ISSN 2309-4001

БУКОВИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, № 2

Чернівці
Чернівецький національний університет
2024

ISSN 2309-4001

BIKOVINIAN MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 12, № 2

Chernivtsi
Chernivtsi National University
2024

Буковинський математичний журнал. – Т. 12, № 2. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2024. – 219 с.

Журнал входить до переліку наукових фахових видань України категорії "Б"
(наказ МОНУ № 409 від 17.03.2020)
Спеціальності
111 Математика
113 Прикладна математика

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Журнал публікує оригінальні статті англійською та українською мовами із математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей і математичної статистики, математичного моделювання та обчислювальних методів

Реферується Zentralblatt MATH, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia Naukowa, WorldCat

Редколегія:

Адреса редакції:

58012 м.Чернівці, вул. Університетська, 28, тел. (0372)58-48-80, e-mail: clg-math@chnu.edu.ua

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
Державної реєстраційної служби України: серія КВ № 19465–9265 ПР від 07.11.2012
(Видання є правонаступником Наукового вісника Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика. Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Міністерства юстиції України: серія КВ № 15749–4221Р від 26.10.2009)

Вітчизняне наукове видання
Рік заснування 2013

Bukovinian Mathematical Journal. – Vol. 12, No 2. - Chernivtsi: Chernivtsi Nat. Univ., 2024. – 219 p.

The journal is included in the List of Scientific Professional Publications of Ukraine of category "B"
(Order of the Ministry of Education and Science №409 of March 17, 2020)
Specialties
111 Mathematics
113 Applied Mathematics

The journal publishes original papers in English and Ukrainian in mathematical analysis, differential equations, probability theory and mathematical statistics, mathematical modelling and methods of computations

Reviewed by Zentralblatt, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia Naukowa, WorldCat

Editorial Board of the issue:

Editorial office address:
58012, Chernivtsi, Universytetska str., 28, tel. (0372)58-48-80, e-mail: clg-math@chnu.edu.ua

Certificate of state registration of the print mass media of the State Registration Service of Ukraine: Series KB No 19465-9265 PR of 11/07/2012
(The journal is the assignee of Naukovyj Visnyk Chernivets'kogo Universytetu. Matematyka. Chernivets'kyj Universytet, Chernivtsi. Ukrainian. Certificate of state registration of the print mass media of the Ministry of Justice of Ukraine: Series KB No 15749-4221 P of 10/26/2009)

National Scientific Publication
Founded in 2013

ЗМІСТ

Карлова О.О., Мартинюк О.В., Михайлюк В.В. V міжнародна наукова конференція, присвячена 145 річниці від дня народження Ганса Гана 7

Huzyk N.M., Brodyak O.Ya. Coefficient inverse problem for parabolic equation with strong power degeneration 10

Mykhaylyuk V.V., Myronyk V.I. Uniformly continuous mappings on premetric spaces 27

Novosad Z.H. Chaotic Dynamic Systems of Shift Operators and Applications in Economics 37

Гордей М., Горошкевич С., Карлова О. Асимптотична щільність нещасливих чисел . . 49

Гутік О.В., Щипель М.Р. Напівгрупа скінченних часткових порядкових ізоморфізмів обмеженого рангу нескінченної лінійно впорядкованої множини 60

Дронь В.С., Мединський І.П. Задача Коші для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова довільного порядку з однією групою виродження 69

Єлагін В.О. Нега-Q_s-зображення чисел і йому відповідні хвостові множини 80

Лисенко І.М., Працьовитий О.М., Плакида В.І. Неперервні функції, означені в термінах двосимвольного $\mathbf{G_2}$-зображення з двома різнознаковими основами 89

Мазуренко О.В. Про деякі властивості впорядкованих структур, еквівалентні до повноти за Дедекіндом 98

Макарчук. О.П. Асимптотична поведінка модуля перетворення Фур'є-Стільтьєса одного класу узагальнених згорток Бернуллі 108

Малик І.В., Івасюк Р.В. ПММ та НПМ у часових рядах 119

Маценко В.Г. Аналіз моделей типу Скеллама з періодичними режимами 128

Мединський І. П., Пасічник Г. С. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами, залежними від параметра, та з виродженням на початковій гіперплощині 143

Назарчук В.В., Васькевич С.О., Ратушняк С.П. Один континуальний клас фрактальних функцій, означених в термінах Q_s^*-зображення 154

Нестеренко В.В., Фотій О.Г. Про слабку горизонтальну квазінеперервність та сукупну квазінеперервність многозначних відображень 162

Петрина Г.О., Станжицький О.М., Мартинюк О.В. Про апроксимацію стохастичних рівнянь із запізненням у нескінченновимірних просторах 168

Попов М. М., Українець О. З. Цілочисленні товарні вектори у моделі економіки Ерроу-Дебре 182

Працьовитий М.В., Черчук Н.В. Ніде не монотонна функція типу Серпінського, пов'язана із зображенням чисел рядами Кантора 190

Пукальський І.Д., Яшан Б.О. Оптимальне керування в крайовій задачі для $2b$-параболічних рівнянь з інтегральною нелокальною умовою 200

Сергійко Д.М., Ратушняк С.П. Сингулярні функції, пов'язані з марковським зображенням чисел 211

CONTENTS

Karlova O.O., Martynyuk O.V., Mykhaylyuk V.V. 5th International Scientific Conference dedicated to the 145th anniversary of the birth of Hans Hahn 7

Huzyk N.M., Brodyak O.Ya. Coefficient inverse problem for parabolic equation with strong power degeneration 10

Mykhaylyuk V.V., Myronyk V.I. Uniformly continuous mappings on premetric spaces 27

Novosad Z.H. Chaotic Dynamic Systems of Shift Operators and Applications in Economics 37

Hordei M., Horoshkevych S., Karlova O. Asymptotic density of unhappy numbers 49

Gutik O.V., Shchypel M.R. The semigroup of finite partial order isomorphisms of a bounded rank of an infinite linearly ordered set 60

Dron V.S., Medynskyi I.P. Cauchy problem for degenerated parabolic equations of Kolmogorov type of arbitrary order with one group of degeneration 69

Yelahin V.O. Nega-Q_s-representation of numbers and its corresponding tail sets 80

Lysenko I.M., Pratsiovytyi O.M., Plakyda V.I. Continuous functions defined in terms of a two-symbol $\mathbf{G_2}$-representation with two bases having different signs 89

Mazurenko O.V. On some properties of ordered structures equivalent to Dedekind completeness 98

Makarchuk O.P. Asymptotic behavior of the Fourier-Stieltjes transform module of one class of generalized Bernoulli convolutions 108

Malik I.V., Ivasiuk R.V. HMM and HSMM in time series 119

Matsenko V.G. Analysis of Skellam-type models with periodic regimes 128

Medynskyi I. P., Pasichnyk H. S. Fundamental solution of the Cauchy problem for an ultraparabolic equation with increasing coefficients depending on a parameter and with degeneration on the initial hyperplane 143

Nazarchuk V.V., Vaskevych S.O., Ratushniak S.P. One continuum class of fractal functions defined in terms of Q_s^*-representation 154

Nesterenko V.V., Fotij O.G. On weak horizontal quasi-continuity and joint quasi-continuity of multivalued mappings 162

Petryna G., Stanzhytskiy O., Martynyuk O. On the Approximation of Stochastic Delay Equations in Infinite-Dimensional Spaces 168

Popov M. M., Ukrainets O. Z. Integer commodity vectors in the Arrow-Debreu model of economy 182

Pratsiovytyi M.V., Cherchuk N.V. Nowhere Monotonic Function of the Sierpinski Type Associated with the Representation of Numbers by Cantor Series 190

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. Optimal control in a boundary value problem for $2b$-parabolic equations with an integral nonlocal condition 200

Serhiiko D.M., Ratushniak S.P. Singular function related with Markov representation of numbers 211

Карлова О.О., Мартинюк О.В., Михайлюк В.В.

V МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ, ПРИСВЯЧЕНА 145 РІЧНИЦІ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ГАНСА ГАНА

Ключові слова і фрази: міжнародна наукова конференція, Ганс Ган, факультет математики та інформатики.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

e-mail: o.karlova@chnu.edu.ua, o.martynyuk@chnu.edu.ua, v.mykhaylyuk@chnu.edu.ua

З 23 по 27 вересня 2024 року на факультеті математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича проходила V міжнародна наукова конференція, присвячена 145 річниці від дня народження Ганса Гана (1879 – 1934), видатного австрійського математика, професора Чернівецького (1909 – 1916), Боннського (1916 – 1921) та Віденського (1921 – 1934) університетів, члена-кореспондента Австрійської Академії наук. Проведення таких конференцій стало доброю традицією в Чернівецькому університеті, починаючи з 1984-го року, коли відбулася перша конференція. Вони проводяться через кожних 10 років (друга конференція відбулася у 1994 році, третя – у 2004 році і четверта – у 2014 році).

Цьогоріч на ганській конференції, яка проводилися в очному режимі, безпосередню участь в її роботі взяли понад 60 математиків, які представляли 15 міст України: Київ, Одеса, Львів, Івано-Франківськ, Кривий Ріг, Хмельницький, Харків, Слов'янськ, Запоріжжя, Кропивницький, Дніпро, Вінниця, Луцьк, Чернігів, Чернівці. До матеріалів конференції увійшло 110 тез, авторами яких є близько 200 науковців із 6 країн світу: Казахстану, Німеччини, Об'єднаних Арабських Еміратів, Польщі, США та України.

Під час конференції працювали секції

1) Теорія функцій, функціональний аналіз та топологія
2) Диференціальні рівняння
3) Алгебра та геометрія
4) Теорія чисел

На засіданнях було проголошено 11 пленарних доповідей та близько 40 секційних. В роботі конференції серед інших учасників взяли участь запрошені спікери Марія Власенко (професорка Київської Школи Економіки), Анатолій Плічко (професор Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка), Михайло Попов (професор Прикарпатського університету імені Василя Стефаника), Сергій Максименко (член-кореспондент Національної Академії наук України), Тарас Банах (професор Львівського національного університету імені Івана Франка).

Цікавою для учасників була проблемна секція, проведена в останній день конференції перед її закриттям, де науковці змогли озвучити відкриті математичні проблеми та задачі.

Учасники конференції відвідали також могилу професора Володимира Маслюченка, колишнього завідувача кафедри математичного аналізу і одного з організаторів першої ганської конференції у 1984 році. Цей захід відбувся 26 вересня 2024 року у день народження Володимира Маслюченка, учасники конференції не лише вшанували Володимира Кириловича, але й поділилися світлими спогадами про нього.

На сайті конференції опубліковано програму конференції та тези доповідей її учасників https://hahn.chnu.edu.ua/

Huzyk N.M., Brodyak O.Ya.

COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH STRONG POWER DEGENERATION

In a domain with known boundaries it is investigated an inverse problem for a parabolic equation with strong degeneration. The degeneration of the equation is caused by power function with respect to time variable at the higher order derivative of unknown function. It is known that the minor coefficient of the equation is a polynomial of the first order for the space variable with two unknown functions with respect to time. The boundary conditions of the second kind and the means of heat moments as overdetermination conditions are given. We establish conditions of existence and uniqueness of the classical solution to the named inverse problem.

Key words and phrases: coefficient inverse problem, parabolic equation, strong power degeneration, minor coefficient.

Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy, Lviv, Ukraine (Huzyk N.M.)
Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine (Brodyak O.Ya.)
e-mail: *hryntsiv@ukr.net (Huzyk N.M.), brodyakoksana1976@gmail.com (Brodyak O.Ya.)*

Introduction

The theory of inverse problems for parabolic equations is actively developing in recent decades due to its practical application. Unlike direct problems, coefficient inverse problems arise when it is necessary to determine some parameters of the equation in addition to its solution. One of the first papers that studied the inverse problem of determination of the time-dependent coefficient of thermal conductivity in a heat equation is the paper by B.F. Jones [17]. The conditions of existence and uniqueness of the classical solution to this problem are established in it applying the Schauder Fixed Point Theorem. The coefficient inverse problems for parabolic equations in a domain with fixed boundaries with different boundary and overdetermination conditions are well studied for today (see, for example, [5, 1, 18, 7, 9, 4, 24, 21, 19, 20] and bibliography in them). Note that among these papers there are some with unknown time-dependent major coefficients of the parabolic equation [5, 1, 18, 7, 9], and time-dependent [4, 24, 21] or space-dependent [19, 20] minor coefficients in it.

УДК 517.95
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35R30, 35K65.
Information on some grant ...

When describing such processes as the movement of liquids and gases in a porous medium, desalination of sea water, the behavior of financial markets, population dynamics, problems arise for parabolic equations with degenerations. Inverse problems for determination of the function $a = a(t), a(t) > 0, t \in [0, T]$ in parabolic equation

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$$

were investigated in [23, 16] for both cases of weak ($0 < \beta < 1$) and strong ($\beta \geq 1$) degeneration respectively. Coefficient inverse problems for degenerate parabolic equations were studied in [10, 11, 12, 8, 22, 6, 3]. Note that among them there are problems of identification of the time-dependent minor coefficient in equations with degenerations with respect to time variable [10, 11, 12, 8] and space variables [22, 6], and the problem with unknown space-dependent coefficient in the degenerate equation with respect to this variable [3]. The problems of determining the coefficients in the degenerate parabolic equations, which depend on both time and space variables, remain uninvestigated for today.

In this paper coefficient inverse problem for parabolic equation with degeneration caused by time-dependent power function at the higher order derivative is investigated. It is known that the minor coefficient of the equation is a a polynomial of the first order for the space variable with two unknown functions with respect to time. The boundary conditions of the second kind and the means of heat moments as overdetermination conditions are given. The case of strong degeneration is studied. The conditions of existence and uniqueness of the classical solution to the named problem are established. Note that the case of weak degeneration for the named problem is investigated in [13, 2] and the case of strong degeneration with the Dirichlet boundary condition in [14].

1 The statement of the problem and the main results

In a domain $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ we consider the coefficient inverse problem for the degenerate parabolic equation:

$$w_t = a(t)t^\beta w_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))w_x + c(x,t)w + f(x,t), \tag{1}$$

$$w(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

$$w_x(0,t) = \mu_1(t), \ w_x(l,t) = \mu_2(t), \ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\int_0^l w(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^l xw(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

It is known that $a(t) > 0, t \in [0,T]$ and the degeneration of the equation is caused by the power function t^β, where $\beta \geq 1$ (the case of strong degeneration). The coefficient at the first derivative of unknown function $w = w(x,t)$ in the equation (1) is a polynomial of the first order for the space variable with two unknown functions with respect to time variable $b_1 = b_1(t), b_2 = b_2(t)$.

Definition 1. *A triplet of functions* $(b_1, b_2, w) \in (C[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, $|b_1(t)| \le M_1 t^{\eta}$, $|b_2(t)| \le M_2 t^{\eta}$, *where* $\eta = \min\{\gamma, \beta\}$, $\gamma > \frac{\beta-1}{2}$ *is an arbitrary number,* M_1, M_2 *are the positive constants defined by the input data, which satisfies the equation* (1) *and conditions* (2)-(5) *point by point for all* $t \le T_0$ *is called the local solution to the problem* (1)-(5) *at* $T_0 < T$ *and the global solution to this problem at* $T_0 = T$.

The main result of the paper is contained in the following Theorem.

Theorem. *Suppose that the assumptions*

A1) $\varphi \in C^3[0,l]$, $a \in C[0,T]$, $c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\mu_i \in C^1[0,T], i = \{1,2,3,4\}$;

A2) $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,l]$;

A3) $|f(x,t)| + |f_x(x,t)| \le A_1 t^{\gamma}$, $|c(x,t)| + |c_x(x,t)| \le A_2 t^{\gamma}, (x,t) \in \overline{Q}_T$, $|\mu_3'(t)| \le A_3 t^{\gamma}$, $|\mu_4'(t)| \le A_4 t^{\gamma}$, $t \in [0,T]$, *where* A_i, $i = 1,2,3,4$ *are arbitrary positive constants;*

A4) $\mu_1(0) = \varphi'(0), \quad \mu_2(0) = \varphi'(l), \ \int\limits_0^l \varphi(x)dx = \mu_3(0), \ \int\limits_0^l x\varphi(x)dx = \mu_4(0)$

hold. Then there exists the unique local solution to the problem (1)-(5).

2 Existence of the solution

To prove the existence of the solution to the problem (1)-(5) we apply the Schauder Fixed Point Theorem. For this purpose, using the apparatus of Green's functions of boundary value problems for the heat equation, the inverse problem (1)-(5) is reduced to an equivalent system of equations and conditions of Schauder's theorem are ensured for it.

In the problem (1)-(5) we make the substitution

$$w(x,t) = \widetilde{w}(x,t) + w_0(x,t), \tag{6}$$

where the function $w_0(x,t)$ satisfies the given nonhomogeneous initial and boundary conditions (2), (3). It is easy to verify by direct inspection, that the function $w_0(x,t)$ is defined by the formula

$$w_0(x,t) = \varphi(x) + x(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \frac{x^2}{2l}\Big(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\Big). \tag{7}$$

As a result of the substitution (6) we obtain the nonhomogeneous equation with respect to the function $\widetilde{w} = \widetilde{w}(x,t)$ with homogeneous initial and boundary conditions:

$$\begin{aligned}\widetilde{w}_t &= a(t)t^{\beta}\widetilde{w}_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))\widetilde{w}_x + c(x,t)\widetilde{w} + f(x,t) - x\mu_1'(t) - \frac{x^2}{2l}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t))\\ &+ (b_1(t)x + b_2(t))\Big(\varphi'(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{l}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\big)\Big)\\ &+ c(x,t)\Big(\varphi(x) + x(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \frac{x^2}{2l}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\big)\Big)\\ &+ a(t)t^{\beta}\Big(\varphi''(x) + \mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\Big),\end{aligned}$$

$$\widetilde{w}(x,0)=0,\quad x\in[0,l], \tag{8}$$

$$\widetilde{w}_x(0,t)=\widetilde{w}_x(l,t)=0,\quad t\in[0,T]. \tag{9}$$

Applying the Green's function $G_2=G_2(x,t,\xi,\tau)$ of the second initial-boundary problem for the heat equation

$$w_t=a(t)t^\beta w_{xx}, \tag{10}$$

we reduce the problem (2)-(9) to the equivalent integro-differential equation

$$\widetilde{w}(x,t)=\int_0^t\int_0^l G_2(x,t,\xi,\tau)\Big(\big(b_1(\tau)\xi+b_2(\tau)\big)\widetilde{w}_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\widetilde{w}(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)$$
$$+a(\tau)\tau^\beta\big(\varphi''(\xi)+\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0)\big)-\xi\mu_1'(\tau)-\frac{\xi^2}{2l}\big(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau)\big)$$
$$+(b_1(\tau)\xi+b_2(\tau))\Big(\varphi'(\xi)+\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\frac{\xi}{l}\big(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0)\big)\Big)$$
$$+c(\xi,\tau)\Big(\varphi(\xi)+\xi(\mu_1(\tau)-\mu_1(0))+\frac{\xi^2}{2l}(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\Big)\Big)\,d\xi\,d\tau. \tag{11}$$

The Green's functions of the first ($k=1$) and the second ($k=2$) initial-boundary problems for the equation (10) are defined by the formulas [15, p. 12]

$$G_k(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)$$
$$+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\Bigg),\ k=1,2, \tag{12}$$

with $\theta(t)=\int\limits_0^t a(\tau)\tau^\beta d\tau$. The estimates

$$\int_0^l|G_k(x,t,\xi,\tau)|d\xi\le 1,\ \int_0^l|G_{kx}(x,t,\xi,\tau)|\,d\xi\le\frac{C_1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},\ k=1,2, \tag{13}$$

hold for them ([15, p. 12]), where C_1 is an arbitrary positive constant.

Put $v(x,t)\equiv w_x(x,t)$, $u(x,t)\equiv w_{xx}(x,t)$. Since $G_1(0,t,\xi,\tau)=G_1(l,t,\xi,\tau)=0$, $G_{2x}=-G_{1\xi}$, then, taking into account (6), (11), we replace the problem (1)-(3) by the system of equivalent integral equations

$$w(x,t)=w_0(x,t) \tag{14}$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_2(x,t,\xi,\tau)\Big((b_1(\tau)\xi+b_2(\tau))v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)-\xi\mu_1'(\tau)$$
$$-\frac{\xi^2(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{2l}+a(\tau)\tau^\beta\Big(\varphi''(\xi)+\frac{\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0)}{l}\Big)\Big)\,d\xi\,d\tau,$$

$$v(x,t)=w_{0x}(x,t) \tag{15}$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)\Big((b_1(\tau)\xi+b_2(\tau))u(\xi,\tau)+(b_1(\tau)+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$
$$+c_\xi(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+f_\xi(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{l}+a(\tau)\tau^\beta\varphi'''(\xi)\Big)\,d\xi\,d\tau,$$
$$u(x,t)=w_{0xx}(x,t) \tag{16}$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Big((b_1(\tau)\xi+b_2(\tau))u(\xi,\tau)+(b_1(\tau)+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$
$$+c_\xi(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+f_\xi(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{l}+a(\tau)\tau^\beta\varphi'''(\xi)\Big)\,d\xi\;d\tau.$$

The equations with respect to functions $b_1=b_1(t)$, $b_2=b_2(t)$ we find multiplying (1) by $x^k, k=0,1$ alternately and integrating them with respect to space variable from 0 to l:

$$b_1(t)=\triangle^{-1}\Bigg(\Big(\mu_3'(t)-a(t)t^\beta(\mu_2(t)-\mu_1(t))-\int_0^l(c(x,t)w(x,t)+f(x,t))dx\Big)$$
$$\times\big(lw(l,t)-\mu_3(t)\big)-\Big(\mu_4'(t)-a(t)t^\beta(l\mu_2(t)-w(l,t)+w(0,t))$$
$$-\int_0^l x(c(x,t)w(x,t)+f(x,t))dx\Big)\big(w(l,t)-w(0,t)\big)\Bigg), \tag{17}$$
$$b_2(t)=\triangle^{-1}\Bigg(\Big(\mu_4'(t)-a(t)t^\beta(l\mu_2(t)-w(l,t)+w(0,t))-\int_0^l x(c(x,t)w(x,t)$$
$$+f(x,t))dx\Big)\big(lw(l,t)-\mu_3(t)\big)-\Big(\mu_3'(t)-a(t)t^\beta(\mu_2(t)-\mu_1(t))$$
$$-\int_0^l(c(x,t)w(x,t)+f(x,t))dx\Big)\big(l^2w(l,t)-2\mu_4(t)\big)\Bigg), \tag{18}$$

where
$$\triangle(t)=(lw(l,t)-\mu_3(t))^2-(w(l,t)-w(0,t))(l^2w(l,t)-2\mu_4(t)). \tag{19}$$

Let us establish the behavior of the integrals on the right hand sides of the formulas (14)-(16). Denote $W(t)=\max\limits_{(x,\tau)\in[0,l]\times[0,t]}|w(x,\tau)|$, $V(t)=\max\limits_{(x,\tau)\in[0,l]\times[0,t]}|v(x,\tau)|$, $U(t)=\max\limits_{(x,\tau)\in[0,l]\times[0,t]}|u(x,\tau)|$, $t\in[0,T]$. Using condition $(A3)$ of the Theorem and (13), from the equations (14)-(18) we obtain

$$W(t)\le C_2+C_3\int_0^t\Big((|b_1(\tau)|+|b_2(\tau)|)V(\tau)+\tau^\gamma W(\tau)\Big)d\tau,\ t\in[0,T], \tag{20}$$

$$V(t) \leq C_4 \tag{21}$$
$$+ C_5 \int_0^t \Big((|b_1(\tau)| + |b_2(\tau)|)U(\tau) + (|b_1(\tau)| + \tau^\gamma)V(\tau) + \tau^\gamma W(\tau) \Big) d\tau, \ t \in [0, T],$$

$$U(t) \leq \frac{C_6}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} \tag{22}$$
$$+ C_7 \int_0^t \frac{(|b_1(\tau)| + |b_2(\tau)|)U(\tau) + (|b_1(\tau)| + \tau^\gamma)V(\tau) + \tau^\gamma W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau, \ t \in (0, T],$$

$$|b_1(t)| \leq C_8\big(t^\gamma + t^\beta\big) + C_9\big(t^\gamma + t^\beta\big)W(t) + C_{10}\big(t^\gamma + t^\beta\big)W^2(t), \ t \in [0, T], \tag{23}$$
$$|b_2(t)| \leq C_{11}\big(t^\gamma + t^\beta\big) + C_{12}\big(t^\gamma + t^\beta\big)W(t) + C_{13}\big(t^\gamma + t^\beta\big)W^2(t), \ t \in [0, T]. \tag{24}$$

We conclude from the (20)-(24) that the functions $w = w(x,t), v(x,t)$ are continuous in $\overline{Q}_T$, $u = u(x,t)$ has the singularity $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ at $t \to 0$ and the functions $b_1 = b_1(t), b_2 = b_2(t)$ tend to zero when $t \to 0$ as the power function t^η with $\eta = \min\{\gamma, \beta\}$. Besides, we note that the integrals on the right hand sides of (14), (15) tend to zero when $t \to 0$. It yields that the sum of all the summands of (15) except the first term of the function $w_{0x} = w_{0x}(x,t)$, is infinitely small when $t \to 0$. It means that we can indicate such number $t_1, 0 < t_1 \leq T$ that

$$\Bigg| \mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{l}\Big(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\Big)$$
$$+ \int_0^t \int_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)\Big((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))u(\xi,\tau) + (b_1(\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$
$$+ c_\xi(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + f_\xi(\xi,\tau) - \mu_1'(\tau) - \frac{\xi(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau))}{l} + a(\tau)\tau^\beta \varphi'''(\xi)\Big)\, d\xi\, d\tau \Bigg|$$
$$\leq \frac{\min\limits_{[0,l]} \varphi'(x)}{2}, (x,t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{25}$$

As a result from the equation (15) we get

$$v(x,t) \geq \frac{\min\limits_{[0,l]} \varphi'(x)}{2} > 0, (x,t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{26}$$

Since we can rewrite $\triangle(t)$ in a view

$$\triangle(t) = \Big(\int_0^l x v(x,t) dx \Big)^2 - \int_0^l v(x,t) dx \int_0^l x^2 v(x,t) dx$$
$$= -\frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l (y_2 - y_1)^2 v(y_1,t) v(y_2,t) dy_1 dy_2, \tag{27}$$

then

$$\min_{t \in [0,T]} |\triangle(t)| \geq \frac{l^4 \Big(\min\limits_{[0,l]} \varphi'(x) \Big)^2}{48} > 0, (x,t) \in \overline{Q}_{t_1}, \tag{28}$$

that is the condition (A2) of the Theorem ensures the difference from the zero of the denominator $\triangle(t)$ on the segment $[0, t_1]$.

Thus, the problem (1)-(5) is reduced to the system of equations (14)-(18). Under the solution to this system we will understand such set of the functions (w, v, u, b_1, b_2), that $(w, v, u, b_1, b_2) \in (C(\overline{Q}_{t_1}))^2 \times C([0, l] \times (0, t_1]) \times (C[0, t_1])^2$, $|b_1(t)| \le M_1 t^\eta$, $|b_2(t)| \le M_2 t^\eta$ and satisfy (14)-(18).

The problem (1)-(5) and the system of equations (14)-(18) are equivalent in the following sense: if a triplet of finctions (b_1, b_2, w) is a local solution to the problem (1)-(5) in $\overline{Q}_{t_1}$, then (w, v, u, b_1, b_2) is a solution to the system of equations (14)-(18) and contrary. The first part of this claim emerges from the way of reduction of system of these equations. We prove that if $(w, v, u, b_1, b_2) \in (C(\overline{Q}_{t_1}))^2 \times C([0, l] \times (0, t_1]) \times (C[0, t_1])^2$, $|b_1(t)| \le M_1 t^\eta$, $|b_2(t)| \le M_2 t^\eta$ is a solution to the system of the equations (14)-(18), then (b_1, b_2, w) belong to $(C[0, t_1])^2 \times C^{2,1}(Q_{t_1}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{t_1})$, and satisfy the conditions (1)-(5) and estimations $|b_1(t)| \le M_1 t^\eta$, $|b_2(t)| \le M_2 t^\eta$.

Let us differentiate (15) with respect to x. The right hand side of the expression

$$v_x(x,t) = w_{0xx}(x,t) + \int_0^t \int_0^l G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Big((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))u(\xi,\tau) + (b_1(\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$
$$+ c_\xi(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + f_\xi(\xi,\tau) - \mu_1'(\tau) - \frac{\xi(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau))}{l} + a(\tau)\tau^\beta \varphi'''(\xi)\Big)\, d\xi\, d\tau$$

and the equality (16) coincide, so $u(x,t) \equiv v_x(x,t)$, $(x,t) \in [0,l] \times (0, t_1]$. Then we differentiate the equality (14) with respect to x. Using the known properties of the Green's functions we deduce

$$w_x(x,t) = w_{0x}(x,t) + \int_0^t \int_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)\Big((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))v_\xi(\xi,\tau) + b_1(\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)$$
$$\times w_\xi(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + f_\xi(\xi,\tau) - \mu_1'(\tau) - \frac{\xi(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau))}{l} + a(\tau)\tau^\beta \varphi'''(\xi)\Big)\, d\xi\, d\tau.$$

Subtracting the corresponding parts of the obtained equality and (15), we obtain the homogeneous integral Volterra equation of second kind

$$w_x(x,t) - v(x,t) = \int_0^t \int_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)c(\xi,\tau)\big(w_\xi(\xi,\tau) - v(\xi,\tau)\big)\, d\xi\, d\tau.$$

In a virtue of (13) and uniqueness of the solution to these equations it yields that $v(x,t) \equiv w_x(x,t)$, $(x,t) \in [0,l] \times (0, t_1]$. Furthermore, taking into account the behavior of the functions $b_1 = b_1(t), b_2 = b_2(t)$, $v(x,t)$ we can state that the products $b_i(t)v(x,t)$, $i = 1, 2$ are continuous in a rectangle $[0,l] \times [0, t_1]$. Then, considering the equation (14) as integro-differential one with respect to $w = w(x,t)$, we can assert that $w \in C^{2,1}(Q_{t_1}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{t_1})$ and satisfies (1)-(3).

We multiply the equality (17) by $lw(l,t)-\mu_3(t)$ and (18) by $w(l,t)-w(0,t)$ respectively. Summing up the obtained equalities, we find

$$b_1(t)(lw(l,t)-\mu_3(t))+b_2(t)(w(l,t)-w(0,t))=\mu_3'(t)-a(t)t^{\beta}(\mu_2(t)-\mu_1(t))$$
$$-\int\limits_0^l (c(x,t)w(x,t)+f(x,t))dx.$$

Using (1)-(3), this equality we rewrite in the form

$$b_1(t)\Big(\int\limits_0^l w(x,t)dx-\mu_3(t)\Big)=-\Big(\int\limits_0^l w_t(x,t)dx-\mu_3'(t)\Big).$$

Put $z(t)\equiv\int\limits_0^l w(x,t)dx-\mu_3(t)$. Then $z'(t)=-b_1(t)z(t)$, and respectively $z(t)=z(0)e^{-\int\limits_0^t b_1(\tau)d\tau}$. Since $z(0)=0$ according to the condition $(A4)$ of the Theorem, so $z(t)\equiv 0$, that is the condition (4) is fulfilled.

As a similar way we multiply the equation (17) by $l^2w(l,t)-2\mu_4(t)$, and (18) by $lw(l,t)-\mu_3(t)$. After summing up we find

$$b_1(t)(l^2w(l,t)-2\mu_4(t))+b_2(t)(lw(l,t)-\mu_3(t))=\mu_4'(t)-a(t)t^{\beta}(l\mu_2(t)$$
$$-w(l,t)+w(0,t))-\int\limits_0^l x(c(x,t)w(x,t)+f(x,t))dx.$$

Then the compatibility condition $(A4)$ of the Theorem yields (5). It means that the equivalence of the inverse problem (1)-(5) and the system of equations (14)-(18) is proved.

Denote $p_1(t)=b_1(t)t^{-\eta}, p_2(t)=b_2(t)t^{-\eta}, \widetilde{u}(x,t)=t^{\frac{\beta-1}{2}}u(x,t)$. The system of equations (14)-(18) we represent in the form

$$w(x,t)=w_0(x,t) \tag{29}$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_2(x,t,\xi,\tau)\Big((p_1(\tau)\xi+p_2(\tau))\tau^{\eta}v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)-\xi\mu_1'(\tau)$$
$$-\frac{\xi^2(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{2l}+a(\tau)\tau^{\beta}\Big(\varphi''(\xi)+\frac{\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0)}{l}\Big)\Big)\,d\xi\,d\tau,$$

$$v(x,t)=w_{0x}(x,t) \tag{30}$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)\Big((p_1(\tau)\xi+p_2(\tau))\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}\widetilde{u}(\xi,\tau)+(p_1(\tau)\tau^{\eta}+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$
$$+c_{\xi}(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+f_{\xi}(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{l}+a(\tau)\tau^{\beta}\varphi'''(\xi)\Big)\,d\xi\,d\tau,$$

$$\widetilde{u}(x,t)=w_{0xx}(x,t) \tag{31}$$

$$+ t^{\frac{\beta-1}{2}} \int_0^t \int_0^l G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Big((p_1(\tau)\xi + p_2(\tau))\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}\widetilde{u}(\xi,\tau) + (p_1(\tau)\tau^{\eta} + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$

$$+ c_\xi(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + f_\xi(\xi,\tau) - \mu_1'(\tau) - \frac{\xi(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{l} + a(\tau)\tau^{\beta}\varphi'''(\xi)\Big)\, d\xi\, d\tau,$$

$$p_1(t) = \triangle^{-1}\tau^{-\eta}\Big(\Big(\mu_3'(t) - a(t)t^{\beta}(\mu_2(t)-\mu_1(t)) - \int_0^l (c(x,t)w(x,t) + f(x,t))dx\Big)$$

$$\times \big(lw(l,t) - \mu_3(t)\big) - \Big(\mu_4'(t) - a(t)t^{\beta}(l\mu_2(t) - w(l,t) + w(0,t))$$

$$- \int_0^l x(c(x,t)w(x,t) + f(x,t))dx\Big)\big(w(l,t) - w(0,t)\big)\Big), \tag{32}$$

$$p_2(t) = \triangle^{-1}\tau^{-\eta}\Big(\Big(\mu_4'(t) - a(t)t^{\beta}(l\mu_2(t) - w(l,t) + w(0,t)) - \int_0^l x(c(x,t)w(x,t)$$

$$+ f(x,t))dx\Big)\big(lw(l,t) - \mu_3(t)\big) - \Big(\mu_3'(t) - a(t)t^{\beta}(\mu_2(t)-\mu_1(t))$$

$$- \int_0^l (c(x,t)w(x,t) + f(x,t))dx\Big)\big(l^2 w(l,t) - 2\mu_4(t)\big)\Big), \tag{33}$$

where $\triangle(t)$ is defined by the formula (19). Note, that this system is considered in $\overline{Q}_{t_1}$, so the difference from zero of the denominators in the formulas (32), (33) is argued in (28).

We represent the system of equations (29)-(33) as an operator equation

$$\omega = P\omega, \tag{34}$$

where $\omega = (w, v, \widetilde{u}, p_1, p_2)$ and the operator $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ is defined y the right hand sides of equations (29)-(33) respectively.

Assume that $|w(x,t)| \le M_3,\ 0 < M_4 \le v(x,t) \le M_5,\ |\widetilde{u}(x,t)| \le M_6, (x,t) \in \overline{Q}_{t_1}$, where M_3, M_4, M_5, M_6 are some positive constants. We will define them below. Using these estimates and (28) in (32)-(33), we find

$$|P_4\omega| \le \frac{C_{14}(t^{\gamma-\eta} + t^{\beta-\eta})(1 + M_3 + M_3^2)}{\min\limits_{t\in[0,t_1]} |\triangle(t)|} \equiv M_1,\ t \in [0, t_1], \tag{35}$$

$$|P_5\omega| \le \frac{C_{15}(t^{\gamma-\eta} + t^{\beta-\eta})(1 + M_3 + M_3^2)}{\min\limits_{t\in[0,t_1]} |\triangle(t)|} \equiv M_2,\ t \in [0, t_1], \tag{36}$$

where the numbers C_{14}, C_{15} are determined by the input data.

Let us consider the equations (29)-(31). Taking into account (35), (36), we obtain

$$|P_1\omega| \le \Big|\int_0^t \int_0^l G_2(x,t,\xi,\tau)\Big((M_1 l + M_2)t^{\eta} M_5 + \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}} |c(\xi,\tau)| M_3$$

$$+\max_{(\xi,\tau)\in\overline{Q}_{t_1}}\left|f(\xi,\tau)-\xi\mu_1'(\tau)+a(\tau)\tau^{\beta}\left(\varphi''(\xi)+\frac{\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0)}{l}\right)\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\xi^2(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{2l}\right|\right)d\xi\,d\tau\Bigg|+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}|w_0(x,t)|$$
$$\le C_{16}t^{\eta+1}+C_{17}t^{\gamma+1}+C_{18}t+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}|w_0(x,t)|, \tag{37}$$

$$P_2\omega\ge\min_{x\in[0,l]}\varphi'(x)+\min_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\left|\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{l}\Big(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)\Big)\right.$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)\Big((p_1(\tau)\xi+p_2(\tau))\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}\widetilde{u}(\xi,\tau)+(p_1(\tau)\tau^{\eta}+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$
$$\left.+c_{\xi}(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+f_{\xi}(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{l}+a(\tau)\tau^{\beta}\varphi'''(\xi)\Big)\,d\xi\,d\tau\right|, \tag{38}$$

$$P_2\omega\le\max_{x\in[0,l]}\varphi'(x)+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\left|\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{l}\Big(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)\Big)\right.$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)\Big((p_1(\tau)\xi+p_2(\tau))\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}\widetilde{u}(\xi,\tau)+(p_1(\tau)\tau^{\eta}+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$
$$\left.+c_{\xi}(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+f_{\xi}(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{l}+a(\tau)\tau^{\beta}\varphi'''(\xi)\Big)\,d\xi\,d\tau\right|, \tag{39}$$

$$|P_3\omega|\le\left|t^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^t\int_0^l G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Big((M_1l+M_2)t^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}M_6+\big(M_1\tau^{\eta}+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}|c(\xi,\tau)|\big)M_5\right.$$
$$+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}|c_{\xi}(\xi,\tau)|M_3+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\left|f(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi}{l}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\right.$$
$$\left.\left.+a(\tau)\tau^{\beta}\varphi''(\xi)\right|\Big)\,d\xi\,d\tau\right|+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\left|t^{\frac{\beta-1}{2}}w_{0xx}(x,t)\right|$$
$$\le C_{19}t^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}+C_{20}t^{\gamma}+C_{21}t^{\eta}+C_{22}+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\left|t^{\frac{\beta-1}{2}}w_{0xx}(x,t)\right|. \tag{40}$$

Now we estimate the expresion

$$\left|\int_0^t\int_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)\Big((p_1(\tau)\xi+p_2(\tau))\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}\widetilde{u}(\xi,\tau)+(p_1(\tau)\tau^{\eta}+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)\right.$$
$$+c_{\xi}(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+f_{\xi}(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))}{l}+a(\tau)\tau^{\beta}\varphi'''(\xi)\Big)\,d\xi\,d\tau$$
$$\left.+\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{l}\Big(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)\Big)\right|$$
$$\le\left|\int_0^t\int_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)\Big((M_1l+M_2)t^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}M_6+\big(M_1\tau^{\eta}+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}|c(\xi,\tau)|\big)M_5\right.$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\Big|c_\xi(\xi,\tau)|M_3+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\Big|f(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi}{l}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))$$
$$+a(\tau)\tau^\beta\varphi''(\xi)\Big|\Big)\,d\xi\,d\tau\Big|+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\Big|\frac{x}{l}\Big(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)\Big)\Big|$$
$$+\max_{t\in[0,t_1]}\big|\mu_1(t)-\mu_1(0)\big|\le C_{23}t^{\eta-\frac{\beta-3}{2}}+C_{24}t^{\eta+1}+C_{25}t^{\gamma+1}+C_{26}t. \tag{41}$$

Choose the constants M_3-M_6 such that

$$M_3>\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}|w_0(x,t)|,\ M_4=\frac{1}{2}\min_{x\in[0,l]}\varphi'(x),\ M_5=\max_{x\in[0,l]}\varphi'(x)+\frac{1}{2}\min_{x\in[0,l]}\varphi'(x),$$

$$M_6>C_{22}+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\Big|t^{\frac{\beta-1}{2}}w_{0xx}(x,t)\Big|.$$

Fix the number $T_0, 0<T_0\le t_1$ ia a such way

$$C_{16}T_0^{\eta+1}+C_{17}T_0^{\gamma+1}+C_{18}T_0+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}|w_0(x,t)|\le M_3, \tag{42}$$

$$C_{19}T_0^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}+C_{20}T_0^{\gamma}+C_{21}T_0^{\eta}+C_{22}+\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t_1}}\Big|t^{\frac{\beta-1}{2}}w_{0xx}(x,t)\Big|\le M_6, \tag{43}$$

$$C_{23}T_0^{\eta-\frac{\beta-3}{2}}+C_{24}T_0^{\eta+1}+C_{25}T_0^{\gamma+1}+C_{26}T_0\le\frac{1}{2}\min_{x\in[0,l]}\varphi'(x). \tag{44}$$

As a result we obtain

$$|P_1\omega|\le M_3,\ 0<M_4\le P_2\omega\le M_5,\ |P_3\omega|\le M_6,\ (x,t)\in\overline{Q}_{T_0}. \tag{45}$$

We consider the operator equation (34) on a convex closed set $N\equiv\{(w,v,\widetilde{u},p_1,p_2)\in(C(\overline{Q}_{T_0}))^3\times(C[0,T_0])^2 : |w(x,t)|\le M_3, 0<M_4\le v(x,t)\le M_5, |\widetilde{u}(x,t)|\le M_6, |p_1(t)|\le M_1, |p_2(t)|\le M_2\}$ in the Banach space $\mathcal{B}\equiv(C(\overline{Q}_{T_0}))^3\times(C[0,T_0])^2$. The estimates (35), (36), (45) guarantee that the operator P maps the set N into itself. To prove the compactness of the operator P on the set N we apply the Arzela-Ascoli theorem. For this aim we have to show that the set PN is uniformly bounded and equicontinuous. The latter means that

$$\forall\varepsilon\ \exists\varrho : |P\omega(x_2,t_2)-P\omega(x_1,t_1)|<\varepsilon$$

for all $|x_2-x_1|<\varrho,\ |t_2-t_1|<\varrho,\ \omega(x,t)\in N$.

Let us consider the operator $P_4\omega(t)$. Using (32) we represent it in the form

$$P_4\omega=\frac{F(t)}{\triangle(t)t^\delta},$$

where $\triangle(t)$ is defined by (19) and

$$F(t)\equiv\Big(\mu_3'(t)-a(t)t^\beta(\mu_2(t)-\mu_1(t))-\int_0^l(c(x,t)w(x,t)+f(x,t))dx\Big)$$

$$\times\big(lw(l,t)-\mu_3(t)\big)-\Bigg(\mu_4'(t)-a(t)t^\beta(l\mu_2(t)-w(l,t)+w(0,t))$$

$$-\int\limits_0^l x(c(x,t)w(x,t)+f(x,t))dx\Bigg)\big(w(l,t)-w(0,t)\big).$$

Taking into account the conditions of the Theorem and the definition of the set N we deduce that $F(t)$ is continuous on $[0,T_0]$ and $F(t)\le C_{27}t^\delta$. The constant C_{27} in last inequality is determined by the input data.

Fix an arbitrary number $\varepsilon>0$. Since $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{\triangle(t)t^\delta}=\kappa_1$, so we can indicate such number t^*, that

$$\left|\frac{F(t)}{\triangle(t)t^\delta}-\kappa_1\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

for $0<t\le t^*$. As a result we obtain

$$|P_4\omega(t_2)-P_4\omega(t_1)|\le|P_4\omega(t_2)-\kappa_2|+|\kappa_2-P_4\omega(t_1)|<\varepsilon$$

for $0<t_1,t_2\le t^*$.

