIAM J. Control Optim. 2016, **54**(4), 1919–1933. doi:10.1137/15M1019465.

4. Hale, J.K. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer, New York, 1977. ISBN: 978-1-4612-9894-5.

5. Itô, K. *On a Stochastic Integral Equation*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1946, **22**(1), 32–35. doi:10.3792/pja/1195572371.

6. Malyk, I.V., Yasynskyi, V.K. *Asymptotic Mean Square Behavior of Solutions to Systems of Stochastic Differential-Functional Equations of Neutral Type*. Rep. Natl. Acad. Sci. Ukr. 2009, **10**, 15–20. (in Ukrainian)

7. Mishura, Y. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Springer, Berlin, 2008. doi:10.1007/978-3-540-75873-0.

8. Shaikhet, L. *Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations*. Springer, Cham, 2013. doi:10.1007/978-3-319-00101-2.

9. Tsarkov, Ye.F., Yasynskyi, V.K. *Quasilinear Stochastic Differential-Functional Equations*. Orientir, Riga, 1992. (in Ukrainian)

10. Yasinskaya, L.I., Yasinsky, V.K. *Asymptotic Mean Square Stability of the Trivial Solution of a Stochastic Differential-Functional Equation*. Ukr. Math. J. 1980, **32**(1), 78–83. (in Russian)

Received 01.05.2025

Кушнірчук В.В., Малик І.В. *Дослідження умов існування та єдиності розв'язків лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із дробовим броунівським рухом* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №1. — С. 129–140.

Робота присвячена дослідженню достатніх умов існування та єдиності розв'язку лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь із інтегралом з дробовим броунівським рухом $B^{(H)}(t),\ H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Також у роботі розглянуто аналог методу варіації сталих для даних рівнянь, що є важливим результатом при дослідженні умов експоненціальної стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку даних рівнянь.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.13

Мартинюк С.В., Сидора М.І.

ОПТИМІЗАЦІЯ МАРШРУТІВ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ У ЛОГІСТИЦІ: РОЗШИРЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

У статті розглянуто задачу оптимізації маршрутів безпілотних літальних апаратів (БПЛА, дронів) у логістичних операціях та запропоновано вдосконалену математичну модель маршрутів. Дане дослідження є логічним продовженням попередньої роботи авторів [1], де було виконано огляд методів планування маршрутів дронів і сформульовано базову модель оптимізації маршруту для одного БПЛА. У цій статті проведено критичний аналіз попередньої моделі, виявлено її обмеження (ігнорування низки логістичних факторів, зокрема багатьох дронів, вантажопідйомності, часових обмежень тощо) та запропоновано покращення. Новий підхід враховує характерні логістичні обмеження: одночасне використання кількох дронів, обмежений радіус дії (заряд батареї) кожного дрона, обмеження вантажопідйомності та інші практичні вимоги. Розроблено узагальнену математичну модель маршрутизації групи дронів, яку можна використати для оптимізації доставки "останньої милі". Наведено порівняння нової моделі з попередньою, показано переваги врахування додаткових факторів. На прикладі проілюстровано застосування моделі та проаналізовано результати оптимізації маршрутів при різній кількості дронів. Результати підтверджують, що залучення кількох БПЛА і врахування логістичних обмежень дозволяють істотно підвищити ефективність та швидкість доставки. Зроблено висновки щодо ефективності запропонованого підходу та окреслено напрямки подальших досліджень у сфері вдосконалення логістичних моделей доставки із використанням дронів.

Ключові слова і фрази: дрон, безпілотний літальний апарат, оптимізація маршруту, логістика, маршрутизація, математична модель, евристичні алгоритми, метаевристики, доставка останньої милі.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *s.martyniuk@chnu.edu.ua (Мартинюк С.В.), sydora.mykhailo@chnu.edu.ua (Сидора М.І.)*

Вступ

Активний розвиток технологій безпілотних літальних апаратів відкриває нові можливості для логістики, особливо на етапі доставки "останньої милі". Використання

УДК 517.96
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39B12, 45J05.
Information on some grant ...

© Мартинюк С.В., Сидора М.І., 2025

дронів для перевезення невеликих вантажів дозволяє значно підвищити швидкість виконання замовлень та знизити витрати на транспортування порівняно з традиційними методами доставки. Дрони здатні доправляти посилки без затримок, минаючи дорожні затори, що є особливо важливим у густонаселених міських районах та віддалених важкодоступних місцевостях. Водночас застосування БПЛА в логістиці пов'язане з низкою технічних та організаційних обмежень – обмежений радіус дії та час автономного польоту через ємність батарей, невелика вантажопідйомність, залежність від погодних умов, необхідність дотримання авіаційних правил тощо. Ці фактори вимагають ретельного планування маршрутів і використання спеціалізованих алгоритмів оптимізації. Таким чином, задача побудови оптимальних логістичних маршрутів для дронів є актуальною проблемою, від вирішення якої залежить ефективність та безпека новітніх систем доставки.

Останніми роками спостерігається зростання наукового інтересу до проблеми маршрутизації дронів. Це обумовлено як появою нових прикладних завдань (комерційна доставка товарів, медична доставка у віддалені райони, моніторинг тощо), так і суттєвим прогресом у методах оптимізації. Задачі оптимального планування маршрутів для БПЛА поєднують в собі класичні задачі маршрутизації транспортних засобів (vehicle routing problems) з унікальними особливостями дронів - обмеженою дальністю, необхідністю повернення до бази, малою місткістю, можливістю комбінування з наземним транспортом тощо. Традиційні методи оптимізації маршрутів потребують адаптації під ці нові умови.

1 Огляд літератури та аналіз попередньої роботи

Проблематика оптимізації маршрутів дронів вже висвітлювалася в літературі, проте дослідження мають різні акценти. У роботі розглянуто сучасні підходи сучасних підходів до планування маршрутів БПЛА та запропоновано базову математичну модель для одного дрона. Зокрема, було класифіковано методи оптимізації на точні (вичерпний пошук, методи комбінаційної оптимізації), евристичні (жадібні алгоритми, наближені схеми) та метаевристичні (генетичні алгоритми, мурашині алгоритми, рій частинок, імітація відпалу тощо). Точні методи гарантують знаходження оптимального маршруту, але є обчислювально затратними і придатні лише для невеликих задач (десятки точок) [2]. Евристичні та метаевристичні підходи не гарантують глобального оптимуму, зате дають прийнятні рішення за поліноміальний час навіть для великих сценаріїв [3, 4, 5]. У роботі наведено порівняльну характеристику основних категорій методів: наприклад, точні методи забезпечують еталонну якість рішення на малих наборах (до ~ 10 адрес), тоді як метаевристики дозволяють масштабуватися до сотень точок ціною відхилення від оптимуму. Зважаючи на NP-складність задачі маршрутизації дронів, більшість новітніх досліджень зосереджені саме на вдосконалених евристиках та гібридних алгоритмах. У систематичному огляді 2018-2022 рр. відзначено, що понад 60% публікацій цієї тематики стосувалися застосування метаевристичних алгоритмів для планування траєкторій дронів [4].

Окремий напрям присвячено подоланню фізичних обмежень дронів. Зокрема, дослідники пропонують нетривіальні рішення для розширення радіусу дії: Чаудхурі С., Соловей К., Кочендерфер М. Дж., Павоне М. запропонували використовувати громадський транспорт як проміжний носій для дронів (модель "drone-public transport") – дрони частину шляху їдуть на автобусах або трамваях, економлячи заряд батареї і значно збільшуючи дальність доставки [8]. Алгоритмічно це реалізовано через ієрархічну дворівневу оптимізацію: на верхньому рівні призначають дронам послідовності доставок, мінімізуючи максимальний час виконання замовлень, а на нижньому – вирішують задачу періодичної маршрутизації флоту дронів з урахуванням розкладу громадського транспорту. Такий підхід продемонстрував високу масштабованість: модельне випробування показало можливість обслуговувати до 5000 посилок 200 дронами через мережу з 8000 зупинок, причому час розрахунку рішення – лічені секунди. Це свідчить про значний потенціал комбінування дронів із наземним транспортом.

Іншим популярним напрямом є інтеграція дронів з вантажними автомобілями, так звані системи типу "truck-and-drone". У таких моделях безпілотник запускається з вантажівки, виконує доставку до клієнта і повертається на вантажівку у певній точці маршруту. Оптимізаційна задача полягає у спільному плануванні маршруту вантажівки та дрона з мінімізацією загального часу доставки. Тун Б., Ван Цз., Ван С., Чжоу Ф., Мао С., Чжен В. розробили математичну модель для цієї задачі та запропонували алгоритм на основі табу-пошуку з змінними околами для її розв'язання [7]. Показано, що такий метаевристичний підхід знаходить близькі до оптимуму рішення, розподіляючи замовлення між вантажівкою і дроном таким чином, щоб мінімізувати сумарний час доставки. Враховуються обмеження ємності батареї дрона та необхідність зупинки вантажівки для очікування дрона в точках зустрічі. Задачі цього типу фактично є узагальненнями класичної задачі комівояжера з дронами (TSP-D) і також належать до NP-складних; для їх розв'язання застосовують як точні методи (методи декомпозиції, "гілок і меж" для малих випадків), так і евристики для більших сценаріїв [7, 14].

Важливим фактором є енергетичні витрати дронів. Роботи показують, що витрата заряду батареї залежить не лише від відстані, але й від режиму польоту (наявність вантажу, маневри, вітер тощо). Наприклад, дослідження 2021 року продемонстрували, що дрон витрачає значно більше енергії під час активного виконання задачі (перевезення вантажу чи відеозйомки), ніж у холостому транзитному перельоті без навантаження. Тому при плануванні маршруту варто враховувати, що навіть порожній переліт між точками споживає ресурс батареї, а переліт з корисним навантаженням – тим більше. У ряді моделей вводять окремі змінні для обліку енергії на різних етапах маршруту (наприклад, "енерговитрати на переліт без доставки" і "енерговитрати під час доставки") [5]. Оптимальні маршрути слід будувати з урахуванням мінімізації сумарних енерговитрат, а не тільки відстані чи часу.

Також досліджується вплив погодних умов на маршрути дронів. Зокрема, Ітo С., Акайва К., Фунабаші Й. запропонували методику планування маршрутів з урахуванням вітру та ваги вантажу. Розроблено кілька стратегій динамічного коригування траєкторії польоту відповідно до напрямку вітру: окремо оптимізація за вагою (DPFS-L), окремо за вітром (DPFS-W) та комбінована (DPFS-LW). Модель дозволяє дрону максималь-

но використати попутний вітер і мінімізувати зустрічний опір, завдяки чому вдалося скоротити час польоту й знизити енерговитрати майже на 10% порівняно зі стандартними методами на базі генетичного алгоритму та імітації відпалу [6]. Ці результати підкреслюють важливість динамічного врахування зовнішніх факторів (вітер, погода) при побудові маршрутів: маршрут, оптимальний за ідеальних умов, може виявитися далеким від оптимального або навіть небезпечним у реальних умовах (наприклад, при сильному зустрічному вітрі або опадах).