For the case $t_1,t_2>t^*$ we find

$$|P_4\omega(t_2)-P_4\omega(t_1)|\le\left|\frac{F(t_1)}{t_1^\delta}\left(\frac{1}{\triangle(t_1)}-\frac{1}{\triangle(t_2)}\right)\right|+\left|\frac{F(t_1)}{\triangle(t_2)}\left(\frac{1}{t_1^\delta}-\frac{1}{t_2^\delta}\right)\right|+\left|\frac{F(t_1)-F(t_2)}{\triangle(t_2)t_2^\delta}\right|$$

$$\le\frac{|F(t_1)||\triangle(t_2)-\triangle(t_1)|}{(t^*)^\delta\big(\min\limits_{\tau\in[0,T_0]}|\triangle(\tau)|\big)^2}+\frac{|F(t_1)||t_1^\delta-t_2^\delta|}{(t^*)^{2\delta}\big(\min\limits_{\tau\in[0,T_0]}|\triangle(\tau)|\big)}+\frac{|F(t_1)-F(t_2)|}{(t^*)^\delta\big(\min\limits_{\tau\in[0,T_0]}|\triangle(\tau)|\big)}.$$

In a virtue of continuity of input data and the mean value theorem we conclude

$$|P_4\omega(t_2)-P_4\omega(t_1)|\le\varepsilon,\ |t_2-t_1|<\varrho.$$

The case $t_1<t^*,t_2>t^*$ combines two previous ones because

$$|P_4\omega(t_2)-P_4\omega(t_1)|\le|P_4\omega(t_2)-P_4\omega(t^*)|+|P_4\omega(t^*)-P_4\omega(t_1)|.$$

We prove the equicontinuous of the set P_5N in a similar way.

The compactness of operators P_1-P_3, whose kernels are Green's functions can be proved according to the scheme given in [15, p. 27] adapted to the case of strong degeneration [16]. Applying the Schauder Fixed Point Theorem we state that there exists the solution to the system of equations (29)-(33) in $\overline{Q}_{T_0}$ and therefore to inverse problem (1)-(5) in $\overline{Q}_{T_0}$.

3 Uniqueness of the solution

Suppose that the system of equations (29)-(33) has two solutions $(w_i,v_i,\widetilde{u}_i,p_{1i},p_{2i}),i=1,2$. Denote $w(x,t)=w_1(x,t)-w_2(x,t),v(x,t)=v_1(x,t)-v_2(x,t),\widetilde{u}(x,t)=\widetilde{u}_1(x,t)-\widetilde{u}_2(x,t),\ p_1(t)=p_{11}(t)-p_{12}(t),p_2(t)=p_{21}(t)-p_{22}(t)$. Using (29)-(33), we find

$$w(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_2(x,t,\xi,\tau)\Bigg((p_{11}(\tau)\xi+p_{21}(\tau))\tau^\beta v(\xi,\tau)$$

$$+ (p_1(\tau)\xi + p_2(\tau))\tau^{\beta} v_2(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)w(\xi,\tau)\Big) d\xi\, d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \tag{46}$$

$$v(x,t) = \int_0^t \int_0^l G_1(x,t,\xi,\tau)\Big((p_{11}(\tau)\xi + p_{21}(\tau))\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}\widetilde{u}(\xi,\tau)$$
$$+ (p_1(\tau)\xi + p_2(\tau))\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}\widetilde{u}_2(\xi,\tau) + (p_{11}(\tau)\tau^{\eta} + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$
$$+ p_1(\tau)\tau^{\eta}v_2(\xi,\tau) + c_{\xi}(\xi,\tau)w(\xi,\tau)\Big) d\xi\, d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \tag{47}$$

$$\widetilde{u}(x,t) = t^{\frac{\beta-1}{2}} \int_0^t \int_0^l G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Big((p_{11}(\tau)\xi + p_{21}(\tau))\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}\widetilde{u}(\xi,\tau)$$
$$+ (p_1(\tau)\xi + p_2(\tau))\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}\widetilde{u}_2(\xi,\tau) + (p_{11}(\tau)\tau^{\eta} + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)$$
$$+ p_1(\tau)\tau^{\eta}v_2(\xi,\tau) + c_{\xi}(\xi,\tau)w(\xi,\tau)\Big) d\xi\, d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \tag{48}$$

$$p_1(t) = \triangle^{-1}t^{-\eta}\bigg(\Big(\mu_3'(t) - a(t)t^{\beta}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - \int_0^l (c(x,t)w_1(x,t) + f(x,t))dx\Big)$$
$$\times lw(x,t) - \big(lw_2(l,t) - \mu_3(t)\big)\int_0^l c(x,t)w(x,t)dx - \Big(\mu_4'(t) - a(t)t^{\beta}(l\mu_2(t)$$
$$- w_1(l,t) + w_1(0,t)) - \int_0^l x(c(x,t)w_1(x,t) + f(x,t))dx\Big)\big(w(l,t) - w(0,t)\big)$$
$$- \Big(a(t)t^{\beta}(w(l,t) - w(0,t)) - \int_0^l xc(x,t)w(x,t)dx\Big)\big(w_2(l,t) - w_2(0,t)\big)\bigg),\ t \in [0,T_0], \tag{49}$$

$$p_2(t) = \triangle^{-1}t^{-\eta}\bigg(\Big(\mu_4'(t) - a(t)t^{\beta}(l\mu_2(t) - w_1(l,t) + w_1(0,t))$$
$$- \int_0^l x(c(x,t)w_1(x,t) + f(x,t))dx\Big)lw(l,t) + \Big(a(t)t^{\beta}(w(l,t) - w(0,t))$$
$$- \int_0^l xc(x,t)w(x,t)dx\Big)\big(lw_2(l,t) - \mu_3(t)\big) - \Big(\mu_3'(t) - a(t)t^{\beta}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$$
$$- \int_0^l (c(x,t)w_1(x,t) + f(x,t))dx\Big)l^2w(l,t) - \big(l^2w_2(l,t) - 2\mu_4(t)\big)$$
$$\times \int_0^l c(x,t)w(x,t)dx\bigg),\ t \in [0,T_0]. \tag{50}$$

Substituting (49)-(50) into (46)-(48), we obtain the system of homogeneous integral

Voltera equations of second kind with respect to unknowns $w = w(x,t), v = v(x,t)$, $\widetilde{u} = \widetilde{u}(x,t)$ for every $x \in [0,l]$:

$$w(x,t) = \int\limits_0^t (K_{11}(t,\tau)v(x,\tau) + K_{12}(t,\tau)w(x,\tau))d\tau,\ t \in [0,T_0], \tag{51}$$

$$v(x,t) = \int\limits_0^t (K_{21}(t,\tau)\widetilde{u}(x,\tau) + K_{22}(t,\tau)v(x,\tau) + K_{23}(t,\tau)w(x,\tau))d\tau,\ t \in [0,T_0], \tag{52}$$

$$\widetilde{u}(x,t) = \int\limits_0^t (K_{31}(t,\tau)\widetilde{u}(x,\tau) + K_{32}(t,\tau)v(x,\tau) + K_{33}(t,\tau)w(x,\tau))d\tau,\ t \in [0,T_0]. \tag{53}$$

Taking into account (13), (45), we can state that the kernels of this system has integrable singularities. It means that the system has only trivial solution

$$w(x,t) \equiv 0,\ v(x,t) \equiv 0,\ \widetilde{u}(x,t) \equiv 0,\ (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}. \tag{54}$$

Substituting (54) into (49), (50), we find

$$p_1(t) \equiv 0,\ p_2(t) \equiv 0,\ t \in [0,T_0]. \tag{55}$$

It completes the proof of the Theorem.

4 Conclusions

In the paper it is investigated the inverse problem of determination of two time-dependent functions in a first order polynomial with respect to space variable. It is a minor coefficient in a parabolic equation with strong power degeneration.

1. It is established conditions of existence and uniqueness of the local solution to the named problem.

2. It is proved that for the case of strong degeneration for parabolic equation with Neumann boundary conditions the unknown function $w = w(x,t)$ and its first derivative with respect to space variable are continuous in $\overline{Q}_{T_0}$. The second derivative of this function has the singularity $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ at $t \to 0$ unlike both cases of weak degeneration when all these functions are continuous in $\overline{Q}_{T_0}$ and strong degeneration of parabolic equation with Dirichlet boundary conditions when the first derivative of unknown function behaves as $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ when $t \to 0$.

3. It is established that the unknown functions $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$ behave at $t \to 0$ as t^δ with $\delta = \min\{\gamma, \beta\}$ in contrast to the case of strong degeneration for parabolic equation with Dirichlet boundary conditions when $\delta = \min\{\gamma, \frac{\beta+1}{2}\}$ with $\gamma > \frac{\beta-1}{2}$.

4. The system of equations (29)-(33) which is obtained in the paper can served the base for application some numerical methods for construction the approximate solutions to the named problem.

5. Results of this paper can be used in research of inverse problems of identification the younger coefficients in parabolic equation which depend on both space and time variables. Besides, they are the first step in investigation parabolic equations with general strong degeneration or multidimensional degenerate parabolic equations.

5 An example

It can be shown by direct calculation that a triplet of function $b_1(t) = b_2(t) = (\beta+1)t^\beta, w(x,t) = (x+1)e^{t^{\beta+1}}$ is the solution to the inverse problem

$$w_t = t^\beta w_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))w_x,\ (x,t) \in (0,1)\times(0,T),$$

$$w(x,0) = x+1,\ x \in [0,1],$$

$$w_x(0,t) = w_x(1,t) = e^{t^{\beta+1}},\ t \in [0,T],$$

$$\int\limits_0^1 w(x,t)dx = \frac{3}{2}e^{t^{\beta+1}},\ t \in [0,T],$$

$$\int\limits_0^1 xw(x,t)dx = \frac{5}{6}e^{t^{\beta+1}},\ t \in [0,T].$$

The input data of this problem satisfy the requirements of the Theorem given in the paper.

References

[1] Azari H., Li C., Nie Y. and Shang S. *Determination of an unknown coefficient in a parabolic inverse problem.* Dynamics of Continuos, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Math. Analysis 2004, **11**, 665-674. doi: 124328203.

[2] Brodyak O., Huzyk N. *Coefficient inverse problems for parabolic equation with general weak degeneartion.* Bukovinian Math.Journal 2021, **9** (1), 91-106. doi: 10.31861/bmj2021.01.08. (in Ukrainian)

[3] Cannarsa Piermarco, Doubova Anna and Yamamoto Masahiro *Inverse problem of reconstruction of degenerate diffusion coefficient in a parabolic equation.* Inverse problems 2021, **37** (12), 1-39. doi: arXiv:2106.06832.

[4] Cannon J.R. and Peres-Esteva S. *Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation.* Inverse Problems 1994, **10** (3), 521-531. doi: 10.1088/0266-5611/10/3/002.

[5] Cannon J.R. and Rundell W. *Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic differential equation.* J. Math. Anal. Appl. 1991, **160**, 572-582. doi: https://core.ac.uk/reader/82169960.

[6] Deng Zui-Cha, Yang Liu. *An inverse problem of identifying the coefficient of first order in a degenerate parabolic equation.* J. of Computational and Applied Math 2011, **235**, 4407-4417. doi: arXiv:1309.7421.

[7] Hazanee A. and Lesnic D. *Determination of a time-dependent coefficient in the bioheat eqaution.* International Journal of Mechanical Sciences 2014, **88**, 259–266. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.05.017.

[8] Huntul M.J. and Lesnic D. *Determination of Time-Dependent Coefficients for a Weakly Degenerate Heat Equation.* Computer Modeling in Engineering and Sciences 2020, **123** (2), 475-494. https://doi.org/10.32604/cmes.2020.08791.

[9] Hussein M.S. and Lesnic D. *Identification of the time-dependent conductivity of an inhomogeneous diffusive material.* Applied Mathematics and Computation 2015, **269**, 35–58. doi: 10.1016/j.amc.2015.07.039.

[10] Huzyk N. *Inverse problem of determining the coefficients in a degenerate parabolic equation.* Electronic Journal of Differential Equations 2014, **172**, 1-11. doi: 10.7153/dea-2021-13-14.

[11] Huzyk N. *Inverse free boundary problems for a generally degenerate parabolic equation.* Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 2015, **23**, 103-119. doi: 10.1515/jiip-2011-0016.

[12] Huzyk N. *Determination of the lower coefficient in a parabolic equation with strong degeneration.* Ukrainian Mathematical Journal 2016, **68** (7), 1049-1061. doi:10.1007/s11253-016-1276-4 (Translation from Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal 2006, **68** (7), 922-932, https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/1886. (in Ukrainian))

[13] Huzyk N. *Coefficient inverse problem for the degenerate parabolic equation.* Differential Equations and Applications 2021, **13** (3), 243-255. doi: 10.7153/dea-2021-13-14.

[14] Huzyk N.M., Pukach P.Y., Vovk M.I. *Coefficient inverse problem for the strongly degenerate parabolic equation.* Carpathian Math. Publ. 2023, **15** (1), 52-65. doi:10.15330/cmp.15.1.52-65.

[15] Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. VNTL Publishers, Lviv, 2003.

[16] Ivanchov M.I., Saldina N.V. *Inverse problem for a parabolic equation with strong power degeneration.* Ukr Math J 2006, **58** (11), 1685–1703. doi: 10.1007/s11253-006-0162-x (Translation from Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal 2006, **58** (11), 1487–1500. (in Ukrainian))

[17] Jones B.F. *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness.* J. Math. Mech. 1962, **11** (5), 907-918. doi: http://www.jstor.org/stable/24900744.

[18] Lesnic D., Yousefi S.A., and Ivanchov M.*Determination of a timedependent diffusivity from non-local conditions.* Journal of Applied Mathematics and Computing 2013, **41** (1-2), 301–320. doi: 10.1007/s12190-012-0606-4.

[19] Lowe Bruce D. and Rundell William *The determination of a coefficient in a parabolic equation from input sources.* Journal of Applied Mathematics 1994, **52** (1), 31-50. doi: 10.1093/imamat/52.1.31.

[20] Nguyen Duc Phuong, Dumitru Baleanu, Tran Thanh Phong, Le Dinh Long. *Recovering the source term for parabolic equation with nonlocal integral condition.* Mathematical Methods in Applied Sciences 2021, **44** (11), 9026-9041. doi: 10.1002/mma.7331.

[21] Pabyrivska N. and Pabyrivskyy V. *On the determination of an unknown source in the parabolic equation.* Math modeling and computing 2017, **4** (2), 171-176. doi: 10.23939/mmc2017.02.171

[22] Ranran Li and Zhiyuan Li. *Identifying unknown source in degenerate parabolic equation from final observation.* Inverse Problems in Science and Engineering 2021, **29** (7), 1012-1031. doi: 10.1080/17415977.2020.1817005.

[23] Saldina N. *Inverse problem for parabolic equation with weak degeneration.* Mathematical Methods And Physicoмechanical Fields 2006, **49** (3), 7-17. (in Ukrainian)

[24] Trong D.D. and Ang D.D.*Coefficient identification for a parabolic equation.* Inverse Problems 1994, **10** (3), 733-752. doi: 10.1088/0266-5611/10/3/015.

Received 21.08.2024

Гузик Н.М., Бродяк О.Я. *Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням* // Буковинський матем. журнал — 2024. — Т.12, №2. — С. 10–26.

В області з відомими межами досліджується обернена задача для параболічного рівняння з сильним виродженням. Виродження рівняння спричинене степеневою функцією від часу при старшій похідній невідомої функції. Відомо, що молодший коефіцієнт рівняння є поліномом першого степеня за просторовою змінною з двома невідомими коефіцієнтами від часу. Задано крайові умови другого роду та значення теплових моментів у якості умов перевизначення. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку вказаної задачі.

Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 2, 27–36 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №2, 27–36

Mykhaylyuk V.V.[1,2], Myronyk V.I.[1]

UNIFORMLY CONTINUOUS MAPPINGS ON PREMETRIC SPACES

We study the notion of uniformly continuous mapping between quasi-metric spaces and construct an example of the topological homeomorphism between two compact Hausdorff partially metric spaces such that the corresponding mapping between quasi-metric spaces is not uniformly continuous. This example shows, in particular, that Theorem 4.4 from [6] is not true. In addition, we prove an analogue of the classical Heine-Cantor theorem on the uniform continuity of any continuous mapping $f : X \to Y$ between a premetric space X, which satisfies a strengthened condition of the countable compactness, and a uniform space Y. We also give an example of a continuous mapping $f : X \to Y$ between a compact Hausdorff premetric space X and a uniform space Y, which is not uniformly continuous.

Key words and phrases: continuous mapping, uniformly continuous mapping, metric space, partial metric spaces, quasi-metric spaces, premetric space, uniform space.

[1] Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine;
[2] Jan Kochanowski University in Kielce, Poland
e-mail: *vadmyron@gmail.com (Myronyk V.); v.mykhaylyuk@chnu.edu.ua (Mykhaylyuk V.)*

Introduction

According to the classical Heine-Cantor theorem, for any compact metric space (X, d) and any metric space (Y, ϱ) every continuous mapping $f : X \to Y$ is uniformly continuous [3, Theorem 4.3.32]. It is well known that an arbitrary metric d on a set X induces the uniformity $\mathcal{U}_d$ on X, which consists of all sets U for which there exists a number $\varepsilon > 0$ such that

$$\{(x, y) \in X^2 : d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Moreover, for any metric spaces (X, d) and (Y, ϱ) the uniform continuity of a mapping $f : (X, d) \to (Y, \varrho)$ is equivalent to the uniform continuity of the corresponding mapping $f : (X, \mathcal{U}_d) \to (Y, \mathcal{U}_\varrho)$ (see, for example, [3, Exercise 8.1.A]).

On the other hand, for every compact Hausdorff space X there exists exactly one uniformity $\mathcal{U}$ on X which is compatible with the topology of X. This uniformity $\mathcal{U}$ consists of all neighbourhoods U of the diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ in X^2 (see [1, Chapter II, § 4, Theorem 1]). So, the following theorem (see [1, Chapter II, § 4, Theorem 2]) is a generalization of the Heine-Cantor theorem.

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C05, 54D30, 54E15, 54E35.
Information on some grant ...

Theorem 1. *Every continuous mapping from a compact Hausdorff space X to a uniform space $(Y,\mathcal{U})$ is uniformly continuous.*

Notice that the metric version of the concept of uniformly continuous mapping can be naturally adapted to more general classes of spaces: quasi-metric, quasi-pseudometric and premetric. Since the corresponding metric analogues do not possess the symmetry property, the study of the uniform continuity of mappings between such spaces cannot be reduced to the consideration of uniform spaces. Therefore, analogs of Theorem 1 for mappings between spaces from such classes require separate study and are of independent interest.

The paper [6, Theorem 4.4] contains the following result (see Section 1 for corresponding definitions and denotations).

Theorem 2. *Let $f : (X, p_1) \to (Y, p_2)$ be a continuous mapping from a compact partial metric space (X, p_1) to a partial metric space (Y, p_2). Then f is uniformly continuous as mapping between the quasi-metric spaces (X, q_{p_1}) and (Y, q_{p_2}).*

In this article, we study the notion of uniformly continuous mapping between quasi-metric spaces and construct an example of the topological homeomorphism between two compact Hausdorff partially metric spaces such that the corresponding mapping between quasi-metric spaces is not uniformly continuous. This example shows, in particular, that Theorem 2 is not true. In addition, we prove an analogue of Theorem 1 on the uniform continuity of any continuous mapping $f : X \to Y$ between a premetric space X, which satisfies a strengthened condition of the countable compactness, and a uniform space Y. We also give an example of a continuous mapping $f : X \to Y$ between a compact Hausdorff premetric space X and a uniform space Y, which is not uniformly continuous.

1 Basic notions and denotations

A function $q : X^2 \to [0, +\infty)$ is called *a quasi-metric* on X (see [7]) if

(q_1) $q(x, x) = 0$;

(q_2) $q(x, z) \le q(x, y) + q(y, z)$;

(q_3) $x = y \Leftrightarrow q(x, y) = q(y, x) = 0$

for all $x, y, z \in X$.

Every quasi-metric q on X induces a *conjugate* quasi-metric $q^{-1} : X^2 \to \mathbb{R}$ defined by $q^{-1}(x, y) = q(y, x)$ for every $x, y \in X$. Moreover, the function $d_q = q + q^{-1}$ is a metric on X.

Let (X, q) be a quasi-metric space. For every $x \in X$ the balls

$$B_q(x, \varepsilon) = \{y \in X : q(x, y) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

form a base of the *quasi-metric topology* τ_q at the point x.

A function $p : X^2 \to [0, +\infty)$ is called *a partial metric* on X (see [7]) if

(p_1) $x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$;

(p_2) $p(x,x) \le p(x,y)$;

(p_3) $p(x,y) = p(y,x)$;

(p_4) $p(x,z) \le p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$

for all $x, y, z \in X$.

For any partial metric $p : X^2 \to [0, +\infty)$ the function $q_p : X^2 \to \mathbb{R}$,

$$q_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x),$$

is a quasi-metric on X and the topology of the partial metric space (X,p) is the topology of the quasi-metric space (X, q_p) (see [7, Theorem 4.1]). Moreover, the function $d_p : X^2 \to \mathbb{R}$,

$$d_p(x,y) = d_{q_p}(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

is a metric on X.

For any partial metric space (X,p) we have that p is a metric on X if and only if $p(x,x) = 0$ for every $x \in X$. Moreover, $q_p = p$ and $d_p = 2p$ if p is a metric.

Let X be a nonempty set and $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. A system $\mathcal{U} \subseteq 2^{X^2}$ is called a *uniformity* on X if it satisfies the following conditions:

(U_1) $\Delta \subseteq U$ for every $U \in \mathcal{U}$;

(U_2) if $U \in \mathcal{U}$ and $U \subseteq V \subseteq X^2$ then $V \in \mathcal{U}$;

(U_3) $U \cap V \in \mathcal{U}$ for every $U, V \in \mathcal{U}$;

(U_4) for every $U \in \mathcal{U}$ there exists $V \in \mathcal{U}$ such that

$$V \circ V = \{(x,z) : (\exists y \in X)\, ((x,y), (y,z) \in V)\} \subseteq U;$$

(U_5) $U^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in U\} \in \mathcal{U}$ for every $U \in \mathcal{U}$.

The pair $(X, \mathcal{U})$ is called a *uniform* space and an element $U \in \mathcal{U}$ is called an *entourage*.

Let $(X, \mathcal{U})$ be a uniform space. For every $x \in X$ the sets

$$U[x] = \{y \in X : (x,y) \in U\}, \quad U \in \mathcal{U}$$

form the system of all neighbourhoods of x in some topology $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. This topology is called the *topology induced by* $\mathcal{U}$ (see [1, Chapter II, § 1, Proposition 1 and Definition 3]). In particular, for a metric space (X,d) and corresponding uniformity $\mathcal{U}_d$ on X the topology $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_d}$ coincides with the topology generated by d.

Let X be a topological space, $\mathcal{T}$ be the topology of X and $\mathcal{U}$ be a uniformity on the set X. We say that $\mathcal{U}$ is *compatible* with $\mathcal{T}$ if $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \mathcal{T}$.

Let X be a topological space. A point $x \in X$ is called a *cluster point* of a sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ of points $x_n \in X$ if for every neighborhood U of x the set $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ is infinite.

A topological space X is called *countably compact* if every countable open cover of X has a finite subcover, or equivalently, every sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ of points $x_n \in X$ has a cluster point $x \in X$.

2 Uniformly continuous mappings between quasi-metric spaces

Let (X, q) and (Y, r) be quasi-metric spaces. Following [6, Definition 4.1] we say that a mapping $f : X \to Y$ is *uniformly continuous* if for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for every $x_1, x_2 \in X$ the inequality $q(x_1, x_2) < \delta$ implies $r(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Clearly, every uniformly continuous mapping between quasi-metric spaces is continuous.

Proposition 1. *Let (X, q) and (Y, r) be quasi-metric spaces and $f : X \to Y$. Then the following conditions are equivalent.*

(i) $f : (X, q) \to (Y, r)$ *is uniformly continuous.*

(ii) $f : (X, q^{-1}) \to (Y, r^{-1})$ *is uniformly continuous.*

Proof. It follows immediately from the equalities

$$q(x_1, x_2) = q^{-1}(x_2, x_1) \quad \text{and} \quad r(f(x_1), f(x_2)) = r^{-1}(f(x_1), f(x_2))$$

for all $x_1, x_2 \in X$. □

Proposition 2. *Let (X, q) and (Y, r) be quasi-metric spaces and $f : (X, q) \to (Y, r)$ be a uniformly continuous mapping. Then $f : (X, d_q) \to (Y, d_r)$ is uniformly continuous.*

Proof. Fix any $\varepsilon > 0$ and choose $\delta > 0$ such that for every $x_1, x_2 \in X$ the inequality $q(x_1, x_2) < \delta$ implies $r(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Then for every $x_1, x_2 \in X$ with $d_q(x_1, x_2) < \delta$ we have that

$$\max\{q(x_1, x_2), q(x_2, x_1)\} \le d_q(x_1, x_2) < \delta$$

and therefore,

$$d_r(f(x_1), f(x_2)) = r(f(x_1), f(x_2) + r(f(x_2), f(x_1) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

The following example shows that the converse implication is not true.

Proposition 3. *There exist quasi-metrics q and r on the set $X = \mathbb{R}$ such that the identity mapping $f : (X, q) \to (X, r)$, $f(x) = x$, is everywhere discontinuous and $d_q = d_r$, in particular, $f : (X, d_q) \to (X, d_r)$ is uniformly continuous.*

Proof. Consider the function $q : X^2 \to \mathbb{R}$ defined by

$$q(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ if } y < x, \\ y - x, \text{ if } y \ge x. \end{cases}$$

According to [5, Example 2], q is a quasi-metric on X and q generates the topology of Sorgenfrey line on X, that is, for every $x \in X$ the family $([x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0)$ forms a base of neighbourhoods of x in (X, q). Notice that

$$d_q(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ if } x = y, \\ 1 + |y - x|, \text{ if } x \ne y. \end{cases}$$

Now let $r = \frac{1}{2}d_q$. Since $d_q(x, y) = d_q(y, x)$,

$$d_r(x, y) = r(x, y) + r(y, x) = d_q(x, y)$$

for every $x, y \in X$. Moreover, for any $x, y \in X$ with $d_p(x, y) < 1$ we have that $x = y$ and, in particular, $d_r(x, y) = 0 < \varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$. □

It follows from the following example that Theorem 2 is not true.

Theorem 3. *There exist a compact metric space (X, d), a compact partial metric space (Y, p) and a homeomorphism $f : X \to Y$ such that $f : (X, d) \to (Y, q_p)$ is not uniformly continuous.*

Proof. Let $x_0 = 0$, $x_n = \frac{1}{n}$ for every $n \in \mathbb{N}$, $X = \{x_n : n \geq 0\}$ and $d(x, y) = |x - y|$.

Now $Y = \{y_n : n \geq 0\}$ where all elements y_n are distinct and

$$p(x, y) = p(y, x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x = y = y_0, \\ 0, \text{ if } x = y = y_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1 + \frac{1}{n}, \text{ if } x = y_0, y = y_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1, \text{ if } x = y_n, y = y_m, n, m \in \mathbb{N}, n \neq m. \end{cases}$$

Notice that p is a partial metric on Y. Conditions $(p_1) - (p_3)$ are obvious. It remains to verify (p_4) for distinct points $x, y, z \in X$. If $y \neq y_0$, then

$$p(x, z) + p(y, y) = p(x, z) \leq 2 \leq p(x, y) + p(y, z).$$

If $y = y_0$, then $p(x, z) = p(y, y) = 1$ and

$$p(x, z) + p(y, y) = 2 \leq p(x, y) + p(y, z).$$

Thus, (Y, p) is a partial metric space.

Notice that

$$q_p(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ if } x = y, \\ \frac{1}{n}, \text{ if } x = y_0, y = y_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1 + \frac{1}{n}, \text{ if } y = y_0, x = y_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1, \text{ if } x = y_n, y = y_m, n, m \in \mathbb{N}, n \neq m. \end{cases}$$

Clearly, all points $y \neq y_0$ are isolated in (Y, p) and $y_n \to y_0$. Therefore, the mapping $f : X \to Y$, $f(x_n) = y_n$, is a homeomorphism. Moreover, for any distinct $n, m \in \mathbb{N}$ we have that $d(x_n, x_m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$ and $q_p(y_n, y_m) = 1$. So, $f : (X, d) \to (Y, q_p)$ is not uniformly continuous. □

Remark 1. *In the proof of Theorem 2 the authors use the following inequality*

$$\sup\{q(y, z) : y, z \in B_q(x, \varepsilon)\} \leq 2\varepsilon,$$

which may not hold for quasi-metric space (X, q).

3 Uniformly continuous mappings on premetric spaces

In this section we study uniformly continuity of mappings from a premetric space to a uniform space.

A nonnegative function $p : X^2 \to [0, +\infty)$ is called *a premetric* on X (see [2]) if $p(x, x) = 0$ for every $x \in X$.

The following statement has an obvious proof.

Proposition 4. *Let (X, p) be a premetric space. Then the system $\mathcal{T}_p$ of all sets $G \subseteq X$ such that for every $x \in G$ there exists $\varepsilon > 0$ such that*

$$\{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\} \subseteq G$$

forms an topology on X.

The topology $\mathcal{T}_p$ from Proposition 4 is called a *topology of premetric space* (X, p).

Let X be a topological space, $\mathcal{T}$ be the topology of X and p be a premetric on the set X. We say that p is *compatible* with $\mathcal{T}$ if $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}$.

Clearly, any quasi-metric $q : X \to \mathbb{R}$ is a premetric on X and the topologies τ_q of the quasi-metric space (X, q) and $\mathcal{T}_q$ of the premetric space (X, q) coincides.

Notice that, in general, a ball

$$B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$$

might not be open in a premetric space (X, p). Moreover, $B_p(x, \varepsilon)$ might not be a neighbourhood of x (see [2, Section 2]).

Nevertheless, the following characterization of continuous mapping on premetric spaces follows immediately from the characterization of continuity in the terms of open sets.

Proposition 5. *Let (X, p) be a premetric space, Y be a topological space and $f : X \to Y$. Then the following conditions are equivalent.*

- (i) *f is continuous.*
- (ii) *For every $x \in X$ and every neighborhood V of $f(x)$ in Y there exists $\delta > 0$ such that $f(u) \in V$ for every $u \in X$ with $p(x, u) < \delta$.*

Proof. $(i) \Rightarrow (ii)$. Let V be an open neighbourhood of $f(x)$ in Y. Then the set $U = f^{-1}(V)$ is open in X by (i). Therefore, there exists $\delta > 0$ such that $B_p(x, \delta) \subseteq U$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Let G be an open set in Y. Then the set $f^{-1}(G)$ is open in X by (ii). □

We consider the following generalization of the uniform continuity of mappings between metric spaces.

Definition 1. *Let (X, p) be a premetric space, $(Y, \mathcal{U})$ be a uniform space and $f : X \to Y$. We say that f is uniformly continuous if for every $U \in \mathcal{U}$ there exists $\delta > 0$ such that $(f(x), f(y)) \in U$ for very $x, y \in X$ with $p(x, y) < \delta$.*

The following property follows immediately from Proposition 5.

Proposition 6. *Let (X, p) be a premetric space, $(Y, \mathcal{U})$ be a uniform space and $f : X \to Y$ be uniformly continuous. Then f is continuous.*

We say that a premetric space (X, p) satisfies $(*)$ if for any sequences $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ of points $x_n \in X$ and $y_n \in X$ with $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, y_n) = 0$ the sequence $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ of points $z_n = (x_n, y_n) \in X^2$ has a cluster point $z \in \Delta = \{(x, x) : x \in X\}$.

The following statement shows that $(*)$ is a strengthened condition of the countable compactness.

Proposition 7. *If a premetric space (X, p) has $(*)$, then (X, p) is countably compact.*

Proof. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of points $x_n \in X$. Since $p(x_n, x_n) = 0$ for every $n \in \mathbb{N}$, the sequence of points $(x_n, x_n) \in X^2$ has a cluster point $(x, x) \in X^2$. Then the point $x \in X$ is a cluster point of the sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. So, X is a countably compact space. □

For quasi-metric spaces (X, q) the condition $(*)$ is equivalent to the countable compactness.

Proposition 8. *A quasi-metric space (X, q) has $(*)$ if and only if (X, q) is countably compact.*

Proof. According to Proposition 7, it is enough to verify that every countably compact quasi-metric space (X, q) has $(*)$.

Now let (X, q) be countably compact, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ be sequences of points $x_n \in X$ and $y_n \in X$ with $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, y_n) = 0$. Since (X, q) is countably compact, the sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ has a cluster point $x \in X$. Show that the point (x, x) is a cluster point of the sequence of points (x_n, y_n) in X^2. Fix any neighbourhood W of (x, x) in X^2.There exists $\varepsilon > 0$ such that $B_q(x, \varepsilon) \times B_q(x, \varepsilon) \subseteq W$. Since $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, y_n) = 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $q(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ for every $n \geq n_0$. Since x is a cluster point of $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, the set

$$N = \{n \geq n_0 : x_n \in B_q(x, \tfrac{\varepsilon}{2})\}$$

is infinite. Then for every $n \in N$ we have that

$$q(x, y_n) \leq q(x, x_n) + q(x_n, y_n) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

and therefore,

$$(x_n, y_n) \in B_q(x, \tfrac{\varepsilon}{2}) \times B_q(x, \varepsilon) \subseteq W.$$

□

The following example shows that the premetric analog of Proposition 8 is not true.

Proposition 9. *There exists a compact Hausdorff premetric space (X, p) which has no $(*)$.*

Proof. Let $X = [0,1] \times \{0,1\}$ be the linearly ordered compact with the lexicographical order, i.e. $(y,i) < (z,j)$ if $y < z$ or $y = z$ and $i < j$ (the space X is known as the *two arrow space*, [3, Exercise 3.10.C]). Notice that for any $x = (y,0) \in X$ the sets

$$B(x,\varepsilon) = \{x\} \cup \{(z,i) \in X : 0 < y - z < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

form a base of the neighbourhoods of x in X and for any $x = (y,1) \in X$ the sets

$$B(x,\varepsilon) = \{x\} \cup \{(z,i) \in X : 0 < z - y < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

form a base of the neighbourhoods of x in X.

For any $x_1 = (y,i), x_2 = (z,j) \in X$ we set

$$p(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, \text{ if } & i = 1 \text{ and } z < y; \\ 1, \text{ if } & i = 0 \text{ and } z > y; \\ 1, \text{ if } & y = z \text{ and } i \neq j; \\ |y - z|, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Clearly, the function $p : X^2 \to \mathbb{R}$ is a premetric on X.

Fix any $x_0 = (i,y) \in X$ and $\varepsilon \in (0,1)$. If $i = 0$ then

$$\{x \in X : p(x_0,x) < \varepsilon\} = \{x_0\} \cup \{(j,z) \in X : z < y \text{ and } |z - y| < \varepsilon\} = B(x_0,\varepsilon).$$

Analogously, $\{x \in X : p(x_0,x) < \varepsilon\} = B(x_0,\varepsilon)$ if $i = 1$. Therefore, p is compatible with the topology of X.

It remains to show that the premetric space (X,p) has no $(*)$. Consider the sequences $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ of points

$$u_n = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2^n}, 1) \qquad \text{and} \qquad v_n = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^n}, 0).$$

Notice that $p(u_n,v_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ for every $n \in \mathbb{N}$ and $(u_n,v_n) \to (x_1,x_2)$ where $x_1 = (\frac{1}{2},0)$ and $x_2 = (\frac{1}{2},1)$. Thus the compact space (X,p) has no $(*)$. □

Now we give a variant of the theorem on the uniform continuity of a continuous mapping on a compact premetric space.

Theorem 4. *Let (X,p) be a premetric space with $(*)$, $(Y,\mathcal{U})$ be an uniform space and $f : X \to Y$ be a continuous mapping. Then f is uniformly continuous.*

Proof. Assume that there exists $U \in \mathcal{U}$ such that for every $n \in \mathbb{N}$ there exists $x_n, y_n \in X$ with $p(x_n,y_n) \leq \frac{1}{n}$ and $(f(x),f(y)) \notin U$. Since (X,p) has $(*)$, the sequence of points (x_n,y_n) has a cluster point (x_0,x_0). Let $V \in \mathcal{U}$ such that $V = V^{-1}$ and $V \circ V \subseteq U$. Using the continuity of f at x_0 choose a neighborhood W of x_0 in X such that $(f(x_0),f(x)) \in V$ for every $x \in W$. Since (x_0,x_0) is a cluster point of the sequence $(x_n,y_n)_{n=1}^{\infty}$, the set $\{n \in \mathbb{N} : (x_n,y_n) \in W^2\}$ is nonempty. Therefore, there exists $n \in \mathbb{N}$ with $x_n, y_n \in W$. Then $(f(x_n),f(x_0)) \in V^{-1} = V$, $(f(x_0),f(y_n)) \in V$ and

$$(f(x_n),f(y_n)) \in V \circ V \subseteq U,$$

– a contradiction. □

Corollary 1. *Let (X, q) be a countable compact quasi-metric space and $(Y, \mathcal{U})$ be a uniform space. Then every continuous mapping $f : (X, q) \to (Y, \mathcal{U})$ is uniformly continuous.*

Remark 2. *Notice that countable compactness of a quasi-metric space is not equivalent to the compactness (see [4]). But for partial metric spaces compactness and countable compactness are equivalent [8, Theorem 5.7].*

The following example shows that for premetric space the analog of Corollary 1 is not true.

Theorem 5. *There exist a compact Hausdorff X, a compatible premetric p on X and a compatible uniformity $\mathcal{U}$ on X such that the identity homeomorphism $f : (X, p) \to (X, \mathcal{U})$ is not uniformly continuous.*

Proof. Consider the premetric space (X, p) from Proposition 9. According to [1, Chapter II, § 4, Theorem 1], there exists a uniformity $\mathcal{U}$ on X which is compatible with $\mathcal{T}_p$. Verify that the identity mapping $f : (X, p) \to (X, \mathcal{U})$ is not uniformly continuous.

Let $x_1 = (\frac{1}{2}, 0)$, $x_2 = (\frac{1}{2}, 1)$. Since the uniformity $\mathcal{U}$ consists of all neighbourhoods U of the diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ in X^2, there exists a closed in X^2 entourage $U \in \mathcal{U}$ such that $(x_1, x_2) \notin U$. There exist open neighbourhoods V_1 and V_2 of x_1 and x_2 in X such that $(V_1 \times V_2) \cap U = \varnothing$. According to the proof of Proposition 9, there exist sequences $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ of $u_n, v_n \in X$ such that $u_n \to x_1$, $v_n \to x_2$ and $p(u_n, v_n) \to 0$. Then for every $\delta > 0$ there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $u_N \in V_1$, $v_N \in V_2$ and $p(u_N, v_N) < \delta$. Therefore, $u_N, v_N) \notin U$ and f is not uniformly continuous. □

REFERENCES

[1] Bourbaki N. *General Topology.* Part 1. Addison-Wesley Publishing Company. London. 1966.

[2] Bruno J., Szeptycki P. (2016). *Quantales, generalised premetric and free locales.* Applied Categorical Structures, (2016) 1045-1058. DOI: 10.1007/s10485-016-9465-8

[3] R. Engelking, *General Topology.* Revised and completed edition. Heldermann Verlag. Berlin. 1989.

[4] Künzi H.P.A. *A note on sequentially compact quasi-pseudo-metric spaces*, Mh. Math., 95 (1983), 219-220. doi.org/10.1007/BF01351999

[5] Künzi H.P.A. , Vajner V., *Weighted Quasi-metrics*, in Papers on General Topology and Applications, Annals New York Acad. Sci., **728** (1994), 64-77. doi.org/10.1111/j.1749-6632.1994.tb44134.x

[6] Lu H., Zhang H., He W. *Some remarks on partial metric spaces*, Bull. Malays. Math. Soc. **43 (3)** (2020) 3065-3081. doi.org/10.1007/s40840-019-00854-1

[7] Matthews S.G. *Partial Metric Topology*, Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann. New York Acad. Sci. **728** (1994), 183-197. doi.org/10.1111/j.1749-6632.1994.tb44144.x

[8] Mykhaylyuk V., Myronyk V. *Compactness and complementness in partial metric spaces*, Top. Appl. 270 (2020), 106925. doi.org/10.1016/j.topol.2019.106925

Received 06.11.2024

Михайлюк В.В., Мироник В.I. *Рівномірно неперервні відображення на преметричних просторах* // Буковинський матем. журнал — 2024. — Т.12, №2. — С. 27–36.

Вивчаються рівномірно неперервні відображення між квазіметрчними просторами і побудовано топологічний гомеоморфізм між двома компактними гаусдорфовими частково метричними просторами такий, що відображенн між відповідними квазіметричними просторами не є рівномірно неперервним. Цей приклад, зокрема, показує, що теорема 4.4 з [6] є хибною. Крім того, доводиться аналог теореми Гейне-Кантора про рівномірну неперервність довільного неперервного відображення $f : X \to Y$, визначеного на преметричному просторі X, який задовольняє деяку підсилену умову зліченної компактності, і набуває значень у рівномірному просторі Y. Також подано приклад неперервного відображення $f : X \to Y$, визначеного на компактному гаусдорфовому преметричному просторі X, і зі значеннями у рівномірному просторі Y, яке не є рівномірно неперервним.

Novosad Z.H.

CHAOTIC DYNAMIC SYSTEMS OF SHIFT OPERATORS AND APPLICATIONS IN ECONOMICS

In this paper we consider chaotic properties of weighted shifts on (non-separable) Hilbert space. We ivestigate some conditions under which the operators are Li-Yorke chaos. We examine various structural of the operators that contribute to their chaotic behavior, providing theoretical results that highlight the interplay between the weights and the underlying space. Also, we construct chaotic dynamic system for modeling the security price.

Key words and phrases: dynamic system, chaotic operator, hypercyclic operator, Hilbert space.

Lviv University of Trade and Economics, 10, Tuhan-Baranovsky Str., Lviv 79005, Ukraine
e-mail: *zoriana.maths@gmail.com, zoryana@lute.lviv.ua*

Introduction

Chaos theory has emerged as a vital area in the study of dynamical systems, focusing on the unpredictable and complex behavior exhibited by certain deterministic systems. A chaotic dynamical system is one that demonstrates sensitive dependence on initial conditions, topological transitivity, and a dense set of periodic points. These properties together produce dynamics that are seemingly random and yet governed by deterministic rules.

In operator theory, the concept of chaos is closely tied to chaotic operators, which extend the notion of chaos from classical systems to functional spaces. An operator is termed chaotic if it is hypercyclic and has a dense set of periodic points. Hypercyclicity, a foundational concept in this area, refers to the existence of a vector in a function space whose orbit under repeated applications of the operator is dense in that space. This property, first studied in depth by Birkhoff and MacLane, illustrates how linear operators can exhibit behavior analogous to classical chaotic systems. The two of examples of classical chaotic systems

The Lorenz System.

УДК 517
2010 *Mathematics Subject Classification:* 47A16, 46E10, 46E50.
The research was carried out as part of the scientific project “Modeling and Application of Chaotic Dynamical Systems for Optimizing Algorithms of Artificial Intelligence, Machine Learning, and Web Technologies” (state registration number 0124U004447).

Described by Edward Lorenz in 1963, this system of three coupled nonlinear differential equations is a classic example of chaos. The Lorenz attractor exhibits a distinctive butterfly-shaped fractal structure.

The Logistic Map.

An iterative map $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ that demonstrates chaos for certain values of the parameter r. Despite its simplicity, it shows complex dynamics, including bifurcations and chaotic behavior.

As is often the case in linear dynamics, the concepts mentioned above have been extensively studied by researchers within the framework of a particular class of operators known as weighted shifts. This is largely due to their flexibility in constructing examples in linear dynamics, operator theory, and its various applications. Over recent decades, numerous dynamical properties of such operators have been thoroughly examined and described [1], [2], [3] [4], [10], occasionally even before these properties were fully understood in broader contexts. Specifically, in [5] and [6], the authors advanced this field by offering detailed analyses of chaotic properties.