Підсумовуючи огляд праць, слід відзначити значний прогрес у вирішенні задач оптимізації маршрутів дронів. Проте більшість існуючих робіт зосереджені або на окремих аспектах (наприклад, тільки один дрон, або тільки моделювання енергоспоживання), або пропонують алгоритми для фіксованої постановки задачі. Попередня робота дала цілісний огляд підходів і представила базову модель маршруту одного дрона, проте не врахувала низку важливих логістичних обмежень. Зокрема, модель розглядала лише один БПЛА і не охоплювала випадки координації декількох дронів, не включала обмеження вантажопідйомності чи часові вікна доставок. Крім того, у попередній роботі не було представлено алгоритму розв'язання моделі на практиці (було лише концептуально сформульовано постановку як задачу комівояжера з обмеженням дальності). Таким чином, існує потреба у розробці більш узагальненої моделі, яка врахує зазначені логістичні фактори і стане основою для побудови ефективних алгоритмів маршрутної оптимізації в системах доставки з дронами.

2 Мета і завдання дослідження

Метою даного дослідження є узагальнення та розвиток підходів до оптимізації маршрутів безпілотників у логістиці шляхом створення покращеної математичної моделі, що враховує ключові логістичні обмеження, не розглянуті в попередній роботі. Задля досягнення цієї мети необхідно вирішити такі завдання: (1) проаналізувати недоліки попередньої моделі маршрутизації дрона та визначити, які додаткові фактори слід включити; (2) розробити розширену математичну модель оптимального маршруту для групи дронів (множини БПЛА) з урахуванням обмежень на дальність польоту, вантажопідйомність та можливість паралельного виконання доставки кількома дронами; (3) запропонувати методичні підходи до розв'язання отриманої оптимізаційної моделі (оцінка обчислювальної складності, придатні алгоритмічні схеми - точні чи наближені); (4) перевірити працездатність моделі на прикладному сценарії, порівняти результати оптимізації для різних конфігурацій (різна кількість дронів, різні обмеження) та проаналізувати ефект врахування нових обмежень; (5) сформулювати висновки щодо переваг нової моделі та напрямів її подальшого вдосконалення (наприклад, врахування динамічних факторів, багатодепо, інтеграція з наземним транспортом тощо).

3 Методологія та математична модель

Для вирішення поставлених завдань використано методи математичного моделювання та комбінаторної оптимізації. Запропонована модель формулюється як задача

цілочисельного лінійного програмування, що узагальнює класичну задачу комівояжера з додатковими обмеженнями, характерними для дронів. Модель належить до NP-складних оптимізаційних задач і для великих розмірів може розв'язуватися лише евристичними або метаевристичними методами. Однак її явне формулювання є необхідним кроком для розуміння структури задачі та розробки ефективних алгоритмів [4].

Розглянемо систему доставки, де m дронів (БПЛА) використовуються для виконання доставки до низки клієнтів. Нехай дано множину точок доставки $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ (клієнтів), які повинен відвідати хоча б один дрон, та базу (склад) 0, з якої дрони стартують і куди повертаються після виконання завдань. Таким чином, повна множина вершин для маршрутизації – $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, де 0 – депо (база). Кожній парі вершин i, j (включно з базою) відповідає величина d_{ij} – відстань (або час польоту) від точки i до точки j. Значення d_{ij} можуть бути отримані з географічних координат або за допомогою моделей врахування рельєфу та перешкод (у цій роботі припускаємо, що значення відомі та фіксовані для заданої мережі точок).

Введемо бінарні змінні:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{якщо дрон } k \text{ летить безпосередньо з точки } i \text{ до точки } j, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Таким чином, набір змінних описує маршрути кожного з дронів як цикли, що починаються і завершуються в депо 0, і проходять через деякі підмножини точок доставки.

Цільова функція. Як критерій оптимальності візьмемо мінімізацію загальної сумарної довжини маршрутів усіх дронів (що еквівалентно мінімізації сумарного часу в польоті за умови однакової швидкості дронів). Цільова функція має вигляд сумарної вартості всіх використаних ребер маршрутів:

$$F = \min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} d_{ij} x_{ij}^k. \tag{1}$$

Мінімізуючи (1), ми зменшуємо загальний проліт дронів, що важливо для економії енергії та ресурсів. У реальних задачах можливі й інші критерії – наприклад, мінімізація максимального часу доставки (щоб всі замовлення були виконані якомога швидше) або багатокритеріальні функції, що враховують і час, і енерговитрати. Проте модель легко адаптується під такі критерії, і для визначеності далі розглядаємо саме (1).

Обмеження моделі. Модель включає такі групи обмежень:

1. **Унікальність відвідування кожної точки.** Кожен клієнт (точка $i \in \{1, \ldots, n\}$) має бути обслужений рівно один раз одним з дронів. Це накладає умову, що із кожної такої точки виходить рівно одне ребро маршруту в якомусь дроні, і відповідно входить рівно одне ребро. Запишемо дане обмеження у вигляді балансу потоків для кожної точки у сукупності маршрутів:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}^k = 1, \quad \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}^k = 1, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Тут перша рівність гарантує, що з точки i виходить один маршрутний відрізок (точка залишена одним дроном), а друга – що в точку i хтось прибув (точка відвідана). В сукупності (2) забезпечує відвідування і рівно одним дроном. Ці дві умови можна об'єднати і сформулювати як: кожен клієнт включений рівно в один маршрут одного дрона.

2. **Структура маршрутів кожного дрона.** Кожен дрон виконує маршрут, який починається у базі 0 та завершується в базі 0. При цьому для внутрішніх точок маршруту необхідно забезпечити "вхід = вихід" – тобто неперервність шляху. Для кожного дрона k мають виконуватися такі балансові співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j}^{k} \le 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{0i}^{k} \le 1, \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij}^{k} = \sum_{j=0}^{n} x_{ji}^{k} \le 1, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \forall k \in \{1, \dots, m\}. \tag{4}$$

Рівності (4) означають, що для кожного дрона кількість входів у будь-яку проміжну точку дорівнює кількості виходів з неї (0 або 1), тобто маршрут дрона k не розгалужується та є неперервним циклом. Нерівності (3) задають, що дрон k може розпочати (і відповідно завершити) не більше одного маршруту – фактично кожен дрон або використовується (тоді з бази виходить і до бази заходить по одному ребру для нього), або ні. У випадку, коли кількість дронів m більша, ніж потрібно для покриття всіх точок, деякі дрони просто не будуть використовуватися в оптимальному рішенні (для них і вихід, і вхід з бази будуть нульовими).

3. **Обмеження вантажопідйомності.** Кожен дрон може перевозити обмежену масу вантажу за один виліт. Нехай q_i – вага (або об'єм) вантажу, що призначений для клієнта i; Q – максимальна вантажопідйомність (або місткість) одного дрона. Щоб маршрут дрона не перевищив його вантажні можливості, накладається обмеження на сумарний вантаж, доставлений одним дроном за один рейс. Математично для кожного дрона k:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=0}^{n} x_{ij}^{k} \le Q, \ \forall k = 1, \dots, m. \tag{5}$$

Вираз $\sum\limits_{j=0}^{n} x_{ij}^{k}$ дорівнює 1, якщо точка i входить до маршруту дрона k (з неї виходить ребро в маршруті k), і 0 – якщо не входить. Таким чином, ліва частина (5) дорівнює сумарному вантажу, закріпленому за дроном k. Нерівність (5) забезпечує, що жоден дрон не візьме більше вантажу, ніж може нести. Зауважимо, що у випадку дуже малої вантажопідйомності (коли Q менше за будь-який окремий q_i) задача може не мати розв'язків – це означатиме, що деякі замовлення занадто важкі для наявних дронів і їх необхідно виконувати іншим транспортом.

4. **Обмеження дальності (заряду батареї).** Критичною особливістю дронів є обмежений запас ходу: дрон не може здійснювати маршрут довше, ніж дозволяє його батарея (якщо не передбачено заміни батарей чи підзарядки в польоті). Введемо параметр $D_{\max}$ – максимальна сумарна дистанція, яку може пролетіти дрон за один виліт

(до повернення на базу) без підзарядки. Тоді для кожного дрона накладаємо обмеження на сумарну довжину його маршруту:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} d_{ij}x_{ij}^{k} \le D_{\max},\ \forall k = 1,\dots,m. \tag{6}$$

Це обмеження гарантує, що загальна відстань (або час) польоту дрона k в межах одного маршруту не перевищує допустимої. Якщо оптимізаційна модель спробує "нагрузити" одного дрона занадто великою кількістю точок далеко від бази, нерівність (6) зробить таке рішення недопустимим і вимагатиме задіяти додатковий дрон (або залишити частину точок необслугованими, що суперечило би (2)). Таким чином, (6) враховує обмежений заряд батарей і радіус дії БПЛА. За потреби, модель можна розширити для врахування проміжних підзарядних станцій: у цьому випадку у множину вершин V додаються спеціальні вершини-станції, які дрон може відвідувати для заміни батареї, а в обмеження (6) замість жорсткого ліміту $D_{\max}$ – вводиться інша схема обліку енергоспоживання (наприклад, максимум на відрізок між підзарядками). У даній роботі для простоти не вводимо проміжних станцій, вважаючи, що кожен дрон повинен виконати свій маршрут від бази до бази на одному заряді.

5. **Уникнення підциклів.** Класичне обмеження цілісності маршруту: потрібно унеможливити виникнення підциклів (субтурів), тобто замкнених маршрутів, що не містять бази 0. У відомій формі Міллера–Такера–Земліна для задач комівояжера вводять додаткові змінні порядку відвідування. Адаптуємо цей підхід для багатьох дронів: введемо допоміжні змінні u_i^k для всіх вершин $i \in \{1,...,n\}$ і кожного дрона k, що відповідають умовному номеру (позиції) відвідин точки і дроном k у його маршруті. Тоді для будь-яких двох різних точок i і j, та для кожного дрона k, додамо нерівність:

$$u_i^k - u_j^k + (n+1)x_{ij}^k \le n,\ \forall i \ne j,\ i,j \in \{1,...,n\},\ \forall k. \tag{7}$$

Це стандартне підциклове обмеження: воно забезпечує, що не може існувати цикл без нуля, оскільки в такому циклі неможливо задовольнити всі нерівності (7). Інтуїтивно, (7) означає: якщо дрон k летить з i в j, тоді порядковий номер u_j^k має бути $u_j^k + 1$ (або більший на певну кількість, не більше n). Для випадків, коли між двома точками немає прямого переходу в маршруті k, нерівність автоматично виконується і не впливає на рішення. Таким чином, система обмежень (7) розриває всі внутрішні цикли, примушуючи маршрут кожного дрона формувати єдиний цикл, що обов'язково включає базу (через умови (3)).

Повна математична модель оптимального планування маршрутів групи дронів складається з цільової функції (1) та обмежень (2)-(7) при $x_{ij}^k \in \{0,1\}$ і додаткових змінних $u_j^k \ge 0$. Цю модель можна розглядати як варіацію задачі розподіленого комівояжера (multi-depot VRP) з однією загальною базою і з обмеженнями на ресурс (довжину маршруту) та місткість. Важливо підкреслити, що навіть ця розширена модель є спрощеною: вона не враховує, наприклад, часові вікна доставки, пріоритети замовлень, динамічне надходження нових заявок тощо. Проте запропонована постановка вже набагато ближча до реальних умов експлуатації дронів, ніж попередня базова модель, і може слугувати основою для подальшого ускладнення.

4 Врахування недопустимих маршрутів у математичній моделі

У реальних умовах експлуатації систем доставки вантажів за допомогою безпілотних літальних апаратів часто виникають ситуації, коли прямий переліт між двома точками (клієнтами або депо) є неможливим або забороненим. Це може бути зумовлено такими причинами:

- **Регуляторні обмеження**: наявність зон із забороною польотів (режимні об'єкти, військові та урядові споруди, міжнародні кордони, спеціальні авіаційні зони тощо).

- **Фізичні бар'єри**: перешкоди рельєфу (гори, водойми, висока щільність забудови), які унеможливлюють прямий переліт.

- **Операційні або логістичні вимоги**: відсутність необхідних умов для здійснення посадки або розвантаження, потреба в транзитному проходженні через проміжні пункти.

Хоча такі обмеження можуть бути формально представлені у моделі шляхом штучного збільшення величин d_{ij}, цей підхід має суттєві недоліки. По-перше, він створює можливість непередбачуваних аналітичних проблем (числова нестабільність розрахунків, погіршення умовності задачі). По-друге, він не гарантує повного виключення небажаних ребер через особливості роботи оптимізаційних алгоритмів (особливо евристичних і метаевристичних), які можуть розглядати такі ребра навіть з високими "штрафами", якщо це знижує загальну цільову функцію.

Таким чином, для коректного і точного врахування згаданих ситуацій доцільно явно вводити додаткові логічні обмеження, які унеможливлюють вибір окремих ребер (переходів між точками доставки).

5 Формалізація обмежень на недопустимі ребра

Позначимо через множину:

$$\mathcal{F} \subseteq \{(i,j) \mid i,j \in \{0,\dots,n\}, i \neq j\}$$

множину **недопустимих (заборонених) ребер**. Вона визначає всі пари точок, прямий переліт між якими є неможливим чи забороненим за умовами логістики, законодавства або фізичних бар'єрів. Для того, щоб математична модель чітко враховувала ці обмеження, слід доповнити її такими рівностями:

$$x_{ij}^k = 0,\ \forall (i,j) \in \mathcal{F},\ \forall k = 1,\dots,m. \tag{8}$$

Ця група обмежень у явній формі забороняє використання конкретних переходів між точками доставки для будь-якого дрона з множини наявних транспортних засобів. Завдяки цьому модель отримує низку значних переваг перед альтернативним методом "штрафування" великими значеннями d_{ij}:

- **Аналітична прозорість і зрозумілість**: явні обмеження дозволяють чітко бачити, які маршрути виключені, що полегшує подальший аналіз та аудит рішення.

- **Підвищення ефективності обчислень**: оптимізаційні алгоритми не витрачають час і ресурси на перевірку недопустимих варіантів маршрутів, які завідомо не можуть бути частиною розв'язку.

- **Числова стабільність**: уникнення великих числових значень дозволяє уникнути проблем округлення і знижує ризик некоректної роботи чисельних алгоритмів розв'язування.

6 Обговорення в контексті сучасних реалій

На тлі швидкого впровадження дронів у міські та регіональні системи доставки вантажів у багатьох країнах світу, включно з Україною, особливо гостро постає проблема врахування регуляторних та фізичних обмежень для польотів. Так, наприклад, через військові дії, особливий правовий режим у прифронтових зонах або дію норм міжнародної авіації багато маршрутів можуть бути непридатними для використання навіть тимчасово. Також важливими є фізичні перешкоди (велика забудова у містах, великі водні масиви або гори у сільській місцевості тощо). У цих умовах явне представлення множини заборонених ребер $\mathcal{F}$ є надзвичайно актуальним і практично важливим.

Крім того, запропонований спосіб явного введення обмежень відповідає сучасним підходам до математичного моделювання транспортних систем з високим рівнем деталізації та практичної придатності рішень. Це дозволяє швидко адаптувати модель до змін у навколишньому середовищі або регуляторних нормах без значних додаткових обчислювальних витрат або ризику втрати аналітичної чіткості.

Таким чином, додатковий блок обмежень (8) не лише робить модель реалістичнішою, а й значно підвищує її практичну цінність і наукову строгість.

7 Приклад застосування

Розглянемо спрощений приклад для демонстрації роботи моделі. Припустимо, що база знаходиться в центрі області доставки, а клієнти розташовані навколо неї. Нехай маємо $n = 6$ точок доставки з координатами (в умовних одиницях): $P_1(2, 4)$, $P_2(3, -1)$, $P_3(-2, 5)$, $P_4(5, 3)$, $P_5(-3, -2)$, $P_6(4, -4)$, а база $O(0, 0)$. Відстані d_{ij} розраховуються як евклідові між відповідними координатами. Нехай кожен дрон може пролетіти не більше $D_{\max} = 20$ (умовних відстаней) за рейс і нести не більше $Q = 2$ одиниць вантажу. Припустимо, що всі посилки мають вагу $q_i = 1$ (одиниця), тож вантажопідйомність не обмежує кількість точок (кожен дрон може взяти до 2 посилок за рейс).

Спочатку розглянемо випадок використання тільки одного дрона ($m = 1$). З точки зору моделі це зводиться до класичної задачі комівояжера: дрон має об'їхати всі 6 точок і повернутися на базу, мінімізуючи сумарний шлях. Для заданих координат оптимальний маршрут (знайдений перебором всіх перестановок для наочності) може мати вигляд $O \to P_3(-2, 5) \to P_1(2, 4) \to P_4(5, 3) \to P_2(3, -1) \to P_5(-3, -2) \to O$. Довжина цього маршруту становить приблизно 31.2 (ум. од.). При цьому обмеження дальності: маршрут довжиною 31.2 перевищує $D_{\max} = 20$, тобто один дрон фізично не зміг би такий шлях подолати без підзарядки. Таким чином, для одного дрона задача не має

допустимого рішення при $D_{\max} = 20$ – модель (1)-(7) це відобразить тим, що нерівність (6) порушується. Реально це означає, що один дрон не зможе обслужити всіх 6 точок за один виліт. Необхідно або передбачати проміжну зарядку, або, що більш доцільно, залучити додаткових дронів.

Розглянемо випадок $m = 2$ дронів. При наявності двох дронів оптимальна стратегія – розподілити точки між ними таким чином, щоб кожен дрон обслуговував групу географічно близьких точок і жоден маршрут не перевищував 20. Для нашого набору точок один з можливих оптимальних розподілів: наприклад, дрон A бере точки $\{P_1, P_3, P_4\}$, а дрон B – точки $\{P_2, P_5, P_6\}$. Маршрут дрона A може бути: $O \to P_3(-2, 5) \to P_1(2, 4) \to P_4(5, 3)$, його довжина $\sim$ 18.5 ум. од. Маршрут дрона B: $O \to P_5(-3, -2) \to P_2(3, -1) \to P_6(4, -4)$, довжина $\sim$ 17.2. Обидва маршрути менші за поріг $D_{\max} = 20$, отже обмеження дальності виконуються. Сумарна довжина двох маршрутів $\sim$ 35.7, що дещо більше за 31.2 (шлях одного дрона без обмежень). Це очікувано, адже двоє дронів виконують частину шляху паралельно (кожен мусить окремо злітати з бази і повернутися, що додає "зайві" пробіги). Зате максимальний час доставки суттєво зменшується: якщо одним дроном всі доставки займали б 31.2 (умовно, хвилин), то двома дронами – близько 18.5 (тобто на 40% швидше). Кожен дрон летить по своєму маршруту одночасно, і загальний процес завершиться, коли останній з двох дронів повернеться (≈ 18.5). Отримане рішення задовольняє всі обмеження моделі (2)-(7): всі точки розподілені однозначно між двома маршрутами, жоден маршрут не перевищує ані вантажопідйомності (2 точки – 2 кг $< Q = 2$), ані дальності ($\leq 18.5 < D_{\max}$).

Для трьох дронів ($m = 3$) можна розподілити 6 точок приблизно порівну – по 2 точки на дрон. Один з оптимальних варіантів: дрон A обслуговує $\{P_1, P_4\}$, дрон B – $\{P_2, P_6\}$, дрон C – $\{P_3, P_5\}$. Довжини маршрутів у цьому випадку становлять $\sim$ 13.5, $\sim$ 12.0 і $\sim$ 16.1 відповідно. Найдовший маршрут – $\sim$ 16.1, тобто усі доставки будуть виконані приблизно за 16 умовних хвилин (ще швидше). Сумарний наліт трьох дронів $\sim$ 41.6, тобто дещо більший, ніж у випадку двох (як і слід було очікувати, більше маршрутів – більший загальний пробіг). Цей приклад ілюструє важливий компроміс: залучення більшої кількості дронів дозволяє зменшити загальний час виконання всіх доставок (за рахунок паралельності), проте сумарні витрати палива/енергії зростають (оскільки щоразу кожен дрон долає шлях від/до бази і може мати недовантаження). У реальних умовах вибір кількості дронів залежатиме від пріоритетів: якщо головна мета – мінімізувати час очікування клієнтів, доцільно залучати більше дронів; якщо важливіше мінімізувати витрати, можливо раціональніше використовувати менше дронів або комбінувати їх з наземними кур'єрами.

Наведений сценарій підтверджує адекватність запропонованої моделі. Модель автоматично "вирішує", скільки дронів задіяти і як саме розподілити між ними завдання, виходячи з критеріїв оптимізації і заданих обмежень. При $D_{\max} = 20$ модель обере мінімально необхідну кількість дронів (в нашому прикладі – 2) для покриття всіх точок без порушення обмеження дальності. Якщо збільшити $D_{\max}$ до 35, то оптимальним стало б використання одного дрона (оскільки він міг би охопити всі точки сам і (1) б дала меншу сумарну відстань). Таким чином, модель здатна відображати різні режими роботи системи: за суворіших обмежень – активується більше дронів, за м'якших – частина

дронів може лишатися невикористаною.

8 Результати та обговорення

Запропонована розширена модель маршрутизації дронів дозволяє якісно врахувати основні логістичні вимоги, які ігнорувалися в попередніх постановках. Включення обмежень (5)-(6) до моделі гарантує, що отримані оптимальні маршрути є реалістичними з точки зору фізичних можливостей дронів (вони не перевантажені вантажем і не вичерпують батарею до завершення маршруту). Включення декількох дронів ($m > 1$) у модель дозволяє знаходити рішеня із розподілом завдань, що суттєво скорочує час виконання всіх доставок завдяки паралельній роботі. На прикладі ми побачили, що час завершення всіх доставок (максимальна тривалість маршруту) зменшується при переході від одного дрона до двох на $\sim 40\%$, а до трьох – ще на $\sim 15\%$ (закон спадної віддачі: кожен додатковий дрон дає менше виграшу, проте виграш є значущим). З іншого боку, сумарна дистанція, яку пролітають дрони, зростає при збільшенні їх кількості, що відображає більші сукупні витрати енергії. Цей компроміс "швидкість vs витрати" є типовим для задач з кількома транспортними засобами, і наша модель дозволяє гнучко дослідити його шляхом варіювання вагових коефіцієнтів у цільовій функції або додаванням обмежень на ресурси.

Порівняння нової моделі з базовою моделлю [1] наведено у Таблиці 1. Як видно, розширена модель охоплює ширший клас практичних ситуацій. Зокрема, можливість використання кількох дронів робить модель придатною для сценаріїв масової доставки (флот дронів) – на відміну від моделі [1], де розглядався одиничний дрон. Обмеження на вантажопідйомність дозволяє планувати маршрути з множинними посилками, що актуально для оптимізації завантаження дронів. Обмеження на дальність присутнє в обох моделях, але у новій моделі воно критично впливає на вибір кількості маршрутів. Також у нашій постановці легше врахувати додаткові фактори: наприклад, введення часових вікон доставки потребуватиме лише додавання часового параметру до кожної точки та відповідних обмежень, не змінюючи базової структури моделі.