We consider chaotic properties such as

$$Topologacal \quad transitivity \quad \Rightarrow Hypercyclicity \quad \Rightarrow \quad Li - Yorke \quad chaos$$

$$Frequent \quad hypercyclicity \quad \Rightarrow Hypercyclicity \quad \Leftarrow \quad Chaos$$

In Section 1 we consider chaotic properties of weighted shifts on (non-separable) Hilbert space and ivestigate some conditions under which the operators are Li-Yorke chaos. In Section 2 we construct a dynamic system based on these operators to model the price behavior of financial securities. This application demonstrates the practical relevance of chaotic dynamics in economics, where security prices often exhibit irregular, unpredictable fluctuations. This study bridges the gap between abstract operator theory and applied financial modeling, opening new avenues for both mathematical and economic research.

1 Backward Shifts for Banach Spaces

Let X be a metric space and T be a continuous mapping $T\colon X \to X$. T is called *topologically transitive* if, for any pair U, V, $(U \neq \varnothing,\ V \neq \varnothing)$ of open subsets of X, there exists some integer $k \geq 0$ such that $T^k(U) \cap V \neq \varnothing$.

A sequence of closed subspaces (X_n) of a Banach space X is called a *Schauder decomposition* of X if every element $x \in X$ can be expressed uniquely as a sum of elements from these subspaces

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \quad x_k \in X_k, \tag{1}$$

and the series (1) converges in X. A Schauder decomposition (X_n) is *unconditional* if (1) converges unconditionally.

In [2], it was pointed out that a criterion for topological transitivity, analogous to that for hypercyclic operators [1, 7], can be formulated.

Theorem 1. (see for the proof e.g. [8]). *Let T be a bounded linear operator on a Banach space X (not necessarily separable). Suppose that there exists a strictly increasing sequence (n_k), $\lim_{k\mapsto\infty} n_k = \infty$ of positive integers for which there are the following:*

(i) A dense subset $Z_0 \subset X$ such that $T^{n_k}(x) \to 0$ for every $x \in Z_0$ as $k \to \infty$.

(ii) A dense subset $Y_0 \subset X$ and a sequence of mappings (not necessary linear and not necessary continuous) $S_k\colon Y_0 \to X$ such that $S_k(y) \to 0$ for every $y \in Y_0$ and $T^{n_k} \circ S_k(y) \to y$ for every $y \in Y_0$ as $k \to \infty$.

Then, T is topologically transitive.

We consider an infinite-dimensional (may be non-separable) Banach space X which admits an unconditional Schauder decomposition to Banach spaces X_k, $k = 0, 1, \ldots$. Let $(J_k)_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of injective maps $J_k\colon X_{k+1} \to X_k$ with dense ranges and $\|J_k\| = 1$. We have the following shifts of spaces X_k under maps J_k:

$$0 \longleftarrow X_0 \xleftarrow{J_1} X_1 \xleftarrow{J_2} \cdots \xleftarrow{J_n} X_n \cdots .$$

Let us construct a weighted backward shift operator *(associated with a Schauder decomposition (X_n) of X)* by

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k J_k(x_k), \tag{2}$$

$$T\colon (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (\omega_1 J_1(x_1), \omega_2 J_2(x_2), \ldots, \omega_n J_n(x_n), \ldots),$$

where (ω_k) is a sequence of positive numbers with $\sup_k \omega_k < \infty$.

Theorem 2. *([9]) Let X be a Banach space that can be represented as an unconditional Schauder decomposition into Banach spaces X_k, $k = 0, 1, \ldots$ and T a weighted backward shift, defined as in (2). Assume that the following conditions are satisfied*

(i) The weight constants ω_k are such that

$$\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \omega_k = \infty.$$

(ii) There is a dense subspace $E_0 \subset (J_1) \subset X_0$ such that for every $x \in E_0$ the set

$$\{J_n^{-1} \circ \cdots \circ J_1^{-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}\}$$

is bounded in X.

Then the operator T defined by (2) is topologically transitive.

2 Chaotic Properties of Weighted Shifts

Let $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of Hilbert spaces. In this paper, we assume that each H_n is nontrivial, meaning $H_n \neq \{0\}$ and may not necessarily be separable.

Assume that for all n and m, the spaces H_n and H_m are isomorphic. We define $\ell_2(H_n) = \ell_2((H_n)_{n=0}^{\infty})$ as the Hilbert space consisting of elements $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_k \in H_k$ endowed with norm $\|x\| = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Let (ω_n) be a sequence of positive numbers, referred to as weights. Additionally, let us fix a sequence of isomorphisms $J_m : H_m \to H_{m-1}$, $\|J_m\| = 1$, $m \in \mathbb{N}$. An operator

$$T\colon \ell_2(H_n) \to \ell_2(H_n)$$

will be called a *backward weighted shift (with respect to the family (J_m)) with weight sequence (ω_n)* if it is of the form

$$T(x) = (\omega_1 J_1(x_1), \omega_2 J_2(x_2), \ldots, \omega_m J_m(x_m), \ldots).$$

We will need the next corollary which is proved in [12].

Corollary 1. *([12]) Let $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of Hilbert spaces and $T\colon \ell_2(H_n) \to \ell_2(H_n)$ be a backward weighed shift with respect to (J_m) and with positive weight sequence (ω_n). Let us suppose that*

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}_+} \prod_{n=0}^{m} \|J_n^{-1}\| < \infty. \tag{3}$$

Then the following are equivalent:

(i) T is topologically transitive.

(ii) There exists a non-trivial T-invariant (separable) closed subspace $\mathcal{Y} \subset \ell_2(H_n)$ on which the restriction of T to $\mathcal{Y}$, $T : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, is hypercyclic.

(iii) The restriction $T : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ to any T-invariant (separable) closed subspace $\mathcal{Y} \subset \ell_2(H_n)$ which contains non-zero vectors of the form $(0, \ldots, 0, x_n, 0, \ldots)$, $x_n \in H_n$ for every $n \in \mathbb{Z}_+$, is hypercyclic.

(iv) $\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \omega_k = \infty$.

Let $T : X \mapsto X$ be a bounded linear operator acting on topological space X

Definition 1. *The operator T is*

- *Li-Yorke chaotic if there is uncountable set $U \subset X$, called scrambled set, such that for each $x, y \in U$, $x \neq y$, $\lim_{n\mapsto\infty} \|T^n(x) - T^n(y)\| = 0$*

- *Hypercyclic if there is a vector $x \in X$ for which the orbit under T, $\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ is dense in X. Every such vector x is called a hypercyclic vector of T.*

- *Frequently hypercyclic if T admits a frequently hypercyclic vector $x \in X$ such that for each non-empty open subset U of X, $\lim\limits_{N \mapsto \infty} \frac{\{1 \leq n \leq N : T^n(x) \in U\}}{N} > 0$.*

1. Li-Yorke Chaos.

An operator T is Li-Yorke chaotic if there exists an uncountable set $S \subset \ell_2(H_n)$ such that for any $x, y \in S$, $x \neq y$, (points are not asymptotic), $\limsup\limits_{n\to\infty} \|T^n(x-y)\| > 0$ (points are proximal). For the weighted shift T, we note that the weights $(\omega)_n$ control the growth/decay of iterates. If $\prod\limits_{i=1}^{n} \omega_k \to 0$ or diverges, then the distance between certain points can oscillate, fulfilling the conditions for Li-Yorke chaos. The isometries J_m preserve structure, allowing T to meet the chaotic requirements under appropriate ω_n. So, we can state the next theorem.

Theorem 3. *Let $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of Hilbert spaces. An operator*

$$T\colon \ell_2(H_n) \to \ell_2(H_n)$$

$$T(x) = (\omega_1 J_1(x_1), \omega_2 J_2(x_2), \dots, \omega_m J_m(x_m), \dots)$$

is Li-Yorke chaotic

Proof. For any $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(H_n)$ the action of T is given by

$$T(x) = (\omega_1 J_1(x_1), \omega_2 J_2(x_2), \dots, \omega_m J_m(x_m), \dots),$$

then the n-th iterate $T^n(x)$ is

$$T^n(x) = (\omega_n J_n(x_n), \omega_{n+1} J_{n+1}(x_{n+1}), \dots)).$$

with norm

$$\|T^n(x)\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \omega_k^2 \|J_k(x_k)\|^2 \right)^{1/2}.$$

For vectors $x, y \in \ell_2(H_n)$, consider $z = x - y$. The norm satisfies

$$\|T^n(z)\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \omega_k^2 \|J_k(z_k)\|^2 \right)^{1/2}.$$

The weights (ω_k) and the dynamics of J_k (3) can ensure such behavior that $\|T^n(z)\|$ alternates between being arbitrarily small and bounded away from zero, depending on the decay or growth of the weights (ω_k)

We can constract uncountable set $S \subset \ell_2(H_n)$ with the properties by leveraging the oscillatory behavior of T iterates. Choose S as a subset of $\ell_2(H_n)$ with coordinates that exhibit chaotic pairing behavior under T.

This typically involves specific properties of (ω_n) and the shifts J_n to create a scrambled set where the required, using the colorally 1 we will have that if $\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \omega_k = \infty$ the norm of $T^n(x)$ for certain vectors x grows arbitrarily large for some iterations n This ensures that the separation condition for a scrambled set $\limsup_{n\mapsto\infty} \|T^n(x-y)\| > 0$ is satisfied.

So,

$$\limsup_{n\mapsto\infty} \|T^n(x-y)\| > 0,$$

and

$$\liminf_{n\mapsto\infty} \|T^n(x-y)\| = 0$$

conditions are satisfied. Thus, T is Li–Yorke chaotic. □

2. Chaos.

An operator T is chaotic if there exists a dense set of periodic points.

It is hypercyclic (there exists $x \in \ell_2(H_n)$ such that $\{T^n(x) : n \geq 0\}$ is dense in $\ell_2(H_n)$. For proving of we need find x whose iterates under T approximate any $x \in \ell_2(H_n)$ and show density of periodic points by solving $T^n(x) = x$ for suitable $x \in X$.

For $x \in \ell_2(H_n)$ we define periodic sequences x_k such that only finitely many coordinates x_k are nonzero. These sequences are in $\ell_2(H_n)$ and are clearly periodic under T. The set of such periodic points is dense in $\ell_2(H_n)$ because any vector in $\ell_2(H_n)$ can be approximated arbitrarily closely by a vector with finitely many nonzero coordinates.

So, the operator T satisfies both conditions for Li–Yorke chaos that an uncountable scrambled set S exists due to the oscillatory nature of norms under T^n. The set of periodic points is dense in $\ell_2(H_n)$.

3. Frequent Hypercyclicity.

An operator T is frequently hypercyclic if there exists $x \in \ell_2(H_n)$ such that for every open set $U \in \ell_2(H_n)$, the set $\{n \geq 0 : T^n(x) \in U\}$ has positive lower density.

For proving this statement we need to note that weighted shifts, the growth of (ω_n) ensures the existence of frequently hypercyclic vectors x.

Construct x with nonzero components in H_n that balance the effect of weights.

3 Dynamic systems for modeling of security price.

In this section, we will consider two examples of dynamic systems in the securities market. Let us begin with the definition of a discrete dynamic system.

Definition 2. *A (discrete) dynamical system is a pair (X, T) consisting of a metric space X and a continuous map $T : X \to X$.*

Sometimes we will simply call $T : X \to X$ a dynamical system.

Example 1. *(***Effectiveness of securities***).*

We assume to be given by the value C_n (security price) at discrete times $n = 1, 2, \ldots$. In a simple model the security price at time $n+1$ will only depend on the security price at time n. The effectiveness of securities is then described by a law

$$C_{n+1} = T(C_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

where T is suitable map. It follows that

$$C_n = (T \circ \cdots \circ T)(C_1) \quad n = 1, 2, \ldots$$

with n applicants of the map. Thus the behavior of the security price is completely determined by the initial price C_1 and the map T.

Now we consider the proportional change of security price.

Let C_n be purchase price of the securities, C_{n+1} be sale price of the securities and period of time $n = 1, 2, \ldots$.

We suppose that the value C_n of a price changes proportionally to its actual value, that is follows the law

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{C_n} = \gamma, \quad n \geq 1$$

where γ is effectiveness of security, $\gamma > -1$.

One may write this equivalently as

$$C_{n+1} = (1+\gamma)C_n$$

so that the corresponding dynamical system is given by

$$T : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+, \quad Tx = (1+\gamma)x.$$

The orbit of $x \in \mathbb{R}_+$ can be calculated explicitly as

$$\mathrm{Orb}(x, T) = \{(1+\gamma)^n x : n \geq 0\}.$$

Thus, the orbit tends to 0, x and ∞ for $-1 < \gamma < 0$, $\gamma = 0$ and $\gamma > 0$, respectively.

The orbit of $x \in \mathbb{R}_+$ under the map $T(x) = (1+\gamma)x$ is not generally dense in $\mathbb{R}_+$ Instead, the orbit describes specific behavior depending on the value of γ such that

- For $\gamma > 0$ the orbit grows unbounded as $n \mapsto \infty$, and it is not dense in $\mathbb{R}_+$ because it tends towards infinity.

- For $\gamma = 0$ the orbit remains constant $\mathrm{Orb}(x, T) = \{x\}$, which is a single point, so it is not dense.

- For $-1 < \gamma < 0$ the orbit tends to 0, $n \mapsto \infty$ and again, it is not dense because it converges to a single point.

Example 2. (**The change in behavior of security prices and dividends**).

To consider the behavior of an individual security in the context of a dynamic system, we represent it as a chaotic dynamic system in which the security price and dividends are time-dependent variables.

Let us assume that at time $t-1$ the purchase price of a security is C_{t-1} and at time t the security is sold at the price C_t. During the period t, accrued dividends D_t. Then the rate of return R_t for the period t can be represented as

$$R_t = \frac{C_t + D_t - C_{t-1}}{C_{t-1}}.$$

This value reflects the return over one time period t, which takes into account both the increase in the value of the security itself and the dividends received.

Let the prices C_t and dividends D_t change over time and their behavior depends on previous values. Then we can describe them using a dynamic system, where the state at each step is determined by the state vector $X_t = (C_t, D_t)$, and the evolution of this system over a time period is modeled by the operator T, which goes from state X_{t-1} to X_t

$$X_t = T(X_{t-1}),$$

where the operator T determines the change in price and dividends as a result of the influence of market factors.

To model the chaotic behavior of the system, we can choose the operator T so that the orbit of the system is dense in the space of possible states. This can be done if the operator T is nonlinear and depends on random factors that model market changes, such as economical-financial indicators. For example

$$T(X_{t-1}) = \begin{cases} f(C_{t-1}, D_{t-1}, \varepsilon_t), \\ g(C_{t-1}, D_{t-1}, \varepsilon_t) \end{cases}$$

where f and g are nonlinear functions that take into account the interdependence of prices and dividends, and ε_t is a random variable that adds stochastic market influence.

The addition of random parameters introduces stochasticity into the previously deterministic model. These random parameters represent external market influences such as economic shocks or financial news. This example demonstrates how these systems can be extended to incorporate real-world randomness without losing the fundamental chaotic properties. Specifically, the random operator remains consistent with chaotic principles, as the small perturbations caused by preserve the sensitivity to initial conditions and dense orbit structure, thereby modeling real-world financial data more effectively.

Thus, this system acquires the properties of a chaotic dynamical system with a dense orbit, since the values of C_t and D_t change depending on previous states and random influences. This approach allows modeling complex market dynamics and assessing the average efficiency and risk of a security under uncertainty.

Let the price of a security at time t be denoted by C_t. We can assume that the price dynamics are a function of previous prices, accrued dividends, trading volume, and other market factors. Then we will consider the sequence of values (C_t) as elements of the vector space ℓ_2.

Let T be a shift operator that acts on a sequence of prices (C_t) as follows

$$(TC)_t = \alpha C_{t-1} + \beta C_t + \gamma C_{t+1} + \varepsilon_t,$$

where

- α, β and γ are parameters that adjust the linear combination of prices at different points in time,

- ε_t is a small random variable that takes into account the randomness of market factors.

The inclusion of the random element ε_t adds chaos to the system, and even a linear operator with a shift can generate complex dynamics.

For an operator to be hypercyclic in the space ℓ_2 the coefficients must contribute to the operator's orbits being dense in that space. One known way to ensure hypercyclicity of a shift operator in the space ℓ_2 is to choose coefficients that provide sufficient stretching and shifting of the sequences of values C_t in space, as well as sensitivity to initial conditions.

Consider the operator T for sequences in ℓ_2 of the following form

$$(TC)_t = \alpha C_{t-1} + \beta C + \gamma C_{t+1} + \varepsilon_t,$$

where α, β, γ is the coefficients that we choose ε_t is a small random component.

For hypercyclicity in the space ℓ_2 in particular for the shift operator, the following conditions are important

1. *Zero coefficient at C_t.* It is important that the operator has no constant component (i.e., no fixed value at C_t, as this can limit the dynamics of the operator. Therefore, we set $\beta = 0$. This allows the operator to act as a “shift" by one position in the sequence.

2. *Nonzero values of α and γ.* The coefficients α and γ must be nonzero and have values that do not converge to zero or a stable value. For example, if we choose $\alpha = 1$ and $\gamma = 1$ the operator will expand the orbit of the sequence in both directions.

3. *A small random component ε_t.* Adding random fluctuations ε_t depending on time t provides sensitivity to initial conditions. This guarantees that the sequence can reach different states in the space ℓ_2 are bounded stochastic variables introduced to account for minor unpredictable fluctuations in the financial markets. Practically, this means, that by adding small random fluctuations, the system can explore a wider range of possible states within the space. This enhances the model's ability to capture rare or extreme market events (exogenous shock) that deterministic models might overlook.

Thus, for a hypercyclic operator in the space ℓ_2 we can choose the following values of the coefficients

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1.$$

Then the operator will have the next form

$$(TC)_t = C_{t-1} + C_{t+1} + \varepsilon_t$$

This configuration with a random perturbation ε_t will allow the operator to generate a dense orbit in the space ℓ_2, and will also provide sensitivity to initial conditions, which is a necessary property for hypercyclicity.

To evaluate the norm of operator T in the space ℓ_2 by the formula

$$\|T\| = \sup_{C \in \ell_2, \|C\|=1} \|TC\|,$$

where $\|C\| = \sqrt{\sum_{t=1}^{\infty} |C_t|^2}$ *is the norm of the sequence* C.

For the operator T defined by the following form

$$(TC)_t = C_{t-1} + C_{t+1} + \varepsilon_t$$

the norm con be calculated by considering the contributions from the terms C_{t-1} and C_{t+1}. The random component ε_t is typically small and bounded, so its contribution to the norm is negligible for estimation purposes.

Then

$$\|TC\|^2 = \sum_{t=1}^{\infty} |(TC)_t|^2 = \sum_{t=1}^{\infty} |C_{t-1} + C_{t+1} + \varepsilon_t|^2.$$

Expanding the square and ignoring higher-order terms of ε_t, we get

$$\|TC\|^2 \approx \sum_{t=1}^{\infty} (|C_{t-1}|^2 + |C_{t+1}|^2).$$

We use the shift properties of sequences in Hilbert space ℓ_2

1) $\sum_{t=1}^{\infty} |C_{t-1}|^2 = \sum_{t=1}^{\infty} |C_t|^2 = \|C\|^2 = 1;$

2) $\sum_{t=1}^{\infty} |C_{t+1}|^2 = \|C\|^2 = 1.$

Thus

$$\|TC\|^2 \approx 2\|C\|^2 = 2,$$
$$\|T\| = \sqrt{2}.$$

We consider the classical Black-Scholes model [11]. This model is used to evaluate the value of financial derivatives, such as options

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2),$$

where C is price of the option, S_0 is current price of the underlying asset, K is strike price of the option, t is time to maturity, r is risk-free interest rate, $N(d_1)$ and $N(d_2)$ are cumulative distribution functions of the standard normal distribution. The parameters d_1 and d_2 are defined as $d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{X})+(r+\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$, where σ represents the volatility of the underlying asset.

The Black-Scholes model is primarily used to price financial options and provides a theoretical framework for understanding the relationship between key financial variables. This model is based on the assumption that the price of the underlying asset. follows a geometric Brownian motion. Utilizes stochastic differential equations to describe price dynamics. Designed to price derivatives, specifically European options, rather than modeling the dynamics of the asset price itself. Focuses on determining the fair value of options based on risk-free rates, volatility, and time to maturity. The dynamics model with a shift operator views the price sequence C_t as elements of the vector space ℓ_2, emphasizing time series representation. Assumes that prices are influenced by a linear combination of past, current, and future prices, with parameters α, β, γ determining the weights. Includes a random component ε_t to account for market randomness. Primarily focuses on modeling the asset price's behavior directly rather than pricing derivatives. The Black-Scholes model is the best suited for pricing derivatives like European options or conducting risk analysis in derivative markets. Model with a shift operator is flexible in incorporating market-specific factors. Ideal for studying the behavior of asset prices, identifying trends and forecasting future price movements.

Conclusions In this paper, we have explored the chaotic properties of weighted shift operators on (non-separable) Hilbert spaces. Specifically, we investigated conditions under which these operators exhibit Li-Yorke chaos. Our study examined various structural aspects of the operators that contribute to their chaotic behavior, emphasizing the interplay between the weights and the underlying Hilbert space. Furthermore, we constructed a chaotic dynamical system to model the behavior of security prices. The study bridges the gap between abstract operator theory and applied financial modeling. The chaotic properties of weighted shifts effectively model irregular price behaviors in financial securities. Introducing stochastic parameters aligns the model with real-world data without compromising its chaotic structure. This work provides new insights into the relationship between operator theory and dynamic systems, offering a foundation for future research in both mathematical and applied contexts.

References

[1] F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge University Press, New York, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511581113

[2] T. Bermúdez, N.J. Kalton, *The range of operators on von Neumann algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 2002, **130**, 1447-1455. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-01-06292-X.

[3] J. Bes, A. Peris, *Hereditarily hypercyclic operators*, J. Func. Anal. 1999, **167**, 94-112.

[4] G.D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris 1929, **189**, 473-475.

[5] K.C. Chan and J.H. Shapiro, *The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions,* Indiana Univ. Math. J. 1991, **40** , 1421–1449.

[6] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems* Addison-Wesley, Reedwood City, 1989.

[7] K. G. Grosse-Erdmann, A. Peris Manguillot, *Linear chaos*, Springer-Verlag, London, 2011. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2170-1-5

[8] Z. Novosad, Topological transitivity of translation operators in a non-separable Hilbert space. *Carpathian Math. Publ.* **2023**, *15*, 278–285. https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.278-285.

[9] Z. Novosad, A. Zagorodnyuk, The Backward Shift and Two Infinite-Dimension Phenomena in Banach Spaces. Symmetry. 2023, **15** P. 1855. https://doi.org/10.3390/sym15101855

[10] N.H. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. 1995, **347**, 993-1004. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1995-1249890-6

[11] T. Worral, *Financial Instruments*, School of Economic and Management Studies. Keele University. Fin-40008. Session 2007/08. https://timworrall.com/fin-40008/index.htm

[12] A. Zagorodnyuk, Z. Novosad, *Topological Transitivity of Shift Similar Operators on Non-separable Hilbert Spaces* Journal of Function Spaces. 2021, Article ID 306342, 7 pages. https://doi.org/10.1155/2021/9306342.

Received 30.11.2024

Новосад З.Г. *Хаотичні динамічні системи операторів зсуву та їх застосування в економіці* // Буковинський матем. журнал — 2024. — Т.12, №2. — С. 37–48.

У статті досліджуються хаотичні властивості операторів зваженого зсуву, які діють на (несепарабельному) гільбертовому просторі, що є одним із важливих об'єктів у теорії динамічних систем. Особливу увагу приділено аналізу умов, за яких такі оператори можуть бути топологічно транзитивними, гіперциклічними і часто гіперциклічними. Крім того, досліджено феномен хаосу Лі-Йорка, який передбачає існування незліченних множин точок із хаотичною поведінкою орбіт. Це дозволяє глибше зрозуміти природу динамічних систем, що характеризуються нерегулярністю і непередбачуваністю.

У статті висвітлюються, як різні властивості операторів зваженого зсуву впливають на їхню динамічну поведінку, розглядаючи взаємодію між вагами оператора та структурою базового простору. Для ілюстрації запропоновано два приклади динамічних систем, які можна використовувати для моделювання поведінки цін на фінансових ринках. Перший приклад базується на простій лінійній моделі, де зміна ціни пропорційна поточному значенню. Побудована орбіта в цьому прикладі в загальному випадку не є щільною. У другому прикладі моделюється більш складна система, яка враховує залежність зміни ціни від попередніх значень, дивідендів та випадкових факторів. У цьому контексті оператор зваженого зсуву відіграє ключову роль, дозволяючи створити гіперциклічну динамічну систему, здатну адекватно відображати хаотичну поведінку цін.

Застосування теорії хаосу до фінансових ринків є особливо актуальним, оскільки це дозволяє враховувати складну динаміку, нелінійність та вплив випадкових факторів на цінові зміни. Використання таких моделей може допомогти інвесторам краще розуміти природу ризиків, знаходити можливості для інвестицій та приймати більш обґрунтовані рішення в умовах невизначеності. Отримані результати мають також важливе значення для широкого спектра наукових досліджень у галузях математики, фізики та економіки, де вивчення хаотичних властивостей систем є центральним для розуміння їхньої поведінки.

Михайло Гордей[1], Сергій Горошкевич[1], Олена Карлова[1,2]

Асимптотична щільність нещасливих чисел

Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ розглянемо суму квадратів усіх його цифр і позначимо її через $S^2(n)$. Покладемо $T_0(n) = n$, $T_1(n) = S^2(n)$, $\ldots$, $T_{k+1}(n) = T_1(T_k(n))$ для $k \geq 1$. Число n називається щасливим, якщо існує $k \geq 1$, таке, що $T_k(n) = 1$. Інакше, число n називається нещасливим. Відомо, що для кожного нещасливого числа n існує таке $k \geq 1$, що $T_k(n) \in C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$. Якщо $c \in C$, то ми кажемо, що нещасливе число n є c-нещасливим у випадку, коли $T_k(n) = c$ і $T_{k-1}(n) \notin C$ для деякого $k \geq 1$.

В даній роботі досліджується щільність c-нещасливих чисел. Одержано оцінки на верхню та нижню асимптотичні щільності c-нещасливих чисел та доведено, що натуральної щільності нещасливих чисел не існує.

Ключові слова і фрази: щасливі числа, апроксимативна щільність, цифрові функції.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
[2] Університет Яна Кохановського в Кельцах, Польща
e-mail: *o.karlova@chnu.edu.ua*

1 Мотивація і постановка задачі

Через $\mathbb{N}_+$ ми позначаємо множину всіх невід'ємних цілих чисел. Під *інтервалом* $I = [a, b]$ ми розуміємо множину $\{n \in \mathbb{N}_+ : a \leq n \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Символом $|I|$ позначається потужність, тобто, кількість цілих чисел в інтервалі I.

Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ через $\omega(n)$ ми будемо позначати кількість цифр цього числа. Нехай

$$n = \sum_{k=0}^{\omega(n)-1} 10^k b_k,$$

де $b_k \in \{0, \ldots, 9\}$, і

$$S^2(n) = \sum_{k=0}^{\omega(n)-1} b_k^2.$$

Далі, покладемо

$$T_0(n) = n,\ T_1(n) = S^2(n),\ \ldots,\ T_{k+1}(n) = T_1(T_k(n)) \text{ для } k \geq 1.$$

Означення 1. Число n називається *щасливим*, якщо існує $k \geq 1$, таке, що $T_k(n) = 1$. Інакше, число n називається *нещасливим*.

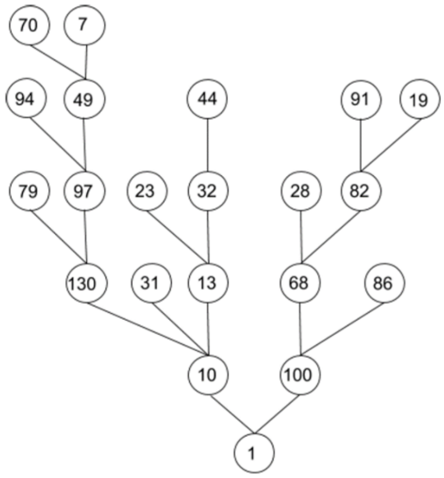


Рис. 1: Щасливе дерево

Добре відомо [4], що для кожного нещасливого натурального числа n існує $k \in \mathbb{N}$, таке, що $T_l(n) \in \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$ для всіх $l \geq k$. Позначимо

$$C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}.$$

Означення 2. *Якщо $c \in C$, то число $n \in \mathbb{N} \setminus C$ назвемо c-нещасливим, якщо існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $T_k(n) = c$ і $T_{k-1}(n) \notin C$.*

Для інтервалу I через $d(I)$ позначимо *щільність щасливих чисел* в цьому інтервалі, а для $c \in C$ через $d_c(I)$ позначимо *щільність c-нещасливих чисел* в цьому інтервалі, тобто

$$d(I) = \frac{|\{n \in I : n \text{ є щасливим}\}|}{|I|}, \quad d_c(I) = \frac{|\{n \in I : n \text{ є } c\text{-нещасливим}\}|}{|I|}.$$

Якщо $I = [1, 100]$, то (див. рис. 1 і 2)

$$d(I) = 0.2, d_4(I) = 0.05, d_{16}(I) = 0.05, d_{37}(I) = 0.19, \tag{1}$$

$$d_{58}(I) = 0.03, d_{89}(I) = 0.56, d_{145}(I) = 0.02, d_{42}(I) = 0, d_{20}(I) = 0.02. \tag{2}$$

Властивостям щасливих чисел присвячена низка робіт математиків (див. оглядову статтю [3] і вказану там літературу). Один із напрямків вивчення властивостей щасливих чисел пов'язаний з їх асимптотичною щільністю.

Означення 3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{P}$ – деяка властивість натуральних чисел. Позначимо $P(n) = \{k \in [1, n] : k$ має властивість $\mathcal{P}\}$. Тоді*

- *верхньою асимптотичною щільністю чисел з властивістю $\mathcal{P}$ називається число*

$$\overline{d}_{\mathcal{P}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|P(n)|}{n},$$

УДК 511.174
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 11B05; Secondary 11A63.

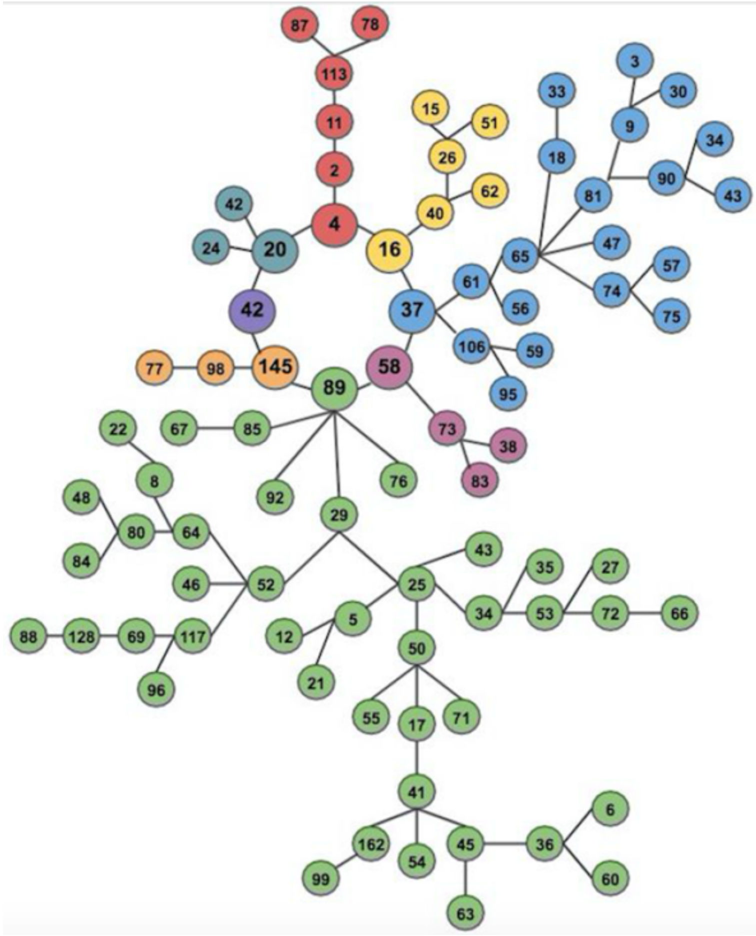


Рис. 2: Нещасливі числа

- *нижньою асимптотичною щільністю чисел з властивістю* $\mathcal{P}$ *називається число*

$$\underline{d}_{\mathcal{P}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|P(n)|}{n},$$

- *натуральною щільністю чисел з властивістю* $\mathcal{P}$ *називається число*

$$d_{\mathcal{P}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|P(n)|}{n},$$

якщо така границя існує.

Якщо $\mathcal{P}$ – це властивість числа бути щасливим, то для верхньої і нижньої асимптотичних щільностей та для натуральної щільності ми вживатимемо позначення $\overline{d}$, $\underline{d}$ та d, відповідно. Якщо $c \in C$ і $\mathcal{P}$ – це властивість числа бути c-нещасливим, то для верхньої і нижньої асимптотичних щільностей та для натуральної щільності чисел з цією властивістю ми вживатимемо позначення $\overline{d}_c$, $\underline{d}_c$ і d_c, відповідно.

В наступній послідовності наводяться значення $d(I)$, де $I = [1, 10^n]$ при $n \in [2, 17]$:

$$0.2, 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.14, 0.14, 0.13, 0.12, 0.12.$$

Річард Гай [2] поставив питання, чи існують оцінки зверху і знизу для натуральної щільності щасливих чисел? У 2013 році Гілмер [1] дав відповідь на це питання і показав, що натуральної щільності щасливих чисел не існує.

Теорема 1 (Gilmer). *Верхня та нижня асимптотичні щільності щасливих чисел задовольняють нерівності*

$$\overline{d} > 0.18577 \quad i \quad \underline{d} < 0.1138,$$

отже, натуральної щільності d не існує.

У таблиці нижче наведено знайдені нами щільності $d_c(I)$ усіх c-нещасливих чисел для кожного $c \in C$ в інтервалах $I = [1, 10^n]$ при $n \in [2, 8]$:

	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
d_4	0.05	0.066	0.0657	0.06415	0.0063389	0.0630127	0.0601596
d_{16}	0.05	0.096	0.1097	0.10335	0.102019	0.100479	0.0983845
d_{37}	0.19	0.207	0.2202	0.20607	0.199803	0.193805	0.186994
d_{58}	0.03	0.054	0.0464	0.04545	0.046789	0.0455119	0.0451608
d_{89}	0.56	0.362	0.3628	0.38885	0.395517	0.40063	0.407542
d_{145}	0.02	0.051	0.0324	0.0274	0.02685	0.0288736	0.0317456
d_{42}	0	0.012	0.0132	0.011	0.00705	0.0051898	0.0048608
d_{20}	0.02	0.009	0.0054	0.00996	0.015512	0.0206129	0.0225954

Природно виникає задача знаходження оцінок верхньої та нижньої асимптотичних щільностей c-нещасливих чисел для кожного $c \in C$ та знаходження натуральної щільності d_c в разі існування. Дослідженню цього питання присвячена дана робота.

Стаття побудована наступним чином. У другому розділі наводяться необхідні теоретичні відомості та основні ідеї знаходження оцінок асимтотичних щільностей. Математичний апарат для знаходження оцінок побудований цілком подібно до оригінальних ідей Гілмера [1]. Третій розділ містить результати та обробку комп'ютерних обчислень, отриманих авторами. В останньому, четвертому розділі формулюється основна теорема.

Результати статті доповідалися третім співавтором на XVI Літній школі "АТА XVI: Sub-Riemannian Geometry and Optimal Transport" (29.07–07.08.2024, Колочава, Україна).

2 Теоретичні відомості

Нехай x_n – випадкове n-цифрове число, $x_n \in [0, 10^n - 1]$. Тоді обчислення значення випадкової величини $S^2(x_n)$ рівносильне підкиданню n разів грального кубика з 10-ма гранями вартістю $0, 1, 4, \ldots, 81$ і знаходженню суми чисел, що випали. Оскільки $S^2(x_n)$ є сумою n незалежних однаково розподілених випадкових величин, то $S^2(x_n)$ досягає нормального розподілу при $n \to \infty$. Зауважимо, що для випадкової величини $x \in I$ має місце рівність

$$d_c(I) = \mathbb{P}(S^2(x) \text{ є } c\text{-нещасливим числом}).$$

Нехай μ – математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини $S^2(x_1)$ (тобто, образу випадкової цифри) і σ^2 – її стандартне відхилення. У нашому випадку $\mu = 28.5$ і $\sigma^2 = 721.05$.

Означення 4. *Нехай $A \subseteq \mathbb{N}$. Ми кажемо, що число $n \in \mathbb{N}$ є A-типу, якщо існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $T_k(n) \in A$.*

Зрозуміло, що число щасливе тоді і тільки тоді, коли воно є числом $\{1\}$-типу, а число є нещасливим тоді і тільки тоді, коли воно є числом $\{4\}$-типу.

Основний результат Гілмера стосується оцінки знизу на верхню щільність чисел A-типу для $A = \{1\}$ та $A = \{4\}$. При цьому одним з ключових понять в цій теоремі є поняття n-строгого інтервалу.

Означення 5 ([1]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $n \vdots 4$. Інтервал I називається n-строгим, якщо*

- $I \subseteq [10^{n-1}, 10^n - 1]$,
- $|I| = 10^{\frac{3n}{4}}$.

Наведемо тепер теорему Гілмера [1, Theorem 4.1].

Теорема 2. *Нехай $A \subset \mathbb{N}$ – деяка скінченна множина, I_1 – n_1-строгий інтервал, де $n_1 > 13$ і $\overline{d}_A$ – верхня щільність усіх чисел A-типу. Тоді*

$$\overline{d}_A \geq d_A(I_1) \cdot \exp\left(\frac{2}{1 - 10^{n_1/4}} + \frac{4\sigma}{\sqrt{\mu}(1 - 10^{n_1/8})}\right). \tag{3}$$

Зауважимо, що в наших дослідженнях ми не можемо одразу використати теорему Гілмера для оцінки верхньої щільності, наприклад, 4-нещасливих чисел, оскільки ці числа є A-типу, де множина A нескінченна. Справді, для кожного натурального числа $c \in C$ та числа $m \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_c(m) = \{n \in [1, 10^m - 1] \setminus C : S^2(n) = c\} \quad \text{i} \quad A_c = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_c(m).$$

Очевидним є наступне спостереження.

Твердження 1. *Нехай $c \in C$. Число $n \in \mathbb{N}$ є c-нещасливим тоді і тільки тоді, коли n є A_c-типу.*

Безпосередньою перевіркою ми справдили, що метод Гілмера працює також і для чисел A-типу у випадку нескінченної множини A. А саме, має місце наступний факт.

Теорема 3. *Нехай $c \in C$, I_1 – n_1-строгий інтервал, де $n_1 > 100$. Тоді*

$$\overline{d_c} \geq d_c(I_1) \cdot \exp\left(\frac{2}{1 - 10^{n_1/4}} + \frac{4\sqrt{721.05}}{\sqrt{28.5}(1 - 10^{n_1/8})}\right). \tag{4}$$

Доведення цієї теореми досить громіздке і базується на декількох технічних лемах, пояснення яких повністю копіює доведення Гілмера з тим уточненням, що метод Гілмера наведений для чисел в системі числення з основою b, а наша перевірка стосується десяткової системи. Тому ми опускаємо доведення теореми 3 в цій статті, відсилаючи читача до оригінальної роботи Гілмера [1].

Отже, для оцінки верхньої щільності необхідно з допомогою комп'ютерного пошуку знайти інтервал $\tilde{I}_1 \subseteq [0, 10^{n_1}-1]$, на якому щільність $d_c(\tilde{I}_1)$ достатньо велика, побудувати n_1-строгий інтервал I_1, такий, що $d_c(I_1) \geq d_c(\tilde{I}_1)$ та застосувати Теорему 3. Для оцінки нижньої щільності необхідно знайти інтервал $\tilde{I}_2 \subseteq [0, 10^{n_2} - 1]$, на якому щільність $d_c(\tilde{I}_2)$ достатньо мала, побудувати n_2-строгий інтервал I_2, такий, що $d_{\neq c}(I_2) \geq 1 - d_c(\tilde{I}_2)$ та застосувати Теорему 3 (тут через $d_{\neq c}$ ми позначаємо щільність усіх чисел, які не є c-нещасливими).

2.1 Строгі інтервали

Опишемо нескладний спосіб побудови n-строгих інтервалів з даною щільністю.

Лема 1. *Нехай $c \in C$, $n \in \mathbb{N}$, $n \vdots 4$ і $I = [10^{n-1}, 10^n - 1]$. Тоді існує n-строгий інтервал J, такий, що $d_c(J) \geq d_c(I)$.*

Доведення. Розіб'ємо інтервал I на неперетинні відрізки

$$I_k = \left[10^{n-1} + (k-1) \cdot 10^{\frac{3n}{4}}, 10^{n-1} + k \cdot 10^{\frac{3n}{4}} - 1\right],$$

такі, що $|I_k| = 10^{\frac{3n}{4}}$ для кожного $1 \leq k \leq N$, де $N = 9 \cdot 10^{\frac{n}{4}-1}$, та $I = \bigcup_k I_k$.

Позначимо через m_k кількість c-нещасливих чисел в інтервалі I_k. Зауважимо, що

$$d_c(I_k) = m_k \cdot 10^{-\frac{3n}{4}}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{N} m_k = d_c(I) \cdot |I| = d_c(I) \cdot 9 \cdot 10^{n-1},$$

то існує таке $k \in [1, N]$, що

$$m_k \geq \frac{d_c(I) \cdot 9 \cdot 10^{n-1}}{N}.$$

Тоді

$$m_k \geq \frac{d_c(I) \cdot 9 \cdot 10^{n-1}}{9 \cdot 10^{\frac{n}{4}-1}} = 10^{\frac{3n}{4}} \cdot d_c(I),$$

звідки

$$d_c(I_k) = \frac{m_k}{10^{\frac{3n}{4}}} \geq d_c(I).$$

Залишилось покласти $J = I_k$. □

2.2 Алгоритм знаходження щільностей $d_c(I)$

Позначимо $S = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ і нехай $P_{m,i} = \mathbb{P}(S^2(Y_m) = i)$, де Y_m – випадкове m-цифрове число. Тоді

$$P_{m,i} = \frac{\left|\{(a_1, a_2, \dots, a_m) : a_k \in S \text{ і } \sum\limits_{k=1}^{m} a_i = i\}\right|}{10^m}.$$

Для фіксованого m послідовність $(P_{m,i})_{i=1}^{\infty}$ має генеруючу функцію

$$f_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{m,i} x^i = \left(\frac{1 + x + x^4 + \cdots + x^{81}}{10}\right)^m.$$

Звідси випливають наступні рекурентні співвідношення з початковими умовами $P_{0,0} = 1$, $P_{0,i} = 0$ при $i \in F \setminus \{0\}$, і

$$P_{m,i} = \frac{P_{m-1,i} + P_{m-1,i-1} + P_{m-1,i-4} + \cdots + P_{m-1,i-81}}{10}. \tag{5}$$

Зауважимо, що $S^2(x_m) \subseteq [0, 81m]$. Зокрема, $P_{m,i} = 0$ при $i > 81m$. Використовуючи цей факт разом з (5), ми отримуємо наступний алгоритм для швидкого обчислення щільностей c-нещасливих чисел на інтервалі $[0, 10^m - 1]$.

Алгоритм обчислення $d_c(I)$ для $I = [0, 10^m - 1]$

1. Обчислити значення $P_{m,i}$ для кожного $i \in [0, 81m]$ за допомогою рекурентної формули (5).

2. Використовуючи комп'ютерний перебір, знайти множину $U_c(81m)$ усіх c-нещасливих чисел на проміжку $[0, 81m]$.

3. Обчислити
$$d_4(I) = \sum_{\substack{i \in [0, 81m] \\ i \in U_c(81m)}} P_{m,i}.$$

За допомогою цього алгоритму знаходження щільностей $d_c(I)$ є обчислювально можливим для досить великих m.

3 Експериментальні дані та оцінка щільностей

Для $n \vdots 4$ позначимо

$$\delta(n) = \exp\left(\frac{2}{1 - 10^{n/4}} + \frac{4\sqrt{721.05}}{\sqrt{28.5}(1 - 10^{n/8})}\right). \tag{6}$$

Опишемо алгоритм знаходження оцінок щільностей на прикладі $c = 4$. За допомогою алгоритму з попереднього пункту обчисляємо значення $d_4(I_n)$ для всіх $n \in [1, 10^{10\,000}]$.

Мінімальне значення $d_4^m = 0.0436595$ досягається при $n_{4,\min} = 770$, максимальне значення $d_4^M = 0.0664854$ досягається при $n_{4,\max} = 2845$. Далі,

$$d_4([10^{771}, 10^{772} - 1]) = 0.043682, \quad d_4([10^{2843}, 10^{2844} - 1]) = 0.066484433.$$

З Леми 1 випливає, що існує 2844-строгий інтервал I_2, такий, що

$$d_4(I_2) \geq 0.066484433.$$

Крім того, оскільки

$$d_{\neq 4}([10^{771}, 10^{772} - 1]) = 1 - 0.0436595,$$

то Лема 1 гарантує існування 772-строгого інтервалу I_1, такого, що

$$d_{\neq 4}(I_1) \geq 1 - 0.0436595.$$

Для $\delta(772)$ та $\delta(2844)$ маємо оцінки

$$\delta(772) > 1 - 10^{-95}, \quad \delta(2844) > 1 - 10^{-354}.$$

Звідси за Теоремою 3 отримуємо, що

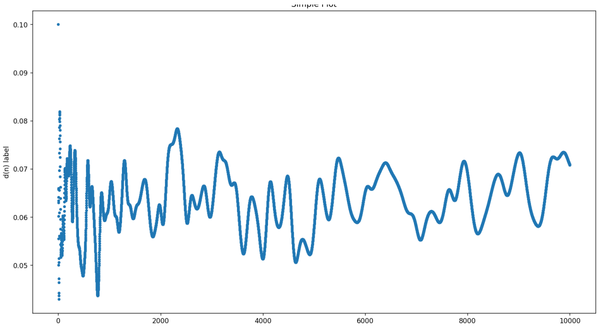
$$\overline{d_4} > 0.0664844329,$$

$\overline{d_{\neq 4}} > 1 - 0.0436594$, звідки випливає, що

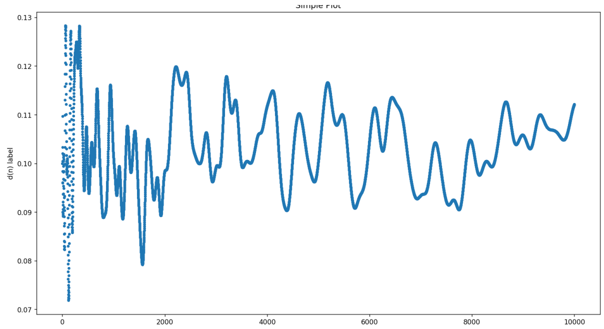
$$\underline{d_4} < 0.0436594.$$

Таким чином, для знаходження оцінок верхньої та нижньої щільності для кожного $c \in C$ нам потрібні максимальне значення d_c^M щільності $d_c(I_n)$ на проміжку $[0, 10^n - 1]$ при $n \in [1, 10^4]$ в точці n_c^M та, відповідно, мінімальне значення d_c^m щільності $d_c(I_n)$ на проміжку $[0, 10^n - 1]$ при $n \in [1, 10^4]$ в точці n_c^m На основі значень n_c^m та n_c^M ми будуємо $n_{1,c}$- та $n_{2,c}$-строгі інтервали з відповідною щільністю та знаходимо оцінки для $\delta_{n_{1,c}}$ та $\delta(n_{2,c})$. Наведемо усі необхідні дані очислень у таблиці нижче та на графіках щільностей $d_c(I)$.

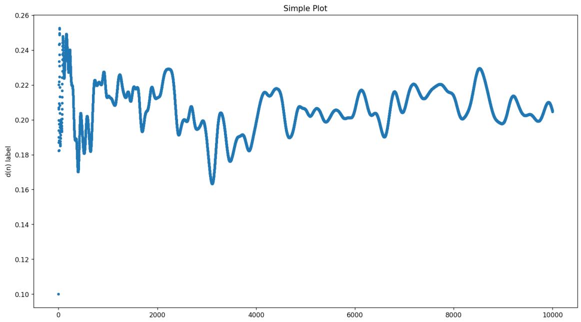
c	n_c^m	n_c^M	d_c^m	d_c^M	$n_{1,c}\vdots 4$	$n_{2,c}\vdots 4$	$\overline{d_c} >$	$\underline{d_c} <$
4	770	2845	0.0436595	0.0664854	772	2844	0.066484	0.043660
16	121	333	0.0718532	0.12826	120	332	0.128228	0.071964
37	3110	160	0.1634	0.249115	3112	160	0.249114	0.163409
58	162	119	0.0331224	0.0661158	160	120	0.0660511	0.033270
89	164	3086	0.326582	0.432535	164	3084	0.432525	0.326571
145	403	10 000	0.0133807	0.0482214	404	10 000	0.048220	0.013383
42	5435	787	0.000630386	0.0189713	5436	788	0.018964	0.000631
20	235	6895	0.000651611	0.0280241	236	6896	0.028021	0.000654



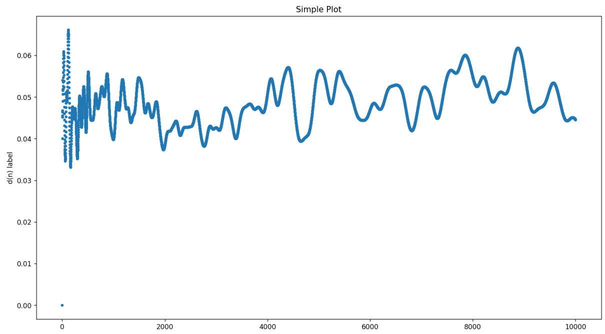
(а) d_4



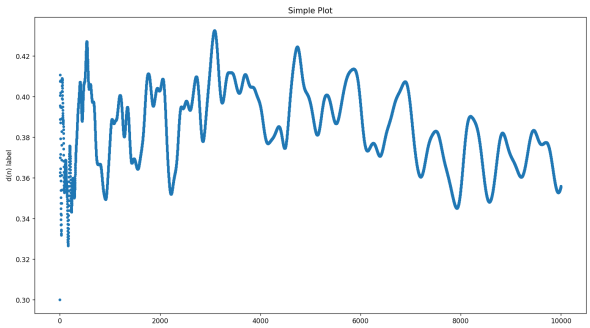
(б) d_{16}



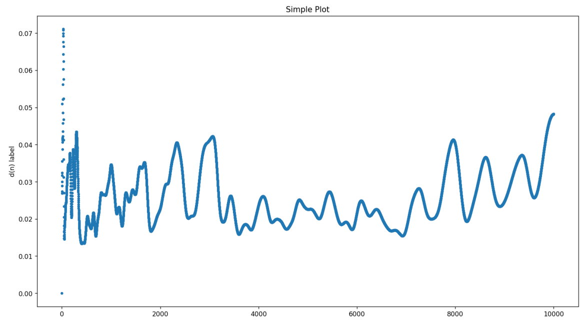
(а) d_{37}



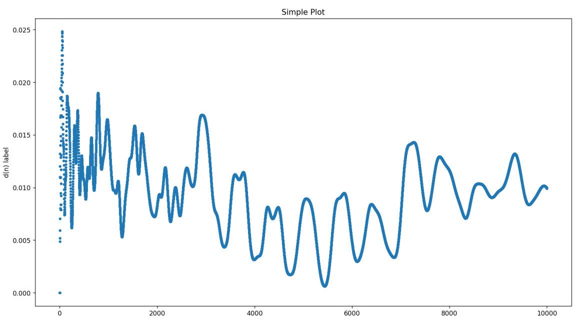
(б) d_{58}



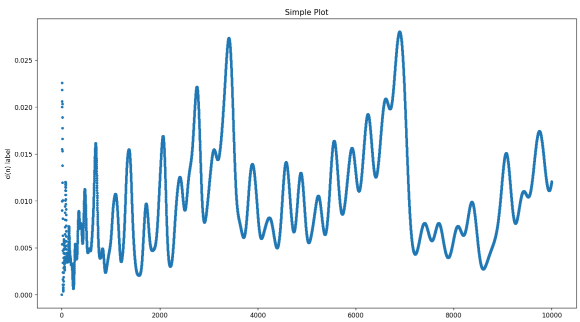
(а) d_{89}



(б) d_{145}



(а) d_{42}



(б) d_{20}

4 Основний результат

Теорема 4. *Нехай* $\overline{d_c}$ *та* $\underline{d_c}$ *– це верхня та нижня щільності c-нещасливих чисел, відповідно,* $c \in C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$. *Тоді*

1. $\underline{d_4} < 0.04366 < 0.0664 < \overline{d_4}$,
2. $\underline{d_{16}} < 0.071964 < 0.128228 < \overline{d_{16}}$,
3. $\underline{d_{37}} < 0.163409 < 0.249114 < \overline{d_{37}}$,
4. $\underline{d_{58}} < 0.03327 < 0.0660511 < \overline{d_{58}}$,
5. $\underline{d_{89}} < 0.326571 < 0.432525 < \overline{d_{89}}$,
6. $\underline{d_{145}} < 0.013383 < 0.048220 < \overline{d_{145}}$,
7. $\underline{d_{42}} < 0.000631 < 0.018964 < \overline{d_{42}}$,
8. $\underline{d_{20}} < 0.000654 < 0.028021 < \overline{d_{20}}$.

Зокрема, не існує d_c *для жодного* $c \in C$.

Список літератури

1. Gilmer J. *On the density of happy numbers*, Integers, **13** (13), 599–713.
2. Guy R.K. *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd edn. Springer, New York (2004), https://doi.org/10.1007/978-0-387-26677-0
3. Grundman H., Hall-Seelig L. *Happy Numbers, Happy Functions, and Their Variations: A Survey*, La Matematica **(1)** (2022), 404–430, https://doi.org/10.1007/s44007-021-00010-x
4. Porges A. *A set of eight numbers*, Amer. Math Mon. **52**, (1945), 379–382.

Bibliography:

1. Gilmer J. *On the density of happy numbers*, Integers, **13** (13), 599–713.
2. Guy R.K. *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd edn. Springer, New York (2004), https://doi. org/10.1007/978-0-387-26677-0
3. Grundman H., Hall-Seelig L. *Happy Numbers, Happy Functions, and Their Variations: A Survey*, La Matematica **(1)** (2022), 404–430, https://doi.org/10.1007/s44007-021-00010-x
4. Porges A. *A set of eight numbers*, Amer. Math Mon. **52**, (1945), 379–382.

Надійшло 12.11.2024

Mykhaylo Hordei, Sergii Horoshkevych, Olena Karlova *Asymptotic density of unhappy numbers*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 49–59.

For a number $n \in \mathbb{N}$ we consider the sum of squares of all digits of n and denote it by $S^2(n)$. Let $T_0(n) = n$, $T_1(n) = S^2(n)$, $\dots$, $T_{k+1}(n) = T_1(T_k(n))$ for $k \geq 1$. A number n is happy, if there exists $k \geq 1$ such that $T_k(n) = 1$. Otherwise, n is unhappy. It is well-known that for every unhappy number n there exists $k \geq 1$ such that $T_k(n) \in C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$. If $c \in C$, then an unhappy number n is called c-unhappy in the case $T_k(n) = c$ and $T_{k-1}(n) \notin C$ for some $k \geq 1$.

By $\mathbb{N}_+$ we denote the set of all non-negative integers. We define *an interval* $I = [a, b]$ as the set $\{n \in \mathbb{N}_+ : a \leq n \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Moreover, the symbol $|I|$ stands for the cardinality (i.e. the number of integers) of I.

Let $n \in \mathbb{N}$ and $c \in C$. We put $P_c(n) = \{k \in [1, n] : k \text{ is c-unhappy}\}$ and define the numbers $\overline{d_c}$, $\underline{d_c}$ and d_c as the following.

- *Upper asymtotic density* of c-unhappy numbers is

$$\overline{d}_c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|P_c(n)|}{n},$$

- *lower asymptotic density* of c-unhappy numbers is

$$\underline{d}_c = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|P_c(n)|}{n},$$

- *natural density* of c-unhappy numbers is

$$d_c = \lim_{n\to\infty} \frac{|P_c(n)|}{n},$$

  if the limit exists.

Gilmer in 2013 answering a question of Richard Guy showed that the natural density of happy numbers does not exist. Moreover, he proved that the following estimations hold

$$\overline{d} > 0.18577 \quad \text{and} \quad \underline{d} < 0.1138,$$

where $\overline{d}$ and $\underline{d}$ denote upper and lower asymptotic density of happy numbers. It is natural to ask if there exists upper (lower, natural) density for c-unhappy numbers for every $c \in C$.

In this paper we study density of c-unhappy numbers. We obtain estimations on upper and lower asymptotic density of c-unhappy numbers and following the Gilmer's arguments prove that the natural density does not exist.

Гутік О.В., Щипель М.Р.

НАПІВГРУПА СКІНЧЕННИХ ЧАСТКОВИХ ПОРЯДКОВИХ ІЗОМОРФІЗМІВ ОБМЕЖЕНОГО РАНГУ НЕСКІНЧЕННОЇ ЛІНІЙНО ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ

Ми вивчаємо алгебричні властивості напівгрупи $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ скінченних часткових порядкових ізоморфізмів рангу $\leq n$ нескінченної лінійно впорядкованої множини $(L,\leqslant)$. Зокрема описано її ідемпотенти, природний частковий порядок та відношення Ґріна на $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$. Доведено, що напівгрупа $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ стійка та містить щільний ряд ідеалів, а також, що всі конґруенції на напівгрупі $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ є конґруенціями Ріса.

Ключові слова і фрази: Інверсна напівгрупа, часткове перетворення, частковий порядковий ізоморфізм, конґруенція, відношення Ґріна, стійка напівгрупа.

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Університецька 1, Львів, 79000, Україна (Гутік О.В.)
Львівський національний університет ім. Івана Франка, Університецька 1, Львів, 79000, Україна (Щипель М.Р.)
e-mail: *oleg.gutik@lnu.edu.ua (Гутік О.В.), maksym.shchypel@lnu.edu.ua (Щипель М.Р.)*

У цій праці ми користуємося термінологією з монографій [3, 4, 10, 12].

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини X у множину Y, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* та *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ і $(A)\alpha$ — образи елемента $x\in\operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A\subseteq\operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні α, відповідно. Також через $\operatorname{rank}\alpha$ будемо позначати ранг часткового відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$, тобто $\operatorname{rank}\alpha = |\operatorname{dom}\alpha|$.

Якщо S — напівгрупа, то визначатимемо відношення Ґріна $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$ і $\mathscr{J}$ на S так:

$$
\begin{aligned}
&a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 = bS^1;\\
&a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a = S^1b;\\
&a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1 = S^1bS^1;\\
&\mathscr{D} = \mathscr{L}\circ\mathscr{R} = \mathscr{R}\circ\mathscr{L};\\
&\mathscr{H} = \mathscr{L}\cap\mathscr{R}.
\end{aligned}
$$

УДК 512.53
2010 *Mathematics Subject Classification:* 20M15, 20M50, 18B40.

(див. означення в [3, §2.1] або [6]).

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конґруенцією*, якщо для елементів a і b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a,b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca,cb),(ad,bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c,d \in S$. Відношення $(a,b) \in \mathfrak{K}$ також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи a і b є $\mathfrak{K}$-еквівалентними*. На кожній напівгрупі S існують наступні конґруенції: *універсальна* $\mathfrak{U}_S = S \times S$ та *одинична* (*діагональ*) $\Delta_S = \{(s,s) \colon s \in S\}$. Такі конґруенції називаються *тривіальними*. Кожен двобічний ідеал I напівгрупи S породжує на ній конґруенцію Ріса: $\mathfrak{K}_I = (I \times I) \cup \Delta_S$.

Надалі через $E(S)$ позначатимемо множину ідемпотентів напівгрупи S. Напівгрупа ідемпотентів називається *в'язкою*, а комутативна напівгрупа ідемпотентів — *напівґраткою*.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e \preccurlyeq f$ тоді і лише тоді, коли $ef = fe = e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного елемента $s \in S$ існує єдиний елемент $s^{-1} \in S$ такий, що $ss^{-1}s = s$ і $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$ [2]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент s^{-1} називається *інверсним до s*.

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S так: $s \preccurlyeq t$ тоді і лише тоді, коли $s = te$, для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [2]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Через $\mathscr{I}(X)$ позначимо множину всіх часткових взаємнооднозначних перетворень множини X разом з такою напівгруповою операцією

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \quad \text{якщо} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \qquad \text{для} \quad \alpha,\beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

Напівгрупа $\mathscr{I}(X)$ називається *симетричною інверсною напівгрупою* або *симетричним інверсним моноїдом* над множиною X (див. [3]). Симетрична інверсна напівгрупа введена В. В. Вагнером у працях [1, 2] і вона відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Надалі, якщо для $\alpha,\beta \in \mathscr{I}(X)$ виконуються умови $\operatorname{dom}\alpha \subseteq \operatorname{dom}\beta$ і $(x)\beta = (x)\alpha$ для довільного $x \in \operatorname{dom}\alpha$. то будемо писати $\alpha \subseteq \beta$.

Надалі будемо вважати, що $(L,\leqslant)$ — нескінченна лінійно впорядкована множина. Для елементів $x,y \in L$ умову $x \leqslant y$ і $x \neq y$ записуватимемо так: $x < y$. Елемент $\alpha \in \mathscr{I}(L)$ називається *частковим порядковим ізоморфізмом*, якщо для довільних $x_1,x_2 \in \operatorname{dom}\alpha$ з $x_1 \leqslant x_2$ випливає $(x_1)\alpha \leqslant (x_2)\alpha$. Позаяк $\leqslant$ — лінійний порядок на L, то для $\alpha \in \mathscr{I}(L)$ і для довільних $x_1,x_2 \in \operatorname{dom}\alpha$ з $(x_1)\alpha \leqslant (x_2)\alpha$ випливає $x_1 \leqslant x_2$. Очевидно, що композиція часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(L,\leqslant)$ є частковим порядковим ізоморфізмом, і обернене часткове відображення до часткового порядкового ізоморфізму є знову частковим порядковим ізоморфізмом. Через $\mathscr{O\!I}(L)$ позначимо напівгрупу всіх часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(L,\leqslant)$. Очевидно, що $\mathscr{O\!I}(L)$ — інверсна напівгрупа симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}(L)$ над множиною L.

Для довільного натурального числа n визначимо

$$\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L) = \{\alpha \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}(L) \colon |\operatorname{dom}\alpha| \leq n\}.$$

Очевидно, що $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ — інверсна піднапівгрупа симетричного інверсного моноїда $\mathscr{O}\!\mathscr{I}(L)$ над множиною L. Надалі напівгрупу $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ будемо називати *напівгрупою скінченних часткових порядкових ізоморфізмів рангу* $\leq n$ *лінійно впорядкованої множини* $(L, \leqslant)$. Надалі якщо елемент α напівгрупи $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ відображає x_1 у y_1, …, x_k у y_k, де $x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots y_k \in L$, $x_1 < \cdots < x_k$, $y_1 < \cdots < y_k$, $k \leq n$, то записуватимемо так;

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix}.$$

Порожнє часткове перетворення множини L будемо позначати символом $\mathbf{0}$. Очевидно, що $\mathbf{0}$ — нуль напівгрупи $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$.

Однією з класичних задач теорії напівгруп перетворень є дослідження будови напівгрупи перетворень множини, які зберігають структуру множини (геометрію, частковий порядок, топологію), зокрема, коли ці перетворення є локальними, тобто частковими еквівалентностями (частковими ізометріями, частковими порядковими ізоморфізмами, частковими гомеоморфізмами, тощо) [5, 11]. У цій праці ми досліджуємо алгебричні властивості напівгрупи $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ скінченних часткових порядкових ізоморфізмів обмеженого рангу лінійно впорядкованої множини $(L, \leqslant)$. Зокрема описано її ідемпотенти, природний частковий порядок та відношення Ґріна на $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$. Доведено, що напівгрупа $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ стійка та містить щільний ряд ідеалів, а також, що всі конґруенції на напівгрупі $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ є конґруенціями Ріса.

Лема 1. *Нехай* $(L, \leqslant)$ *— нескінченна лінійно впорядкована множина. Тоді для довільного натурального числа* k *і для довільних* $x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots y_k \in L$ *таких, що* $x_1 < \cdots < x_k$, $y_1 < \cdots < y_k$ *існує єдиний частковий порядковий ізоморфізм* $\alpha \colon L \rightharpoonup L$ *такий, що* $\operatorname{dom}\alpha = \{x_1, \ldots x_k\}$, $\operatorname{ran}\alpha = \{y_1, \ldots y_k\}$. *Більше того, частковий порядковий ізоморфізм* $\alpha \colon L \rightharpoonup L$ *визначається так:* $(x_1)\alpha = y_1, \ldots, (x_k)\alpha = y_k$.

Доведення. Позаяк $(L, \leqslant)$ — лінійно впорядкована множина, то кожна скінченна підмножина в $(L, \leqslant)$ має найменший елемент. За індукцією визначаємо частковий порядковий ізоморфізм $\alpha \colon L \rightharpoonup L$ так: $(x_1)\alpha = y_1, \ldots, (x_k)\alpha = y_k$. Позаяк множини $\{x_1, \ldots x_k\}$, $\{y_1, \ldots y_k\}$ скінченні, то такий частковий порядковий ізоморфізм α єдиний. □

Нагадаємо [9], що напівгрупа S називається *стійкою*, якщо

(1) $a, b \in S$ і з $Sa \subseteq Sab$ випливає, що $Sa = Sab$,

(2) $a, b \in S$ і з $aS \subseteq baS$ випливає, що $aS = baS$.

Теорема 1. *Нехай* $(L, \leqslant)$ *— нескінченна лінійно впорядкована множина. Тоді для довільного натурального числа* n *напівгрупа* $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ *є стійкою.*

Доведення. Припустимо, що для деяких елементів $\alpha, \beta \in \mathscr{OI}_n(L)$ виконується включення

$$\alpha\mathscr{OI}_n(L) \subseteq \beta\alpha\mathscr{OI}_n(L). \tag{1}$$

Позаяк $\mathscr{OI}_n(L)$ — інверсна напівгрупа, то за теоремою 1.17 з [3] маємо, що

$$\alpha\mathscr{OI}_n(L) = \alpha\alpha^{-1}\mathscr{OI}_n(L) \quad \text{і} \quad \beta\alpha\mathscr{OI}_n(L) = \beta\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1}\mathscr{OI}_n(L),$$

а отже,

$$\alpha\alpha^{-1}\mathscr{OI}_n(L) \subseteq \beta\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1}\mathscr{OI}_n(L). \tag{2}$$

З включення (2) випливає, що $\operatorname{dom}\alpha \subseteq \operatorname{dom}\beta$ і $\operatorname{dom}\alpha \subseteq \operatorname{ran}\beta$. З включення (1) маємо, що існує такий елемент $\gamma \in \mathscr{OI}_n(L)$, що

$$\alpha = \beta\alpha\gamma. \tag{3}$$

Нехай $\operatorname{rank}\alpha = k \le n$ і $\operatorname{dom}\alpha = \{x_1, \ldots, x_k\}$, причому $x_1 < \cdots < x_k$ в $(L, \leqslant)$. З рівності (3) випливає, що $(x_1)\beta^{-1} = x_1, \ldots, (x_k)\beta^{-1} = x_k$, оскільки $(L, \leqslant)$ — лінійно впорядкована множина, $\alpha, \beta \in \mathscr{OI}_n(L)$ і $x_1 < \cdots < x_k$ в $(L, \leqslant)$. Отже, отримуємо, що $(x_1)\beta = x_1, \ldots, (x_k) = x_k$, звідки випливає рівність $\alpha = \beta\alpha$. Тоді, очевидно, що $\alpha\mathscr{OI}_n(L) = \beta\alpha\mathscr{OI}_n(L)$.

Доведення твердження, що з включення $\mathscr{OI}_n(L)\alpha \subseteq \mathscr{OI}_n(L)\alpha\beta$ для $\alpha, \beta \in \mathscr{OI}_n(L)$ випливає рівність $\mathscr{OI}_n(L)\alpha = \mathscr{OI}_n(L)\alpha\beta$, аналогічне з точністю до дуальності. □

Твердження 1. *(1) Ненульовий елемент α напівгрупи $\mathscr{OI}_n(L)$ є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли α — тотожне часткове перетворення.*

(2) $\alpha \preccurlyeq \beta$ в $\mathscr{OI}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $\alpha \subseteq \beta$.

(3) $\alpha\mathscr{R}\beta$ в $\mathscr{OI}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$.

(4) $\alpha\mathscr{L}\beta$ в $\mathscr{OI}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$.

(5) $\alpha\mathscr{H}\beta$ в $\mathscr{OI}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $\alpha = \beta$.

(6) $\alpha\mathscr{D}\beta$ в $\mathscr{OI}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $|\operatorname{dom}\alpha| = |\operatorname{dom}\beta|$.

(7) $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ в $\mathscr{OI}_n(L)$.

Доведення. Твердження (1) і (2) випливають з означення напівгрупи $\mathscr{OI}_n(L)$ та описання ідемпотентів симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}(L)$ і природного часткового часткового порядку на ньому (див. [10, підрозділи 1.1 і 3.2]).

Твердження (3) і (4) випливають з означень відношень Ґріна $\mathscr{R}$ і $\mathscr{L}$ на $\mathscr{I}(L)$ і твердження 3.2.11 з [10].

Твердження (5) випливає з тверджень (3), (4) і леми 1.

(6) Нехай $\alpha\mathscr{D}\beta$ в $\mathscr{OI}_n(L)$. Тоді існує частковий порядковий ізоморфізм $\gamma \in \mathscr{OI}_n(L)$ такий, що $\alpha\mathscr{R}\gamma$ і $\gamma\mathscr{L}\beta$. З тверджень (3) і (4) випливає, що $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\gamma$ і $\operatorname{ran}\gamma = \operatorname{ran}\beta$. Позаяк β і γ — часткові бієкції, то

$$|\operatorname{dom}\alpha| = |\operatorname{dom}\gamma| = |\operatorname{ran}\gamma| = |\operatorname{ran}\beta| = |\operatorname{dom}\beta|.$$

Припустимо, що $|\operatorname{dom}\alpha| = |\operatorname{dom}\beta|$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$, і нехай

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \beta = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_k \\ v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix},$$

для деяких $x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots y_k, u_1, \ldots u_k, v_1, \ldots v_k \in L$, $x_1 < \cdots < x_k$, $y_1 < \cdots < y_k$, $u_1 < \cdots < u_k$, $v_1 < \cdots < v_k$, $k \leq n$. Приймемо

$$\gamma = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ u_1 & \cdots & u_k \end{pmatrix}.$$

З тверджень (3) і (4) випливає, що $\alpha \mathscr{L} \gamma$ і $\gamma \mathscr{R} \beta$ в $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$, а отже, $\alpha \mathscr{D} \beta$ в $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$.

(7) За теоремою 1 з [9] у стійких напівгрупах відношення Ґріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ збігаються. Далі скористаємося теоремою 1. □

Нагадаємо [10], що інверсна напівгрупа S називається *комбінаторною*, якщо кожен її $\mathscr{H}$-клас є одноелементною множиною. З твердження 1(5) випливає

Наслідок 1. *$\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ — комбінаторна інверсна напівгрупа.*

Також з висловлень (6) і (7) твердження 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай n — довільне натуральне число. Тоді сім'я*

$$\{I_k = \mathscr{O}\!\mathscr{I}_k(L) \colon k = 0, 1, \ldots, n\}$$

містить усі двобічні ідеали напівгрупи $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$.

Лема 2. *Нехай $\mathfrak{C}$ — конґруенція на напівгрупі $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$. Якщо $\alpha \mathfrak{C} \mathbf{0}$ для деякого $\alpha \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$, то $\alpha \mathfrak{C} \beta$ для всіх $\beta \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ таких, що $\operatorname{rank}\beta \leq \operatorname{rank}\alpha$.*

Доведення. Розглянемо можливі випадки:

(1) $\operatorname{rank}\beta = \operatorname{rank}\alpha$;

(2) $\operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$ і $\beta \preccurlyeq \alpha$;

(3) $\operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$ і $\beta \not\preccurlyeq \alpha$.

(1) Якщо $\operatorname{rank}\beta = \operatorname{rank}\alpha$, то $|\operatorname{dom}\beta| = |\operatorname{ran}\beta| = |\operatorname{ran}\alpha| = |\operatorname{dom}\alpha|$. За лемою 1 існують часткові порядкові ізоморфізми $\gamma, \delta \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ такі, що $\operatorname{dom}\beta = \operatorname{dom}\gamma$, $\operatorname{ran}\gamma = \operatorname{dom}\alpha$, $\operatorname{dom}\delta = \operatorname{ran}\alpha$ і $\operatorname{ran}\delta = \operatorname{ran}\beta$. Тоді маємо, що $\beta = \gamma\alpha\delta \mathfrak{C} \gamma\mathbf{0}\delta = \mathbf{0}$, а отже, $\beta \mathfrak{C} \mathbf{0}$ і $\beta \mathfrak{C} \alpha$.

(2) Якщо $\operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$ і $\beta \preccurlyeq \alpha$, то за лемою 1.4.6 з [10] $\beta = \beta\beta^{-1}\alpha \mathfrak{C} \beta\beta^{-1}\mathbf{0}$, а отже, $\beta \mathfrak{C} \mathbf{0}$ і $\beta \mathfrak{C} \alpha$.

(3) Припустимо, що $\operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$ і $\beta \not\preccurlyeq \alpha$. Нехай A — підмножина в $\operatorname{dom}\alpha$ така, що $|A| = \operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$. Позначимо через ε тотожне відображення на множині A. Тоді $\varepsilon\alpha \preccurlyeq \alpha$ і $\operatorname{rank}(\varepsilon\alpha) = \operatorname{rank}\beta$. З випадку (1) випливає, що $\varepsilon\alpha \mathfrak{C} \alpha \mathfrak{C} \mathbf{0}$, і за випадком (2) маємо, що $\varepsilon\alpha \mathfrak{C} \beta$, а отже, $\alpha \mathfrak{C} \beta$. □

Лема 3. *Нехай $\mathfrak{C}$ — конґруенція на напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$ і $\alpha\mathfrak{C}\beta$ для деяких різних $\alpha, \beta \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ таких, що $\beta \preccurlyeq \alpha$. Тоді $\alpha\mathfrak{C}\gamma$ для всіх $\gamma \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ таких, що $\operatorname{rank}\gamma \leq \operatorname{rank}\alpha$.*

Доведення. Позаяк $\mathscr{O\!I}_n(L)$ — інверсна напівгрупа, то з тверджень 2.3.4(1) і 1.4.7(4) монографії [10] випливає, що $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}$ і $\alpha\alpha^{-1} \preccurlyeq \beta\beta^{-1}$. Також, $\operatorname{rank}\alpha\alpha^{-1} = \operatorname{rank}\alpha$ і $\operatorname{rank}\beta\beta^{-1} = \operatorname{rank}\beta$. Отже, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що α і β — ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$.

Припустимо, що $\operatorname{rank}\alpha = k$ для деякого натурального числа $k \leq n$. Якщо $\operatorname{rank}\beta = 0$, то скористаємося лемою 2. Тому надалі будемо вважати, що $p = \operatorname{rank}\beta \neq 0$ і $p < k$.

Спочатку припустимо, що $p = k - 1$ і $\operatorname{dom}\alpha = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Позначимо $\beta_1 = \beta$. Позаяк L — лінійно впорядкована множина, то за лемою 1 існує частковий порядковий ізоморфізм $\iota_1 \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ такий, що $\operatorname{dom}\iota_1 = \operatorname{dom}\beta_1$ і $\operatorname{ran}\iota_1 = \operatorname{dom}\alpha \setminus \{y_1\}$, де $y_1 = \max\operatorname{dom}\beta_1$. Тоді $\iota_1\alpha\iota_1^{-1} = \beta_1$ і $\iota_1\beta_1\iota_1^{-1} \neq \beta_1$. Елемент $\iota_1\beta_1\iota_1^{-1}$ є ідемпотентом, оскільки

$$\iota_1\beta_1\iota_1^{-1}\iota_1\beta_1\iota_1^{-1} = \iota_1\iota_1^{-1}\iota_1\beta_1\beta_1\iota_1^{-1} = \iota_1\beta_1\iota_1^{-1}.$$

Також, позаяк $\operatorname{dom}\iota_1 = \operatorname{dom}\beta_1$, то $\beta_1\iota_1 = \iota_1$, звідки випливає, що $\beta_1\iota_1\beta_1\iota_1^{-1} = \iota_1\beta_1\iota_1^{-1}$, а отже, $\iota_1\beta_1\iota_1^{-1} \preccurlyeq \beta$. Оскільки $\alpha\mathfrak{C}\beta = \beta_1$, то $\beta_2 = \iota_1\beta_1\iota_1^{-1}\mathfrak{C}\iota_1\alpha\iota_1^{-1} = \beta_1$, а отже, $\beta_2\mathfrak{C}\beta_1\mathfrak{C}\alpha$. З визначення елемента $\beta_2 \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ випливає, що

$$\operatorname{rank}\beta_2 = \operatorname{rank}\beta_1 - 1 = k - 2.$$

Далі за індукцією для довільного $m = 2, \ldots, k$ побудуємо послідовності елементів $\iota_m \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ та ідемпотентів $\beta_{m+1} \in \mathscr{O\!I}_n(L)$, які задовольняють умови

(1) $\iota_m\beta_{m-1}\iota_m^{-1} = \beta_m$ і $\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} \neq \beta_m$;

(2) $\beta_{m+1} = \iota_m\beta_m\iota_m^{-1}\mathfrak{C}\alpha$;

(3) $\beta_{m+1} \preccurlyeq \beta_m$;

(4) $\operatorname{rank}\beta_{m+1} = k - m - 1$.

Оскільки L — лінійно впорядкована множина, то за лемою 1 існує частковий порядковий ізоморфізм $\iota_m \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ такий, що $\operatorname{dom}\iota_m = \operatorname{dom}\beta_m$ і $\operatorname{ran}\iota_m = \operatorname{dom}\beta_{m-1} \setminus \{y_m\}$, де $y_m = \max\operatorname{dom}\beta_m$. Тоді $\iota_m\beta_{m-1}\iota_m^{-1} = \beta_m$ і $\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} \neq \beta_m$. Елемент $\iota_m\beta_m\iota_m^{-1}$ є ідемпотентом, оскільки

$$\iota_m\beta_m\iota_m^{-1}\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} = \iota_m\iota_m^{-1}\iota_m\beta_m\beta_m\iota_m^{-1} = \iota_m\beta_m\iota_m^{-1}.$$

Також, позаяк $\operatorname{dom}\iota_m = \operatorname{dom}\beta_m$, то $\beta_m\iota_m = \iota_m$, звідки випливає, що $\beta_m\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} = \iota_m\beta_m\iota_m^{-1}$, а отже, $\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} \preccurlyeq \beta_m$. Оскільки $\alpha\mathfrak{C}\cdots\mathfrak{C}\beta_{m-1}\mathfrak{C}\beta_m$, то

$$\beta_{m+1} = \iota_m\beta_m\iota_m^{-1}\mathfrak{C}\iota_m\beta_{m-1}\iota_m^{-1} = \beta_m,$$

а отже, $\beta_{m+1}\mathfrak{C}\beta_m\mathfrak{C}\cdots\mathfrak{C}\alpha$. З визначення елемента $\beta_{m+1} \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ випливає, що

$$\operatorname{rank}\beta_{m+1} = \operatorname{rank}\beta_m - 1 = k - m - 1.$$

За вище викладеною побудовою маємо, що $\operatorname{rank}\beta_k = 0$, а отже, $\beta_k = \mathbf{0}$ — нуль напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$. Отже, отримали, що $\alpha\mathfrak{C}\mathbf{0}$. Далі скористаємося лемою 2.

Припустимо, що $p < k-1$. Тоді існує елемент $x \in L$ такий, що $x \in \operatorname{dom}\alpha \setminus \operatorname{dom}\beta$. Нехай ε — тотожне перетворення множини $\operatorname{dom}\alpha \setminus \{x\}$. Очевидно, що $\beta \preccurlyeq \varepsilon \preccurlyeq \alpha$ і $\operatorname{rank}\varepsilon = \operatorname{rank}\alpha - 1$. Тоді $\varepsilon = \varepsilon\alpha\mathfrak{C}\varepsilon\beta = \beta$, а отже, $\varepsilon\mathfrak{C}\beta$. Звідки випливає, що $\varepsilon\mathfrak{C}\alpha$. Далі скористаємося попередньо доведеним фактом. □

Лема 4. *Нехай $\mathfrak{C}$ — конґруенція на напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$ і $\alpha\mathfrak{C}\beta$ для деяких різних $\alpha, \beta \in \mathscr{O\!I}_n(L)$. Тоді $\alpha\mathfrak{C}\gamma$ для всіх $\gamma \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ таких, що $\operatorname{rank}\gamma \leq \max\{\operatorname{rank}\alpha, \operatorname{rank}\beta\}$.*

Доведення. Позаяк $\mathscr{O\!I}_n(L)$ — інверсна напівгрупа, то за твердженнями 2.3.4(1) і 1.4.7(4) з [10] маємо, що $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}$ і $\alpha\alpha^{-1} \preccurlyeq \beta\beta^{-1}$. Також, $\operatorname{rank}\alpha\alpha^{-1} = \operatorname{rank}\alpha$ і $\operatorname{rank}\beta\beta^{-1} = \operatorname{rank}\beta$. Отже, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що α і β — ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$.

Позаяк $\alpha = \alpha\alpha\mathfrak{C}\alpha\beta\mathfrak{C}\beta\beta = \beta$, то $\alpha\mathfrak{C}\alpha\beta\mathfrak{C}\beta$. З умови $\alpha \neq \beta$ випливає, що $\alpha\beta \preccurlyeq \alpha$ і $\alpha\beta \preccurlyeq \beta$. Далі скористаємося лемою 3. □

Теорема 2. *Нехай $(L, \leqslant)$ — нескінченна лінійно впорядкована множина. Для довільного натурального числа n кожна конґруенція на напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$ є конґруенцією Ріса.*

Доведення. Нехай α — елемент напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$ з $\operatorname{rank}\alpha = k \leq n$ такий, що виконуються умови:

(1) існує елемент $\beta \neq \alpha$ напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$ з $\operatorname{rank}\beta \leq \operatorname{rank}\alpha$ такий, що $\alpha\mathfrak{C}\beta$;

(2) для довільного $\gamma \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ з $\operatorname{rank}\gamma > k$ елемент γ $\mathfrak{C}$-еквівалентний лише γ у випадку, коли $k < n$.

За лемою 4 усі елементи ідеала $I_k = \mathscr{O\!I}_k(L)$ напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними, а отже, конґруенція $\mathfrak{C}$ породжена ідеалом I_k. Очевидно, що одинична та універсальна конґруєції є конґруенціями Ріса на $\mathscr{O\!I}_n(L)$, оскільки вони породжені ідеалами $I_0 = \mathbf{0}$ і $I_n = \mathscr{O\!I}_n(L)$, відповідно. □

Зауваження 1. *У праці [8] доведено, що на напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ усіх часткових порядково-опуклих ізоморфізмв лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leq)$ рангу $\leqslant n$ відношення Ґріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ збігаються, і крім того, кожна конґруенція на $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є конґруенцією Ріса. Очевидно, що для довільного натурального числа n напівгрупа $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є піднапівгрупою в $\mathscr{O\!I}_n(\omega)$.*

Нагадаємо [7], що нескінченна підмножина D напівгрупи S називається *ω-нестійкою*, якщо $sB \cup Bs \nsubseteq D$ для довільних $s \in D$ і нескінченої підмножини B у D. Будемо говорити, що *напівгрупа S має щільний ряд ідеалів* $J_0 \subseteq J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_m$, $m \in \mathbb{N}$, якщо J_0 — скінченний ідеал в S і $J_k \setminus J_{k-1}$ — ω-нестійка підмножина в S для довільного $k = 1, \ldots, m$.

Надалі через $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n$ позначатимемо ряд ілеалів, визначений у формулюванні наслідку 2. Очевидно, що $I_0 = \{\mathbf{0}\}$. Також з твердження 1 і наслідку 2 випливає, що нескінченна множина $I_k \setminus I_{k-1}$ є $\mathscr{D}$-класом напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$, що складається з елементів рангу k. Отже, для довільного елемента $\alpha \in I_k \setminus I_{k-1}$ і довільної нескінченної множини $B \subseteq I_k \setminus I_{k-1}$ існує елемент $\beta \in I_k \setminus I_{k-1}$ такий, що $\operatorname{dom}\beta \neq \operatorname{ran}\alpha$ або $\operatorname{dom}\alpha \neq \operatorname{ran}\beta$. З вище наведених міркувань і визначення напівгрупової операції на $\mathscr{O\!I}_n(L)$ випливає, що $\{\alpha\beta, \beta\alpha\} \nsubseteq I_k \setminus I_{k-1}$, а отже, $I_k \setminus I_{k-1}$ — ω-нестійка підмножина в напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$ для довільного $k = 1, \ldots, n$. Отож, ми довели таке твердження

Твердження 2. *$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n$ — щільний ряд ідеалів у $\mathscr{O\!I}_n(L)$ для довільного натурального числа n.*

Відомо, що напівгрупи зі щільними рядами ідеалів зберігаються скінченними прямими добутками та гомоморфізмами, для яких кожен елемент з образу має скінченний прообраз [7].

Теорема 3. *Нехай $(L, \leqslant)$ — нескінченна лінійно впорядкована множина, n — довільне натуральне число, S — напівгрупа та $\mathfrak{h}\colon \mathscr{O\!I}_n(L) \to S$ — неанулюючий гомоморфізм. Тоді гомоморфний образ $(\mathscr{O\!I}_n(L))\mathfrak{h}$ — напівгрупа зі щільними рядами ідеалів.*

Доведення. Твердження теореми очевидне у випадку, коли $\mathfrak{h}\colon \mathscr{O\!I}_n(L) \to S$ — ін'єктивний гомоморфізм. Позаяк $\mathfrak{h}\colon \mathscr{O\!I}_n(L) \to S$ — неанулюючий гомоморфізм і за теоремою 2 кожна конґруенція на напівгрупі є конґруенцією Ріса, то існує натуральне число $k \leq n$ таке, що виконуються такі умови:

(1) $(\alpha)\mathfrak{h} = (\beta)\mathfrak{h}$ для довільних $\alpha, \beta \in I_k$;

(2) $(\gamma)\mathfrak{h} \neq (\delta)\mathfrak{h}$ для довільних різних $\gamma, \delta \in \mathscr{O\!I}_n(L) \setminus I_k$.