Таблиця 1 – Порівняння базової моделі та вдосконаленої моделі маршрутизації дронів

Характеристика	**Базова модель**	**Нова модель**
Кількість дронів	1 (один маршрут)	m дронів (декілька маршрутів)
База (депо)	Одна, повернення обов'язкове	Одна, повернення обов'язкове
Обмеження дальності (батарея)	Так, максимальна довжина маршруту (враховано)	Так, для кожного дрона (враховано)
Вантажопідйомність дрона	Не враховано	Враховано (обмеження (5))
Часові обмеження (вікна доставки)	Не враховано	Не враховано (можливе розширення)
Можливість підзарядки на маршруті	Ні	Ні (можливе розширення)
Координація з наземним транспортом	Ні	Ні (можливе розширення)
Метод розв'язання	Не визначено (теоретична модель)	Комбінаторна оптимізація (точні методи для малих n, метаевристики для великих)
Очікуваний масштаб задачі	Невеликі (до $\sim$ 10 точок через обмеження обчислень)	Більші задачі (сотні точок за рахунок використання наближених алгоритмів)

Як видно з Таблиці 1, удосконалена модель є більш універсальною. Вона містить базову як окремий випадок (при $m = 1$, відсутніх обмеженнях (5) тощо). Найбільш суттєва відмінність - підтримка декількох дронів - дозволяє моделювати ситуації, коли завдання розподіляється між флотом дронів, що актуально для реальних служб доставки. На практиці програмне забезпечення для керування флотом дронів уже реалізує подібні функції: алгоритми автоматично визначають, який дрон яке замовлення доставляє, з урахуванням місцеположення дронів, рівня заряду, пріоритетності замовлень тощо [9, 10, 11]. Наша модель може слугувати теоретичною основою для таких систем, хоча для врахування всіх нюансів її потрібно розширювати (наприклад, включити часові вікна, динамічні оновлення замовлень, імовірнісне моделювання погоди тощо).

З точки зору рішень, модель (1)-(7) є складною для точного розв'язання при великих n. Проте існують сучасні інструменти (CP-SAT солвери, методи відсікання гілок і меж, розв'язувачі типу Gurobi, CPLEX), що можуть знайти оптимум для помірних масштабів (десятки точок, кілька дронів). Для більших задач доцільно застосувати метаевристичні алгоритми, про які йшлося в огляді: генетичні алгоритми, мурашині колонії, алгоритми рою частинок та ін. – адаптовані під нашу модель. Наприклад, можна закодувати рішення у вигляді послідовності точок для кожного з m дронів і застосувати генетичні оператори кросоверу та мутації для пошуку кращих розподілів. Інший підхід - побудувати початкове рішення (наприклад, жадібно призначити точки найближчим

дронам) і покращувати його методом табу-пошуку або симульованого відпалу. Базова модель розглядала лише мурашиний алгоритм для одного дрона; для нової моделі знадобиться складніша реалізація, але принципи ройової оптимізації залишаються придатними. Зокрема, можна запровадити "рой" дронів-мурах, кожен з яких формує свій маршрут, обмінюючись інформацією про вигідні підмаршрути через спільну феромонну карту (це перспективний напрям для майбутньої роботи).

Звичайно ми усвідомлюємо важливість аналізу складності та експериментальної перевірки моделі із сучасними солверами, проте це не входить в межі цієї статті. Наступний етап нашої роботи – програмна реалізація, оцінка ефективності та порівняльний аналіз із поточними системами, що дозволить перейти від теорії до практичного застосування запропонованого підходу. Такий аналіз дасть змогу визначити межі застосовності моделі залежно від розміру задачі та доступних обчислювальних ресурсів. Також це відкриває перспективи для подальших теоретичних і практичних досліджень у цій предметній області.

Необхідно відзначити, що реальні впровадження дронів у логістиці вже демонструють ефективність оптимізованих маршрутів. Компанія Amazon у проєкті Prime Air здійснює автономну доставку дронами дрібних посилок на відстань до ~ 15 км за 15-30 хв [9]. Система Zipline використовує крилаті дрони для доставки медичних вантажів у віддалені райони (Руанда, Гана) з радіусом до 80-100 км, скидаючи вантаж на парашуті без посадки дрона [10]. Проект Wing (Alphabet/Google) за кілька років виконав десятки тисяч міських доставок дронами, використовуючи бази-"вулики"та спуск вантажу на тросі, щоб не сідати на землю [11]. DHL Parcelcopter успішно тестував безпілотники для доставки у гірській місцевості, скорочуючи час перевезення до віддалених селищ [12]. В Україні компанія "Нова Пошта" провела експериментальний міжміський політ дрона на 500 км (Київ–Львів) із доставкою посилки за ~ 7 годин [13]. У всіх цих випадками оптимізація маршрутів закладена в програмне забезпечення: система автоматично прокладає шлях з урахуванням дальності, погоди, рельєфу, авіамаршрутів та інших обмежень. Представлена в цій статті модель узагальнює ключові аспекти, спільні для подібних систем, і може бути основою для розробки алгоритмів планування польотів дронів у логістиці.

Висновки

Оптимізація маршрутів безпілотних літальних апаратів у логістиці – багатогранна науково-прикладна проблема, що поєднує класичні задачі маршрутизації транспортних засобів з унікальними особливостями дронів. У даній роботі представлено вдосконалену математичну модель задачі маршрутизації дронів, яка є розвитком моделі із попереднього дослідження. Нова модель враховує одразу кілька важливих логістичних обмежень: можливість використання кількох дронів одночасно, обмеження радіусу дії (заряду батареї) для кожного маршруту, а також обмеження вантажопідйомності дронів. Запропонована постановка формалізована як задача цілочислової оптимізації (1)-(7) і належить до класу NP-складних; для її розв'язання на практиці доцільно використовувати наближені методи. Проте явне формулювання дозволило проаналізувати

структуру проблеми та вплив різних параметрів.

Проведений аналіз та числовий приклад показали, що врахування додаткових обмежень змінює оптимальну стратегію маршрутизації. Зокрема, залучення декількох дронів суттєво знижує час доставки замовлень (при достатній кількості дронів час виконання партії замовлень скорочується на 40-50% і більше порівняно з одним дроном), хоча загальні витрати енергії дещо зростають. Обмеження на батарею автоматично приводить до розподілу завдань між кількома рейсами: модель не дозволяє перевантажити один дрон надто довгим маршрутом, тож дальні точки буде охоплено кількома маршрутами або кількома дронами. Обмеження вантажопідйомності гарантує реалістичність рішень щодо кількості посилок на один рейс: модель за потреби розбиватиме доставку важких посилок на кілька дронів чи рейсів. У сукупності нова модель дає більш надійні та здійсненні плани польотів, ніж спрощена модель, що дуже важливо для практичного впровадження дронів.

Результати роботи мають прикладне значення для проектування систем логістики з використанням БПЛА. На основі запропонованої моделі можуть бути розроблені алгоритми, вбудовані в програмне забезпечення центрів керування дронами. Зокрема, модель може бути розширена для врахування динамічних факторів: надходження нових замовлень у реальному часі, зміни погодних умов, непередбачувані затримки. Перспективним напрямом є інтеграція даної моделі з моделями наземного транспорту (побудова спільних оптимізаційних схем для системи "вантажівка-дрон" [7]) та з мультимодальними мережами доставки (коли дрони взаємодіють із складами, кур'єрами, автономними роботами тощо). Ще одним напрямом подальших досліджень є розробка спеціалізованих методів розв'язання: адаптація метаевристик під багатодронову маршрутизацію, використання методів машинного навчання для швидкого оцінювання маршруту або розподілу навантаження між дронами. Також важливо врахувати регуляторні обмеження (заборони польотів над певними зонами, обмеження висоти, часові рамки для польотів у містах) – ці вимоги можна додати до моделі у вигляді додаткових обмежень на допустимі ребра маршрутів чи часових змінних.

Таким чином, результати цього дослідження свідчать щодо переваг та ефективності розширеного підходу до оптимізації маршрутів БПЛА. Його використання дозволить покращити швидкість при доставці логістичних вантажів за рахунок дронів та забезпечити доступність доставки в межах технічних стандартів, враховуючи революцію залучення БПЛА в торгівлю. Проте практичне використання у ряді країн [1]-[13] демонструє, що саме оптимізація маршрутів є ключовим фактором, що визначає успішну реалізацію. Ці ідеї та узагальнені модельні рішення можуть стати основою подальшого наукового та прикладного розвитку в створенні стійких, швидких та безпечних систем доставки з використанням БПЛА.

Список літератури

[1] Martyniuk S.V., Sydora M.I. Optimization of drone routes in logistics // The world of scientific research: Collection of scientific works. 2025. Issue 39. 168-177.

[2] Kucherenko O. I., Vakalyuk T. A. *A review of research on drone routing systems.* Scientific notes of the V.I. Vernadsky TNU. Series: Technical Sciences, 2024. Vol. 35(74), № 1. 178-184. DOI: 10.32782/2663-5941/2024.1.1/27.

[3] Leshchenko Y., Moroz I., Yukhymchuk M. *Using UAVs to optimize last mile delivery.* Measuring and computing technology in technological processes. 2024. № 4(80). 53-60. DOI: 10.31891/2219-9365-2024-80-53.

[4] Hooshyar M., Huang Y. *Meta-heuristic Algorithms in UAV Path Planning Optimization: A Systematic Review (2018-2022).* Drones. 2023. Vol. 7(12). 687. DOI: 10.3390/drones7120687.

[5] Tang G., Xiao T., Du P., Zhang P., Liu K., Tan L. *Improved PSO-Based Two-Phase Logistics UAV Path Planning under Dynamic Demand and Wind Conditions.* Drones. 2024. Vol. 8(8). 356. DOI: 10.3390/drones8080356.

[6] Ito S., Akaiwa K., Funabashi Y., et al. *Load and Wind Aware Routing of Delivery Drones.* Drones. 2022. Vol. 6(2). 50. DOI: 10.3390/drones6020050.

[7] Tong B., Wang J., Wang X., Zhou F., Mao X., Zheng W. *Optimal Route Planning for Truck-Drone Delivery Using Variable Neighborhood Tabu Search Algorithm.* Applied Sciences. 2022. Vol. 12(1). 529. DOI: 10.3390/app12010529.

[8] Choudhury S., Solovey K., Kochenderfer M. J., Pavone M. *Efficient Large-Scale Multi-Drone Delivery Using Transit Networks.* Journal of Artificial Intelligence Research. 2021. Vol. 70. 757-788. DOI: 10.1613/jair.1.12450.

[9] Amazon Prime Air – Drone Delivery Service. – Amazon.com (official information about the project), 2022-2023. – URL: https://www.aboutamazon.com/prime-air.

[10] Zipline Drone Delivery - Company Website. - Zipline International Inc., 2023. - URL: https://www.flyzipline.com (projects in Rwanda and Ghana).

[11] Wing Drone Delivery - About Wing. - Wing (Alphabet Inc.), 2023. - URL: https://wing.com.

[12] DHL successfully concludes trial of third DHL Parcelcopter generation. – DHL Press Release, 2017. – URL: https://inmotion.dhl/en/dr1/article/successful-trial-integration-of-dhl-parcelcopter-into-logistics-chain.

[13] "New mail" delivered a package by drone from Kyiv to Lviv. – The Village Ukraine, 02.06.2021. – URL: https://www.village.com.ua/village/business/news/318883-nova-poshta-dostavila-posilku-dronom-z-kyiva-do-lvova.

[14] Vasquez S. A., Angulo G., Clapp M. A. *An Exact Solution Method for the TSP with Drone Based on Decomposition.* Optimization Online, preprint, 2020. 19 с. – URL: https://optimization-online.org/wp-content/uploads/2020/04/7721.pdf.