Отож, отримуємо, що гомоморфний образ $(I_k)\mathfrak{h}$ — нуль напівгрупи $(\mathscr{O\!I}_n(L))\mathfrak{h}$, а також, що звуження $\mathfrak{h}{\restriction}_{\mathscr{O\!I}_n(L)\setminus I_k}\colon \mathscr{O\!I}_n(L) \setminus I_k \to S$ гомоморфізму $\mathfrak{h}$ є ін'єктивним відображенням. З останньої умови випливає, що множина $(I_m)\mathfrak{h} \setminus (I_{m-1})\mathfrak{h}$ — ω-нестійка підмножина в напівгрупі $(\mathscr{O\!I}_n(L))\mathfrak{h}$ для довільного $m = k+1, \ldots, n$. Справді, для довільних елементів $a, b \in (I_m)\mathfrak{h} \setminus (I_{m-1})\mathfrak{h}$ $(m = k+1, \ldots, n)$, їхні повні прообрази $(a)\mathfrak{h}^{-1}$ і $(b)\mathfrak{h}^{-1}$ є одноелементними підмножинами в напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$. Нехай $\alpha = (a)\mathfrak{h}^{-1}$ і $\beta = (b)\mathfrak{h}^{-1}$. Тоді $\alpha, \beta \in I_m \setminus I_{m-1}$, і з визначення напівгрупової операції на $\mathscr{O\!I}_n(L)$ випливає, що $\{\alpha\beta, \beta\alpha\} \nsubseteq I_m \setminus I_{m-1}$. Звідси, врахувавши умови (1) і (2), отримуємо, що виконується хоча б одна з умов або

$$ab = (\alpha)\mathfrak{h}(\beta)\mathfrak{h} = (\alpha\beta)\mathfrak{h} \notin (I_m)\mathfrak{h} \setminus (I_{m-1})\mathfrak{h},$$

або

$$ba = (\beta)\mathfrak{h}(\alpha)\mathfrak{h} = (\beta\alpha)\mathfrak{h} \notin (I_m)\mathfrak{h} \setminus (I_{m-1})\mathfrak{h},$$

тобто $(I_m)\mathfrak{h} \setminus (I_{m-1})\mathfrak{h}$ — ω-нестійка підмножина в $(\mathscr{O\!I}_n(L))\mathfrak{h}$ для $m = k+1, \ldots, n$. Отже, виконується твердження теореми. $\square$

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку рецензентові за цінні поради та зауваження.

Список літератури

[1] Wagner V.V. *To the theory of partial transformations*. DAN USSR, 1952, **84**, 653–656. (in Russian)

[2] Wagner V.V. *Generalized groups*. DAN USSR, 1952, **84**, 1119–1122. (in Russian)

[3] Clifford A.H., Preston G.B. *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.

[4] Clifford A.H., Preston G.B. *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.

[5] Gluskin L.M., Schein B.M., Shneperman L.B., Yaroker I.S. Addendum to "A survey of semigroups of continuous selfmaps". Semigroup Forum, 1977, **14**, 95–125. doi:10.1007/BF02194658

[6] Green J.A. *On the structure of semigroups*. Ann. Math. Ser. 2, 1951, **54** (1), 163–172. doi:10.2307/1969317

[7] Gutik O., Lawson J., Repovš D. *Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups*. Semigroup Forum, 2009, **78** (2), 326–336. doi:10.1007/s00233-008-9112-2

[8] Gutik O.V., Popadiuk O.B. *On the semigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω*, Carpathian Math. Publ., 2023, **15** (2), 331–355. doi:10.15330/cmp.15.2.331-355

[9] Koch R.J., Wallace A.D. *Stability in semigroups*, Duke Math. J., 1957, **24** (2), 193–195. doi:10.1215/S0012-7094-57-02425-0

[10] Lawson M. Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. Singapore: World Scientific, 1998.

[11] Magill K.D., jun. *A survey of semigroups of continuous selfmaps*. Semigroup Forum, 1975/76, **11** 189–282. doi:10.1007/BF02195270

[12] Petrich M. *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Надійшло 04.11.2024

Gutik O.V., Shchypel M.R. *The semigroup of finite partial order isomorphisms of a bounded rank of an infinite linearly ordered set*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 60–68.

One of the classical problems of the theory of semigroups of transformations is the study of the structure of the semigroup of transformations of a set that preserve the structure of the set (geometry, partial order, topology), in particular, when these transformations are local, that is, partial equivalences (partial isometries, partial order isomorphisms, partial homeomorphisms, partial diffeomorphisms, etc.). We study algebraic properties of the semigroup $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ of finite partial order isomorphisms of the rank $\leq n$ of an infinite linearly ordered set $(L,\leqslant)$. In particular we describe its idempotents, the natural partial order and Green's relations on $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$. It is proved that the semigroup $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ is stable and it contains tight ideal series. Moreover, we show that the semigroup $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ admits only Rees' congruences and every its homomorphic image is a semigroup with tight ideal series.

Дронь В.С.[1], Мединський І.П.[1,2]

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ З ОДНІЄЮ ГРУПОЮ ВИРОДЖЕННЯ

Дослідження присвячене виродженим параболічним рівнянням з блочною структурою, які за певних умов є узагальненням добре відомого виродженого параболічного рівняння дифузії з інерцією А.М.Колмогорова.

У цій праці сформульовано спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних на коефіцієнти таких рівнянь, за яких доведено існування класичного фундаментального розв'язку задачі Коші, отримано оцінки для нього та його похідних, доведено властивості такі, як нормальність, формулу згортки, єдиність. Також отримано коректну розв'язність задачі Коші у спеціальних вагових просторах та інтегральні зображення класичних розв'язків однорідних рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона від функцій або узагальнених мір, якими задається початкова умова. Описано класи коректності задачі Коші.

Отримані результати можна використати у подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних вироджених параболічних рівнянь.

Ключові слова і фрази: вироджене параболічне рівняння типу Колмогорова, ультрапараболічні рівняння довільного порядку, коректна розв'язність задачі Коші, інтегральне зображення класичних розв'язків, інтеграли Пуассона, азійські опціони, спеціальні умови Гельдера, спеціальні вагові простори.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, вул. Наукова, 3-Б, 79060, Львів

[2] Національний університет "Львівська Політехніка", вул. С.Бандери, 12, 79013, Львів

e-mail: *vdron@ukr.net, ihor.p.medynskyi@lpnu.ua*

Вступ

У роботі розглянуто вироджені параболічні рівняння довільного порядку з блочною структурою з однією групою виродження. Такі рівняння узагальнюють відповідні рівняння другого порядку, що виникають при дослідженнях азійських опціонів на ринку цінних паперів [1]. За певних умов вони є модифікацією класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [2]. Це рівняння та його різноманітні узагальнення вивчалися багатьма авторами. Лінійні й нелінійні вироджені параболічні рівняння виникають

УДК 517.956.4

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.

у теорії броунівського руху, теорії конвективної дифузії, теорії бінарних електролітів, у віковому наближенні теорії сповільнених електронів, у деяких задачах теорії ймовірностей, математичного моделювання азійських опціонів, у біології, економіці та інших галузях науки (див. [3, 4, 5]).

У даній праці вивчається коректна розв'язність задачі Коші для рівнянь типу Колмогорова довільного порядку з однією групою виродження, з певною вимогою щодо вигляду матриці, що задає блочну структуру рівняння. Сформульовано умови на коефіцієнти рівняння, за яких доведено існування класичного фундаментального розв'язку задачі Коші, отримано оцінки для нього та його похідних, доведено властивості такі, як нормальність, формулу згортки, єдиність. Також доведено коректну розв'язність задачі Коші, а також інтегральне зображення класичного розв'язку у вигляді інтеграла Пуссона від функції або узагальненої міри, якими задається початкова умова.

1 Формулювання задачі, припущення й означення

Розглянемо рівняння

$$(S_B - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де b, n_1, n_2 – натуральні числа такі, що $b>0$, $0 \le n_2 \le n_1$, $n := n_1 + n_2$; $x := (x_1, x_2)$, $x_i := (x_{i1}, ..., x_{in_i})$, $i \in \{1,2\}$; мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$ запишемо у вигляді $k := (k_1, k_2)$, де $k_i := (k_{i1}, \ldots, k_{in_i}) \in \mathbb{Z}_+^{n_i}$, $|k_i| := |k_{i1}| + \ldots + |k_{in_i}|$, $i \in \{1,2\}$; $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x)|\ t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} b_{ij}^1 x_{1i} \right) \partial_{x_{2j}}, \qquad A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(t,x) \partial_{x_1}^{k_1}. \tag{2}$$

Перший диференціальний вираз з (2) у матричній формі має вигляд

$$S_B = \partial_t - (x, BD_x),$$

де B – матриця розміру $n \times n$, яка має структуру

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{3}$$

B^1 – матриця, складена з дійсних чисел b_{ij}, $i \in \{1, ..., n_1\}$, $j \in \{1, ..., n_2\}$, O – нульові матриці відповідних розмірів, $D_x := col(\partial_{x_{11}}, ..., \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, ..., \partial_{x_{2n_2}})$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Використовуватимемо такі умови:

$\mathbf{A}_1$. Для матриці (3), в якій блок B^1 записаний у вигляді $\binom{B_1^1}{B_2^1}$, де B_1^1, B_2^1 – матриці відповідно розмірів $n_2 \times n_2$ і $(n_1 - n_2) \times n_2$, виконується умова: $\det B_1^1 \ne 0$;

$\mathbf{A}_2$. Існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ має місце оцінка

$$\operatorname{Re} \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b}.$$

Рівняння (1) при виконанні умов $\mathbf{A}_1$ та $\mathbf{A}_2$ входять до класу, який часто (див., наприклад, [6]) позначається символом $\mathbf{E}_{21}^B$. Він узагальнює клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку $\mathbf{E}_{21}$, запроваджений у монографії [7]. Рівняння типу (1) узагальнюють рівняння, які з'являються в моделях дифузії з інерцією, а також при дослідженні математичних моделей азійських опціонів, коли змінні, що залежать від траєкторії ціни, включають до простору станів.

Очевидно, що при виконанні умови $\mathbf{A}_1$ заміна просторових змінних

$$\hat{x}_{1j} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n_1} b_{ij} x_{1i}, & j \in \{1, ..., n_2\}, \\ x_{1j}, & j \in \{n_2 + 1, ..., n_1\}; \end{cases} \qquad \hat{x}_{2j} = x_{2j}, \quad j \in \{1, ..., n_2\} \tag{4}$$

є невиродженою.

Структура заміни змінних (4) та її невиродженість доводять наступне твердження.

Твердження 1. *При виконанні умови* $\mathbf{A}_1$ *заміна просторових змінних* (4) *зводить рівняння* (1) *до рівняння*

$$(S_{\hat{B}} - \hat{A}(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1}))\hat{u}(t, \hat{x}) = 0, \quad (t, \hat{x}) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{5}$$

в якому

$$\hat{B} := \begin{pmatrix} O & \hat{B}^1 \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \hat{B}^1 := \begin{pmatrix} I_{n_2} \\ O \end{pmatrix}$$

I_{n_2} – одинична матриця порядку n_2, O – нульові матриці відповідних розмірів, диференціальний вираз $\hat{A}(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1})$ має той самий вигляд, що й вираз $A(t, x, \partial_{x_1})$, його коефіцієнти $\hat{a}_{ij}$, $\hat{a}_i$, і $\hat{a}_0$ виражаються через виражені в нових змінних $\hat{x}$ коефіцієнти a_{ij}, a_i і a_0 та елементи матриць B^1.

При цьому з виконання умови $\mathbf{A}_2$ *для рівняння* (1) *випливає умова* $\hat{A}_2$ *для рівняння* (5)*, яка фактично не відрізняється від умови* $\mathbf{A}_2$.

Надалі використовуватимемо вирази, які пов'язують просторові змінні між собою із залученням елементів матриці B:

$$X(h) := (X_1(h), X_2(h)), \quad X_i(h) := (X_{i1}(h), ..., X_{in_i}(h)), \; i \in \{1, 2\}, \tag{6}$$

$$X_{1j}(h) := x_{1j}, \; j \in \{1, ..., n_1\}, \quad X_{2j}(h) := x_{2j} + h \sum_{i=1}^{n_1} b_{ij} x_{1i}, \; j \in \{1, ..., n_2\}, \; h \in \mathbb{R}.$$

Також позначимо: $M := (n_1 + 3n_2)/2$, $M_k := (|k_1| + 3|k_2|)/2$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $k := (k_1, k_2)$, $k_l := (k_{l1}, ..., k_{ln_l})$, $l \in \{1, 2\}$; $E_c(t, x; \tau, \xi) := \exp\left\{-c \sum\limits_{l=1}^{2} (t - \tau)^{1-2l} |X_l(t - \tau) - \xi_l|^2\right\}$, $t > \tau$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $c > 0$ – деяка стала, вирази для X_l, $l \in \{1, 2\}$, задані в (6); $\Delta_{x_1}^{\xi_1} f(t, x) := f(\cdot, (x_1, x_2)) - f(\cdot, (\xi_1, x_2))$, $\Delta_{x_2}^{\xi_2} f(t, x) := f(\cdot, (x_1, x_2)) - f(\cdot, (x_1, \xi_2))$, де $\{t, \tau\} \subset \mathbb{R}$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, f – деяка функція.

Ставитимо на коефіцієнти рівняння (1) ще такі умови:

$\mathbf{A}_3$. Коефіцієнти виразу $A(t, x, \partial_{x_1})$ (тобто функції $a_{k_1}(t, x)$) є обмеженими, неперервними за t на відрізку $[0, T]$ та гельдеровими за просторовими змінними у такому сенсі:

$\exists H_1 > 0,\ \exists \alpha_1 \in (0,1]\ \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]},\ \forall z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}:\ \left|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)\right| \le H_1|x_1 - z_1|^{\alpha_1},$
$\exists H_2 > 0,\ \ \exists \alpha_2 \in (1/3, 2/3]\ \ \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_2 \in \mathbb{R}^{n_2},\ \ \forall h \in [0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)\right| \le H_2(h^{3\alpha_2/2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}).$$

$\exists H_3 > 0\ \ \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ i \in \{1,2\},\ \ \forall h \in [0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)\right| \le H_3|x_1 - z_1|^{\alpha_1}(h^{3\alpha_2/2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}),$$

де a – будь-який із коефіцієнтів a_{k_1}, $|k_1| \le 2b$.

$\mathbf{A}_4$. В $\Pi_{[0,T]}$ існують обмежені похідні $\partial_{x_1}^{k_1} a_{k_1}$, $|k_1| \le 2b$, які задовольняють за просторовими змінними умову Гельдера у сенсі $\mathbf{A}_3$.

Очевидно, що при $h = 0$ з умови $\mathbf{A}_3$ випливають класичні умови Гельдера для груп просторових змінних.

У наступних пунктах роботи вивчатимуться питання щодо класичного фундаментального розв'язку задачі Коші (далі – КФРЗК) для рівняння (1) та коректної розв'язності задачі Коші у спеціальних вагових просторах.

2 Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші

Сформулюємо теореми про існування та властивості КФРЗК для рівняння (1).

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$*–*$\mathbf{A}_3$*. Тоді існує КФРЗК* Z *для цього рівняння і*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t,x;\tau,\xi),\ \ |k_1|/2 + |k_2| \le 1,$$
$$k = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_+^n,\ \ 0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{7}$$
$$|S_B Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t,x;\tau,\xi),\ \ 0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Для доведення теореми застосуємо невироджену заміну змінних (4) до рівняння (1) й умови теореми. На основі твердження 1 рівняння (1) буде зведене до рівняння (5) з класу $\mathbf{E}_{21}$, а з умов $\mathbf{A}_2$–$\mathbf{A}_3$ ми отримаємо для цього рівняння, відповідно, умови $\hat{A}_2$–$\hat{A}_3$ які відрізняються від перших тільки тим, що в них вираз $X(h)$ замінений виразом $\hat{X}(h)$ який визначений рівностями

$$\hat{X}(h) := (\hat{X}_1(h), \hat{X}_2(h)),\ \ \hat{X}_i(h) := (\hat{X}_{i1}(h), ..., \hat{X}_{in_i}(h)),\ i \in \{1,2\},$$

$$\hat{X}_{ij}(h) := \sum_{s=0}^{i-1} \frac{1}{s!} h^s \hat{x}_{(i-s),j},\ \ j \in \{1,...,n_i\},\ \ i \in \{1,2\}.$$

Використовуючи результати з [8] для рівняння з класу $\mathbf{E}_{21}$ при $n_3 = 0$ (а саме, теорему 3 з [8, С.15]) ми одержимо доведення твердження тереми 1.

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$. *Тоді існує класичний ФРЗК* Z^* *для спряженого рівняння*

$$S_B^* v(\tau,\xi) - A^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1}) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[0,T)},$$

де

$$S_B^* := -\partial_\tau + \sum_{i=1}^{n_2}\left(\sum_{j=1}^{n_1} b_{ji}^1 \xi_{1j}\right)\partial_{\xi_{2i}}, \quad A^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1}) := \sum_{|k_1|\le 2b} (-\partial_{\xi_1})^{k_1}(\bar{a}_{k_1}(\tau,\xi)v(\tau,\xi));$$

функція Z^* *пов'язана із функцією* Z *рівністю*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = Z(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

і для Z *виконується формула згортки*

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\lambda,y)Z(\lambda,y;\tau,\xi)dy, \quad 0 \le \tau < \lambda < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Зауважимо, що рівність (8) означає властивість нормальності ФРЗК.

Доведення теореми 2 базується на формулі Гріна-Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{B_R} (\overline{v}Lu - u\overline{L^* v})(\theta,y)dy = \int_{B_R} (\overline{v}u)(\theta,y)\big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \left(\sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 y_{1s}\right)\mu_{2j}\right)(\overline{v}u)(\theta,y)dS_y + \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} B^j[v,u](\theta,y)\mu_{1j}dS_y, \tag{10}$$

де $0 \le t_1 < t_2 \le T$, B_R – сфера в $\mathbb{R}^n$ радіусу R з центром в початку координат, Γ_R – її межа, $(\mu_{11},...,\mu_{1n_1},\mu_{21},...,\mu_{2n_2})$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_R, $L := S_B - A(\theta,y,\partial_{y_1})$, $L^* := S_B^* - A^*(\theta,y,\partial_{y_1})$, $B^j[v,u]$, $j \in \{1,...,n_1\}$, – білінійні форми, які містять похідні за y_1 від u і v не вищого за $2b-1$ порядку; u і v – досить гладкі функції.

Перейшовши у формулі (10) до границі при $R \to \infty$, у випадку дійснозначних функцій ми отримаємо формулу

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (vLu - uL^* v)(\theta,y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} (vu)(\theta,y)\big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy. \tag{11}$$

Використовуючи оцінки з теореми 1 і подібні оцінки для Z^*, у формулі (11) ми можемо покласти $u(\theta,y) = Z(\theta,y;\tau,\xi)$, $v(\theta,y) = Z^*(\theta,y;t,x)$, $t_1 = \tau+\varepsilon$ і $t_2 = t-\varepsilon$, де ε – мале додатнє число. В одержаній рівності, прямуючи до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо формулу (8).

Рівність (9) одержується подібним чином, тільки потрібно взяти $t_1 = \lambda$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(\lambda, y; t, x) Z(\lambda, y; \tau, \xi) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(t-\varepsilon, y; t, x) Z(t-\varepsilon, y; \tau, \xi) dy,$$

в якій необхідно перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ і використати формулу (8).

Теорема 3. (Єдиність класичного ФРЗК). *Існує тільки один нормальний класичний ФРЗК, для якого мають місце оцінки* (7).

Нехай Z_1 і Z_2 – два нормальні класичні ФРЗК для рівняння (1), для яких справджуються оцінки (7). Покладемо у формулу (11) $u(\theta, y) = Z_1(\theta, y; \tau, \xi)$, $v(\theta, y) = Z_2(t, x; \theta, y)$. Тоді одержимо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_2, y; \tau, \xi) Z_2(t, x; t_2, y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_1, y; \tau, \xi) Z_2(t, x; t_1, y) dy \tag{12}$$

для довільних t_1 і t_2 з інтервалу (τ, t). З довільності t_1 і t_2 випливає, що права і ліва частини в (12) не залежать ні від t_1, ні від t_2, і можна перейти до границі в (12), попрямувавши $t_1 \to \tau$, $t_2 \to t$. Зробивши це, ми отримаємо

$$Z_1(t, x; \tau, \xi) = Z_2(t, x; \tau, \xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Зауважимо, що властивості КФРЗК для рівняння (5) з класу $\mathbf{E}_{22}^B$ ультрапараболічних рівнянь (другого порядку) досліджувалися у [1].

3 Коректна розв'язність задачі Коші

Розглянемо набори функцій $\mathbf{k}(t, \mathbf{a})$ і $\mathbf{s}(t)$, $t \in [0, T]$, які означимо таким способом:

$$\mathbf{k}(t, \mathbf{a}) := (k_1(t, a_1), k_2(t, a_2)),\ \mathbf{s}(t) := (s_1(t), s_2(t)),$$

$$k_i(t, a_i) := c_0 a_i (c_0^{2b-1} - a_i^{2b-1} t^{2b(i-1)+1})^{1-q},\ i \in \{1, 2\};$$

$$s_1(t) := k_1(t, a_1) + 2^{q-1} t^q \|B^1\|^q k_2(t, a_2), \quad s_2(t) := 2^{q-1} k_2(t, a_2),$$

де $q := 2b/(2b-1)$, $c_0 \in (0, c)$, c – стала з оцінок (7), $\mathbf{a} := (a_1, a_2)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $T < \min\limits_{i \in \{1,2\}} (c_0/a_i)^{(2b-1)/(2b(i-1)+1)}$, $\|B^1\|$ – норма матриці B^1. Запровадимо ще таке позначення:

$$[\mathbf{k}(t, \mathbf{a}), \xi)] := \sum_{i=1}^{2} k_i(t, a_i) |\xi_i|^2,\ t > 0,\ \xi_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ i \in \{1, 2\}.$$

Зауважимо, що правильними є співвідношення

$$\mathbf{k}(0, \mathbf{a}) = \mathbf{a},\ k_i(t, a_i) \ge a_i,\ k_{ij}(t, a_{ij}) \ge a_{ij}, \quad t \in [0, T],\ j \in \{1, ..., n_i\},\ i \in \{1, 2\};$$

$$k_1(t-\tau, k_1(\tau, a_1)) = k_1(t, a_1),\ k_{1j}(t-\tau, k_{1j}(\tau, a_{1j})) = k_{1j}(t, a_{1j}), \quad j \in \{1, ..., n_1\};$$

$$k_2(t-\tau, k_i(\tau, a_i)) \le k_2(t, a_i),\ k_{2j}(t-\tau, k_{2j}(\tau, a_{2j})) \le k_{2j}(t, a_{2j}),\quad j \in \{1, ..., n_2\},$$

і справджується нерівність

$$-c_0 \sum_{i=1}^{2} t^{1-2i} |X_i(t) - \xi_i|^2 + [\mathbf{k}(0, \mathbf{a}), \xi] \le [\mathbf{k}(t, \mathbf{a}), X(t)],\quad t \in (0, T],\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Нехай $p \in [1, \infty]$ і $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна для будь-якого $t \in [0, T]$. Для кожного $t \in [0, T]$ означимо норми

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} := \|u(t, x) \exp\{-[\mathbf{k}(t, \mathbf{a}), X(t, 0)]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} := \|u(t, x) \exp\{-[\mathbf{s}(t), x]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Використовуватимемо також простори:

$L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$, $t \in [0, T]$, $p \in [1, \infty]$, – простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$;

$M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ – простір зліченно-адитивних функцій $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умову

$$\|\mu\|^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} := \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-[\mathbf{k}(0, \mathbf{a}), x]\} d|\mu|(x) < \infty,$$

де $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ – повна варіація μ;

$L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_1^{-\mathbf{s}(T)} := \|\psi(x) \exp\{-[\mathbf{s}(T), x]\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

$C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що при $|x| \to \infty$ маємо $|\psi(x)| \exp\{[\mathbf{s}(T), x]\} \to 0$. Норму в $C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ означимо формулою

$$\|\psi\|_\infty^{-\mathbf{s}(T)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|\psi(x)| \exp\{[\mathbf{s}(T), x]\}).$$

Враховуючи означення точок $X_i(t), i \in \{1, 2\}$, та нерівності (1.3.9), (1.3.10) з [7], маємо такі нерівності:

$$|X_2(t)|^2 = \left|x_2 + t((B^1)' x_1')'\right|^2 \le 2\left(|x_2|^2 + t^2 |((B^1)' x_1')'|^2\right) \le 2\left(|x_2|^2 + t^2 \|B^1\|^2 |x_1|^2\right),$$

та аналогічно

$$|X_{2j}(t)|^2 \le 2\left(|x_{2j}|^2 + t^2 \|B^1\|^2 |x_{1j}|^2\right),\ j \in \{1, ..., n_2\}.$$

Із цих нерівностей випливає нерівність

$$\exp\{-[\mathbf{s}(t), x]\} \le \exp\{-[\mathbf{k}(t, \mathbf{a}), x]\},$$

і тому

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} \le \|u(t, \cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})},\quad t \in [0, T],\ p \in [1, \infty].$$

Оскільки за означенням $\mathbf{s}(t) \ge \mathbf{k}(0, \mathbf{a})$, $t \in [0, T]$, то для $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{\mathbf{s}(t)} \le \|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})},\quad t \in [0, T],\ p \in [1, \infty].$$

Теорема 4. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1) *виконуються умови* $\mathbf{A}_1$*–*$\mathbf{A}_4$ *і* $p \in [1, \infty]$*. Тоді правильними є такі твердження:*

1) для будь-яких функцій $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ *формула*

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{13}$$

визначає єдиний в шарі $\Pi_{(0,T]}$ *розв'язок однорідного рівняння* (1)*;*

існує стала $C > 0$*, яка не залежить від* $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$*, така, що для довільного* $t \in (0, T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})};$$

для $p \in [1, \infty)$ *справджується рівність* $\lim\limits_{t \to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} = 0$*, а для* $p = \infty$ *– граничні співвідношення* $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \varphi$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx;$$

2) для будь-якої узагальненої міри $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ *формула*

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{14}$$

визначає єдиний в шарі $\Pi_{(0,T]}$ *розв'язок однорідного рівняння* (1)*;*

існує стала $C > 0$*, яка не залежить від* $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$*, така, що для довільного* $t \in (0, T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\mu\|^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})};$$

справджується граничне співвідношення $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \mu$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\mu(x).$$

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 4.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1$*–*$\mathbf{A}_4$ *і* u *– розв'язок в* $\Pi_{(0,T]}$ *однорідного рівняння* (1)*, який задовольняє умову*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C, \; t \in (0,T], \tag{15}$$

з деякими $C > 0$ *і* $p \in [1, \infty]$*. Тоді для* $p \in (1, \infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,a)}$*, а для* $p = 1$ *– єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$*, такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді* (13) *або* (14)*.*

Нехай U_p, $p \in [1,\infty]$, – класи усіх розв'язків однорідного рівняння (1), які при кожному $t \in (0,T]$ належать до просторів $L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$ як функції x і для яких виконується умова (15). Із теорем 4 і 5 випливають такі важливі наслідки.

Наслідок 1. *Множинами початкових значень розв'язків із класів U_p, $p \in (1,\infty]$, та U_1 є відповідно простори $L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ та $M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і тільки вони.*

Наслідок 2. *Класи U_p, $p \in (1,\infty]$, і U_1 є множинами значень операторів Пуассона, визначених формулами* (13) *і* (14) *на просторах відповідно $L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і $M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, причому ці оператори є ізоморфізмами.*

Для отримання результатів, сформульованих у теоремах 4 і 5, використовується методика, подібна до праці [7].

Висновки

У роботі розглянуто вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова довільного порядку з блочною структурою з однією групою виродження. Такі рівняння узагальнюють відповідні рівняння другого порядку, що виникають при дослідженнях азійських опціонів на ринку цінних паперів.

У статті сформульовано спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних на коефіцієнти рівнянь, за яких доведено існування класичного фундаментального розв'язку задачі Коші та ряд його властивостей: його оцінки і оцінки його похідних, нормальність, формулу згортки, єдиність нормального КФРЗК. Також отримано коректну розв'язність задачі Коші у спеціальних вагових просторах та інтегральне зображення класичних розв'язків однорідних рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона від функцій або узагальнених мір, якими задається початкова умова. Описано класи коректності задачі Коші. При цьому одержано оцінки в спеціальних вагових нормах інтегралів Пуассона, породжених КФРЗК, та досліджена їх гранична поведінка.

Наведені результати є досить точними. З них, зокрема, випливає повна характеризація розглянутих класів розв'язків. Цим самим для таких розв'язків розв'язана задача, яка є важливою класичною задачею теорії аналітичних та гармонічних функцій. Вона полягає у відшуканні умов на розв'язки рівнянь, визначених в області, які гарантують існування їхніх граничних значень на межі області.

Зауважимо, що подібні вироджені параболічні рівняння з блочною структурою другого порядку вивчалися у [1] і [9], аналогічні результати для так званих L-розв'язків задачі Коші для таких рівнянь отримано в [6].

Отримані результати є реалізацією відомого підходу Ейдельмана–Івасишена [7]. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії марковських процесів, густиною ймовірності переходу яких є ФРЗК для рівнянь із класу $\mathbf{E}_{22}^B$.

Список літератури

[1] Dron V.S., Medynskyi I.P. *On fundamental solution of the Cauchy problem for ultra-parabolic equations in the Asian options models.* Math. Modeling and Computing 2024, **11** (2), 593–606. https://doi.org/10.23939/mmc2024.02.593

[2] Kolmogoroff A. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung).* Ann.Math. 1934, **35**, No.1, 116–117. – https://doi.org/10.2307/1968123

[3] Pascucci A. *Kolmogorov Equations in Physics and in Finance.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications: Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland 2005, **63**, 313–324.

[4] Frentz M., Nyström K., Pascucci A., Polidoro S. *Optimal regularity in the obstacle problem for Kolmogorov operators related to American Asian options.* Math. Ann. 2010, **347**, 805–838. doi: 10.1007/s00208-009-0456-z

[5] Protsach N.P., Ptashnyk B.Yo. Nonlinear ultraparabolic equations and variational inequalities, Naukova dumka, Kyiv, 2017, 278 p. (in Ukrainian).

[6] Ivasyshen S.D., Layuk V.V. *Cauchy problem for some degenerated parabolic equations of Kolmogorov type.* Mat. Metody i Fiz.-Mekh. Polya 2007, **50** (3), 56–65 (in Ukrainian).

[7] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser. Basel 2004, Ser. Operator Theory: Adv. and Appl., Vol. 152. https://doi.org./10.1007/978-3-0348-7844-9.

[8] Ivasyshen S.D., Medynskyi I.P. *The fundamental solution of the Cauchy problem for generated parabolic Kolmogorov type equations of arbitrary order.* Mat. Metody i Fiz.-Mekh. Polya 2019, **62** (1), 7–24 (in Ukrainian).

[9] Dron V.S., Medynskyi I.P. *Cauchy problem for ultra-parabolic equations of Kolmogorov type with block structure.* Bukovinian Math. Journal 2024, **12** (1), 43–62 (in Ukrainian).

Надійшло 15.12.2024

Dron V.S.[1], Medynskyi I.P.[1,2] *Cauchy problem for degenerated parabolic equations of Kolmogorov type of arbitrary order with one group of degeneration*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 69–79.

The investigation is devoted to degenerated parabolic equations of arbitrary order with block structure and with one group of degeneration. Such equations generalize the corresponding second-order equations that arise in the studying of Asian options on financial markets. Under some conditions they generalize well-known Kolmogorov's equation of diffusion with inertia.

In the work, for the given equations we study the classical fundamental solutions and solutions of the Cauchy problem. For the coefficients of the equations we apply special Hölder conditions with respect to spatial variables. Under these conditions, we prove such results as existing of classic fundamental solution of the Cauchy problem (further – CFSCP), the estimations of it and of its derivatives, the normality property, the convolution formula, the uniqueness of the normal CFSCP. Also, the well-posedness of the Cauchy problem in special weighed spaces, the integral presentation of classic solutions of the Cauchy problem for homogeneous equations (in the form of Poisson integrals of functions or generalized measures which are given by the initial condition) of classic solutions of the Cauchy problem for homogeneous equations are obtained. Limiting behavior of the Poisson integrals was investigated. Classes of well-posedness of the Cauchy problem are described.

The presented results are quite accurate. In particular, they lead to a complete characterization of the considered classes of solutions. It solves a problem for such solutions, which is an important classical problem of the theory of analytic and harmonic functions. It consists in finding conditions for solutions of equations defined in a domain that guarantee the existence of their limiting values on the boundary of the domain.

Previous, the similar degenerated parabolic second-order equations with block structure have been studied, and similar results for the so-called L-solutions of the Cauchy problem for such equations have been obtained.

The results obtained in the work are realization of well-known Eidelman–Ivasyshen approach. Ones can be used to advanced studying of the Cauchy problem and boundary value problems for linear and quasi-linear degenerated parabolic equations as well as in the theory of Markov processes, the transition probability density of which is the CFSCP for the second-order equations.

Єлагін В.О.

НЕГА-Q_S-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ЙОМУ ВІДПОВІДНІ ХВОСТОВІ МНОЖИНИ

В роботі обгрунтовується, що нега -Q_s-зображення є перекодуванням Q_s-зображення, воно породжує ідентичну метричну теорію. Доведено, що группа перетворень одиничного відрізку, які зберігають хвости нега-Q_s-зображення чисел є нескінченною групою, яка містить підгрупу зростаючих функцій.

Ключові слова і фрази: s-кове зображення чисел, нега-Q_s-зображення чисел, циліндр, хвостові множини, неперервні перетворення, оператори зсуву цифр.

Institution of mathematics of NAS Ukraine
e-mail: *fracta.art@gmail.com*

Вступ

Сьогодні людство оперує різними числовими системами (системами чисел, які утворюють певні алгебраїчні структури і мають деяку ступінь автономності). Це системи натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних, гіперкомплексних чисел тощо. Представник тієї чи іншої числової системи має свій зміст і форму існування, які йому надає система числення. Числові системи та системи числення обслуговують потреби обчислювальної математики та обчислювальної техніки, сучасних ІКТ, є засобом кодування інформації.

Системою числення називається сукупність засобів для: представлення (математичного вираження); зображення (кодування, скороченого, формального запису); найменування дійсних чисел; їх ідентифікації та порівняння; а також побудови арифметики. Ця сукупність включає: 1) модель дійсного числа у формі математичного виразу (ряду, нескінченного добутку, ланцюгового дробу тощо); 2) алфавіт — набір цифр (символів, знаків) для формального (скороченого) запису представлення числа математичним виразом, які відіграють роль чисел або індексів. Існуючі системи числення (а їх багато [1, 3, 8, 9]) можна певним чином класифікувати. Один з класів утворює системи, що мають основи одну або більше. Найпростішою у ньому є класична s-кова система (

УДК 511.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (1030291, V.O.Y.).

$1 < s \in \mathbb{N}$) числення, зокрема двійкова. Ця система має багато різних узагальнень та аналогів і ряд різнопанових застосувань у теорії чисел, теорії функцій, теорії фракталів.

Дана робота присвячена зображенню чисел у системі числення з основою (-s), яка називається нега-s-ковою, а також її узагальненню нега-Q_s-зображенню. В роботі доводиться, що нега-Q_s-зображення є простим перекодуванням Q_s-зображення (у поліосновній системі з s додатними основами). Враховуючи, що нега-Q_s-зображення не є топологічно еквівалентним Q_s-зображенню, і те, що нега-s-кові зображення кілька разів використовувались для конструювання неперервних локально складних функцій [1, 4, 5], вважаємо за доцільне розвиток теорії нега-Q_s-зображення чисел.

1 Нега-s-кове зображення чисел як перекодування s-кового

Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $L_s \equiv A_s \times A_s \times \dots \times A_s \times \cdots$ — простір послідовностей елементів алфавіту A_s.

Нагадаємо [8], що зміст s-кового зображення $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$ числа $x \in [0;1]$, де $(\alpha_n) \in L_s$, розкриває рівність

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \dots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}. \tag{1}$$

Тут представленням числа x є ряд (1), при цьому послідовність $s_n = \bar{s}^n$ є базисною, а цифри α_n відіграють роль чисел у поданні числа і символів у його зображенні.

Теорема 1. *[1] Для будь-якого $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\tau_n) \in L_s$ така, що*

$$x = \frac{s}{s+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{(-s)^n} \equiv \Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots} = \tag{2}$$

$$= 1 - \frac{\gamma_1}{s} + \frac{\gamma_2}{s^2} - \frac{\gamma_3}{s^3} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(-s)^n}, \tag{3}$$

де $\gamma_n = \tau_n + 1$.

Означення 1. *Розклад x у ряд (2) називається його нега-s-ковим представленням, а його формальний запис $\Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}$ — нега-s-ковим зображенням. При цьому τ_n називається n-ою цифрою даного зображення.*

Зауваження 1. *Хід доведення теореми 1 [8] вказує на зв'язок s-кового та нега-s-кового зображень одного і того ж числа, а саме: цифри τ_n нега-s-кового зображення $\Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}$ числа $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$ обчислюються за формулою:*

$$\tau_n = \begin{cases} s - 1 - \alpha_n, & \text{якщо } n \text{ непарне}, \\ \alpha_n, & \text{якщо } n \text{ парне}. \end{cases}$$

Якщо ж відоме нега-s-кове зображення числа $x = \Delta^s_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, то цифри його s-кового зображення можна отримати за формулами:

$$\alpha_n = \begin{cases} s-1-\tau_n, & \text{якщо } n \text{ непарне,} \\ \tau_n, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Отже, $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\ldots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}\ldots} = \Delta^{-s}_{[s-1-\alpha_1]\alpha_2[s-1-\alpha_3]\alpha_4[s-1-\alpha_5]\alpha_6\ldots\alpha_{2n}[s-1-\alpha_{2n+1}]\ldots}$.

Це дає підставу стверджувати, що нега-s-кове зображення по своїй суті є лише перекодуванням s-кового зображення числа x. Для більш повного обґрунтування такого висновку проведемо аналіз його тополого-метричних властивостей.

2 Геометрія нега-s-кового зображеня

Суть геометрії зображення чисел в значній мірі розкривають властивості циліндричних та хвостових множин. Нагадаємо, що циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ для s-кового та нега-s-кового зображень відповідно називаються множини[8]

$\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \{x : \alpha_i(x) = c_i,\ i = 1,\ldots,m\}$, $\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \{x : \tau_i(x) = c_i,\ i = 1,\ldots,m\}$.

1. Циліндр для кожного з зображень є відрізком, причому

1.1. $\Delta^s_{c_1\ldots c_m} = [a; b]$, де $a = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{s^i}$, $b = a + \frac{1}{s^m}$;

1.2. $\Delta^{-s}_{c_1\ldots c_m} = [A - B; A + C]$, де $A = \frac{s}{s+1} + \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{(-s)^i}$,

$$B = \begin{cases} \frac{1}{s^m(s+1)}, & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ \frac{1}{s^{m-1}(s+1)}, & \text{якщо } m \text{ парне;} \end{cases} \quad C = \begin{cases} \frac{1}{s^{m-1}(s+1)}, & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ \frac{1}{s^m(s+1)}, & \text{якщо } m \text{ парне.} \end{cases}$$

2. $|\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}| = \frac{1}{s^m} = |\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_m}|$.

3. $\frac{|\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{1}{s} = \frac{|\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_m}|}$.

4. $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$; $x = \Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m\ldots} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}$.

Властивість 3 циліндрів s-кового та нега-s-кового зображень називається основним метричним відношенням, оскільки відіграє важливу (ключову) роль у відповідній метричній теорії. Його вираз є свідченням близькості (і навіть "ідентичності") відповідних метричних теорій.

Зауваження 2. *Враховуючи зазначене, приходимо до висновку, що розв'язки топологічних і метричних задач для нега-s-кового зображення, аналогічних задачам для s-кового зображення, можна отримати з відомих результатів для останнього переформулюванням у новій системі кодування з урахуванням вказаних зв'язків.*

3 Нега-Q_s-зображення чисел

Нагадаємо [1] суть поліосновного Q_s-зображення чисел з $[0; 1]$. Нехай $Q_s \equiv (q_0, \ldots, q_{s-1})$ – заданий ймовірнісний вектор з додатними координатами, тобто $q_0 + q_1 + \cdots + q_{s-1} = 1$; $\beta_0 = 0$, $\beta_{i+1} = \beta_i + q_i = q_0 + q_1 + \cdots + q_i$, $i = 0, 1, \ldots, s-1$.

Теорема 2. *[2] Для будь-якого $x \in [0;1]$ існує послідовність $(a_n) \in L_s$ така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \tag{4}$$

Скорочений запис $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ ряду (4) і його суми x називають Q_s-зображенням числа x, при цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ відповідно n-ою цифрою цього зображення. Подамо ряд (4) у вигляді:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \cdots + \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j} + \cdots =$$

$$= (\beta_{\alpha_1+1} - q_{\alpha_1}) + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + (\beta_{\alpha_3+1} - q_{\alpha_3}) q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} + \cdots +$$

$$+ (\beta_{\alpha_{2k-1}+1} - q_{\alpha_{2k-1}}) \prod_{j=1}^{2k-2} q_{\alpha_j(x)} + \beta_{\alpha_{2k}} \prod_{j=1}^{2k-1} q_{\alpha_j(x)} + \cdots =$$

$$= \beta_{\alpha_1+1} - \beta'_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3+1} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \cdots + \beta_{\alpha_{2k-1}+1} \prod_{j=1}^{2k-2} q_{\alpha_j} - \beta'_{\alpha_{2k}} \prod_{j=1}^{2k-1} q_{\alpha_j} + \cdots =$$

$$= \beta'_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} (\beta'_{\alpha_k}(x) \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \equiv \Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{5}$$

де $\beta'_{\alpha_n} = \begin{cases} \beta_{\alpha_n+1}, \text{ якщо } n \text{ - непарне}, \\ 1 - \beta_{\alpha_n}, \text{ якщо } n \text{ - парне}. \end{cases}$

Таке представлення числа x називатимемо нега-Q_s-представленням, а відповідний скорочений запис $\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ його нега-Q_s-зображенням. Таким чином, нами доведено наступне твердження.

Лема 1. *Для числа $x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ має місце рівність (5).*

Отримане перекодування можна здобути іншим шляхом. Наведемо його.

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} + \cdots + \beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \cdots =$$

$$= 1 - 1 + \beta_{\alpha_1} + (\beta_{\alpha_2+1} - q_{\alpha_1}) q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + (\beta_{\alpha_4+1} - q_{\alpha_4}) q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} + \cdots +$$

$$+ (\beta_{\alpha_n+1} - q_{\alpha_n}) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \beta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j} + \cdots =$$

$$= 1 - (1 - \beta_{\alpha_1}) + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} - (1 - \beta_{\alpha_3}) q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} - \cdots +$$

$$+ \beta_{\alpha_{2n}} \prod_{j=1}^{2n-1} q_{\alpha_j} - (1 - \beta_{\alpha_{2n+1}}) \prod_{j=1}^{2n} q_{\alpha_j} + \ldots =$$

$$= 1 - \gamma_1 + \gamma_2 q_{\alpha_1} - \gamma_3 q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \dots + \gamma_{2n} \prod_{j=1}^{2n-1} q_{\alpha_j} - \gamma_{2n+1} \prod_{j=1}^{2n} q_{\alpha_j} + \dots,$$

де γ_n визначаються так:

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 - \beta_{\alpha_n}, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ \beta_{\alpha_n+1}, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Тобто для числа x, що має Q_s-представлення (4), має місце рівність:

$$x = 1 - \gamma_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \gamma_k \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}.$$

Якщо цифри у нега-Q_s-зображенні числа утворюють період, то вони записуються у круглих дужках. Зліченна множина чисел має два нега-Q_s–зображення. Це числа виду: $\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0[s-1])} = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k+1]([s-1]0)}$. Детальніше уявлення про те, числа якого виду можуть давати два зображення, дає наступний розділ.

4 Геометрія нега-Q_s-зображеня

Означення 2. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$, називається множина $\Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m}$, що складається з усіх чисел $x \in [0;1]$, що мають нега-Q_s-зображення, у якого перші m символів рівні $c_1, c_2, \ldots, c_m$ відповідно.*

Далі наведено деякі властивості циліндрів нега-Q_s-зображення та висвітлимо їх зв'язок з циліндрами Q_s-зображення.