Надійшло 1.06.2025

Martyniuk S.V., Sydora M.I. *Optimization of unmanned aerial vehicle routes in logistics: an extended mathematical model*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 141–156.

The article considers the problem of optimizing routes for unmanned aerial vehicles (UAVs, drones) in logistics operations and proposes an improved mathematical model of routes. This study is a logical continuation of the authors' previous work [1], where a review of drone route planning methods was performed and a basic model of route optimization for a single UAV was formulated. This article critically analyzes the previous model, identifies its limitations (ignoring a number of logistical factors, including many drones, payload, time constraints, etc.) and proposes improvements. The new approach takes into account typical logistical constraints: simultaneous use of several drones, limited range (battery charge) of each drone, payload limitations, and other practical requirements. A generalized mathematical model of drone group routing is developed, which can be used to optimize the "last mile" delivery. A comparison of the new model with the previous one is presented, and the advantages of taking additional factors into account are shown. The application of the model is illustrated by an example and the results of route optimization with different numbers of drones are analyzed. The results confirm that the involvement of several UAVs and taking into account logistical constraints can significantly increase the efficiency and speed of delivery. Conclusions are drawn regarding the effectiveness of the proposed approach and directions for further research in the field of improving logistics delivery models using drones are outlined.

DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.14

Melnyk H.V., Melnyk V.S., Vikovan V.K.

CRYPTOCURRENCY PRICE FORECASTING WITH DAUBECHIES WAVELETS AND EVOLUTIONARY FUZZY TIME SERIES

In this article we investigate the task of forecasting cryptocurrency prices based on time series using different modeling approaches. Several methods have been implemented and compared: the Dobeschi wavelet decomposition method for preliminary smoothing of data, a Random Forest machine learning model, a fuzzy logic system with automatic rule selection using a genetic algorithm, and a basic neural network. Each of the approaches was tested on the same time series, and their effectiveness was evaluated using the relevant accuracy metrics. We pay particular attention to how wavelet-based preprocessing (e.g., wavelet smoothing) impacts forecasting accuracy. The obtained results allow to draw conclusions about the strengths and weaknesses of each method in the context of cryptocurrency price forecasting, as well as the feasibility of their use depending on the characteristics of the data and the task.

Key words and phrases: Timeseries forecasting, fuzzy logic, genetic algorithms, machine learning, random forest, wavelet decomposition..

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *g.melnik@chnu.edu.ua, va.melnyk@chnu.edu.ua, vikovan.valentyn@chnu.edu.ua*

Introduction

Among economic indicators, cryptocurrency markets exhibit high volatility and non-stationarity. Cryptocurrency prices fluctuate under the influence of a wide range of factors. Traditional forecasting methods, in particular statistical models, are not effective enough to accurately predict such complex processes. In this case, non-standard approaches to time series analysis deserve special attention.

In particular, we examine machine learning methods, wavelet analysis, hidden layer neural networks, and fuzzy set theory combined with genetic algorithms. These methods are compared using standard metrics such as root mean square error.

The machine learning algorithm "random forest" performed quite well in terms of error and speed. This algorithm was also combined with Daubechies wavelet decomposition. During decomposition, insignificant components were discarded, which made it possible to smooth the time series and reject noise. When working with markers such as cryptocurrency prices, it is necessary to take

УДК 519.115.1
2010 *Mathematics Subject Classification:* 05A15.

© Melnyk H.V., Melnyk V.S., Vikovan V.K., 2025

into account the high daily volatility of the market. Daubechies wavelet?based smoothing reduced daily market noise and yielded lower error metrics.

We also developed an evolutionary fuzzy-rule system that uses genetic algorithms to generate and select fuzzy logic rules for time-series forecasting. This approach takes time to execute the program code, but shows a very low error rate. The integration of mutations at specified steps of the genetic algorithm further reduces the error.

We evaluated a single-hidden-layer neural network for its forecasting accuracy.

This work addresses the need for noise-resistant and adaptive forecasting in volatile financial markets. By integrating complementary computational-intelligence techniques-wavelet preprocessing, evolutionary fuzzy logic, and neural networks-our hybrid framework demonstrates robust performance under conditions of uncertainty and complex temporal structure.

Daubechies Wavelets

The **Locally Stationary Wavelet model (LSW)** is a time series model designed to process non-stationary signals where statistical properties of data, such as mean and variance, change over time. Unlike traditional models, which assume constant statistical behavior, the LSW model reflects the evolution of the time series structure using wavelet decompositions. In this approach, the series is represented as a sum of wavelet basis functions that vary in both time and frequency, allowing the model to localize features that occur at different scales and time points.

The LSW excels at forecasting, smoothing, and identifying trends in time series data, especially when it comes to signals that exhibit changing patterns and structures over time.

Let $\{X_t\}$ be a non-stationary time series whose statistical properties (mean, variance) evolve over time. The Locally Stationary Wavelet (LSW) model represents X_t as a sum of discrete, wavelet-basis functions that vary across both time and frequency. Unlike traditional time-series models-which assume constant statistical behavior-LSW adapts to changing patterns via wavelet decomposition [3].

In the Locally Stationary Wavelet (LSW) framework, we relax the strict unit-variance Gaussian assumption and instead model the noise coefficients as a zero-mean white-noise process with arbitrary variance. Formally,

$$X_t \;=\; \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} w_{j,k}(t)\,\psi_{j,k}(t)\,\xi_{j,k},$$

where $w_{j,k}(t)$ are time-varying wavelet coefficients, $\psi_{j,k}(t)$ are the wavelet basis functions at scale j and shift k, and

$$\xi_{j,k} \;\sim\; \mathrm{WN}(0,\sigma^2),$$

denotes a white-noise process with mean zero and variance σ^2. This generalization allows the model to accommodate different noise levels across applications and facilitates estimation of σ^2 directly from the data, thereby improving flexibility and robustness in forecasting nonstationary time series.

Daubechies wavelets offer compact support, orthogonality, and a high number of vanishing moments-properties that make them ideal for capturing the abrupt, irregular fluctuations typical of cryptocurrency prices. Both the scaling function $\varphi(t)$ and the wavelet function $\psi(t)$ satisfy recursive relationships derived from a finite-set of filter coefficients, enabling efficient decomposition and reconstruction.

We use the **Discrete Wavelet Transform (DWT)** with Daubechies wavelets, which are known for their compact support, orthogonality, and ability to capture both smooth trends and abrupt changes in data.

Given a finite realization of time series $X = \{x_1, x_2, ..., x_T\}$, DWT decomposes it into a series of approximation and detail components at multiple scales. At each level of decomposition, the time series is split into approximation coefficients A_j representing low-frequency (trend) information and detail coefficients D_j representing high-frequency (noise or short-term fluctuations). This can be written as

$$X \to \{A_j, D_J, D_{J-1}, ..., D_1\}$$

where J is the maximum level of decomposition, A_j is the approximation at the coarsest level, and D_1 is the detail at the finest level (captures the highest-frequency noise).

To smooth the time series, we remove the highest-frequency detail coefficients, typically D_1 and sometimes D_2. These components are most sensitive to minor, rapid changes in the data and are often associated with noise.

The smoothed signal $\widetilde{X}$ is reconstructed by applying the inverse DWT (IDWT) using only the remaining components:

$$\widetilde{X} = IDWT(A_j, D_J, D_{J-1}, ..., D_1), \text{ for some } k > 1$$

That is, we discard $D_1, D_2, ..., D_{k-1}$ retaining only the larger-scale features from level k and above. This process effectively filters out high-frequency noise while preserving the main trends of the series.

By applying Daubechies wavelet-based smoothing, we can localize transient features at multiple scales and reject high-frequency noise before forecasting.

Wavelet-Smoothed Random Forest Forecasting

Random Forest builds and combines the results of many decision trees to improve prediction. Each tree in the forest is trained on a randomly selected subset of the training data using a technique called bootstrap sampling, and only a random subset of features is considered at each split within the tree. This double randomness-in the data and in the features - reduces overfitting and increases the robustness of the model.

When used for regression tasks, the Random Forest regressor works by averaging the predictions from all the individual trees. Instead of relying on a single model that may be overfitted or sensitive to noise, Random Forest uses the collective output of many diverse models. This "wisdom of the crowd" effect helps the model produce smoother, more stable predictions, especially when dealing with complex, nonlinear relationships in the data. This is particularly useful in cases where traditional linear models fail, thus it is fit for cryptocurrency forecasting, financial modeling, and other regression applications.

After exploring traditional time series methods, a machine learning solution using random forest regression was implemented. This algorithm offers a different perspective on time series forecasting by treating the forecasting problem as a supervised learning task. The random forest approach transforms temporal dependencies in data into a feature engineering task, where past values serve as predictors of future values.

Building on the strengths of wavelet decomposition and Random Forest regression, we developed a hybrid approach combining both methods. This integration aims to leverage the noise reduction capabilities of wavelets and the pattern recognition capabilities of Random Forest, potentially achieving better prediction accuracy than either method alone.

The implementation begins with applying wavelet decomposition to smooth Bitcoin price data before feeding it into the Random Forest model. This preprocessing step removes high-frequency noise while preserving underlying price trends and patterns.

To transform the time series into a supervised learning problem, we construct feature vectors using a lag embedding of the smoothed series. For a given lag window size L, the input vector and target are defined as:

$$\mathbf{x}_t = [\tilde{x}_{t-1}, \tilde{x}_{t-2}, \ldots, \tilde{x}_{t-L}]$$

$$y_t = x_t$$

Note that the input is based on the smoothed series $\tilde{X}$, while the target is the original (unsmoothed) value from X. This allows the model to learn from denoised data while still being evaluated on real-world values.

A Random Forest regressor is trained on dataset $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_t, y_t)\}_{t=L+1}^{T}$ to learn the mapping from smoothed lagged inputs to the next-step target value. Random Forest is an ensemble of decision trees:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} T_b(\mathbf{x}_t)$$

where T_b is the b-th regression tree trained on a bootstrap sample of the data, B is the number of trees in the forest.

Each tree partitions the input space to minimize variance within leaf nodes, resulting in a robust, nonlinear predictor that handles noisy data and feature interactions well.

Evolutionary Fuzzy-Rule Optimization

Evolutionary Algorithms (EA) are a family of optimization methods based on the mechanisms of natural evolution. EA solve complex optimization and search problems by reproducing the evolutionary behavior observed in nature. The basic principle is to maintain a population of potential solutions that evolves over time. By imitating evolutionary processes such as reproduction, mutation, and selection, the algorithm gradually improves the quality of solutions over successive generations.

Genetic Algorithms (GA) are an important subclass of the broader category of evolutionary algorithms. In this class, each possible solution is encoded in a structure known as a chromosome, which consists of individual units called genes. These genes correspond to specific elements or variables of the solution being optimized. A chromosome is essentially a vector or array that encodes a full set of parameters or decision variables needed to describe a candidate solution.

A group of such chromosomes forms a so-called population. Typically, this population is initialized randomly, providing a diverse starting point for the search process. Each solution is evaluated using a function that measures its effectiveness in solving the problem at hand. Depending on whether the goal is to maximize or minimize this value, the algorithm selects the most promising

individuals for reproduction. During the reproduction phase, the genetic material of the selected parents is combined through a process similar to biological crossbreeding, resulting in new offspring. Random changes, known as mutations, are introduced from time to time to preserve genetic diversity and prevent premature convergence. These changes allow the algorithm to explore new areas in the solution space.

The iterative process continues until a predefined termination condition is met. This can be a fixed number of iterations, a time limit, or the achievement of a solution that meets the required performance criteria [5].

Fuzzy logic (FL) is a method of reasoning that mimics the way humans make decisions. Unlike traditional logic used in computers, which relies on precise input data to produce a specific result of "True" or "False," similar to a strict "YES" or "NO," FL allows for a range of values that represent degrees of truth. This means that it can cope with the uncertainty and nuances that are often present in real-world scenarios, where decisions are not always black and white.

FL rules usually have an "if-then" structure, for example: if temperature is high, then fan speed is fast. However, since there are no clearly defined values in fuzzy logic, all rules apply simultaneously to varying degrees. For example, if the temperature is somewhere between "moderate" and "high," the fan speed will also be somewhere between "medium" and "fast." This means that the system evaluates how well each rule fits the current situation and uses this to form a final decision.

As a result, FL rules allow you to create flexible, adaptive control systems that behave more like human reasoning than rigid traditional logic.

Developing FL rules manually can be a tedious and time-consuming task, so evolutionary algorithms can be used to automate this process. In this approach, each candidate rule base is treated as a separate individual in a population that evolves over time. First, a large number of fuzzy "if-then" rule sets are randomly generated, each embodying its own hypothesis about how input data should affect output. Their effectiveness is evaluated using a fitness index that rewards accurate predictions and penalizes overly complex rule sets. Then, the best ones are selected for reproduction, exchanging and recombining their rules. Random mutations create new variations of rules, preventing the search from getting stuck in a narrow range of possibilities. Over successive generations, this evolutionary cycle refines the rule bases and hones a compact, highly efficient set of fuzzy rules. The end result is a rule base that balances interpretability with optimized control behavior, with all rules discovered automatically rather than created manually.

Fuzzy logic has been investigated as a powerful tool for timeseries forecasting in [1, 2]. Usage of genetic algorithms for generation of fuzzy logic rulesets has been proposed in [4].

Evolutionary Fuzzy-Rule Selection for Time-Series Forecasting

We present a GA-driven approach to optimize fuzzy-logic rules for Bitcoin price prediction. This method marries the linguistic modeling capabilities of fuzzy systems with genetic algorithms to automatically discover high-performance rule bases.

The implementation begins with the definition of the main components of the fuzzy system. Membership functions are defined for different levels of price changes and a population of fuzzy rule bases is created, which will evolve through genetic optimization.

The genetic algorithm component initializes a population of fuzzy rule bases, each of which contains a set of rules that map input lag characteristics to output predictions. The rules are structured using linguistic variables that describe price movements in human-understandable terms.

A critically important component of the system is the development of appropriate membership functions. Triangular membership functions have been implemented for seven different categories of price changes, ranging from extreme declines to extreme increases. Such detailed categorization allows the system to capture the slightest market movements.

The fuzzy logic system processes input data with a shift using an advanced rule base to generate forecasts. The system includes a complex syntactic rule analyzer that interprets rules based on strings and builds a corresponding fuzzy control system.

Suppose we use a lag window of size L, then a rules has a following form:

$$\text{IF } x_{t-1} \text{ is } A_1 \text{ AND } x_{t-2} \text{ is } A_2 \text{ AND ... AND } x_{t-L} \text{ is } A_L \text{ THEN } x_t \text{ is B}$$

where x_{t-k} are lagged values of the smoothed time series, A_k and B are fuzzy sets (e.g., "Increase", "Const", "Decrease High") defined over the universe of discourse via membership functions $\mu_{A_k}(x)$.

An example of fuzzy logic rulebase:

```
[
"lag_0 const and lag_1 const and lag_2 const and lag_3
   const and lag_4 const then const",
"lag_0 decrease_high and lag_4 increase then increase",
"lag_0 increase and lag_4 const then decrease",
"lag_1 increase_high and lag_3 decrease then
   increase_high",
"lag_0 increase and lag_2 const then increase_high",
"lag_3 increase_high and lag_0 decrease then
   increase_high",
"lag_1 decrease and lag_2 const then decrease_high",
"lag_0 increase_high and lag_0 increase_high then
   decrease_high",
"lag_0 increase_high and lag_2 const then increase_high"
]
```

In this example, `lag_i` is timeseries data from $i+1$ days before the predicted: $x_{t-(i+1)}$.

In the genetic algorithm, each individual (or chromosome) represents a complete fuzzy rule set:

$$Chromosome = [r_1, ..., r_M]$$

where each gene r_i is a fuzzy rule encoded as a tuple of linguistic variables:

$$r_i = (A_1, ..., A_L, B)$$

The number of possible rules grows exponentially with the number of fuzzy sets M and lag size L, i.e., up to M^L possible antecedents.

Given a set of fuzzy rules and a fuzzy partition of the input space, we forecast the next value $\widehat{x_t}$ using a defuzzification of the weighted output values from matching rules:

$$\hat{x}_t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} w_i \cdot c_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} w_i}$$

where w_i is the firing strength of rule r_i, defined as

$$w_i = \prod_{k=1}^{L} \mu_{A_k^{(i)}}(x_{t-k}),$$

c_i is the centroid (or representative value) of the consequent fuzzy set $B^{(i)}$.

The genetic algorithm uses tournament selection (100 generations), crossover, and mutation operations to evolve a population of fuzzy rule bases. The evolution process includes an adaptive mutation rate, which increases at regular intervals to maintain genetic diversity and avoid local optima. The mutation rate is maintained at 1% throughout the execution of the algorithm and at specially defined generations, this rate is increased to 10%.

We use real valued mutation operator, where real number representation of the value of linguistic variable in fuzzy rule changes with predefined step. An example of real valued mutation:

$$r_i = (\text{Decrease High}, \text{Const}, \text{Const}) => r_i' = (\text{Decrease High}, \text{Increase}, \text{Const})$$

We use standard uniform crossover, where each gene of each of the two parents has 50-percent chance of being selected for offspring, ensuring that genetic material is combined in a balanced and non-biased manner. An example crossover for parents $p^{(1)} = [r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, r_3^{(1)}, r_4^{(1)}, r_5^{(1)}]$, $p^{(2)} = [r_1^{(2)}, r_2^{(2)}, r_3^{(2)}, r_4^{(2)}, r_5^{(2)}]$ and a random mask $[0, 1, 1, 0, 1]$ the offspring will be $c = [r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(2)}, r_4^{(1)}, r_5^{(2)}]$, i.e. each position is selected based on the mask of random decisions.

The fitness function for this genetic algorithm is defined as an inverse of the root mean squared error:

$$f(\widehat{x}) = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(\widehat{x_i^2} - x_i^2)}{N}} + \varepsilon}$$

where $x = (x_i)$ — observed values of time-series, $\widehat{x} = (\widehat{x_i})$ — values, predicted by fuzzy rule system, N — number of samples, $f(\widehat{x})$ — fitness function of that prediction, $\varepsilon > 0$ is a small constant to avoid division by zero.

The main evolution cycle runs for 100 generations, evaluating the performance of each rule base on training data and selecting the best ones for reproduction.

After 100 generations of evolution, the system determines the most effective set of fuzzy rules and applies it to the test data. The evolutionary rule base demonstrates the system's ability to automatically detect meaningful patterns in price data.

The evolution of average mean squared error of the population is presented on Figure 1. You can see the stages at which the probability of mutation increased (from 1% to 10%), at which the error value rapidly increased and fell below the previous value at subsequent stages.

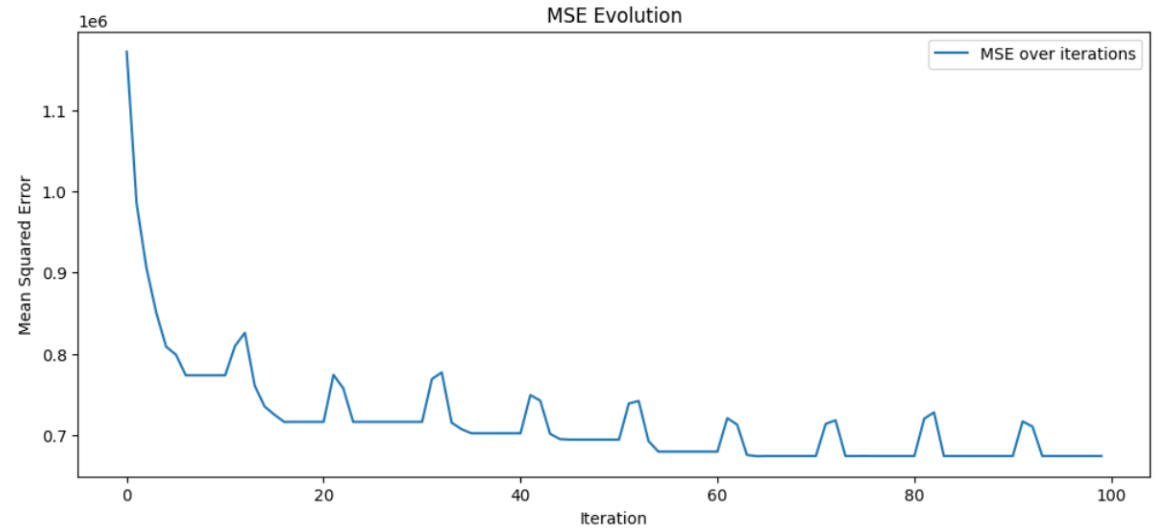


Figure 1: Evolution of Mean Squared Error over Genetic Algorithm Iterations

FEEDFORWARD NEURAL NETWORK FORECASTING

The application of neural networks with hidden layer for financial markers predictions are described in [6, 7]. In these works it has been concluded, that the most effective architecture is that with input neurons divisible by 5, and in range from 5 to 20, which is explained with stock exchange trading week being equal to 5 days. The hidden layer in investigated architectures is 15 neurons. Simple RNNs are used to capture short-term temporal dependencies in price series [8, 9]. 1D-CNNs extract local temporal features by applying convolutional filters over lagged price inputs [10, 11, 15]. LSTMs employ gating mechanisms to learn long-range dependencies and mitigate vanishing gradients in financial time series [12, 13]. Self-attention architectures (e.g. Stockformer) model global sequence relationships without recurrence, improving parallelism [14, 16]. Combine convolutional feature extraction with LSTM memory cells to leverage both local pattern recognition and sequential modeling [17].

A three-layer feedforward neural network was selected as the baseline forecasting model due to its well-established capacity to approximate complex nonlinear mappings with limited computational overhead. Under the Universal Approximation Theorem, a single hidden layer suffices to represent any continuous function on a compact domain, which justifies the choice of this architecture for modeling the nonlinear dynamics of cryptocurrency time series. Unlike recurrent or convolutional architectures, the feedforward network eschews temporal feedback loops and extensive parameterization, thereby reducing the risk of overfitting on relatively short financial datasets. Furthermore, the use of lagged inputs and ReLU activations enables the network to capture autoregressive dependencies efficiently, facilitating rapid training and clear attribution of performance gains to subsequent wavelet preprocessing and fuzzy-GA rule optimization.

We implement a three-layer feedforward network in PyTorch to benchmark forecasting performance. Neural networks capture complex nonlinear relationships in time-series data thanks to their multilayer architecture and nonlinear activation functions. The implementation uses PyTorch to build a three-layer feedforward neural network specifically designed to handle lag functions. The network architecture consists of an input layer that accepts five lag features (cryptocurrency price

values for the last 5 days), a hidden layer with 15 neurons, and a single output neuron for price prediction.