1.Для кожного з зображень циліндр є відрізком, причому:

1.1. $\Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_m} = [a;b]$, де $a = \sum_{i=1}^{m} \beta_{c_i} \prod_{k=1}^{i-1} q_{c_i}$, $b = a + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}$;

1.2. $\Delta^{-Q_s}_{c_1\ldots c_m} = [A;B]$, де

$$A = \begin{cases} = \beta'_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k-1} (\beta'_{c_k} (\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}), & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ = \beta'_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k-1} (\beta'_{c_k} (\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}) + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}, & \text{якщо } m \text{ парне;} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} = \beta'_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k-1} (\beta'_{c_k} (\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}) + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}, & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ = \beta'_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k-1} (\beta'_{c_k} (\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}), & \text{якщо } m \text{ парне;} \end{cases}$$

2. $\Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k} = \bigcup_{t \in A_s} \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k t}$; $[0,1] = \bigcup_{i_1=0}^{s-1} \bigcup_{i_2=0}^{s-1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{s-1} \Delta^{-Q_s}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$;

3.$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k} = x \equiv \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k\ldots}$ для $(c_k) \in L$;

4. $\max \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}i} = \min \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}[i-1]}$; $\max \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{2k}[i]} = \min \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{2k}[i+1]}$;

5. $|\Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k}| = \prod_{i=1}^{k} q_{c_i} = |\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k}|$.

Таким чином, числа можуть мати два зображення, тоді і лише тоді, коли вони є спільним кінцем двох циліндрів.

5 Хвостові множини

Кажуть [1], що нега-Q_s-зображення чисел $x = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots}$ та $y = \Delta^{-Q_s}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots}$ мають однакові хвости, якщо існують деякі натуральні числа k та m такі, що $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$ для будь-яких $j \in \mathbb{N}$. Це символічно записується $x \sim y$.

Означення 3. *Множину всіх чисел, що мають однаковий хвіст називають хвостовою множиною.*

Зауважимо, що числа, які мають два нега-Q_s- зображення належать одній хвостовій множині. Легко бачити, що кожна хвостова множина є зліченною і всюди щільною на відрізку $[0; 1]$.

Зауваження 3. *Відношення $\sim$ мати однаковий хвіст є бінарним відношенням еквівалентності.*

Лема 2. *Фактор-множина $G \equiv L_s/\sim$ є континуальною.*

Доведення. Припустимо, що G є зліченною множиною. Тоді простір L_s послідовностей елементів алфавіту є зліченним об'єднанням зліченних множин, тобто зліченною множиною. Але простір L_s є континуальною множиною, що суперечить нашому припущенню, про зліченність G. $\square$

Нам невідомі змістовні метризації множини G, а вони могли б суттєво збагатити метричну теорію нега-Q_s-зображення чисел і розширити застосування у фрактальному аналізі.

6 Спеціальні функції нега-Q_s-зображення

Казатимемо, що функція $f : [0; 1] \to [0; 1]$ зберігає хвости нега-Q_s-зображення чисел, якщо для будь-якого $x \in [0; 1]$ виконується $x \sim f(x)$.

Оператор лівостороннього зсуву цифр нега-Q_s-зображення чисел, який означується рівністю:

$$\eta(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

є кусково-лінійною функцією, а саме: $\eta(x) = \frac{-1}{q_{\alpha_1}}x + \frac{1-\beta'_{\alpha_1}}{q_{\alpha_1}}$. Оскільки $\eta(\Delta^{-Q_s}_{i(0[s-1])}) = \Delta^{-Q_s}_{0[s-1]}$ і не дорівнює $\eta(\Delta^{-Q_s}_{[i+1]([s-1]0)}) = \Delta^{-Q_s}_{[s-1]0}$, то оператор є коректно означеною функцією лише після домовленості використовувати одне з двох зображень, нехай те, що містить період $(0[s-1])$.

Означення 4. *n-кратним оператором лівостороннього зсуву нега-Q_s-зображення чисел, де $n \in \mathbb{N}$, називається оператор*

$$\eta^n(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \eta(\eta^{n-1}(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})) = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots} =$$

$$\frac{(-1)^n}{q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\cdots q_{\alpha_n}}x + \frac{\beta'_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n}} - \frac{\beta'_{\alpha_{n-1}}}{q_{\alpha_n}q_{\alpha_{n-1}}} + \cdots + \frac{(-1)^n\beta'_{\alpha_1}}{q_{\alpha_n}q_{\alpha_{n-1}}\cdots q_{\alpha_1}}.$$

Динаміка у просторі [0;1], породжена відображенням $\eta(x)$, є непростою, хоча траєкторії точок не виходять за межі хвостових множин, які вони представляють.

Означення 5. *Оператором правостороннього зсуву нега-Q_s-зображення чисел з параметром i, $i \in A_s$ називається відображення(функція):*

$$\omega_i(x = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{-Q_s}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = -q_i x + \beta'_i.$$

Означення 6. *Оператором правостороннього зсуву нега-Q_s-зображення чисел з набором параметрів $(i_1, \ldots, i_n) \in A^n_s, n \in \mathbb{N}$ називається функція*

$$\omega_{i_1 i_2\ldots i_n}(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \omega_{i_1}(\omega_{i_2\ldots i_n}(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})) = \Delta^{-Q_s}_{i_1 i_2\ldots i_n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} =$$

$$= (-1)^n x \prod_{j=1}^{n} q_{i_j} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \beta_{i_j} \prod_{k=1}^{j-1} q_{i_k}.$$

Зауважимо, що всі оператори зсуву цифр є функціями, що зберігають хвости нега-Q_s-зображення чисел. Можна побачити, що n-кратний оператор лівостороннього зсуву буде зростачою функцією на кожному циліндрі n-рангу, якщо n – парне, і спадною, якщо n – непарне. Аналогічний зв'язок можна побачити і у оператора правостороннього зсуву в залежності від кількості параметрів, для парної кількості параметрів, оператор буде зростаючою фунцією, для непарної кількості – спадною.

Нагадаємо, що перетворенням множини називається бієктивне (одночасно ін'єктивне та сюр'єктивне) відображення цієї множини на себе. Неперервне перетвореннія відрізка [0;1] є зростаючою або спадною неперервною функцією такою, що $f(0) = 0; f(1) = 1$ або $f(0) = 1; f(1) = 0$. Прикладами перетворень, що зберігають хвости нега-Q_s-зображення чисел, є наступні функції: $f(x) = x$;

$$f_{2k-1}(x) = \begin{cases} \omega_0(x), \text{ коли } 0 \leq x \leq \Delta^{-Q_s}_{(\underbrace{0[s-1]0[s-1]\ldots0[s-1]0}_{2k-1}0)}, \\ \eta^{2k-1}(x), \text{ коли } \Delta^{-Q_s}_{(\underbrace{0[s-1]0[s-1]\ldots0[s-1]0}_{2k-1}0)} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$f_{[s-1]0}(x) = \begin{cases} \omega_{[s-1]0}(x), \text{ коли } 0 \leq x \leq \Delta^{-Q_s}_{(\underbrace{0[s-1]0[s-1]\ldots0[s-1]}_{2k}[s-1]0)}, \\ \eta^{2k}(x), \text{ коли } \Delta^{-Q_s}_{(\underbrace{0[s-1]0[s-1]\ldots0[s-1]}_{2k}[s-1]0)} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, що таких перетворень існує нескінченна кількість, бо $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Множина H всіх неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, що зберігають хвости нега-Q_s-зображення чисел, відносно операції "композиція перетворень"утворює нескінченну некомутативну групу, яка має підгрупу зростаючих перетворень.*

Основні моменти доведення теореми аналогічні схемі, яка використовувалась в роботах [6, 7]. Тому ми обмежились лише конструктивним доведенням нескінченності групи. Ціваво було б вивчити структуру групи H, сім'ю підгруп та інваріантів.

Список літератури

[1] Pratsiovytyi M., Two-symbol encoding systems of real numbers and their application. (in Ukrainian), Scientific opinion, Kyiv, 2022. — 316p.

[2] M. V. Pratsiovytyi, Fractal Approach to Investigation of Singular Probability Distributions (in Ukrainian), Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ., Kyiv, 1998.

[3] Schweiger F., Ergodic theory of fibred systems and metric number theory, Oxford University Press, New York, 1995.

[4] Pratsiovytyi M., Chuikov A., A continuous nowhere monotonic function defined in terms of nega-ternary and A2-continued fractions // Collection of Papers, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. – 2018. – Vol. 15. – No. 1. – p. 147–161.

[5] Pratsiovytyi M., Goncharenko Y., Lysenko I. Nega-binary representation of real numbers and its application. Scientific Journal of NPU named after M.P. Drahomanov. Series 1. Physical and Mathematical Sciences. 2015. No. 17. p. 83–106.

[6] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. Uncountable group of continuous transformations of unit segment preserving tails of Q_2-representation of numbers. Proceeding of the International Geometry Center. – 2024. – 17(2). P.99-108

[7] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I., Maslova Yu. *Group of continuous transformations of real inerval preserving tails of G_2-representation of numbers.* Algebra and Discrete Mathematics., 2020, 29(1), 99-108.

[8] Pratsiovytyi M.V. Negative-Cantor Representations of Real Numbers as Trivial Recodings of Cantor Representations (negative s-adic recodings of s-adic Representations) // Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2017. – Vol. 14. – No. 4. – P. 167-177.

[9] Kasatkin V.N. New Insights on Numeral Systems. – Vyshcha Shkola, Kyiv, 1982. – 96 pages.

Надійшло 01.12.2024

Yelahin V.O. *Nega-Q_s-representation of numbers and its corresponding tail sets*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 80–88.

The article demonstrates that the nega-Q_s-representation serves as a re-encoding of the traditional Q_s-representation and, despite its altered structural framework, leads to the same metric theory. This equivalence implies that while the representations may appear different in their formal descriptions, they fundamentally capture the same mathematical relationships and properties of the system they describe. Moreover, the study explores the group of transformations acting on the [0,1] interval that preserve the tails of the nega-Q_s-representation. This group, intriguingly, is shown to be infinite, highlighting the extensive symmetry underlying this representation. Within this infinite group, there exists a particularly interesting subset: a subgroup composed of increasing functions. These increasing functions retain the order of points within the interval, suggesting a natural compatibility with the nega-Q_s-representation's structure and preserving its essential features. This finding is significant because it not only confirms the mathematical equivalence of the Q_s- and nega-Q_s-representations but also reveals the rich algebraic structure associated with transformations that maintain the core properties of the nega-$Q_s$representation. By identifying this infinite group and its increasing function subgroup, the article deepens our understanding of how such representations interact with transformations and sheds light on the broader implications for metric theory and number

representation systems. The study invites further exploration into the properties of these transformations, particularly how they might be exploited in applications where alternative number representations or encoding schemes are utilized. Additionally, the identification of increasing functions within this group suggests potential connections to dynamical systems and mathematical models where order preservation is crucial.

Лисенко І.М., Працьовитий О.М., Плакида В.І.

НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ, ОЗНАЧЕНІ В ТЕРМІНАХ ДВОСИМВОЛЬНОГО G₂-ЗОБРАЖЕННЯ З ДВОМА РІЗНОЗНАКОВИМИ ОСНОВАМИ

У роботі розглядаються неперервні функції, визначені на відрізку, аргумент і значення яких подається зображенням (G_2-зображення) у системі кодування з двома різнознаковими основами $g_0 \in [0,5;1)$ і $g_1 = g_0 - 1$ та двосимвольним алфавітом $A = \{0;1\}$:

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Серед них функції трьох класів. Перший клас представляють функції, означені рівністю:

$$\varphi(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{r_1(\alpha_1)r_2(\alpha_2)\ldots r_n(\alpha_n)\ldots},$$

де (r_n) – задана послідовність функцій $r_n : A \to A$. Доведено, що в цьому класі крім констант, тотожного перетворення відрізка, і функції:

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

інших неперервних функцій немає. Другий клас представляють функції:

$$g(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{d(\alpha_1,\alpha_2)d(\alpha_2,\alpha_3)\ldots d(\alpha_n,\alpha_{n+1})d(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots}, \text{ де } d : A \times A \to A.$$

Доведено, що в цьому класі існує лише чотири неперервні функції: дві сталі, тотожне перетворення відрізка і оператор лівостороннього зсуву цифр G_2-зображення чисел. Третій клас представляють неперервні строго зростаючі сингулярні функції (їх похідна рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), означенні системою функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} f(g_0 x) = q_0 f(x), \\ f(g_0 + (g_0 - 1)x) = q_0 + (q_0 - 1)f(x), \end{cases} \quad q_0 \in [0,5;1), q_1 = q_0 - 1.$$

Графіки функцій останнього класу є самоафінними, тобто структурно фрактальними. Знайдено вираз визначенного інтеграла по області визначення для функцій цього класу.

Ключові слова і фрази: G_2-зображення чисел, оператор лівостороннього зсуву цифр, проєктор одного зображення в інше, сингулярна функція, циліндр, неперервна ніде не монотонна функція, множина рівня функції, функція необмеженої варіації.

Ukrainian State Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
e-mail: *i.m.lysenko@udu.edu.ua, alexandr.pratsiovytyi@gmail.com, plakyda1@gmail.com*

УДК 517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80,26A27, 26A30.
Information on some grant ...

Вступ

Для аналітичного дослідження функцій зі складною локальною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями все частіше використовуються різні системи кодування дійсних чисел [3, 8, 12, 13, 14, 15]. В першу чергу, сказане стосується неперервних локально складних функцій: сингулярних [13], ніде не монотонних та ніде не диференційовних [3, 6], а також функцій, які не мають проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості, функцій з структурно та метрично фрактальними властивостями [3, 5, 7]. Теорія таких функцій перебуває на конструктивному етапі розвитку і збагачується в основному за рахунок індивідуальних теорій яскравих представників вказаних класів [3, 5, 10].

Нагадаємо, що кодуванням дійсних чисел множини D засобами алфавіту A називається сюр'єктивне відображення g простору L послідовностей елементів алфавіту на множину D. При цьому послідовність (α_n) така, що $g[(\alpha_n)] = x \in D$ називається g-зображенням числа x. Це записується $x = \Delta^{g}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$.

Нагадаємо [4], що двосимвольне G_2-зображення дійсних чисел відрізка $[0; g_0]$ визначається алфавітом $A = \{0, 1\}$ і двома різнознаковими основами $g_0 \in [\frac{1}{2}; 1]$ та $g_1 \equiv g_0 - 1$:

$$[0; g_0] \ni x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{1}$$

де $(\alpha_n) \in L \equiv A \times A \times ....$ Після введення скорочення $\delta_{\alpha_k} \equiv \alpha_k g_{1-\alpha_k}$, G_2-зображення $\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = x$ числа x має таке змістовне його подання рядом:

$$x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}. \tag{2}$$

Якщо $g_0 = \frac{1}{2}$, то воно набуває вигляду знакопочережного двійкового представлння:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{k-1}}}{2^k} \equiv \Delta^{G_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

G_2-зображення на відміну від інших двосимвольних кодувань дійсних чисел має ряд унікальних властивостей [4, 8, 9, 10, 14]:

1) оператор лівостороннього зсуву $\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{x}{g_{\alpha_1(x)}} - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}$ є неперервною функцією;

2) інверсор G_2-зображення $I(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$ має зліченну всюди щільну в $[0; g_0]$ множину точок розриву;

3) всі G_2-бінарні числа (числа, що мають два зображення) належать одній хвостовій множині (їх зображення мають період (0)): $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{m-1}01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{m-1}11(0)}$.

Основна мета даної роботи полягає в тому, щоб оцінити потенціал G_2-зображення дійсних чисел для ефективного задання та дослідження неперервних функцій, зокрема локально складних (сингулярних).

Теорема 1. *Функція f, означена рівністю*

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{3}$$

1) є коректно означеною;

2) неперервною кусково-лінійною функцією, яка має аналітичне задання:

$$f(x) = \frac{g_{1-\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}x + \frac{g_{\alpha_1(x)}\delta_{1-\alpha_1(x)} - g_{1-\alpha_1(x)}\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}};$$

3) строго спадною функцією, яка зберігає хвости G_2-зображення чисел.

Доведення. 1. Втрата коректності означення функції потенційно могла б трапитись у G_2-бінарних точках. Але користуючись формулою (3), маємо

$$f(\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 01(0)}) = \Delta^{G_2}_{[1-c_1]c_2\ldots c_m 01(0)} = \Delta^{G_2}_{[1-c_2]c_2\ldots c_m 11(0)} = f(\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 11(0)}),$$

зокрема

$$f(\Delta^{G_2}_{01(0)}) = \Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{01(0)} = f(\Delta^{G_2}_{11(0)}).$$

Отже, означення функції f рівністю (3) є коректним.

2. Неперервність функції f власне рівносильна коректності означення функції у G_2-бінарних точках. Незважаючи на це, дамо незалежне доведення неперервності функції, знайшовши її аналітичний вираз. Оскільки

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \delta_{1-\alpha_1} + g_{1-\alpha_1}(\delta_{\alpha_2} + \delta_{\alpha_3}g_{\alpha_2} + \ldots) = \delta_{1-\alpha_1} + g_{1-\alpha_1}\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}),$$

де $\omega(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \frac{x}{g_{\alpha_1(x)}} - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}$, то

$$f(x) = \frac{g_{1-\alpha_1}}{g_{\alpha_1}}x + \delta_{1-\alpha_1} - \frac{g_{1-\alpha_1}\delta_{\alpha_1}}{g_{\alpha_1}} = \begin{cases} \frac{g_1}{g_0}x + g_0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0 \\ \frac{g_0}{g_1}x - \frac{g_0^2}{g_1}, & \text{якщо } \alpha_1 = 1. \end{cases}$$

Тому функція f є кусково-лінійною, куски графіка якої сходяться в точці $x = g_0^2 = \Delta^{G_2}_{01(0)} = \Delta^{G_2}_{11(0)}$.

Отже, функція f неперервна на всій області визначення.

3. Враховуючи аналітичний вираз функція f і те, що числа $\frac{g_1}{g_0}$ і $\frac{g_0}{g_1}$ є від'ємними, бачимо, що f є строго спадною функцією. Те, що хвости у аргумента і значення функції збігаються очевидно з означення функції: $\alpha_n(x) = \alpha_{n-1}(f(x))$. Отже, функція зберігає хвости зображення чисел. □

Теорема 2. *У класі функцій, означених рівністю*

$$\varphi(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{r_1(\alpha_1)r_2(\alpha_2)\ldots r_n(\alpha_n)\ldots}, \tag{4}$$

де (r_n) – послідовність функцій, визначених на множині $A = \{0,1\}$, $r_n(\alpha_n) \in A$, лише чотири функції $\varphi(x) = const$, $\tau(x) = x$ і функція f, означена рівністю (3), є неперервними.

Доведення. Існує лише чотири функції $r : A \to A$. Це $r_n(\alpha) = 0$, $r_n(\alpha) = 1$, $r_n(\alpha) = \alpha$, $r_n(\alpha) = 1-\alpha$. Якщо $r_n(\alpha) = i$ для всіх $n \in N$, то $\varphi(x) = \Delta^{G_2}_{(i)} = const$. Якщо $r_n(\alpha) = 1-\alpha$ для всіх $n \in N$, то $\varphi(x)$ є інверсором – функцією, що має зліченну множину точок розриву. Нехай $r_m(\alpha_m) = 1 - \alpha_m$ для деякого $m > 1$. Розглянемо G_2-бінарну точку $x_1 = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}01(0)} = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}11(0)} = x_2$. Обчислимо її значення за формулою (3) від двох різних G_2-зображень. Маємо

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (\prod_{i=1}^{m-1} g_{\alpha_i})[\delta_1 g_0 - (\delta_1 - \delta_1 g_1)] = (\prod_{i=1}^{m-1} g_{\alpha_i})2g_0g_1 \neq 0. \qquad \square$$

1 Функції, визначені ланцюговою скріпленістю пар цифр

Теорема 3. *Серед функцій, означених рівністю*

$$g(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{d(\alpha_1,\alpha_2)d(\alpha_2,\alpha_3)\ldots d(\alpha_n,\alpha_{n+1})d(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots} \tag{5}$$

неперервними є лише функції, для яких $d(a, b) = const$, $d(a, b) = a$ і $d(a, b) = b$, тобто коли $g(x)$ є оператором лівостороннього зсуву цифр G_2-зображення.

Доведення. Існує всього 16 функцій $d : A \times A \to A$, ефективне матричне задання яких запропоноване у роботі Ратушняк С.П. [11]. Функцію g зручно асоціювати з матрицею $||a_{ij}||$, де $a_{ij} = d(i, j)$. Коли $d(i, j) = 0$ маємо $g(x) = 0$, а коли $d(i, j) = 1$ маємо $g(x) = g_0$. Тому те, що чотири вказані функції є неперервними очевидно, оскільки функція $d(a, b) = a$ породжує функцію $f(x) = x$, а функція $d(a, b) = b$ породжує оператор лівостороннього зсуву цифр G_2-зображення чисел, неперервність якого зазначалась вище.

Для того, щоб функція була неперервною, необхідно і достатньо, щоб значення, обчислені за формулою (4) від різних зображень G_2-бінарної точки, були рівними. Очевидно (або легко бачити), що контрольними точками є лише $\Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{01(0)}$ і $\Delta^{G_2}_{c11(0)} = \Delta^{G_2}_{c01(0)}$.

Нехай $d(a, b)$ – функція, відмінна від чотирьох вказаних. Якщо функція $d(a, b) = 1 - a$, то f є інверсором $I(x)$ цифр G_2-зображення чисел, яка як зазначалось вище, має зліченну множину точок розриву. Якщо $d(a, b) = 1 - b$, то $f(x) = I(\omega(x))$ і точка $x_0 = \Delta^{G_2}_{01(0)} = \Delta^{G_2}_{11(0)}$ є її точкою розриву, оскільки матриця $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{00(1)} \neq \Delta^{G_2}_{10(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$.

1. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{0(1)} \neq \Delta^{G_2}_{(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

2. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{110(1)} \neq \Delta^{G_2}_{010(1)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{110(1)} = \Delta^{G_2}_{110(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{10(1)} = \Delta^{G_2}_{10(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

3. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{111(0)} \neq \Delta^{G_2}_{011(0)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{11(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{111(0)} = \Delta^{G_2}_{111(0)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$.

4. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{(1)} \neq \Delta^{G_2}_{0(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

5. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{101(0)} \neq \Delta^{G_2}_{011(0)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{001(0)} \neq \Delta^{G_2}_{111(0)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{01(0)} = \Delta^{G_2}_{11(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

6. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{10(1)} \neq \Delta^{G_2}_{00(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

7. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то маємо оператор лівостороннього зсуву, зокрема $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{1(0)} = \Delta^{G_2}_{1(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{01(0)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{01(0)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$.

8. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{00(1)} \neq \Delta^{G_2}_{10(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$.

9. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{00(1)} \neq \Delta^{G_2}_{10(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

10. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{000(1)} \neq \Delta^{G_2}_{100(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{00(1)} = \Delta^{G_2}_{00(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{000(1)} = \Delta^{G_2}_{000(1)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$.

11. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{(0)} \neq \Delta^{G_2}_{1(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

12. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{001(1)} \neq \Delta^{G_2}_{101(0)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{01(1)} = \Delta^{G_2}_{01(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{001(1)} = \Delta^{G_2}_{001(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$.

13. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{1(0)} \neq \Delta^{G_2}_{(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$. □

2 Сингулярні монотонні функції

Нехай g_0 і q_0 — фіксовані числа, $\frac{1}{2} \leq g_0 < 1$, $\frac{1}{2} \leq q_0 < 1$.

Теорема 4. *Система функціональних рівнянь*

$$\begin{cases} f(g_0x) = q_0f(x), \\ f(g_0 + (g_0 - 1)x) = q_0 + (q_0 - 1)f(x), \end{cases} \tag{6}$$

визначених в кожній точці відрізка $[0; g_0]$ *має єдиний розв'язок, який аналітично виражається*

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i} \equiv \Delta^{G_2'}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{7}$$

де $q_1 \equiv 1 - q_0$, *і є неперервною строго зростаючою функцією, сингулярною функцією при* $q_0 \neq g_0$ *і* $f(x) = x$ *при* $q_0 = g_0$.

Доведення. Скористаємось скороченням $\delta'_i \equiv iq_{1-i}$, тобто $\delta'_0 = 0$, $\delta'_1 = q_0$.

Зауважимо, що коли $v = \Delta^{G_2}_{v_1 v_2 \ldots v_n \ldots}$, то

$$g_0 v = \Delta^{G_2}_{0 v_1 v_2 \ldots v_n \ldots},\ g_0 + g_1 v = \Delta^{G_2}_{1 v_1 v_2 \ldots v_n \ldots}.$$

Тому в обох випадках (коли $\alpha_1 = 0$ та $\alpha_1 = 1$), враховуючи співвідношення (7), маємо:

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}) = \delta'_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} f(\Delta^{G_2}_{\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots}).$$

З тієї ж причини

$$f(x) = \delta'_1 + q_{\alpha_1}(\delta'_{\alpha_2} + q_{\alpha_2} f(\Delta^{G'_2}_{\alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n \ldots})).$$

Продовжуючи ті ж міркування, за m кроків отримаємо

$$f(x) = \delta'_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \delta'_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i} + (\prod_{i=1}^{m} q_{\alpha_i}) f(\Delta^{G'_2}_{\alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \ldots \alpha_{m+n} \ldots}).$$

Оскільки $f(x)$ визначена в кожній точці відрізка $[0; g_0]$, а

$$\prod_{i=1}^{m} q_{\alpha_i} \to 0 (m \to \infty),$$

то процес розкладу числа $f(x)$ є збіжним і кінцевий результат має форму (7). Оскільки $\Delta^{G'_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ є G_2-зображенням з параметром q_0, то функція (7) є коректно означена у кожній G'_2-бінарній точці, а отже, є неперервною.

Тепер доведемо сингулярність функції. Оскільки G_2-бінарних точок є зліченна множина, то диференеціальні властивості функції в цих точках не впливають на сингулярність. Якщо в G_2-унарній точці $x_0 = \Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_n \ldots}$ існує скінченна похідна $f'(x_0)$, то вона може бути обчислена за формулою

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mu_f(\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m})}{|\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|\Delta^{G'_2}_{c_1 \ldots c_m}|}{|\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m}|},$$

де $\mu_f(\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m})$ — приріст функції f на циліндрі $\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m} = \{x : x = \Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m a_1 a_2 \ldots}, (a_n) \in L\}$.

Враховуючи, що

$$|\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m}| = \prod_{i=1}^{m} |g_{c_i}| = |g_1|^{c_1 + \ldots + c_m} g_0^{m - (c_1 + \ldots + c_m)},$$

$$|\Delta^{G'_2}_{c_1 \ldots c_m}| = \prod_{i=1}^{m} |q_{c_i}| = |q_1|^{c_1 + \ldots + c_m} q_0^{m - (c_1 + \ldots + c_m)},$$

маємо

$$\frac{|\Delta^{G'_2}_{c_1 \ldots c_m}|}{|\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m}|} = \prod_{i=1}^{m} \frac{q_{c_i}}{g_{c_i}} \text{ і } f'(x_0) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{q_{c_k}}{g_{c_k}}.$$

Оскільки f є строго зростаючою неперервною функцією, то згідно з відомою теоремою Лебега множина W точок, в яких функція має скінченну похідну, є множиною повної міри. Нехай x_0 – довільна точка множини W, тобто $f'(x_0)$ – скінченна. Тоді при $g_0 \neq q_0$ нескінченний добуток є розбіжним до нуля, оскільки не виконується необхідна умова його збіжності. Отже, $f'(x_0) = 0$ і функція f є сингулярною. Теорему доведено. □

Теорема 5. *Графік Γ_f функції f є самоафінною множиною*

$$\Gamma_f = \varphi_0(\Gamma_f) \cup \varphi_1(\Gamma_f), \tag{8}$$

$$\varphi_0 : \begin{cases} x' = g_0 x, \\ y' = q_0 y, \end{cases} \quad \varphi_1 : \begin{cases} x' = g_0 + g_0 x, \\ y' = q_0 + q_1 y, \end{cases}$$

і виконується

$$\int\limits_0^{g_0} f(x)dx = \frac{-q_0 g_0 g_1}{1 - q_0 g_0 + q_1 g_1}.$$

Доведення. Зрозуміло, що

$$\Gamma_f = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \text{ де } \Gamma_i = \{M(x;y) : x = \Delta_i^{G_2}, y = f(x)\}.$$

Покажемо, що $\Gamma_i = \varphi_i(\Gamma_f)$. Справді, включення $M'(x';y') \in \varphi_i(\Gamma_f)$ рівносильне виконанню умов

$$\begin{cases} x' = \Delta^{G_2}_{i\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} = \delta_i + g_i x, \ x \in [0; g_0], \\ y' = \Delta^{G'_2}_{i\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \delta'_i + q_i y = f(x'), \end{cases}$$

при цьому $x' \in \Delta_i^{G_2}$. Тому умова $M'(x';y') \in \varphi_i(\Gamma_f)$ рівносильна включенню $M(x';y') \in \Gamma_i$ $(i = 0, 1)$. Отже, має місце структурна рівність (8).

Тепер виразимо інтеграл

$$\int\limits_0^{g_0} f(x)dx = \int\limits_0^{g_0^2} f(x)dx + \int\limits_{g_0^2}^{g_0} f(x)dx = \int\limits_{x\in\Delta_0^{G_2}} f(x)dx + \int\limits_{x\in\Delta_1^{G_2}} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{g_0} y d g_0 x - \int\limits_0^{g_0} (q_0 + q_1 y) d(g_0 + g_1 x) =$$

$$= q_0 g_0 \int\limits_0^{g_0} y dx - g_1 \int\limits_0^{g_0} (q_0 + q_1 y) dx =$$

$$= q_0 g_0 \int\limits_0^{g_0} f(x)dx - q_0 g_1 x|_0^{g_0} - q_1 g_1 \int\limits_0^{g_0} f(x)dx.$$

Тоді

$$[1 - q_0 g_0 + q_1 g_1] \int\limits_0^{g_0} f(x)dx = -q_0 g_0 g_1,$$

$$\int\limits_0^{g_0} q_0 f(x)dx = \frac{-q_0 g_0 g_1}{1 - q_0 g_0 + q_1 g_1}.$$

□

Наслідок 1. *Якщо* $q_0 = g_0$ *та* $q_0 = g_0 = \frac{1}{2}$, *то відповідно маємо*

$$\int\limits_0^{g_0} f(x)dx = \frac{g_0^2}{2} \ i \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{8}.$$

Список літератури

[1] Chen Y. *Fractal texture and structure of central place systems*, Fractals, 2020, 28(01).

[2] Galambos J. Representations of real numbers by infinite series. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[3] Jarnicki M., Pflug P. Continuous nowhere differentiable function. The Monsters of Analysis. Springer Monographs in Mathem., 2015.

[4] Lysenko I.M., Maslova Yu.P., Pratsiovytyi M.V. *Two-symbol systen of encoding with two bases having different signs and special functions related with it*, Proceeding of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2019, 16(2), 50-62. (in Ukrainian)

[5] Massopust P.R. *Fractal function and their applications.* Chaos, Solutions and Fractals, 1997, 8(2), 171-190.

[6] Pratsiovytyi M. V., Baranovskyi O. M., Maslova Yu. P. *Generalization of the Tribin function*, J. Math. Sci., 2021., 253(2), 276–288.

[7] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dmytrenko S.O., Lysenko I.M.,Ratushniak S.P. *About one class of function with fractal properties.* Bukovynian Mathematical Journal. 2021, 6(1), 273–283. (in Ukrainian)

[8] Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O., Lysenko I.M., Maslova Yu.P. *Inversor of digits of digits of two-base G-representation of real numbers and its structural fractality.* Bukovinian Math. Journal. 2022, 10(1), 100-109.

[9] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I., Maslova Yu. *Group of continuous transformations of real inerval preserving tails of G_2-representation of numbers.* Algebra and Discrete Mathematics., 2020, 29(1), 99-108.

[10] Pratsiovytyi, M.V., Lysenko, I.M., Maslova, Yu. Trebenko O. *G-representation of real numbers and some of its applications.* J Math Sci, 2023, 277, 298–310.

[11] Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. *Properties and distributions of values of fractal functions related to Q_2-representations of real numbers*, Theory of Probability and Mathem. Stat., 2019, 99, 211-228.

[12] Pratsiovytyi M.V. Two-symbol encoding systems of real numbers and their application., Kyiv: Nauk. Dumka, 2022. (in Ukrainian)

[13] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach to the study of singular distributions - Kyiv: Nats. Pedagog. Mykhailo Dragomanov Univ., 1998. (in Ukrainian)

[14] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Maslova Yu.P. *Geometry of numerical series: series as a model of a real number in a new two-symbol system of encoding of numbers.* Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sc. Ukraine, 2018, 15(1), pp. 132–146 (in Ukrainian).

[15] Schweiger F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. New York: Oxford University Press., 1995. 320 p.

Надійшло 08.12.2024

Lysenko I.M., Pratsiovytyi O.M., Plakyda V.I. *Continuous functions defined in terms of a two-symbol* $\mathbf{G_2}$*-representation with two bases having different signs*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 89–97.

In the paper we study defined on an interval continuous functions where the argument and the values are represented (G_2-representation) in a coding system with two oppositely signed bases $g_0 \in [0,5;1)$ and $g_1 = g_0 - 1$ and a two-symbol alphabet $A = \{0;1\}$:

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k g_{1-\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

These functions are divided into three distinct classes. The first class includes functions defined by an equation:

$$\varphi(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{r_1(\alpha_1)r_2(\alpha_2)\ldots r_n(\alpha_n)\ldots},$$

where (r_n) is a given sequence of functions $r_n : A \to A$. We prove that in this class there exist no any continuous functions except constants, the identity transformation of the interval, and the function

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

The second class is represented by the following functions:

$$g(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{d(\alpha_1,\alpha_2)d(\alpha_2,\alpha_3)\ldots d(\alpha_n,\alpha_{n+1})d(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots}, \text{ де } d : A \times A \to A.$$

We prove that this class contains only four continuous functions: two constant functions, the identity transformation of the interval, and the left-shift operator for the digits of the G_2-representation of numbers. The third class consists of continuous strictly increasing singular functions (whose derivative is zero almost everywhere in the sense of the Lebesgue measure), defined by a system of functional equations:

$$\begin{cases} f(g_0 x) = q_0 f(x), \\ f(g_0 + (g_0 - 1)x) = q_0 + (q_0 - 1)f(x), \end{cases} \quad q_0 \in [0,5;1), q_1 = q_0 - 1.$$

The graphs of functions in this class are self-affine, i.e. have fractal structure. We derive an expression for the definite integral over the area of definition for the functions in this class.

Мазуренко О.В.

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ВПОРЯДКОВАНИХ СТРУКТУР, ЕКВІВАЛЕНТНІ ДО ПОВНОТИ ЗА ДЕДЕКІНДОМ

Як відомо, повнота за Дедекіндом є одним з основних понять дійсного аналізу, яке виникає одразу при побудові прямої дійсних чисел. Оскільки ця властивість має багато застосувань в різних ситуаціях, то природно виникають альтернативні властивості, еквівалентні до повноти за Дедекіндом. У цій статті основна увага сконцентрована на описі таких властивостей, на доведенні еквівалентності до повноти і на окремих прикладах застосувань. Зокрема, введено модифіковане означення розрізів Дедекінда, що дало змогу класифікувати їх як головні і вільні розрізи, які слугують зручними моделями раціональних і ірраціональних чисел відповідно. Розглянуто аксіоми Кантора і Архімеда і їх зв'язок з повнотою за Дедекіндом у впорядкованих полях і у впорядкованих множинах. Знайдено зв'язок між виконанням аксіоми Архімеда і наявністю зліченної всюди щільної множини у впорядкованих полях, що задовольняють аксіому Кантора.

Ключові слова і фрази: повнота за Дедекіндом, розріз Дедекінда, аксіома Архімеда, дійсна пряма, нестандартна дійсна пряма, головні і вільні розрізи.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна (Мазуренко О.В.)
e-mail: *oles.mazurenko@lnu.edu.ua (Мазуренко О.В.)*

Вступ

Автори у [1, 2, 3] описують побудову дійсних чисел як впорядкованого поля, повного за Дедекіндом, використовуючи для цього розрізи Дедекінда. У [3, 4, 5] автори переходять до нестандартного аналізу в неархімедових впорядкованих полях (які, зокрема, не є повними за Дедекіндом). Наша робота має на меті надати більше уваги повноті за Дедекіндом (чи її відсутності), що і утворює сприятливий грунт для вищезгаданих досліджень. Зокрема, ми розглянемо питання еквівалентних до повноти властивостей у лінійно впорядкованих множинах і впорядкованих полях та їх застосування у згаданих тематиках.

Лінійно впорядкована множина $(S, <)$ називається *повною за Дедекіндом*, якщо для кожної пари непорожніх підмножин A і B таких, що кожен елемент множини A менший

УДК 510
2010 *Mathematics Subject Classification:* 12J15, 06A99.

за кожен елемент множини B і в об'єднанні вони вичерпують множину S, знайдеться елемент c з S, який розділяє ці множини в сенсі $(\forall a \in A)(\forall b \in B) : a \leq c \leq b$. Таке формулювання повноти за Дедекіндом ми вважатимемо канонічним. Альтернативним популярним варіантом повноти вважається існування точної верхньої межі для обмежених підмножин. Таке формулювання в нашій роботі згадуватись не буде, а його зв'язок з канонічним формулюванням загальновідомий [6].

В розділі 1 ми розглянули поняття розрізу Дедекінда, яке було модифіковане нами спочатку з наміром зручнішої побудови дійсної прямої (див. зауваження 1), але згодом вилилося у класифікацію розрізів (вільні/головні), яка нагадує класифікацію понять в інших математичних напрямках, і, відповідно, властивість лінійно впорядкованої множини мати лише головні розрізи, еквівалентну до повноти.

В розділі 2 ми описали зв'язки між аксіомами Кантора і Архімеда та повнотою за Дедекіндом при наявності операцій (впорядковане поле) і за їх відсутності (лінійно впорядкована множина). Як наслідок, отримали умову існування зліченної всюди щільної підмножини в нестандартних моделях дійсних чисел (тобто в моделях, які відрізняються від стандартної моделі дійсних чисел невиконанням однієї з аксіом другого порядку, в нашому випадку – аксіоми Архімеда). За таким принципом показали відсутність зліченної всюди щільної множини в нестандартній прямій $^*\mathbb{R}$, що є фактор множиною раціональних послідовностей за відношенням еквівалентності, побудованим на основі рівності "великої" кількості координат в сенсі ультрафільтра на натуральних числах (детальніше про розширення фільтра Фреше до ультрафільтра описано у [5]).

В результаті, для впорядкованих полів отримали наступні властивості, еквівалентні до повноти за Дедекіндом (схематично).

$$\textit{Головні розрізи} \iff \textit{повнота за Дедекіндом} \iff \textit{Кантор + Архімед}$$
$$\iff \textit{Існування супремуму}$$

Попередні відомості

Надалі під "повнотою" маємо на увазі повноту за Дедекіндом, під "розрізом" маємо на увазі розріз Дедекінда, а під "впорядкованою множиною" — лінійно впорядковану множину.

Впорядкованою множиною називаємо математичну структуру $(S, <)$, де відношення $<$ є іррефлексивним, транзитивним і лінійним (всі елементи S порівняльні).

Впорядкованим полем називаємо математичну структуру $(S, <, +, \cdot, 0, 1)$, яка є одночасно полем і впорядкованою множиною, наділеною відношенням $<$ сумісним з операціями $+, \cdot$.

Пишучи $A = \downarrow A$, маємо на увазі, що множина A збігається зі своїм нижнім класом, тобто разом з кожним своїм елементом містить всі менші елементи простору. Аналогічно під $B = \uparrow B$ маємо на увазі, що множина B збігається зі своїм верхнім класом, тобто разом з кожним своїм елементом містить всі більші елементи простору.

Якщо елементом нерівності є множина, то маємо на увазі, що нерівність виконується для кожного елемента цієї множини. Наприклад, пишучи $a < A$, розуміємо, що

$\forall x \in A : a < x$.

Зліченною називаємо множину, з якої можна побудувати ін'єктивне відображення у множину натуральних чисел $\mathbb{N}$. Зауважимо, що непорожня множина A є зліченною тоді і тільки тоді, коли $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ для деякої послідовності $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Вільні та головні розрізи Дедекінда. Їх зв'язок з повнотою.

Визначення розрізу Дедекінда, запропоноване нами нижче, дещо відрізняється від стандартних, описаних, наприклад, у [1, 2]. Така модифікація зумовлена низкою обґрунтованих згодом міркувань, зокрема, прагненням до зручності та ефективності використання цього визначення.

Означення. *Впорядкована пара (A, B) непорожніх неперетинних підмножин деякої лінійно впорядкованої множини $(S, <)$ називається* розрізом Дедекінда *в множині S, якщо множина A не має максимального елемента, множина B не має мінімального елемента і виконується наступна умова*

$$\forall a, b \in S : (a < b) \implies (a \in A \vee b \in B.) \tag{1}$$

Для (дещо комплексної) умови (1), справедлива наступна характеризація.

Твердження 1. *Нехай $(S, <)$ лінійно впорядкована множина, непорожня підмножина $A \subset S$ не має максимуму, непорожня підмножина $B \subset S$ не має мінімуму і множини A, B неперетинні.*

Пара множин (A, B) є розрізом Дедекінда тоді і тільки тоді, коли $A = {\downarrow}A$, $B = {\uparrow}B$ і об'єднання $A \cup B$ покриває всю множину S за винятком, можливо, однієї точки.

Доведення. Нехай маємо розріз Дедекінда (A, B). Припустимо, що $A \neq {\downarrow}A$, тобто для деякого елемента $a \in A$

$$(\exists\, c \in S \setminus A) : c < a$$

Тоді за умовою (1) отримаємо $a \in B$, що суперечить неперетинності множин A і B. Отже, $A = {\downarrow}A$. Аналогічно отримуємо $B = {\uparrow}B$.

Тепер припустимо, що об'єднання $A \cup B$ не покриває більше однієї точки множини S, зокрема не покриває дві різні точки $a, b \in S$. За лінійністю порядку ці точки порівняльні, тому нехай для визначеності $a < b$. Звідси за умовою (1) отримуємо $(a \in A) \vee (b \in B)$, що суперечить непокритості обидвох точок об'єднанням $A \cup B$. Необхідність доведено.

Нехай тепер множини A, B такі, як сказано в умові твердження, і $A = {\downarrow}A$, $B = {\uparrow}B$, об'єднання $A \cup B$ покриває всю множину S за винятком, можливо, однієї точки. Перевіримо виконання умови (1). Нехай маємо $a, b \in S : a < b$. З умови $|S \setminus (A \cup B)| \leq 1$ отримаємо, що $a \in (A \cup B) \vee b \in (A \cup B)$. Якщо $a \in (A \cup B)$, то $a \in A$ або $a \in B$, звідки, враховуючи $B = {\uparrow}B$, отримуємо $b \in B$. Якщо $b \in (A \cup B)$, то $b \in B$ або $b \in A$, звідки, враховуючи $A = {\downarrow}A$, отримуємо $a \in A$. В кожному випадку, $a \in A$ або $b \in B$. Отже, умова (1) виконується і пара множин (A, B) є розрізом Дедекінда. □

Природно з твердження 1 випливає наступна класифікація розрізів Дедекінда.

Означення. *Розріз Дедекінда* (A, B) *у лінійно впорядкованій множині* $(S, <)$ *називають* вільним розрізом, *якщо* $A \cup B = S$, *тобто немає непокритої точки.*

Означення. *Розріз Дедекінда* (A, B) *у лінійно впорядкованій множині* $(S, <)$ *називають* головним розрізом, *якщо* $A \cup B \neq S$, *тобто множини* A *і* B *розділяє єдина непокрита точка.*

З нової класифікації розрізів Дедекінда, введеної вище, отримуємо наступну властивість лінійно впорядкованої множини, еквівалентну до повноти за Дедекіндом.

Теорема 1. *Лінійно впорядкована множина* $(S, <)$ *є повною за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли кожен розріз Дедекінда в* S *є головним.*

Доведення. Нехай лінійно впорядкована множина $(S, <)$ повна за Дедекіндом.