The architecture uses Rectified Linear Unit (ReLU) activation functions between layers to introduce nonlinearity, allowing the network to model complex relationships in Bitcoin price data. The feedforward method determines how data passes through the network, transforming the input lag features into a single predicted value.

The data preparation process follows a similar approach to previous methods, creating lag functions based on the Bitcoin price time series. A systematic function engineering pipeline is implemented, which generates five lag functions representing the previous five time steps. We split the data into training and test sets in an 80-20 ratio, providing sufficient data for both training and evaluating the model. We scale lag features to zero mean and unit variance before training.

In the training process we use PyTorch's automatic differentiation capabilities to optimize network weights through backpropagation. It uses the Adam optimizer, which adapts the learning rate for each parameter, and a mean squared error loss function, which is suitable for regression tasks.

The training cycle lasts 1,000 epochs, with each epoch processing the entire training dataset in batches of 10 samples. This mini-batch approach provides a balance between computational efficiency and gradient estimation accuracy.

Results and Discussion

In this research we used available history of bitcoin price data from Kaggle [9]. This dataset contais historic data for bitoin price over the daterange from 2010-07-18 to 2022-08-23. For timeseries forecast we used different offsets from the end date.

To ensure a reliable comparison between the standard Random Forest and the wavelet-enhanced version, we conducted an extensive evaluation at various time intervals and configurations of parameters. This comprehensive study helps to understand the consistency and reliability of performance improvements.

To assess consistency and reliability, we compared standard and wavelet-enhanced Random Forest across multiple parameter settings. The comparison structure includes two functions: one for the standard Random Forest and another that includes wavelet smoothing. Both functions accept parameters for data selection, time window size, and lag configuration, allowing for flexible experimentation.

The evaluation process involves running both methods on 200 different random time windows from the Bitcoin dataset, testing with 5 and 7 lags to assess the impact of different time dependencies.

The comparison revealed several important conclusions. In 200 different time windows, the wavelet-smoothed Random Forest consistently outperformed the standard approach. The average RMSE values show that the wavelet-smoothed version with 5 lags achieved an average RMSE of 2891.671, compared to 3137.581 for the standard approach - an improvement of approximately 7.8%. That method shows also improvements for other metrics: for mean absolute percentage error (MAPE) from 10.73 to 10.06, for symmetric mean absolute percentage error (SMAPE) from 10.265 to 9.694, for coefficient of determination (R2) increase from -3.8 to -3.2.

Interestingly, the results also show that using 7 lags instead of 5 does not necessarily improve performance, as both the standard and smoothed versions show slightly higher RMSE values with a larger number of lags. This suggests that after a certain point, additional historical information may introduce more noise than useful patterns.

Consistent gains across time windows confirm the reliability of the hybrid approach. Even during periods of high volatility, such as significant price declines, as seen in the data, wavelet processing helps the Random Forest model maintain better forecasting accuracy. This stability makes the combined approach particularly suitable for cryptocurrency markets, which are characterized by sharp price fluctuations and high volatility. As shown in Figure 2, the wavelet-smoothed Random Forest model closely tracks real Bitcoin price movements.

In this combined plot, the blue line shows actual Bitcoin prices, the orange line shows predictions from the wavelet-smoothed Random Forest, and the green line shows forecasts from the GA-optimized fuzzy-logic model. Presenting both predicted series together on the same time axis allows immediate visual comparison of their relative accuracy and responsiveness to market movements.

This overlay confirms that the fuzzy-evolutionary approach (green) more closely tracks sharp price spikes and dips compared to the wavelet-smoothed Random Forest (orange), demonstrating the benefit of rule-based adaptivity in high-volatility periods.

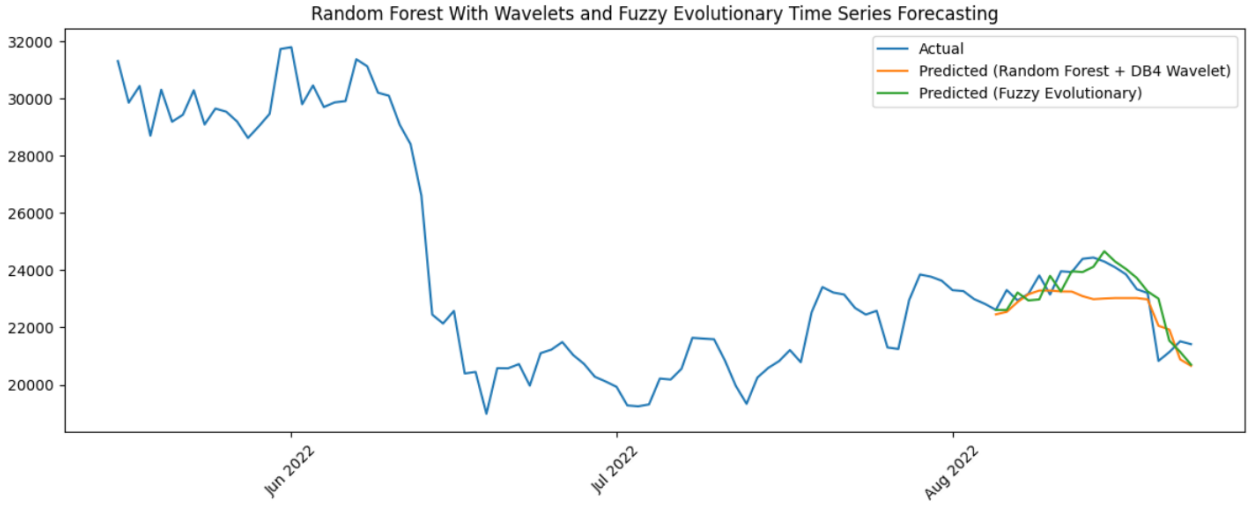


Figure 2: Actual vs. Predicted Bitcoin Prices Using Wavelet-Smoothed Random Forest and Fuzzy Evolutionary Algorithm

The genetic fuzzy approach achieved an average root mean square error (RMSE) of 1011.034, as illustrated in Figure 2, which is a significant improvement compared to both the standard Random Forest (3137.581) and the wavelet-extended Random Forest (2891.671), demonstrating the effectiveness of combining genetic fuzzy and wavelet approaches for predicting cryptocurrency prices. There is also significant improvement for other metrics, for MAPE 3.17, for SMAPE 3.141, for MASE 1.255 and for R2: 0.462.

The neural network achieves an average root mean square error (RMSE) of 1579.28, asillustrated in Figure 3, which is lower than the wavelet-based Random Forest model, and demonstrates competitive performance. The training process shows a consistent decrease in losses, starting at 36,485,368 in epoch 50 and decreasing to 35,014,856 in epoch 1000, indicating successful training. Analysis of the forecast graph shows that the neural network captures the general trend of Bitcoin price movement, although it tends to give smoother forecasts compared to actual volatile price data.

This smoothing effect is characteristic of neural networks trained with RMSE loss, as they tend to predict average values to minimize quadratic error.

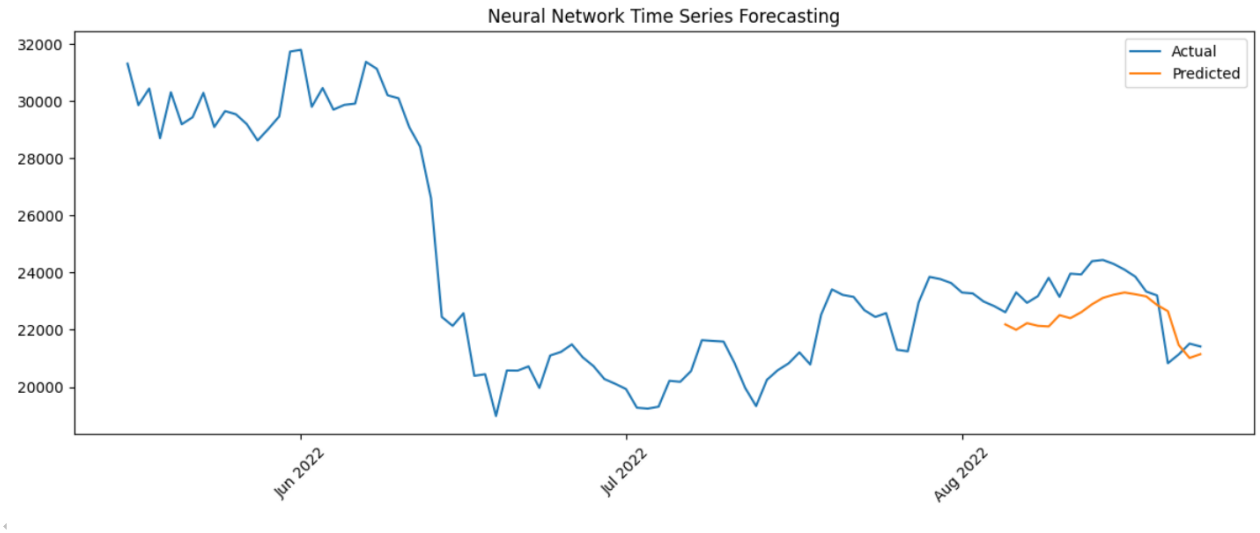


Figure 3: Actual vs. Predicted Bitcoin Prices Using Feedforward Neural Network

Root mean square errors for 10 random ranges out of 200 tested are presented in the table below. Random forest methods are denoted RF, smoothed with Daubechies wavelet decomposition are denoted with D, amount of lags window are in brackets. RMSE for evolutionary fuzzy algorithm is denoted EA FL, feedforward neural network with NN and convolutional neural network with CNN.

offset	RF (lag 5)	RF (7)	RF D (5)	RF D (7)	EA FL	NN	CNN
906.0	292.2	320.8	298.9	322.3	**239.8**	489.7	304.6
619.0	702.2	**691.1**	695.3	704.5	774.7	2386.0	722.2
771.0	291.2	208.8	179.1	**134.9**	148.0	150.1	157.7
387.0	2451.5	2401.2	1909.8	2037.4	1213.0	3782.7	**1212.0**
297.0	8032.3	7729.2	6812.4	6670.5	2056.3	**2032.9**	2069.9
728.0	272.3	335.1	472.5	509.6	344.0	290.9	**218.9**
641.0	2379.7	2414.7	2375.8	2395.0	**513.3**	917.1	539.1
875.0	1654.5	1636.5	1703.7	1694.8	880.1	889.9	**826.2**
55.0	9172.4	9274.6	8268.3	8192.6	**876.7**	2275.4	1553.2
941.0	424.0	421.6	232.4	**154.0**	258.3	443.2	259.5

Table 1: RMSE values for different models and offsets

offset	RF (lag 5)	RF (7)	RF D (5)	RF D (7)	EA FL	NN	CNN
906.0	2.3969	2.6504	2.4343	2.6500	**1.8618**	4.0330	2.6297
619.0	3.0485	**3.0125**	3.0232	3.1036	3.3410	11.3930	3.0361
771.0	2.8457	1.8894	1.6657	1.2137	1.1769	**1.1610**	1.2923
387.0	6.2980	6.2291	4.9782	5.3722	2.9622	7.5544	**2.9226**
297.0	12.4421	11.9160	10.3099	10.0586	2.8124	2.8846	**2.6325**
728.0	1.8757	2.4284	3.6788	4.0164	2.4655	2.0009	**1.3204**
641.0	12.4847	12.7135	12.4432	12.5702	**2.5601**	4.2789	2.5885
875.0	26.9740	26.2824	28.1973	27.9536	9.5756	10.3183	**8.6701**
55.0	41.0920	41.4883	37.0658	36.7361	**2.7172**	12.8298	5.1310
941.0	3.6157	3.6403	2.3623	**1.5362**	2.3755	3.8619	2.3990