Припустимо протилежне, тобто що існує розріз Дедекінда (A, B) у множині S, який не є головним, тобто $A \cup B = S$. Оскільки (A, B) розріз, то множини A і B непорожні і $A < B$. Тоді з повноти множини S за Дедекіндом маємо

$$\exists\, c \in S : A \leq c \leq B.$$

Оскільки об'єднання $A \cup B$ покриває всю множину S, то елемент c лежить в одній з множин A, B. Якщо $c \in A$, то, враховуючи нерівність $A \leq c$, c є максимальним елементом множини A. Якщо ж $c \in B$, то, враховуючи іншу частину нерівності $c \leq B$, c є мінімальним елементом B. Кожен з цих випадків суперечить означенню розрізу Дедекінда, а тому кожен розріз Дедекінда в S є головним.

Нехай тепер кожен розріз Дедекінда в S є головним. Візьмемо довільну пару множин (A, B), які задовольняють умови, накладені на пару множин в означенні повноти за Дедекіндом, тобто A, B непорожні, $A \cup B = S$ і $A < B$.

Якщо множина A має максимальний елемент c або множина B має мінімальний елемент c, то $A \leq c \leq B$ і c є шуканим елементом і множина S повна за Дедекіндом. В іншому випадку ми стверджуємо, що пара множин (A, B) буде розрізом Дедекінда в S. Для цього залишилось показати, що вона задовольняє умову (1). Маємо $A \cup B = S$. Також $A = {\downarrow}A$, бо якщо припустимо протилежне, що для деякого $a \in A$ маємо $\exists\, a^* \in S \setminus A : a^* < a$ отримуємо $a^* \in B$, що суперечить $A < B$. Аналогічно можна показати, що $B = {\uparrow}B$.

Таким чином, за твердженням 1 пара (A, B) є розрізом Дедекінда в S. Оскільки кожен розріз Дедекінда в S головний, то $A \cup B \neq S$, а це суперечність, яка показує, що розглянутого випадку, коли множина A не має максимуму, а множина B не має мінімуму, не може існувати. □

Запропонований нетрадиційний підхід до введення розрізів Дедекінда може бути застосований, наприклад, для зручнішого введення структури дійсних чисел при застосуванні методу поповнення раціональних чисел розрізами Дедекінда (стандратний варіант описаний, наприклад, у [1]) і для більш лаконічного доведення властивостей цієї структури.

Зауваження 1. *Таке застосування можливе завдяки тому, що означені нами головні і вільні розрізи Дедекінда є зручними моделями для раціональних і ірраціональних чисел відповідно.*

Нехай маємо впорядковане поле раціональних чисел $\mathbb{Q}$. *Раціональне число* $q \in \mathbb{Q}$ *може бути ототожнене з головним розрізом дедекінда* $(\overleftarrow{q}, \overrightarrow{q})$, *де*

$$\overleftarrow{q} = \{q^* \in \mathbb{Q} \mid q^* < q\} \text{ і } \overrightarrow{q} = \{q^* \in \mathbb{Q} \mid q^* > q\},$$

а множина ірраціональних чисел може бути подана, як множина всіх вільних розрізів Дедекінда

$$\mathbb{I} = \{(A, B) \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} | (A, B) \text{ вільний розріз Дедекінда}\}$$

Таким чином множина $\mathbb{R}$, *отримана при поповненні* $\mathbb{Q}$ *вільними розрізами Дедекінда* $\mathbb{I}$ *буде складатися тільки з розрізів Дедекінда. Ця однорідність спростить введеня операцій і порядку на* $\mathbb{R}$, *а також доведення аксіом поля, впорядкованої множини і повноти за Дедекіндом.*

Аксіоми Кантора і Архімеда як альтернатива повноти

Означення. *Впорядковане поле* $(S, <, +, \cdot, 0, 1)$ *задовольняє* аксіому Архімеда, *якщо*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N}) : n \cdot \varepsilon > 1$$

Означення. *Впорядкована множина* $(S, <)$ *задовольняє* аксіому Кантора, *якщо довільна послідовність вкладених відрізків з* S *має непорожній перетин. Тобто*

$$\forall([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N}\, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]) \implies \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Твердження 2. *Лінійно впорядкована множина* $(S, <)$ *задовольняє аксіому Кантора тоді і тільки тоді, коли довільна послідовність вкладених відрізків* $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *з* S *така, що послідовності* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *і* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *є строго монотонними, має непорожній перетин.*

Доведення. Необхідність напряму випливає з означення аксіоми Кантора. Доведемо достатність. Нехай маємо довільну послідовність вкладених відрізків $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$.

Припустимо, що $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists\, m \in \mathbb{N}) : (a_n < a_m) \wedge (b_m < b_n)$. Тоді можемо побудувати підпослідовність вкладених відрізків $([a_{n_k}, b_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$, в якої відповідні послідовності кінців відрізків є строго монотонними. Застосувавши умову теореми отримаємо, що існує $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[a_{n_k}, b_{n_k}]$. Розглянемо довільний відрізок $[a_n, b_n]$ з початкової послідовності. Взявши $k \in \mathbb{N}$ таке, що $n < n_k$, отримаємо, що $c \in [a_{n_k}, b_{n_k}] \subseteq [a_n, b_n]$. Таким чином $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

Тепер нехай $(\exists\, n^* \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) : (a_m \leq a_{n^*}) \vee (b_{n^*} \leq b_m)$. Оскільки маємо вкладені відрізки, то $\forall m > n^*$ маємо $a_m = a_{n^*}$, або $\forall m > n^*$ маємо $b_{n^*} = b_m$, що в свою чергу дає $\{a_{n^*}, b_{n^*}\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$. Звідки $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$.

В обох випадках (які є взаємно протилежними) аксіома Кантора задовольняється. Теорему доведено. $\square$

Відомим фактом [6, 7] є наступна теорема про еквівалентність між повнотою за Дедекіндом і виконанням аксіом Кантора та Архімеда.

Теорема 2. *Впорядковане поле $(S, <, +, \cdot, 0, 1)$ є повним за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли воно задовольняє аксіому Кантора та аксіому Архімеда.*

Доведення. Дивитись у [6, 7]. □

Зауважимо, що аксіома Кантора і повнота за Дедекіндом є порядковими властивостями, в той час як аксіома Архімеда потребує наявності операцій. Природно виникає запитання про зв'язок згаданих порядкових аксіом при відсутності операцій.

Теорема 3. *Якщо впорядкована множина $(S, <)$ є повною за Дедекіндом, то вона задовольняє аксіому Кантора.*

Доведення. Нехай маємо впорядковану множину $(S, <)$, яка є повною за Дедекіндом. Припустимо, що аксіома Кантора не задовольняється, тобто існує послідовність вкладених відрізків $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ з множини S, така що $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \varnothing$. Причому за твердженням 2 можемо вважати, що послідовності кінців цих відрізків строго монотонні. Задамо множини A та B наступним чином

$$A = \{a \in S \mid a < a_1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, a_{n+1}]$$

$$B = \{b \in S \mid b_1 < b\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[b_{n+1}, b_n].$$

Переконаємось що задані множини задовольняють умови, накладені на пару множин в означенні повноти за Дедекіндом. За побудовою множин очевидно, що $A, B \subseteq S$ і $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$. За припущенням $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \varnothing \implies A \cup B = S$. Оскільки послідовності кінців відрізків є строго монотонними, то кожен відрізок $[a_n, b_n]$ невироджений. Тобто $a_n < b_n$ для всіх $n \in \ltimes$, звідки отримаємо $A < B$. Таким чином, з повноти множини S за Дедекіндом, отримаємо

$$(\exists c \in S)(\forall a \in A)(\forall b \in B) : a \leq c \leq b.$$

Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $a_n \in A, b_n \in B$, то отримаємо $\forall n \in \mathbb{N} : c \in [a_n, b_n]$, що суперечить припущенню. Отже, аксіома Кантора задовольняється. □

Теорема 4. *Якщо впорядкована множина $(S, <)$, яка містить зліченну всюди щільну підмножину Q, задовольняє аксіому Кантора, то вона є повною за Дедекіндом.*

Доведення. Нехай маємо впорядковану множину $(S, <)$, яка задовольняє аксіому Кантора і містить зліченну всюди щільну підмножину Q.

Візьмемо довільні множини A, B, які задовольняють умови, накладені в означенні повноти за Дедекіндом, тобто A, B непорожні, $A < B$ і $A \cup B = S$. Якщо множина A містить максимальний елемент c або множина B містить мінімальний елемент c, то c і є шуканим, таким що $A \leq c \leq B$ і S повна за Дедекіндом.

Розглянемо випадок, коли множина A не має максимуму, а множина B не має мінімуму. Оскільки всюди щільна множина Q злічення, а множини A, B непорожні, то можемо окремо занумерувати елементи з Q, які належать множині A, і елементи з Q, які належать множині B. Нехай $A \cap Q = \{a_1, a_2, \dots\}$ і $B \cap Q = \{b_1, b_2, \dots\}$ довільні нумерації відповідних множин (можливо з повтореннями). Тепер утворимо з цих довільних нумерацій послідовності $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(b_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, задавши їх наступним чином.

$$a_n^* = \max\{a_1, \dots, a_n\} \quad \text{та} \quad b_n^* = \min\{b_1, \dots, b_n\}$$

Очевидно, що послідовність $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно неспадна, а послідовність $(b_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно незростаюча. Тому ми отримали послідовність вкладених відрізків $([a_n^*, b_n^*])_{n\in\mathbb{N}}$. За аксіомою Кантора існує такий елемент $c \in S$, що $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n^*, b_n^*]$. Покажемо, що $A \leq c \leq B$.
Припустимо протилежне, тобто що існує такий елемент $a' \in A$, що $c < a'$. Оскільки множина A не має максимуму, то існує елемент $a'' \in A$ такий, що $c < a' < a''$. Тоді оскільки інтервал (c, a'') непорожній, то за всюди щільністю множини Q між елементами c і a'' існує деякий елемент $a_k \in Q$ і, як наслідок, для нього правильна нерівність $c < a_k \leq a_k^*$. Враховуючи, що a_k^* є лівим кінцем k-го вкладеного відрізка, отримана нерівність суперечить тому, що елемент c належить всім вкладеним відрізкам. Отже, $A \leq c$. За аналогічними міркуваннями $c \leq B$. Таким чином $A \leq c \leq B$ і S повна за Дедекіндом. $\square$

З теореми 2 і теорем 3, 4 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1. *Якщо впорядковане поле, яке містить зліченну всюди щільну підмножину, задовольняє аксіому Кантора, то воно задовольняє аксіому Ахімеда.*

Цей наслідок дає нам змогу досліджувати наявність зліченної всюди щільної підмножини в складніших структурах, таких як, наприклад, нестандартна дійсна пряма. Детальніше означення цієї структури та доведення виконання аксіом впорядкованого поля розглянуте, наприклад, у [3, 4, 5].

Нехай $\mathcal{U}$ вільний ультрафільтр на ω, який є розширенням фільтра Фреше $\mathcal{F}_r = \{A \subseteq \omega \mid \omega \setminus A \text{ скінченна множина}\}$. На множині $\mathbb{Q}^\omega = \{(a_n)_{n\in\omega} \mid \forall n \in \omega : a_n \in \mathbb{Q}\}$ задамо відношення еквівалентності $\sim$ наступним чином

$$(a_n)_{n\in\omega} \sim (b_n)_{n\in\omega} \iff \{n \in \omega \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Фактор–множину ${}^*\mathbb{R} = \{\sim(a_n)_{n\in\omega} \mid (a_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{Q}^\omega\}$ називатимемо нестандартною дійсною прямою. Надалі через $[\alpha]$ будемо позначати клас еквівалентності за відношенням $\sim$ з представником $\alpha = (a_n)_{n\in\omega}$. Також $\alpha(n)$ – n-тий член послідовності α.

Порядок і операції на ${}^*\mathbb{R}$ задаються наступним чином

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta], \qquad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta],$$

де $\alpha + \beta$ і $\alpha \cdot \beta$ – операції покоординатного додавання і множення послідовностей.

$$<_* = \{([\alpha], [\beta]) \in {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R} \mid \{n \in \omega \mid \alpha(n) < \beta(n)\} \in \mathcal{U}\}.$$

Теорема 5. *Нестандартна пряма* $({}^*\mathbb{R}, <_*, +, \cdot, 0, 1)$ *задовольняє аксіому Кантора.*

Доведення. Введемо позначення $u_k = [\alpha_k]$ і $v_k = [\beta_k]$. Розглядаємо довільну послідовність $([u_k, v_k])_{k\in\mathbb{N}}$ вкладених відрізків у впорядкованому полі ${}^*\mathbb{R}$. За твердженням 2 без зменшення загальності вважатимемо, що відповідні послідовності кінців відрізків є строго монотонними. Нам потрібно знайти принаймні один елемент $u \in {}^*\mathbb{R}$ такий, що $u \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[u_k, v_k]$, тобто $u_k <_* u <_* v_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Ми знаємо, що

$$u_1 <_* u_2 <_* u_3 <_* \cdots <_* v_3 <_* v_2 <_* v_1. \tag{2}$$

Але враховуючи означення порядку $<_*$, такі нерівності виконуються не для всіх членів відповідних послідовностей. Утворимо послідовність множин $\tilde{U}_k \subseteq \mathbb{N}$ таку, що

$$\tilde{U}_k = \{n \in \omega \mid \alpha_1(n) < \cdots < \alpha_k(n) < \beta_k(n) < \cdots < \beta_1(n)\}. \tag{3}$$

Тобто множина $\tilde{U}_k$ містить ті номери членів послідовностей-представників елементів з (2), для яких виконуються відповідні нерівності щонайменше для перших k вкладених відрізків. З побудови для всіх $k \in \mathbb{N}$ маємо $\tilde{U}_k \supseteq \tilde{U}_{k+1}$. Зауважимо також, що множину $\tilde{U}_k$ можна подати у вигляді наступного перетину

$$\tilde{U}_k = \left(\bigcap_{i=2}^{k}\{n \in \omega \mid \alpha_{i-1}(n) < \alpha_i(n)\}\right) \cap \{n \in \omega \mid \alpha_k(n) < \beta_k(n)\} \cap \left(\bigcap_{i=2}^{k}\{n \in \omega \mid \beta_i(n) < \beta_{i-1}(n)\}\right).$$

Причому, враховуючи нерівності (2), кожна з використаних множин належить ультрафільтру $\mathcal{U}$ за означенням порядку $<_*$. А отже, $\tilde{U}_k \in \mathcal{U}$ як перетин скінченної кількості множин з ультрафільтра $\mathcal{U}$.

Тепер додатково перетнемо кожну з множин $\tilde{U}_k$ з променем натуральних чисел $[k, +\infty) = \{n \in \omega \mid n \geq k\}$, отримавши при цьому послідовність $(U_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\tilde{U}_k \cap [k, +\infty))_{k\in\mathbb{N}}$. Враховуючи, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ маємо $[k, +\infty) \supset [k+1, +\infty)$ і $[k, +\infty) \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{U}$, ми не втратимо згаданих вище властивостей послідовності $(\tilde{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ при переході до послідовності $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$, але тепер також матимемо $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \varnothing$. Це дозволить нам коректно задати шукані елементи.

Задамо два елементи $u = [\alpha(n)], v = [\beta(n)]$ з ${}^*\mathbb{R}$ наступним чином

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ \forall n \in (U_k \setminus U_{k+1}): \quad \alpha(n) = \alpha_k(n) \quad \text{та} \quad \beta(n) = \beta_k(n). \tag{4}$$

Таким чином, ми задали тільки ті члени послідовностей-представників елементів u, v, номери яких входили в U_1. Щоб задання було коректним, довизначимо

$$\forall n \in (\mathbb{N} \setminus U_1): a(n) = \alpha_1(n), \beta(n) = \beta_1(n).$$

З того що $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in U_k) : \alpha_k(n) < \beta_k(n)$ за побудовою (3), випливає $\{n \in \omega \mid \alpha(n) < \beta(n)\} \supseteq U_1 \in \mathcal{U}$, тобто $u <_* v$.

Зафіксуємо довільне $k^* \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх натуральних $k > k^*$ за побудовою (3), (4) маємо

$$\forall n \in U_k \setminus U_{k+1} : \alpha_{k^*}(n) < \alpha_k(n) = \alpha(n) < \beta(n) = \beta_k(n) < \beta_{k^*}(n).$$

А отже, таке твердження правильне і для всіх $n \in \bigcup_{k=(k^*+1)}^{\infty}(U_k \setminus U_{k+1}) = U_{k^*+1}$. В результаті отримали, що $U_{k^*+1} \subseteq \{n \in \omega \mid \alpha_{k^*}(n) < \alpha(n) < \beta(n) < \beta_{k^*}(n)\}$. Звідси, оскільки $U_{k^*+1} \in \mathcal{U}$, отримуємо $u_{k^*} <_* u <_* v <_* v_{k^*}$ для довільного $k^* \in \mathbb{N}$. А це означає, що $[u, v] \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty}[u_k, v_k]$, тобто перетин довільної послідовності вкладених відрізків в ${}^*\mathbb{R}$ не тільки містить хоча б одну точку з ${}^*\mathbb{R}$, а й містить цілий невироджений відрізок $[u, v]$ з ${}^*\mathbb{R}$. Отже, впорядковане поле $({}^*\mathbb{R}, <_*, +, \cdot, 0, 1)$ задовольняє аксіому Кантора. □

Теорема 6. *Нестандартна пряма* $({}^*\mathbb{R}, <_*, +, \cdot, 0, 1)$ *не задовольняє аксіому Архімеда.*

Доведення. Приклад нескінченно малого/великого числа побудовано у [5]. □

Таким чином, з теорем 5, 6 та наслідку 1 випливає наступне.

Наслідок. *Модель нестандартних дійсних чисел* $({}^*\mathbb{R}, <_*, +, \cdot, 0, 1)$ *не містить зліченної всюди щільної підмножини.*

Список літератури

[1] Goldrei D. Classic Set Theory – For guided independent study. Chapman & Hall, London, 1996.

[2] Landau E. Grundlagen der Analysis: das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.

[3] Krapp L. Constructions of the real numbers a set theoretical approach. Oxford, 2014.

[4] Lindstrom T. An invitation to nonstandard analysis. Cambridge University Press, London, 1988.

[5] Garcia M. *Filters and Ultrafilters in Real Analysis*, 2012, https://arxiv.org/abs/1212.5740

[6] Bartle R., Sherbert D. Introduction to Real Analysis. John Wiley & Sons, USA, 1982.

[7] Tao T. Analysis I. Springer, Heidelberg, 2006.

Надійшло 27.11.2024

Mazurenko O.V. *On some properties of ordered structures equivalent to Dedekind completeness*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 98–107.

As is well known, the Dedekind completeness is one of fundamental concepts of Real Analysis, arising immediately in the construction of the real number line. Since this property has numerous applications in various contexts, it is natural to consider alternative properties equivalent to Dedekind completeness. This paper focuses on expressing the property of Dedekind completeness through Dedekind cuts. The definition of cuts has been slightly modified, so that rational and irrational numbers are defined uniformly as principal and free cuts, which allows to simplify the routine verification of standard properties of real numbers.

The Cantor and Archimedean axioms are also examined as alternatives to Dedekind completeness in ordered fields. Furthermore, the relationship between the Cantor axiom and

Dedekind completeness (which, unlike the Archimedean axiom, are purely order-theoretic properties) is explored in ordered sets, where they are shown to be equivalent under the presence of a countable dense subset. From these relationships, a criterion for the existence of a countable dense subset in nonstandard models of real numbers is derived. These models differ from the standard model of real numbers by failing to satisfy one of second-order axioms, in this case, the Archimedean axiom.

Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 2, 108–118 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №2, 108–118

Макарчук. О.П.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА МОДУЛЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є-СТІЛЬТЬЄСА ОДНОГО КЛАСУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ

Досліджуються асимптотичні властивості перетворення Фур'є-Стілтьєса одного класу узагальнених згорток Бернуллі. Акцент здійснюється на знаходження необхідних та достатніх умов рівності нулю, одиниці значення верхньої границі L на нескінченності модуля відповідного перетворення Фур'є-Стілтьєса. Обчислено значення величини L при певних умовах, накладених на елементи відповідної згортки.

Ключові слова і фрази: нескінченні згортки Бернуллі, випадковий ряд, теорема Джессена-Вінтнера, числа Пізо-Віджаярагхавана, асимптотична поведінка модуля характеристичної функції на нескінченності.

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Tereshchenkivska St., 3, Kyiv, 01024, Ukraine
e-mail: *makolpet@gmail.com; makarchuk@imath.kiev.ua*

Вступ

Алгебраїчне число $\lambda > 1$ називається числом Пізо (Пізо-Віджаярагхавана), якщо його мінімальний многочлен

$$f(x;\lambda) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + ... + a_1x + a_0 \ \ (a_k \in Z \ \ \forall k \in \{0;...;r-1\}) \tag{1}$$

має нулі $\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_{r-1}$, причому $|\lambda_j| < 1$ для кожного $j \in \{1;...;r-1\}$. Нехай $||t||$ — відстань від t до найближчого цілого числа. Для алгебраїчного числа x степеня n під $Q(x)$ будемо розуміти поле чисел виду $a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$, де $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in Q$, з відповідними арифметичними операціями. В роботах [13, 16] була доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай дійсні числа $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$, $\beta_1, \beta_2 > 1$, причому β_2 — алгебраїчне число. Умови*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sin^2(\pi\alpha_1\beta_1^n) < +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} ||\alpha_2\beta_2^n|| = 0,$$

виконуються тоді і тільки тоді, коли β_1, β_2 — числа Пізо та $\alpha_1 \in Q(\beta_1)$, $\alpha_2 \in Q(\beta_2)$.

УДК 517.57
2010 *Mathematics Subject Classification:* 42-11.
This work was supported by a grant from the Simon Foundation (1290607, M. O. P.).

Нехай $M(\cdot)$ — математичне сподівання. Для характеристичної функції $f_\tau(t) = M(e^{it\tau})$ випадкової величини τ розглянемо значення

$$L_\tau = \overline{\lim_{|t|\to+\infty}} |f_\tau(t)|.$$

Добре відомо [7], що для довільного дискретного розподілу τ відповідно $L_\tau = 1$. Якщо розподіл τ абсолютно неперервний, то $L_\tau = 0$. Для сингулярного розподілу τ, як відомо [14], величина L_τ може набувати довільного значення з відрізку $[0; 1]$.

Нехай $\eta \in (1; +\infty)$, $m \in N$, $m > 1$, (ψ_k) — послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин, які набувають значень 0, 1,...,$m-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{(m-1)k}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \eta^{-k}.$$

Якщо $m = 2$, то ймовірнісна міра $P_\psi(\cdot)$ є нескінченною згорткою Бернуллі, яка була предметом багатьох досліджень [12, 15]. За теоремою Джессена-Вінтнера [10] та теоремою Леві [11] ψ має чисто неперервний розподіл. Як відомо [12], випадкова величина ψ має сингулярний розподіл канторівського типу при $\eta > 2$. Нехай S^* та A^* — це множини чисел $\eta \in (1; 2)$, для яких розподіл ψ сингулярний та абсолютно неперервний відповідно. Відомо [12], що множина A^* має повну міру Лебега. Найбільш повно A^* була описана в роботі [9]. Як було показано в [8], числа Пізо інтервалу $(1; 2)$ належать множині S^*, причому $L_\psi > 0$ лише тоді, коли η — числа Пізо з множини $(1; +\infty) \setminus \{2\}$. Інші приклади чисел з S^*, крім вказаних, на даний час не відомі.

В роботі [5] для випадку $\eta \in N$ були знайдені достатні умови того, що $L_\psi > 0$ та було проаналізовано питання розкладу $F_\psi(x)$ у вигляді згортки двох функцій розподілу, одна з яких є абсолютно неперервною. В роботах [1, 2] та [6] були знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для випадків $\eta = m = 2$, $\eta = m = 3$ та $\eta = 2, m = 3$ відповідно. В [3] були знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для випадку $\eta = m \in N$. Для випадку $\eta \in N$ в статті [4] було обраховано величину L_ψ та були знайдені необхідні і достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для достатньо широких умов, накладених на матрицю $||p_{jn}||$.

В даній роботі розглянуто випадок, коли η є ірраціональним число Пізо. Знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$ (для достатньо широких умов накладених на матрицю $||p_{jn}||$), $L_\psi = 1$ (в загальному випадку). Обраховано значення L_ψ при певних обмеженнях, накладених на матрицю $||p_{jn}||$.

1 Необхідні та достатні умови того, що $L_\psi \in \{0; 1\}$.

Для ірраціонального числа Пізо λ з мінімальним многочленом (1) позначимо

$$\Delta_k = \lambda^k + \lambda_1^k + ... + \lambda_{r-1}^k, \quad \Delta_k^* = \lambda_1^k + ... + \lambda_{r-1}^k$$

та розглянемо множину $R_\lambda[a; b]$ чисел $t \in [a; b]$ таких, що

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sin^2(\pi t \lambda^n) < +\infty. \tag{2}$$

Лема 1. *Для кожного проміжку $[a;b]$ множина $R_\lambda[a;b]$ є зчисленною всюди щільною в $[a;b]$.*

Доведення. Враховуючи теорему 1, маємо $R_\lambda[a;b] \in Q(\lambda) \cap [a;b]$, звідки $R_\lambda[a;b]$ є не більш ніж зчисленною. Розглянемо множину

$$C_\lambda = \left\{ \frac{b_{r-1}\lambda^{r-1} + b_{r-2}\lambda^{r-2} + ... + b_1\lambda + b_0}{\lambda^w} \middle| b_0, b_1, ..., b_{r-1} \in Z, w \in Z_+ \right\}$$

та покажемо, що $C_\lambda \subseteq R_\lambda(-\infty;+\infty)$. Відомо [13], що $\Delta_k \in Z$ для кожного $k \in N$. Таким чином, для числа $z \in C_\lambda$ маємо

$$\sum_{n=w+1}^{+\infty} sin^2(\pi z \lambda^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} sin^2\left(\pi\lambda^n \sum_{j=0}^{r-1} b_j\lambda^j\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} sin^2\left(\pi \sum_{j=0}^{r-1} b_j\Delta_{n+j} - \pi \sum_{j=0}^{r-1} b_j\Delta^*_{n+j}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} sin^2\left(\pi \sum_{j=0}^{r-1} b_j\Delta^*_{n+j}\right) < +\infty,$$

адже

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{r-1} |b_j| \left(|\lambda_1|^{n+j} + ... + |\lambda_{r-1}|^{n+j}\right) < +\infty.$$

Оскільки для фіксованих цілих чисел $c_2, c_3, ..., c_{r-1}$ множина

$$\{c_{r-1}\lambda^{r-1} + c_{r-2}\lambda^{r-2} + ... + c_2\lambda^2 + u\lambda + v | u, v \in Z\},$$

за теоремою Кронекера, всюду щільна на R, то множина $R_\lambda[a;b]$ є зчисленною та всюду щільною в $[a;b]$. □

Лема 2. *Якщо $\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $t_1 = \frac{1}{5}$, $t_2 = \frac{\lambda+2}{5}$, то виконуються умови: $t_1 \notin R_\lambda(-\infty;+\infty)$, $t_2 \in R_\lambda(-\infty;+\infty)$, $t_2 \notin C_\lambda$.*

Доведення. Нехай (T_k) — класична послідовність Люка, тобто $T_0 = 2, T_1 = 1, T_{n+1} = T_n + T_{n-1}$ для кожного натурального n. Оскільки послідовність остач членів (T_k) при діленні на 5 утворює період $(2;1;3;4)$, то маємо

$$||t_1\lambda^n|| = \left|\left| \frac{T_n}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right|\right| > \frac{1}{6}$$

для достатньо великих n, а тому $t_1 \notin R_\lambda(-\infty;+\infty)$.

Легко бачити, що для кожного натурального k число $\frac{T_{k+1}+2T_k}{5}$ є натуральним, тому

$$sin^2(\pi t_2\lambda^n) = sin^2\left(\frac{\pi(T_{n+1}+2T_n)}{5} - \pi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \pi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) =$$

$$= sin^2\left(\pi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \pi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

звідки легко бачити, що $t_2 \in R_\lambda(-\infty;+\infty)$.

Нехай (A_n), (B_n) — послідовності цілих чисел такі, що

$$\lambda^n = A_n\lambda + B_n \;\; \forall n \in Z_+.$$

Зрозуміло, що $A_0 = 0, B_0 = 1, A_1 = 1, B_1 = 0$. Оскільки $\lambda^2 = \lambda + 1$, то для кожного $n \in Z_+$ маємо $A_{n+1}\lambda + B_{n+1} = \lambda^{n+1} = \lambda(A_n\lambda + B_n) = (A_n + B_n)\lambda + A_n$ і відповідно $A_{n+1} = A_n + B_n, B_{n+1} = A_n$.

Легко бачити, що (A_n) — послідовність Фібоначчі. Для кожного натурального n маємо

$$t_2\lambda^n = \frac{(\lambda+2)(A_n\lambda + A_{n-1})}{5} = \frac{1}{5}\left(\lambda^2 A_n + \lambda A_{n-1} + 2\lambda A_n + 2A_{n-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\left(\lambda(3A_n + A_{n-1}) + A_n + 2A_{n-1}\right).$$

Оскільки послідовність остач членів послідовності $(A_{k+1} + 2A_k)$ при діленні на 5 утворює період $(3;4;2;1)$, то $t_2 \notin C_\lambda$. □

Для кожного натурального n та $j \in \{1,...,m-1\}$ позначимо

$$B_{jn} = \sum_{\substack{0\le i<k\le m-1 \\ k-i=j}} p_{in}p_{kn}, \quad f_n(x) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jn}\sin^2(xj)$$

$$g_{n-1}(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} f_{n-1+k}\left(\frac{x}{\eta^k}\right). \tag{3}$$

Лема 3. *Виконується рівність*

$$|f_\psi(t)|^2 = g_0(0,5t).$$

Доведення. Враховуючи незалежність випадкових величин ψ_n, маємо

$$f_\psi(t) = E(e^{it\psi}) = \prod_{n=1}^{+\infty} E(e^{it\psi_n}).$$

Таким чином, маємо

$$\left|E\left(e^{it\psi_n}\right)\right|^2 = \left(\sum_{k=0}^{m-1} p_{kn}\cos\left(\frac{kt}{\eta^n}\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{m-1} p_{kn}\sin\left(\frac{kt}{\eta^n}\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} p_{kn}^2 + \sum_{0\le j<l\le m-1} 2p_{jn}p_{ln}\left(\cos\left(\frac{jt}{\eta^n}\right)\cos\left(\frac{lt}{\eta^n}\right) + \sin\left(\frac{jt}{\eta^n}\right)\sin\left(\frac{lt}{\eta^n}\right)\right) =$$

$$= 1 - \sum_{0\le j<l\le m-1} 4p_{jn}p_{ln}\left(\sin^2\left(\frac{(j-l)t}{2\eta^n}\right)\right) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jn}\sin^2\left(\frac{jt}{2\eta^n}\right) = f_n\left(\frac{t}{2\eta^n}\right).$$

□

Вірними [4] є наступні леми.

Лема 4. *Нехай (t_k) — послідовність, що збігається до деякого додатного числа t. Якщо послідовність $(g_n(t))$ є збіжною до 0, то і $(g_n(t_n))$ збігається до 0, де $g_n(t)$ визначені рівністю (3).*

Лема 5. *Нехай (t_k) — послідовність, що збігається до числа $t > 0$, (m_k) — зростаюча послідовність натуральних чисел, $(g_n(t))$ — послідовність функцій визначених рівністю (3). Послідовність $(g_{m_n}(t))$ збігається до числа $A > 0$ тоді і тільки тоді, коли $(g_{m_n}(t_n))$ збігається до числа $A > 0$.*

Теорема 2. *Нехай $\eta = \lambda$ — ірраціональне число Пізо та*

$$\varliminf_{n\to+\infty} B_{1n} > 0. \tag{4}$$

Рівність $L_\psi = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли для кожного $t \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}]$ виконується умова

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\psi(2\pi t\lambda^n)| = 0. \tag{5}$$

Доведення. Якщо $L_\psi = 0$, то для довільного $t \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}]$ умова (5) очевидно виконується. Нехай виконується умова (5). Припустимо, що $L_\psi > 0$. Нехай (πt_n) — зростаюча, необмежена зверху послідовність дійсних чисел така, що

$$\lim_{n\to+\infty} g_0(\pi t_n) = L_\psi^2.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{\pi t_n}{\lambda^{[log_\lambda(t_n)]+2}} < \frac{\pi t_n}{\lambda^{log_\lambda(t_n)+1}} = \frac{\pi}{\lambda}, \quad \frac{\pi t_n}{\lambda^{[log_\lambda(t_n)]+2}} \geq \frac{\pi t_n}{\lambda^{log_\lambda(t_n)+2}} = \frac{\pi}{\lambda^2}.$$

Оскільки послідовність $\left(\frac{\pi t_n}{\lambda^{[log_\lambda(t_n)]+2}}\right)$ обмежена, то з неї можна виділити збіжну підпослідовність, тобто існує зростаюча, необмежена зверху послідовність додатних дійсних чисел $(\widetilde{t_n})$ така, що

$$\lim_{n\to+\infty} |g_0(\pi\widetilde{t_n})| = L_\psi^2, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\widetilde{t_n}}{\lambda^{[log_\lambda(\widetilde{t_n})]+2}} = \gamma \in \left[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}\right].$$

Отже, нехай

$$\gamma_n^* = \frac{\widetilde{t_n}}{\lambda^{[log_\lambda(\widetilde{t_n})]+2}}, \quad h_n = [log_\lambda(\widetilde{t_n})] + 2.$$

Зрозуміло, що існує число $A > 0$ та $N_A \in N$ такі, що для кожного натурального $n > N_A$ виконується умова $B_{1n} > 0,25A$. Розглянемо випадки.

1) Нехай $\gamma \notin R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}]$. Зрозуміло, що ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} sin^2(\pi\gamma\lambda^n)$ є розбіжним, тому існує натуральне T таке, що

$$\sum_{n=1}^{T} sin^2(\pi\gamma\lambda^n) > -\frac{ln(0,08L_\psi)}{A}.$$

Зрозуміло, що існує натуральне N_1 таке, що для кожного $n > N_1$

$$sin^2(\pi\gamma_n^*\lambda^j) > sin^2(\pi\gamma\lambda^j) + \frac{ln(0,2)}{T} \ \ \forall j \in \{1;2;...;T\}.$$

Оскільки $1 - z \le e^{-z}$ для кожного $z \in R$, то для кожного $n > max(N_A; N_1)$ маємо

$$|f_\psi(2\pi t_n)|^2 \le \prod_{j=1}^{T} f_{h_n - j}(\pi\gamma_n^*\lambda^j) \le \prod_{j=1}^{T}(1 - Asin^2(\pi\gamma_n^*\lambda^j)) \le$$

$$\le e^{-\sum_{j=1}^{T} Asin^2(\pi\gamma_n^*\lambda^j)} \le e^{-ln(0,2) - \sum_{j=1}^{T} Asin^2(\pi\gamma\lambda^j)} \le e^{ln(0,08L_\psi) - ln(0,2)} = 0,4L_\psi.$$

Маємо суперечність з припущенням $L_\psi > 0$.

2) Нехай $\gamma \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}]$. Зрозуміло, що ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} sin^2(\pi\gamma\lambda^n)$ є збіжним, а тому є збіжним і ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} ||\pi\gamma\lambda^n||^2$.

Позначимо $H_m = 2\pi^2(1^2 + 2^2 + ... + (m-1)^2)$. Очевидно існує натуральне число G таке, що для кожного натурального $l \ge G$ виконується $\sum_{n=l}^{+\infty} ||\pi\gamma\lambda^n||^2 < \frac{1}{2H_m}$.

Зрозуміло, що для кожного натурального k та $j \in \{1; ...; m-1\}$

$$B_{jk} \le \sum_{0 \le j < l \le m-1} p_{jk}p_{lk} = \frac{1}{4}\left(2 - 2\sum_{j=0}^{m-1} p_{jk}^2\right) < \frac{1}{2}.$$

Таким чином, для кожного натурального l та $n \ge G$ виконується нерівність

$$f_l(\pi\gamma\lambda^n) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jl}\sin^2(\pi\gamma\lambda^n j) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jl}\sin^2(\pi j||\gamma\lambda^n||) \ge$$

$$\ge 1 - 2\pi^2||\gamma\lambda^n||^2 \sum_{j=1}^{m-1} j^2 = 1 - H_m||\gamma\lambda^n||^2.$$

Відомо, що для кожних $z_1, z_2, ..., z_s \in [0;1]$

$$\prod_{j=1}^{s}(1 - z_j) \ge 1 - \sum_{j=1}^{s} z_j. \tag{6}$$

Маємо

$$\prod_{j=1}^{n-G} f_j(\pi\gamma\lambda^{n-j}) \ge \prod_{j=1}^{n-G}(1 - H_m||\gamma\lambda^{n-j}||^2) \ge 1 - H_m\sum_{j=1}^{n-G}||\gamma\lambda^{n-j}||^2 \ge \frac{1}{2},$$

звідки враховуючи умову (5) при $t = \gamma$ отримуємо

$$\lim_{n\to+\infty} g_{n-G}(\pi\gamma\lambda^G) = 0,$$

а тому, за лемою 4,

$$\lim_{n\to+\infty} g_{h_n - G}(\pi\gamma_n^*\lambda^G) = 0.$$

Оскільки для достатньо великих n величина $g_0(\pi t_n) \le g_{h_n - G}(\pi\gamma_n^*\lambda^G)$, то маємо суперечність з припущенням $L_\psi > 0$. □

Теорема 3. *Нехай $\eta = \lambda$ — ірраціональне числа Пізо. Умова $L_\psi = 1$ виконується тоді і тільки тоді, коли*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{W_{n+k}}{\lambda^{2k}} = \frac{1}{\lambda^2 - 1}, \tag{7}$$

де $W_n = p_{0n}^2 + p_{1n}^2 + ... + p_{(m-1)n}^2$ для кожного натурального n.

Доведення. Якщо $L_\psi = 1$, то існує зростаюча необмежена зверху послідовність (t_n) така, що $|f_\psi(t_n)| \to 1$ $(n \to +\infty)$. Нехай $h_n = [\log_\lambda(\lambda(m-1)t_n)]$, тоді $\frac{(m-1)t_n}{\lambda^{h_n}} \in [\frac{1}{\lambda}; 1]$. Оскільки $sin(x) \le \frac{2x}{\pi}$ при $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, то для кожного $j \in Z_+$

$$f_{h_n+j}\left(\frac{t_n}{\lambda^{h_n+j}}\right) \le 1 - 4\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}\left(\frac{2lt_n}{\pi\lambda^{h_n+j}}\right)^2 \le$$

$$\le 1 - \left(\frac{2t_n}{\pi\lambda^{h_n+j}}\right)^2 4\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)} \le 1 - \frac{16}{\pi^2(m-1)^2}\frac{\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}}{\lambda^{2(1+j)}}.$$

Маємо

$$|f_\psi(t_n)| \le \prod_{j=0}^{+\infty} f_{h_n+j}\left(\frac{t_n}{\lambda^{h_n+j}}\right) \le$$

$$\le \prod_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{16}{\pi^2(m-1)^2}\frac{\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}}{\lambda^{2(1+j)}}\right) \le e^{\sum_{j=0}^{+\infty}\left(-\frac{16}{\pi^2(m-1)^2}\frac{\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}}{\lambda^{2(1+j)}}\right)},$$

звідки

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}}{\lambda^{2(1+j)}}\right) \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Оскільки $2\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)} = 1 - W_{h_n+j}$, то умова (7) виконується.

Нехай M — достатньо велике натуральне число та умова (7) виконується. Зрозуміло, що існує натуральне число k_M таке, що

$$S_M = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{2i}} \sum_{0\le j<l\le m-1} p_{j(k_M+i)} p_{l(k_M+i)} \le \frac{1}{M}.$$

Нехай $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge ... \ge |\lambda_{r-1}|$, $B_M = [log_\lambda(\sqrt[4]{M})]$, $A_M = k_M + B_M$. Зрозуміло, що для кожного $j \in \{1; 2; ...; k_M - 1\}$

$$f_j(\pi\lambda^{A_M-j}) \ge 1 - H_m||\pi\lambda^{A_M-j}||^2 = 1 - \pi^2 H_m(\Delta^*_{A_M-j})^2 \ge$$

$$\ge 1 - \pi^2 H_m(\sum_{l=1}^{r-1} |\lambda_l|^{A_M-j})^2 \ge 1 - \pi^2 H_m(r-1)^2|\lambda_1|^{2(A_M-j)}.$$

Враховуючи (6) маємо

$$\prod_{j=1}^{k_M-1} f_j(\pi\lambda^{A_M-j}) \ge 1 - \pi^2 H_m(r-1)^2 \sum_{j=1}^{k_M-1} |\lambda_1|^{2(A_M-j)} \ge$$

$$\geq 1-\pi^2 H_m(r-1)^2 \sum_{j=B_M+1}^{+\infty} |\lambda_1|^{2j} = 1-\frac{\pi^2 H_m(r-1)^2}{1-|\lambda_1|^2}|\lambda_1|^{2B_M+2}.$$

Оскільки для кожних $n \in N, r \in Z$ виконується нерівність

$$f_n(\pi\lambda^r) \geq 1-\pi^2(m-1)^2\lambda^{2r} \sum_{0\leq j<l\leq m-1} p_{jn}p_{ln},$$

то маємо:

$$\prod_{j=k_M}^{+\infty} f_j(2\pi\lambda^{A_M-j}) \geq 1-\pi^2(m-1)^2 \sum_{r=k_M}^{+\infty}\left(\lambda^{2(A_M-r)}\sum_{0\leq j<l\leq m-1} p_{jr}p_{lr}\right) =$$

$$= 1-\pi^2(m-1)^2\lambda^{2B_M}S_M \geq 1-\frac{\pi^2(m-1)^2\lambda^{2B_M}}{M} \geq 1-\frac{\pi^2(m-1)^2}{\lambda^2\sqrt{M}}.$$

Маємо:

$$|f_\psi(\pi\lambda^{A_M})|^2 \geq \left(1-\frac{\pi^2 H_m(r-1)^2}{1-|\lambda_1|^2}|\lambda_1|^{2B_M+2}\right)\left(1-\frac{\pi^2(m-1)^2}{\lambda^2\sqrt{M}}\right) \to 1 \ \ (M\to+\infty).$$

□

2 Значення величини L_ψ.

Теорема 4. *Нехай існують натуральні числа T та S такі, що для кожного натурального $n \geq S$*

$$p_{j(n+T)} = p_{jn} \quad \forall j \in \{0,1,...,m-1\},$$

причому виконується умова (4). Тоді виконується рівність

$$L_\psi^2 = \sup_{t\in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]}\left(\varlimsup_{n\to+\infty} g_0(\pi t\lambda^n)\right). \tag{8}$$

Доведення. Якщо для кожного $t \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$ виконується умова (5), то за теоремою 2 маємо $L_\psi = 0$. Нехай для деякого $t^* \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$

$$\varliminf_{n\to+\infty} |f_\psi(2\pi t^*\lambda^n)| > 0,$$

тоді зрозуміло, що $L_\psi > 0$. Розглянемо випадки.

1) Нехай $S = 1$. По аналогії з доведенням теореми 2 вводимо послідовність γ_n^* і переконуємось в тому, що для деякого $\gamma \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$ виконується умова

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_n^* = \gamma.$$

Зрозуміло, що для кожного $t \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$

$$L_\psi^2 \geq \varlimsup_{n\to+\infty} g_0(\pi t\lambda^n). \tag{9}$$

Зрозуміло, що для заданого натурального M границя $\lim_{n\to+\infty}\lambda^{MT}\gamma_n^* = \gamma\lambda^{MT}$ і враховуючи лему 5, маємо

$$\varlimsup_{n\to+\infty} g_{h_n-MT}(\lambda^{MT}\pi\gamma_n^*) = \varlimsup_{n\to+\infty} g_{h_n-M}(\lambda^{MT}\pi\gamma).$$

Оскільки для достатньо великих натуральних n виконується нерівність

$$g_0(\pi t_n) \le g_{h_n-MT}(\lambda^{MT}\pi\gamma_n^*),$$

то маємо

$$L_\psi^2 \le \varlimsup_{n\to+\infty} g_{h_n-MT}(\lambda^{MT}\pi\gamma) \le g_0(\lambda^{(M-1)T}\pi\gamma).$$

Оскільки остання нерівність виконується для довільного натурального M, то маємо

$$L_\psi^2 \le \varlimsup_{M\to+\infty} g_0(\lambda^{(M-1)T}\pi\gamma) \le \varlimsup_{k\to+\infty} g_0(\lambda^k\pi\gamma)$$

і враховуючи нерівність (9), отримаємо потрібне.