Table 2: MAPE values for different models and offsets

offset	RF (lag 5)	RF (7)	RF D (5)	RF D (7)	EA FL	NN	CNN
906.0	2.3779	2.6385	2.4130	2.6336	**1.8518**	3.9128	2.5890
619.0	3.0615	3.0215	3.0231	3.1069	3.3452	10.2849	**3.0047**
771.0	2.7971	1.8663	1.6542	1.2131	**1.1790**	1.2640	1.2799
387.0	6.2577	6.1349	4.9305	5.2971	2.9911	9.1067	**2.9441**
297.0	13.3444	12.7482	10.9483	10.6694	2.8383	2.9161	**2.6283**
728.0	1.9007	2.4682	3.7596	4.1107	2.4691	1.7099	**1.3088**
641.0	13.5974	13.8622	13.5518	13.6985	**2.5972**	4.4111	2.6172
875.0	23.0450	22.4075	24.0891	23.8722	8.8537	10.9930	**7.7821**
55.0	33.2223	33.4599	30.5444	30.3248	**2.6668**	7.2578	4.9327
941.0	3.7450	3.7642	2.4025	**1.5517**	2.3957	4.2425	2.4140

Table 3: SMAPE values for different models and offsets

offset	RF (lag 5)	RF (7)	RF D (5)	RF D (7)	EA FL	NN	CNN
906.0	**1.5006**	1.6743	2.1311	2.3443	0.2832	2.4072	0.3970
619.0	2.5110	2.4429	3.3173	3.3674	0.9744	8.8418	**0.8787**
771.0	1.2332	0.8202	1.0652	0.7726	**0.1726**	0.4847	0.1876
387.0	1.4022	**1.3948**	1.6431	1.7933	1.6236	2.0247	1.6014
297.0	5.9219	5.5560	6.8317	6.6664	2.6405	**1.3977**	2.5349
728.0	1.3081	1.7084	4.2629	4.7568	0.4535	1.3067	**0.2441**
641.0	10.6493	10.9550	15.1982	15.3594	**0.6180**	4.0826	0.6445
875.0	8.0983	7.7152	10.7872	10.4473	0.8578	3.2363	**0.7495**
55.0	9.3326	9.5212	14.0025	14.2791	**0.9928**	1.7420	1.7955
941.0	1.7572	1.8062	1.7745	1.1621	**0.3061**	1.9729	0.3172

Table 4: MASE values for different models and offsets

offset	RF (lag 5)	RF (7)	RF D (5)	RF D (7)	EA FL	NN	CNN
906	0.8077	0.7525	0.8022	0.7501	**0.8672**	0.4149	0.7814
619	0.3583	0.3564	0.2984	0.2928	0.3306	**0.3622**	0.1268
771	0.4790	0.5368	0.6892	**0.6982**	0.6875	0.2421	0.2180
387	0.9100	0.9077	0.9448	0.9492	**0.9519**	0.8826	0.8996
297	0.3136	0.3136	0.1523	0.1523	**0.7702**	0.6938	0.6304
728	0.0398	0.0172	0.0955	0.0609	**0.1603**	0.0009	0.1594
641	0.3645	0.3211	0.0000	0.1609	**0.9259**	0.9106	0.8957
875	0.2131	0.1392	0.0194	0.2523	**0.3879**	0.0714	0.0978
55	0.1232	0.1661	0.0603	0.1690	**0.9698**	0.8177	0.8686
941	0.8240	0.8387	**0.9577**	0.9568	0.8528	0.7605	0.7766

Table 5: Pearson correlation coefficient r values

Here Pearson correlation coefficient r is calculated with the following formula:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})(\hat{y}_i - \overline{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2 \ \sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - \overline{\hat{y}})^2}}.$$

Average values for 200 tested ranges.

Model	RMSE	MAPE	SMAPE	MASE	r
mse_rf_5	3137.581	10.730	10.265	4.558	0.225407
mse_rf_7	3124.796	10.723	10.212	4.548	0.187698
mse_rf_smooth_5	2891.671	10.063	9.694	6.361	0.356471
mse_rf_smooth_7	2905.612	10.071	9.659	6.398	0.358103
evolutionary_plain	**1011.034**	**3.170**	**3.141**	**1.255**	**0.690407**
nn_plain	1579.283	5.487	5.481	4.981	0.428941

Table 6: Mean values for each metric

Conclusions

The conducted research demonstrates the effectiveness of combining modern computational intelligence techniques for the task of forecasting cryptocurrency prices. In particular, the application of Daubechies wavelet decomposition as a preprocessing step notably improves forecasting accuracy by filtering high-frequency noise while preserving the underlying trends. When integrated with Random Forest regression, wavelet smoothing resulted in consistently lower RMSE, MAPE, SMAPE and MASE values compared to the standard Random Forest model across multiple experimental runs. However, increasing the lag window size from 5 to 7 did not lead to further improvements and, in some cases, slightly degraded performance, suggesting that beyond a certain point, additional historical information may introduce more noise than useful signal.

Among all the models tested, the evolutionary fuzzy logic system showed the most promising results, achieving the lowest average RMSE, MAPE, SMAPE and MASE, and outperforming both Random Forest variants and the neural network model. High Pearson r values confirm strong agreement between model forecasts and observed prices, reinforcing the superiority of the evolutionary

fuzzy approach. This approach, which relies on a genetic algorithm to automatically discover and optimize fuzzy rule sets, effectively captures subtle patterns in highly volatile time series. It balances accuracy with interpretability and adapts well to the non-stationary nature of financial data. Meanwhile, the neural network model demonstrated competitive performance, with its architecture capable of modeling nonlinear dependencies. However, due to the nature of the loss functions, it produced smoother forecasts that tended to underrepresent abrupt fluctuations, which are common in cryptocurrency markets.

Overall, the findings confirm that hybrid models-particularly those combining wavelet-based noise reduction with advanced learning techniques such as evolutionary fuzzy systems?offer a robust solution for forecasting in high-volatility environments. The choice of forecasting method should ultimately depend on the specific characteristics of the data and the desired balance between interpretability, computational efficiency, and prediction accuracy.

References

[1] Matviychuk A. Fuzzy logic approach to identification and forecasting of financial time series using Elliott wave theory // Fuzzy Economic Review. - 2006. - Vol. 11, no. 02. - P. 45-54. URL: https://doi.org/10.25102/fer.2006.02.04.

[2] Bielinskyi A., Ivanov B., Petrenko C. Fuzzy time series forecasting using semantic artificial intelligence tools // Neuro-Fuzzy Modeling Techniques in Economics. - 2022. - No. 11. - P. 157-198. URL: https://doi.org/10.33111/nfmte.2022.157.

[3] Rhif M., Hleli H., Smara Y. Wavelet transform application for non-stationary time-series analysis: A Review // Applied Sciences. - 2019. - Vol. 9, no. 7. - P. 1345. URL: https://doi.org/10.3390/app9071345.

[4] Surmann H., Selenschtschikow A. Automatic generation of fuzzy logic rule bases: Examples I // Proceedings of the First International ICSC Conference on Neuro-Fuzzy Technologies (16-19 January 2002). - Vienna, 2002. - P. 75-81.

[5] Glybovets M., Gulaeva N. Evolutionary algorithms. - Kyiv: NaUKMA, 2013. - 828 p.

[6] Matviychuk A. V. Artificial Intelligence in Economics: Neural Networks, Fuzzy Logic: Monograph. - Kyiv: KNEU, 2011. - 439 p.

[7] Matviychuk A. V. Research on the dependence of the quality of forecasting security prices by neural networks on the form of input data presentation // Collection of scientific papers of Cherkasy State Technological University. Series: Economic Sciences. - 2003. - Issue 8. - P. 147-156.

[8] Tayib H., Abdulazeez M. A. A Review of Bitcoin Price Prediction Based on Deep Learning Algorithms // The Indonesian Journal of Computer Science. - 2024. - Vol. 13, no. 2. - P. 45-58. URL: https://doi.org/10.33022/ijcs.v13i2.3858.

[9] Top 10 Cryptocurrencies Historical Dataset [Електронний ресурс] // Kaggle. URL: https://www.kaggle.com/datasets/kaushiksuresh147/top-10-cryptocurrencies-historical-dataset.

[10] Zhang X., Huang Z., Wu Y., Lu X., Qi E., Chen Y., Xue Z., Wang Q., Wang P., Wang W. Multi-period Learning for Financial Time Series Forecasting // Proceedings of the 31st ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD -25). - New York; ACM, 2025. - P. 2848?2859. URL: https://doi.org/10.1145/3690624.3709422.

[11] Badar W., Ramzan S., Raza A., Fitriyani N. L., Syafrudin M., Lee S. W. Enhanced Interpretable Forecasting of Cryptocurrency Prices Using Autoencoder Features and a Hybrid CNN-LSTM Model // Mathematics. - 2025. - Vol. 13, no. 12. - Art. 1908. URL: https://doi.org/10.3390/math13121908.

[12] Zeng Z., Kaur R., Siddagangappa S., Rahimi S., Balch T., Veloso M. Financial Time Series Forecasting using CNN and Transformer // arXiv preprint arXiv:2304.04912. - 2023. URL: https://arxiv.org/abs/2304.04912).

[13] Kong X., Chen Z., Liu W. et al. Deep learning for time series forecasting: a survey // Int. J. Mach. Learn. & Cybern. - 2025. URL: https://doi.org/10.1007/s13042-025-02560-w.

[14] Kilic D. K., Ugur O. Hybrid wavelet-neural network models for time series // Applied Soft Computing. - 2023. - Vol. 144. - Art. 110469. URL: [https://doi.org/10.1016/j.asoc.223.110469](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2023.110469).

[15] Li Y., Dai W. Bitcoin price forecasting method based on CNN-LSTM hybrid neural network model // The Journal of Engineering. - 2020. - P. 344-347. URL: https://doi.org/10.1049/joe.2019.1203.

[16] Wu J., Zhang X., Huang F., Zhou H., Chandra R. Review of deep learning models for crypto price prediction: Implementation and evaluation // arXiv preprint arXiv:2405.11431. - 2024. URL: https://arxiv.org/abs/2405.11431.

[17] Ahmed B., Abedin M. Z., Hajek P., Yuan K. Cryptocurrency price forecasting - A comparative analysis of ensemble learning and deep learning methods // International Review of Financial Analysis. - 2024. - Vol. 92. - Art. 103055. URL: https://doi.org/10.1016/j.irfa.2023.103055.

Received 22.06.2025

Вікован В.К., Мельник Г.В., Мельник В.С. *Прогноз цін на криптовалюту через нечіткі часові ряди та розклад в вейвлети Добеші.* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №1. — С. 157–172.

У цій статті ми досліджуємо задачу прогнозування цін на криптовалюту за допомогою часових рядів і порівнюємо чотири підходи: вейвлет-декомпозиція Добеші для згладжування даних; Random Forest — ансамблеву модель машинного навчання; еволюційно нечітку систему, що автоматично генерує й відбирає правила за допомогою генетичного алгоритму; базову нейронну мережу. Кожний метод протестовано на однакових часових рядах, а їх ефективність оцінили за стандартними метриками точності. Особливу увагу приділено впливу вейвлет-згладжування на якість прогнозів. Отримані результати дозволяють виявити сильні та слабкі сторони кожного підходу та обґрунтувати їх використання залежно від характеристик даних і постановки задачі.