2) Нехай $S > 1$. Легко бачити, що для кожного $\gamma_1 \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$ та $l \in \{1;2;...;S-1\}$ виконується умова

$$f_l(\pi\gamma\lambda^n) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jl}\sin^2(\pi\gamma_1\lambda^n j) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jl}\sin^2(\pi j||\gamma_1\lambda^n||) \to 1(n\to+\infty),$$

звідки

$$\varlimsup_{M\to+\infty} g_0(\lambda^M\pi\gamma_1) = \varlimsup_{n\to+\infty} g_S(\lambda^n\pi\gamma_1),$$

що і вимагалось довести. □

Твердження 1. *Теорема 2 виражає необхідні умови того, що розподіл ψ є абсолютно неперервним. Предметом подальших досліджень може бути дослідження лебегівської структури розподілу ψ, знаходження необхідних та достатніх умов того, що $L_\psi \in \{0;1\}$ для випадку, коли η не є числом Пізо-Віджаярагхавана.*

Список літератури

[1] Goncharenko Y. V. *Asymptotic properties of the characteristic function of random variables with independent binary digits and convolutions of singular distributions*. Scientific notes of the NPU named after Drahomanova 2002. **3**, 376–390.(in Ukrainian)

[2] Goncharenko Y. V., Mykytyuk I. O. *Behavior of the modulus of the characteristic function of a random variable with independent s-adic digits at infinity*. Scientific notes of the NPU named after Drahomanova 2008. **9**, 121–127. (in Ukrainian)

[3] Makarchuk O.*Asymptotic behavior of the Fourier – Stieltjes transform of the distribution of a random power series*, Nonlinear Oscillations 2023, **26**, №4, 495 – 504. doi: 10.3842/nosc.v26i4.1450

[4] Makarchuk O. P. *Asymptotic behavior of the characteristic function of a Jessen-Wintner type distribution*, Bukovinian Mathematical Journal 2023, **11**, №2, 173 – 182. (in Ukrainian) doi: 10.31861/bmj2023.02.17

[5] Pratsiovyti M. V., Lytvynuk A. A.*Distributions of random variables represented by an s-adic fraction with an excess set of digitsDistributions of random variables represented by an s-adic fraction with an excess set of digits*, Scientific notes of the NPU named after Drahomanova 1999, **1**, 136 – 142. (in Ukrainian)

[6] Albeverio S., Goncharenko Y., Pratsiovyti M., Torbin G. *Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits.* Random Oper. Stochastic Equations 2007, **15**, №1, 89–97. doi: 10.1515/ROSE.2007.006

[7] Bohr H. *Fastperiodische Funktionen.* Berlin: J.Springer, (1932).

[8] Erdos P. *On a family of symmetric Bernoulli convolutions*, Amer. J. Math 1939, **61**, 974 – 975. doi: 10.2307/2371641

[9] Garsia A. *Arithmetic properties of Bernoulli convolutions*, Trans. Amer. Math. Soc 1962, **102**, 409 – 432. doi: 10.2307/1993615

[10] Jessen B., Wintner A. *Distribution function and Riemann Zeta-function.* Trans.Amer.Math.Soc 1935, **38**, 48–88. doi: 10.2307/1989728

[11] Levy P.*Sur les sries don't les termes sont des variables independantes.* Studia math 1931, **3**, 119–155. doi: 10.4064/sm-3-1-119-155

[12] Peres Y., Schlag W., Solomyak B. *Sixty years of Bernoulli convolutions* Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability 2000, **46**, 39 – 65. doi:10.1007/978-3-0348-8380-12

[13] Pisot C. *La repartition modulo 1 et nombres algebriques,* Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 1938, **27**, 205 – 248.

[14] Schvartz L. *Sur le module de la fonction caracteristicue du calcul des probabilites.* C.R.Acad.Sci.Paris 1941, **212**, 418–421.

[15] Solomyak B. *On the random series* $\sum \pm\lambda^n$ *(an Erdos problem)*, Annals of Math 1995, **142**, 611 – 625. doi: 10.2307/2118556.

[16] Vijayaraghavan T. *On the fractional parts of the powers of a number*, Proc. Cambridge Philos. Soc 1941,**37**, 349 – 357. doi: 10.1017/S0305004100017989

Надійшло 22.11.2024

Makarchuk O.P. *Asymptotic behavior of the Fourier-Stieltjes transform module of one class of generalized Bernoulli convolutions*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 108–118.

The paper investigates the asymptotic properties of the Fourier-Stieltjes transform modulus of a class of distributions of random series η, which is a generalization of classical symmetric Bernoulli convolutions. The corresponding random series η are sums of independent random variables η_k, each of which has a discrete distribution, and according to the Jessen-Wintner theorem, the distribution η is discrete or absolutely continuous or singular. According to the Levy theorem, the distribution η is discrete only if the infinite product composed of the maximum jumps η_k is convergent. Finding necessary and sufficient conditions for the distribution η to be absolutely continuous (singular) is a difficult and not completely solved problem at the moment. The main attention in this work is paid to finding necessary and sufficient conditions for the value of the upper bound of the modulus of the Fourier-Stiltjes transform of the corresponding class of distributions (of magnitude L) to be zero under certain asymptotic constraints imposed on the distributions of the terms of the random series η; finding necessary and sufficient conditions for the value of the value L to be one in the general case; calculating

the value of the value L under the condition that the corresponding distributions of the terms η are periodically repeated starting from some place.

For a discrete distribution η, the value of L is equal to one, for an absolutely continuous distribution η, the value of L is equal to zero, and for a singular distribution η, the value of L can take on an arbitrary value from the interval $[0;1]$. Thus, the value L is in a certain sense an indicator of the proximity of the distribution η to discrete, absolutely continuous and singular, respectively. If the distribution η is continuous and the value L is positive, then this allows us to state that η has a singular distribution. Measures corresponding to distributions η for which the value L is equal to zero belong to the class of Raichmann measures, which are of high scientific interest.

Малик І.В., Івасюк Р.В.

ПММ ТА НПМ У ЧАСОВИХ РЯДАХ

Основна увага в роботі сфокусована на розгляд, так званих, прихованих ланцюгів Маркова та їх аналогів і узагальнень. Зокрема розглянуто вплив прихованих ланцюгів Маркова та напівмарковських прихованих моделей на моделі часових рядів, які описують вартості акцій топових компаній станом на 2024 рік. Під час дослідження вдалося з'ясувати, що розгляд узагальненіших моделей дозволяє більш точно описувати динаміку вартості акцій, а отже, більш адекватно визначати основні характеристики реального процесу.

Ключові слова і фрази: приховані ланцюги Маркова, напівмарковські приховані моделі.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.malyk@chnu.edu.ua (Малик І.В.), ivasiuk.roman@chnu.edu.ua (Івасюк Р.В.)*

Вступ

Теорія прихованих ланцюгів Маркова інтенсивно розвивається із середини минулого століття і розвиток даної теорії насамперед пов'язано із наявністю великої кількості реальних процесів, динаміка яких залежить від інших (прихованих) випадкових процесів. Дана концепція знайшла своє впровадження в багатьох прикладних задачах, включаючи прогнозування фінансових часових рядів [1, 2, 3, 4], прогнозування погоди [5], прогнозування кліматичних змін на основі часових рядів [6, 7, 8, 9] тощо. Таким чином, випадкові процеси із врахуванням прихованих складових являються ще одним покращенням опису реальних процесів та врахування невідомих факторів в різних прикладних задачах.

Слід відмітити, що класичні моделі процесів, що містять приховані складові в основному грунтуються на припущенні про марковість прихованого процесу, тобто відсутність післядії. Дане припущення з одного боку дозволяє значно спростити оцінку параметрів моделі, з іншого боку ж звужує коло реальних процесів, для яких може бути використана теорія процесів із прихованими складовими. Враховуючи це, в роботі розглянуто напівмарковські приховані моделі, в яких час перебування в стані описується

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.
Information on some grant ...

не показниковим розподілом (як в класичній моделі), а довільним розподілом, що визначений на R_+, тобто
$$P(\theta_n \geq 0) = 1,$$
де $\theta_n(u)$ - час перебування в стані u.

1 Приховані марковські моделі у часових рядах

Приховані марковські моделі (ПММ) використовуються для моделювання часових рядів, де ймовірнісні розподіли спостережень визначаються невидимими станами скінченного стану Марковського ланцюга. У цих моделях робиться припущення, що спостереження X_t у момент часу t залежать від деякого неспостережуваного стану S_t, який є елементом скінченного набору станів $\{1, 2, ..., N\}$. Послідовність станів $\{S_t\}$ утворює ланцюг Маркова, що означає, що наступний стан залежить лише від поточного стану, а не від попередніх станів [5, 1, 2, 3, 4].

Ймовірність переходу між станами описується матрицею перехідних ймовірностей P, яка має розмір $N \times N$ і елементи p_{ij}, що представляють ймовірність переходу з стану i до стану j
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$
а самі ймовірності визначаються співвідношенням
$$p_{ij} = P(S_{t+1} = j | S_t = i).$$
Для кожного стану $S_t = j$ існує відповідний розподіл спостережень прихованого ланцюга X_t. Наприклад, якщо спостереження є нормально розподіленими, то $X_t \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, де μ_j і σ_j^2 є середнім і дисперсією спостережень у стані j.

Загальна формула для ймовірності спостереження X_t за умови стану S_t може бути записана як
$$P(X_t = x_t | S_t = j) = f_j(x_t),$$
де $f_j(x_t)-$ функція щільності ймовірності для стану j.

Параметри оцінюються за допомогою методу максимальної правдоподібності [5], часто реалізованого за допомогою алгоритму Баум-Велча (Baum-Welch algorithm), який є особливим випадком EM-алгоритму. Ці моделі виявилися корисними для моделювання різких змін у фінансових часових рядах, але мали обмеження у відображенні тривалості перебування в станах через показниковий розподіл.

2 Напівмарковські приховані моделі у часових рядах

Напівмарковські приховані моделі (НПМ) узагальнюють ПММ, дозволяючи більш гнучкі розподіли тривалості перебування в стані (часу перебування в даному стані). Ця гнучкість вирішує ключове обмеження ПММ, яке полягає в показниковому розподілі тривалості перебування.

Як і в ПММ, НПМ [5, 1] має скінченну кількість прихованих станів $S = \{s_1, s_2, ..., s_M\}$. Кожен стан відповідає певному режиму в часовому ряді. Перехід між станами описується матрицею перехідних ймовірностей $P = (p_{ij})$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., N\}$ але, на відміну від ПММ, НПМ дозволяє задавати тривалість перебування в кожному стані за допомогою розподілу, відмінного від показникового. У НПМ перехідна ймовірність визначається як ймовірність переходу в стан j, якщо відбувся вихід з поточного стану i. Ключова відмінність між НПМ і ПММ полягає у розподілі часу перебування в кожному стані. У ПММ тривалість перебування в стані геометрично розподілена, тоді як у НПМ може бути довільний розподіл тривалості перебування в стані j, який визначається функцією

$$d_j(u) = P(\text{ перебування в стані } j \text{ триває } u \text{ періодів}),$$

де $d_j(u)-$ це ймовірність того, що процес залишатиметься в стані j протягом u часових періодів. Кумулятивна функція розподілу або функція виживання визначається як

$$D_j(u) = \sum_{v \geq u} d_j(v).$$

Для кожного стану S_i визначено розподіл спостережень. Наприклад, якщо спостереження мають нормальний розподіл в кожному стані, то

$$X_t \sim N(\mu_j, \sigma_j^2),\ S_t = j,$$

де $X_t -$ спостереження в момент часу t, а μ_j і $\sigma_j^2 -$ середнє та дисперсія в стані $S_t = j$.

Подібно до ПММ, ймовірність спостережень залежить від послідовності станів. Ймовірність послідовності спостережень $O = \{O_1, O_2, ..., O_T\}$ задається як

$$P(O|\lambda) = \sum_S P(O|S, \lambda) P(S|\lambda),$$

де $\lambda = (P, d_j(u), B)$ – набір параметрів НПМ, включаючи матрицю перехідних ймовірностей P, розподіл тривалості перебування $d_j(u)$, та розподіл спостережень B.

НПМ краще моделюють властивість фінансових часових рядів - повільне спадання автокореляції у квадратах приростів - оскільки їх гнучкість дозволяє враховувати довгострокові залежності. ПММ, у свою чергу, обмежені своїм фіксованим набором станів та короткостроковими залежностями, тому не можуть точно змоделювати цю характеристику.

Квадрати приростів для часових рядів - це квадрат значення приросту (r_t) у кожний момент часу. Цей показник використовується для оцінки волатильності (мінливості) фінансових часових рядів, що є важливим аспектом аналізу ризику.

У статті розглянуто дві конкретні НПМ та зроблено порівняня їх відповідності до щоденних рядів прибутків з 18 європейських секторних індексів [10], демонструючи, що НПМ забезпечують значно кращу відповідність порівняно з ПММ. Також є аналіз прилягання моделей до часових рядів даних, що включає перевірку автокореляції у квадратах приростів.

Ці моделі показали кращу відповідність даним, зокрема у випадках повільного спадання автокореляції в квадратах прибутків. Вони забезпечують більш гнучке моделювання тривалості перебування в станах, що робить їх більш придатними для фінансових часових рядів.

3 Частинні випадки НПМ моделей

НПМ з негативно-біноміальним розподілом часу перебування складається з двох процесів: прихованого марківського процесу (стани) і видимого процесу (спостереження). Видимий процес залежить від невидимого стану, який змінюється відповідно до марківського процесу. Негативно-біноміальний розподіл використовується для опису часу перебування в кожному стані.

У НПМ з основним нормальним розподілом (SMN розподіл) спостереження в кожному стані мають нормальний розподіл. Якщо модель знаходиться в стані $S_t = j$, то спостереження X_t буде нормально розподіленим

$$X_t | S_t = j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2),$$

де μ_j– середнє значення, а σ_j^2– дисперсія в стані j.

У НПМ з основним розподілом Стьюдента (SMt розподіл) спостереження мають t-розподіл. Якщо модель знаходиться в стані $S_t = j$, то спостереження X_t буде розподіленим за t-розподілом з параметрами

$$X_t | S_t = j \sim t(v_j, \mu_j, \sigma_j^2),$$

де v_j– параметр ступенів свободи t-розподілу, μ_j– середнє значення, а σ_j^2– масштабний параметр (дисперсія) в стані j.

t-розподіл забезпечує важчі "хвости"у розподілі, що робить його більш придатним для моделювання фінансових даних із високою волатильністю і частими екстремальними значеннями. Правдоподібність для моделі SMN чи SMt розраховується шляхом підсумовування повної правдоподібності даних за всіма можливими шляхами, які може приймати процес переходу станів.

На відміну від попередніх моделей, SMN та SMt мають більшу гнучкість у моделюванні часу перебування в станах, що дозволяє їм точніше відображати залежності в даних, особливо для фінансових часових рядів, які характеризуються тривалими періодами як низької, так і високої волатильності. Завдяки цьому ці моделі здатні краще моделювати автокореляційні функції.

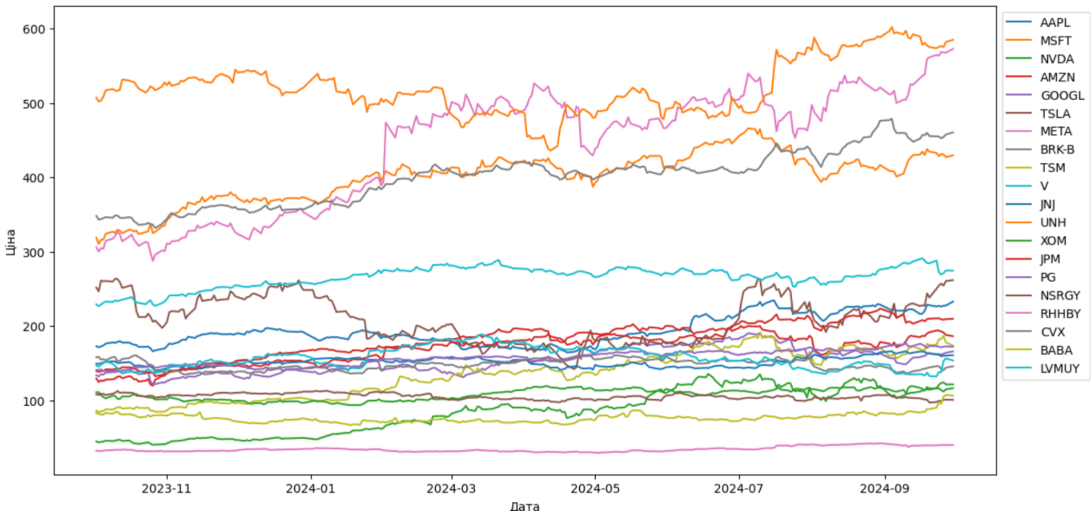


Рис. 1. Зміни вартості акцій різних компаній протягом року

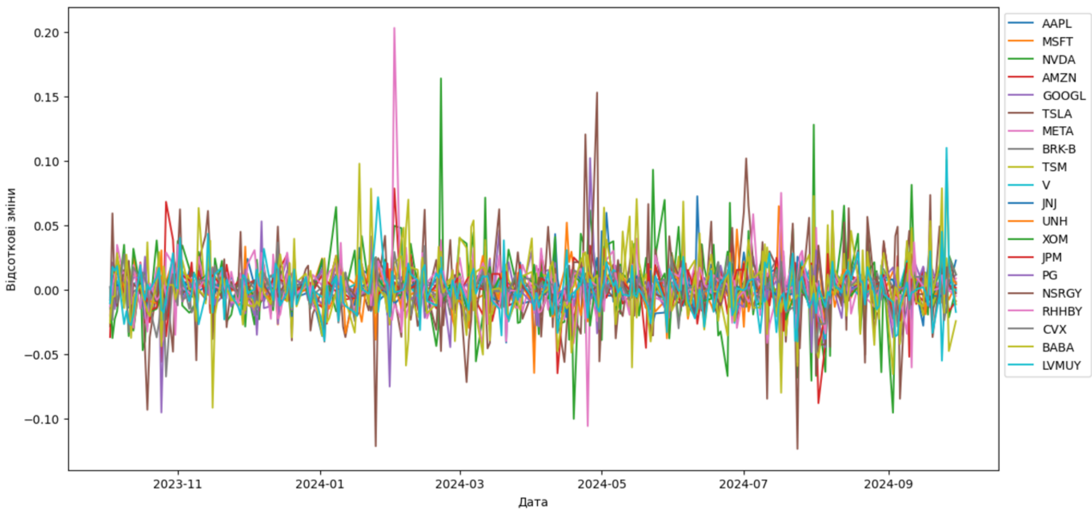


Рис. 2. Відсоткові зміни вартості акцій під час того самого періоду

4 Тести для оцінки стаціонарності

Розглянемо основні статистичні тести для перевірки стаціонарності часового ряду, які грунтуються на припущенні скінченної післядії. Розширений тест Діккі - Фуллера (ADF-тест) - це статистичний тест, який використовується для перевірки стаціонарності часового ряду. Стаціонарність є ключовою властивістю, яка означає, що статистичні властивості часового ряду, такі як середнє значення та дисперсія, залишаються постійними в часі. Нульова гіпотеза (H0) стверджує, що часовий ряд має одиничний корінь і є нестаціонарним, тоді як альтернативна гіпотеза (H1) припускає, що часовий ряд є стаціонарним. ADF-тест є розширенням класичного тесту Діккі-Фуллера. Він включає додаткові лаги залежної змінної, щоб враховувати можливу автокореляцію залишків. Це робить тест більш надійним для практичного використання.

ADF-тест часто використовується в економіці та фінансах для аналізу стаціонарності фінансових часових рядів, таких як ціни акцій, валютні курси та інші економічні індикатори. Якщо ряд не є стаціонарним, для подальшого аналізу його часто перетворюють, наприклад, шляхом взяття різниць або логарифмування.

KPSS-тест - це статистичний тест, що використовується для перевірки стаціонарності часового ряду, але на відміну від ADF-тесту, його нульова гіпотеза припускає, що ряд є стаціонарним. Цей тест допомагає виявити, чи має часовий ряд одиничний корінь, тобто чи є він нестаціонарним. KPSS-тест оцінює дисперсію помилок у регресії, щоб визначити, чи є часовий ряд стаціонарним. Він перевіряє, чи є дисперсія постійною (стабільною) в часі. Але вимагає вибір кількості лагів для регресії залишків, що впливає на результати тесту. Зазвичай використовується автоматичний вибір оптимального лагу. KPSS-тест часто використовується разом з ADF-тестом, оскільки вони мають протилежні нульові гіпотези. Це дозволяє провести більш всебічний аналіз стаціонарності часового ряду. Якщо ADF-тест відхиляє нульову гіпотезу (нестаціонарність), а KPSS не відхиляє (стаціонарність), це означає, що часовий ряд, ймовірно, є стаціонарним. KPSS-тест доповнює ADF-тест, оскільки вони перевіряють різні гіпотези також він є надійним для рядів з детермінованими трендами. Однак, вибір кількості лагів може впливати на результати, а також існує чутливість до вибору тренду в даних. KPSS-тест є потужним інструментом для перевірки стаціонарності часових рядів. Його використання разом з іншими тестами, такими як ADF, допомагає отримати більш точні та надійні результати щодо природи часового ряду. Як ми можемо бачити з наступної таблиці, майже всі розглянуті відсоткові ставки являються стаціонарними, що забезпечує більш точний аналіз моделей.

Акція	ADF $p-value$	KPSS тест $p-value$	Стаціонарність Result
AAPL	5.74e-27	0.15	Yes
MSFT	6.17e-30	0.25	Yes
NVDA	6.10e-30	0.10	Yes
AMZN	1.44e-24	0.14	Yes
GOOGL	7.45e-29	0.08	Yes
TSLA	1.12e-28	0.25	Yes
META	2.71e-24	0.08	Yes
BRK-B	2.57e-24	0.04	No
TSM	1.05e-29	0.07	Yes
V	1.75e-22	0.25	Yes
JNJ	7.44e-27	0.10	Yes
UNH	1.46e-26	0.14	Yes
XOM	8.13e-15	0.16	Yes
JPM	1.89e-28	0.12	Yes
PG	2.13e-11	0.04	No
NSRGY	6.30e-05	0.02	No
RHHBY	6.18e-17	0.16	Yes
CVX	1.42e-26	0.08	Yes
BABA	4.03e-29	0.43	Yes
LVMUY	3.18e-26	0.10	Yes

5 Інформаційні критерії

Поряд із статистичними тестами, розглянемо дві метрики, на основі яких будемо визначати точність моделі – критерій Акаіке та критерій Шварца.

Критерій Акаїке (AIC) використовується для порівняння різних статистичних моделей, що застосовуються для опису одного і того ж набору даних. Його головна мета - знайти модель, яка найкраще описує дані з найменшими втратами інформації. AIC враховує як якість підгонки моделі, так і її складність. Формула для розрахунку AIC виглядає наступним чином:

$$AIC = -2ln(L) + 2k$$

де $L-$ функція правдоподібності моделі, а $k-$ кількість параметрів у моделі. Чим менше значення AIC, тим краща модель. Важливо відзначити, що AIC не дає абсолютної міри якості моделі, а лише дозволяє порівнювати моделі між собою.

Критерій Шварца або Баєсівський інформаційний критерій (BIC) є подібним до AIC, але враховує розмір вибірки і більш жорстко штрафує моделі з великою кількістю параметрів, що допомагає уникати перенавчання. Формула для розрахунку BIC:

$$BIC = -2ln(L) + 2kln(n)$$

де $L-$ максимальна ймовірність моделі, $k-$ кількість параметрів у моделі, і $n-$ кількість спостережень у вибірці. Як і у випадку з AIC, модель з меншим значенням BIC вважається кращою. Оскільки в BIC враховується розмір вибірки, він частіше обирає менш складні моделі, особливо при великому значенні n.

Також AIC використовує коефіцієнт $2k$, тоді як BIC використовує $kln(n)$. Це означає, що BIC більше штрафує моделі за складність. AIC зазвичай краще для ситуацій, коли важливо максимально точно передбачити дані, а BIC - коли потрібно визначити найбільш вірогідну структуру даних.

Обидва критерії корисні при виборі моделі, але конкретний вибір залежить від цілей аналізу - AIC краще для передбачень, а BIC - для структурної інтерпретації.

Ticker	AIC (ПММ)	BIC (ПММ)	AIC (НПМ)	BIC (НПМ)
AAPL	-1864.5	-1819.17	**-1870.43**	**-1825.10**
MSFT	-1781.06	-1735.72	**-1786.52**	**-1741.19**
NVDA	**-1400.8**	**-1355.47**	-1398.98	-1353.64
AMZN	**-1621.33**	**-1576.0**	-1620.79	-1575.46
GOOGL	-1667.12	-1621.79	**-1670.87**	**-1625.54**
TSLA	-1283.05	-1237.71	**-1285.33**	**-1240.0**
META	**-1607.59**	**-1562.26**	-1604.56	-1559.23
BRK-B	-2091.91	-2046.58	**-2124.63**	**-2079.29**
TSM	-1610.71	-1565.37	**-1618.68**	**-1573.35**
V	-2032.99	-1987.66	**-2054.40**	**-2009.07**

Ticker	AIC (ПММ)	BIC (ПММ)	AIC (НПМ)	BIC (НПМ)
JNJ	-2033.42	-1988.09	**-2035.43**	**-1990.1**
UNH	-1858.96	-1813.63	**-1875.58**	**-1830.25**
XOM	-1775.22	-1729.89	**-1786.14**	**-1740.8**
JPM	**-1922.17**	**-1876.84**	-1914.54	-1869.21
PG	-2048.42	-2003.09	**-2074.86**	**-2029.53**
NSRGY	-1975.75	-1930.42	**-1997.34**	**-1952.0**
RHHBY	-1901.05	-1855.71	**-1909.57**	**-1864.24**
CVX	-1828.25	-1782.91	**-1839.76**	**-1794.43**
BABA	-1496.71	-1451.38	**-1500.2**	**-1454.86**
LVMUY	-1690.33	-1644.1	**-1695.03**	**-1649.7**

6 Висновок

У роботі розглянуто математичні моделі марковських та напівмарковських прихованих моделей з використанням до реальних даних. Як було виявлено під час дослідження, напівмарковські приховані моделі є більш точними для реальних процесів, про що свідчать розглянуті статистичні тести та відповідні метрики. У майбутніх роботах в даному напрямку планується розглянути різні розподіли прихованих моделей, що узагальнюють нормальний розподіл та розподіл Стьюдента, також розробити алгоритм оцінки параметрів даних розподілів.

Список літератури

[1] Sansom J., Thomson P. *Fitting hidden semi-Markov models to breakpoint rainfall data.* J. Appl. Probab. 2001, **38A** (Supplement), 142–157.

[2] Hamilton J.D. *Analysis of time series subject to changes in regime.* J. Econometrics 1990, **45** (1-2), 39–70.

[3] Linne T. *A Markov switching model of stock returns: an application to the emerging markets in central and eastern Europe.* In: East European Transition and EU Enlargement. Physica-Verlag, Heidelberg, 2002, pp. 371–384.

[4] Turner C.M., Startz R., Nelson C.R. *A Markov model of heteroskedasticity, risk, and learning in the stock market.* J. Financial Econom. 1989, **25** (1), 3–22.

[5] Baum L.E., Petrie T., Soules G., Weiss N. *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains.* Ann. Math. Statist. 1970, **41** (1), 164–171.

[6] Prudhomme C., Wilby R.L., Crooks S., Kay A.L., Reynard N.S. *Scenario-neutral approach to climate change impact studies: Application to flood risk.* J. Hydrology 2010, **390** (1-2), 198–209.

[7] Yu C., Yu L. *Hidden Markov Models for Environmental Prediction.* J. Hydrological Engineering 2010, **15** (3), 140–151.

[8] Carpenter S.R., Cole J.J., Kitchell J.F. *A Bayesian Hidden Semi-Markov Model with Covariate-Dependent State Duration Parameters for High-Frequency Environmental Data.* Environ. Model. Software 2020, **125**, 104–113.

[9] Gomez-Navarro L., Salgado D., Ca$\widetilde{n}edoR.S.Markov\ Chain\ Ensemble\ for\ Climate\ Model\ Prediction.Geophys.Meteoro$
−271.

[10] Yahoo Finance. Retrieved October 1, 2024, https://finance.yahoo.com

Надійшло 28.10.2024

Malik I.V., Ivasiuk R.V. *HMM and HSMM in time series*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 119–127.

The main focus of the work is on the study of so-called hidden Markov chains (hidden Markov models, HMM) and their analogs and generalizations. In particular, the research examines the impact of HMM and semi-Markov hidden models (HSMM) on time series models describing the stock prices of top companies as of 2024. The study revealed that considering more generalized models allows for a more accurate description of stock price dynamics and, consequently, a more accurate determination of the key characteristics of the actual process.

The research employs both HMM and HSMM frameworks to analyze financial data, demonstrating their capacity to capture key features of stock price volatility, including sharp transitions between periods of high and low market variability. A series of tests and metrics were conducted to evaluate the performance of these models, including the Akaike Information Criterion (AIC) and the Bayesian Information Criterion (BIC), which indicate superior fit for HSMMs. Additionally, methods such as the Augmented Dickey-Fuller (ADF) test and KPSS tests were used to validate the stationarity properties of the time series.

The study's results emphasize that semi-Markov extensions provide a significant improvement over classical HMMs when analyzing financial market data, allowing for better detection of long-term dependencies and accurate modeling of asset price trends. The findings open avenues for further applications in financial risk analysis and forecasting tasks, showcasing the potential of HSMMs to deliver more robust insights into market behavior.

Маценко В.Г.

АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ТИПУ СКЕЛЛАМА З ПЕРІОДИЧНИМИ РЕЖИМАМИ

Розглянуто узагальнення моделі Скеллама. Висвітлено питання існування та стійкості стаціонарних і періодичних розв'язків моделі без збору та зі збором урожаю. Проведено комп'ютерний аналіз розв'язків моделі.

Ключові слова і фрази: дискретні моделі, модель Скеллама, стаціонарні розв'язки, періодичні розв'язки, стійкість, збір урожаю.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *v.matsenko@chnu.edu.ua*

Вступ

Для багатьох реальних біологічних популяцій їх стан у момент часу t залежить від стану в попередні моменти часу. Це популяції з неперервними поколіннями, тобто ті, в яких ріст чисельності відбувається в дискретні моменти часу. До таких популяцій можна віднести багато видів комах з однорічною генерацією.

Математичні моделі таких популяцій пов'язують чисельності популяції N_{t+1} в момент часу $t+1$ з чисельностями в попередні моменти часу. Динаміка чисельності таких популяцій у простішому випадку описується рівняннями вигляду

$$N_{t+1} = f(N_t)N_t,\ t = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

де N_t – чисельність популяції в момент часу t, а $f(\cdot)$ – гладка функція дійсного аргументу, яка відображає простір $R^+ = [0, \infty)$ в R^+. Серед дискретних рівнянь (1) в екології найвідоміші дискретна логістична модель, модель Рікера та модель Скеллама.

Оскільки при практичному використанні природних ресурсів важливо, щоб експлуатація популяцій не призводила до їх знищення, а відбувалося відновлення природних ресурсів, то в працях [1, 2] ці моделі вивчаються з ефектом збору врожаю. Такі моделі дозволяють здійснити кількісний аналіз антропогенної діяльності і забезпечити раціональне використання природного ресурсного потенціалу.

УДК 519.87:574.3
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

У дискретних моделях знання про характер процесів виживання й народжування виражається в єдиному популяційному показнику – коефіцієнті природного відтворення (або коефіцієнт розмноження)

$$f(N_t) = \frac{N_{t+1}}{N_t}.$$

Коефіцієнт природного відтворення – це середня кількість потомків, яка припадає на одну особину, що існувала в момент часу t.

Якщо припустити, що вплив саморегулюючих внутрішньопопуляційних факторів із ростом чисельності тільки посилюється, то коефіцієнт розмноження вибирають у вигляді монотонних спадних функцій.

У моделі Скеллама коефіцієнт розмноження має вигляд спадної гіперболічної функції, тобто

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t}, \tag{2}$$

де параметр a задає найбільше значення розмноження, а коефіцієнт b описує вплив саморегулюючих механізмів на популяційну динаміку.

Модель Скеллама була запропонована в праці [3] в 1951 р. і відтоді широко використовується для опису динаміки чисельності дискретних популяцій.

У праці [2] вивчаються узагальнення моделі Скеллама на випадок, коли коефіцієнт розмноження має вигляд

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^2} \quad \text{та} \quad f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^2}. \tag{3}$$

Також тут здійснено аналіз цих моделей з ефектом збору урожаю з постійною інтенсивністю c. Показано, що в усіх цих випадках при певних обмеженнях на параметри a, b, c рівняння Скеллама допускають лише монотонну стабілізацію чисельності популяції до деякого стаціонарного рівня. Циклічні режими відсутні, тоді як логістичне дискретне рівняння та модель Рікера мають періодичні розв'язки.

У даній статті знайдено таке узагальнення моделі Скеллама, яке допускає існування і періодичних розв'язків. Це відбувається тоді, коли

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}.$$

Для моделі з таким коефіцієнтом розмноження проведено дослідження з м'якою стратегією збору врожаю.

1 Аналіз узагальнення моделі Скеллама

У праці [2] досліджується модель Скеллама та її узагальнень. У рамках цих моделей спостерігалися режими з монотонною стабілізацією чисельності популяцій.

Проте, як з'ясувалося, існують узагальнення моделі Скеллама, які, крім стаціонарних розв'язків, мають і періодичні розв'язки різних періодів. Такою моделлю є дискретне рівняння вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^3} \equiv F(N_t), \ t = 0, 1, 2, \ldots, \ a, b > 0. \tag{4}$$

Розв'язати рівняння (4) в аналітичній формі не вдається, але можна знайти стаціонарні та періодичні розв'язки й дослідити їх на стійкість. Це рівняння має нульовий розв'язок $N_0^* = 0$. Ненульові стаціонарні стани знаходяться зі співвідношення $N^3 = a-b$, тобто $N_1^* = \sqrt[3]{a-b}$. N_1^* набуває додатні значення при $a > b$.

Для дослідження стаціонарних точок на стійкість знайдемо мультиплікатор динамічної системи (4).

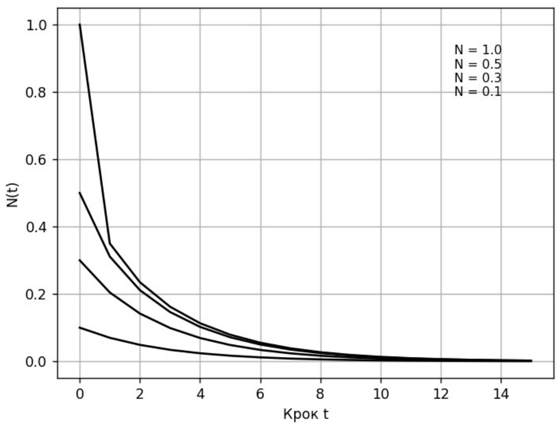
Маємо

$$F'(N) = \frac{a\left(b - 2N^3\right)}{\left(b + N^3\right)^2}.$$

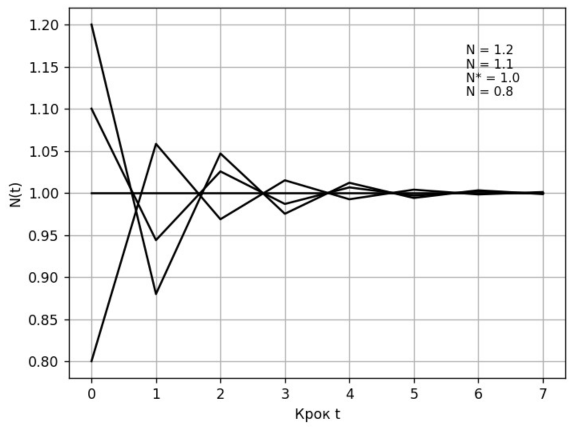
Оскільки при $0 < a < b$ $F'(0) = \dfrac{a}{b} < 1$, то нульовий розв'язок стійкий (рис. 1а).

При $a > b$ нульовий розв'язок перестає бути стійким і водночас з'являється ненульовий розв'язок $N_1^* > 0$, який буде стійким за умови $\left|F'\left(N_1^*\right)\right| < 1$, тобто при $\left|3\dfrac{b}{a} - a\right| < 1$, або $\dfrac{a}{3} < b < a$ (рис. 1б).

Якщо $b < \dfrac{a}{3}$, то існуючий стаціонарний розв'язок перестає бути стійким, зокрема, при $a = 1$, $b = 0.1$ стаціонарний розв'язок $N^* = \sqrt[3]{a-b} = 0.9654$ нестійкий. У цьому випадку ($a > 3b$) можуть з'явитися періодичні розв'язки.



а



б

Рис. 1. Ілюстрація стійкості стаціонарних розв'язків рівняння (4) а – $a = 0.7$, $b = 1$; б – $a = 2$, $b = 1$ ($\dfrac{a}{3} < b < a$)

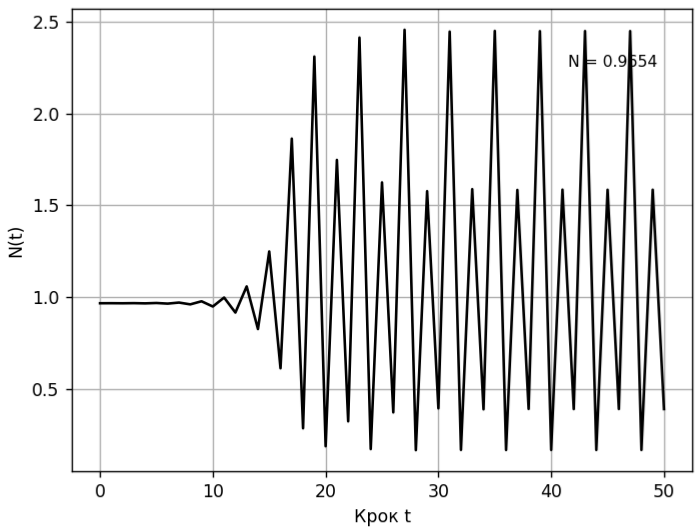


Рис. 2. Нестійкість стаціонарного розв'язку $N^* = 0.9654$ рівняння (4) при $a = 1$, $b = 0.1$ $(a > 3b)$

Перейдемо до дослідження існування періодичних розв'язків і їх стійкості. Спочатку розглянемо випадок періоду $T = 2$, тобто коли $N_{t+2} = N_t$ для $t = 0, 1, 2, \dots$.

З (4) маємо

$$N_t = \frac{a^2 N_t \left(b + N_t^3\right)^2}{b\left(b + N_t^3\right)^3 + \left(aN_t\right)^3}, \tag{5}$$

або якщо запровадити заміну $N_t^3 = x$, то рівняння (5) набуває вигляду

$$bx^3 + \left(3b^2 - a^2\right)x^2 + \left(3b^3 - 2a^2 b + a^3\right)x + b^4 - a^2 b^2 = 0. \tag{6}$$

Відомо, що це рівняння має корінь $a - b$, оскільки $N_t = \sqrt[3]{a-b}$ задовольняє умову періодичності $N_{t+2} = N_t$.

Розділивши (6) на $x - (a - b)$, одержуємо рівняння

$$bx^2 + \left(2b^2 - a^2 + ba\right)x + b^3 + b^2 a = 0, \tag{7}$$

коренями якого є

$$x_{1,2} = \frac{a^2 - 2b^2 - ba \pm \sqrt{a^4 - 3a^2b^2 - 2a^3 b}}{2b}. \tag{8}$$

Дискримінант цього рівняння $D = a^2\left(a^2 - 3b^2 - 2ab\right)$ при $b < \dfrac{a}{3}$ додатний, оскільки $a^2 - 3b^2 - 2ab > a^2 - 3\left(\dfrac{a}{3}\right)^2 - 2a\dfrac{a}{3} = 0$.

Зокрема, при $b = 1$, $a = 4$ $(a > 3b)$ $D = 5 > 0$, а при $a = 2$, $b = 1$ $(a < 3b)$ $D = -3 < 0$. Крім цього, при $a > 3b$

$$a^2 - 2b^2 - ab > a^2 - 2\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a}{3}a = \frac{4}{9}a^2 > 0,$$

$$a^2 - 2b^2 - ab > \sqrt{\left(2b^2 - a^2 - ab\right)^2 - 4b\left(b^3 + b^2 a\right)}.$$

Тому рівняння (7), в цьому випадку, має два різні додатні корені. Це означає, що при $b < \dfrac{a}{3}$ у рівняння (4) з'являється додатний періодичний розв'язок $N_1^* = \sqrt[3]{x_1}$, $N_2^* = \sqrt[3]{x_2}$ з періодом $T = 2$, а стаціонарна точка $N_1^* = \sqrt[3]{a-b}$ перестає бути стійкою.

Проведемо дослідження цього періодичного розв'язку на стійкість. Для цього обчислимо мультиплікатор

$$\mu = \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} = \frac{a^2\left(b - 2\left(N_1^*\right)^3\right)}{\left(b + \left(N_1^*\right)^3\right)^2} \cdot \frac{b - 2\left(N_2^*\right)^3}{\left(b + \left(N_2^*\right)^3\right)^2} = a^2 \cdot \frac{b - 2x_1}{\left(b + x_1\right)^2} \cdot \frac{b - 2x_2}{\left(b + x_2\right)^2}.$$

Враховуючи вирази (8), одержуємо значення мультиплікатора μ в коефіцієнтній формі

$$\mu = \frac{9b^2 + 6ab - 2a^2}{a^2}.$$

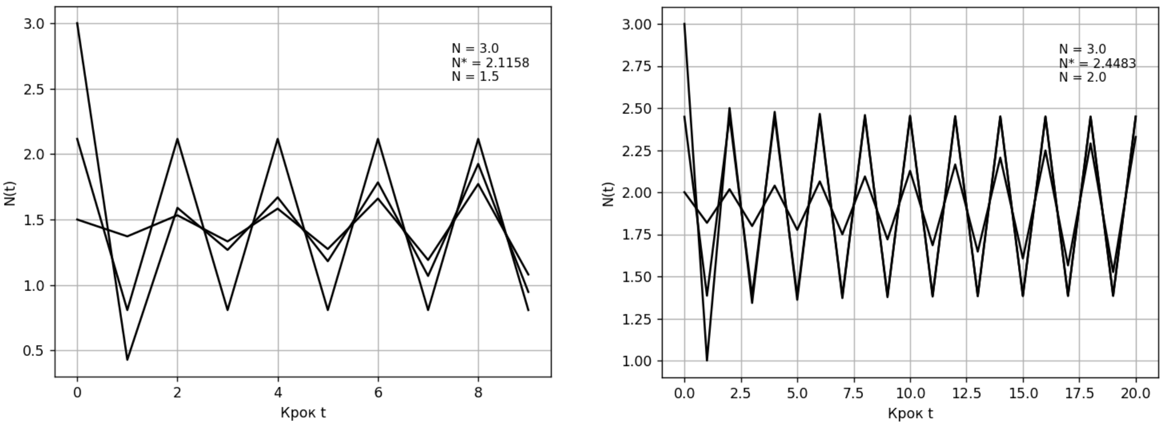
З умови стійкості $\left|9\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + 6\dfrac{b}{a} - 2\right| < 1$ встановлюємо, що існуючий періодичний розв'язок з періодом $T = 2$ стійкий при

$$\frac{\sqrt{2}-1}{3}a < b < \frac{a}{3}. \tag{9}$$

Це означає, що при $b < \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}a$ періодичний розв'язок з періодом $T = 2$ перестає бути стійким і з'являється стійкий перідичний розв'язок довжиною чотири.

Зокрема, при $b = 1$, $a = 4$ для рівняння (7) маємо квадратне рівняння $x^2 - 10x + 5 = 0$. Звідки $x_1 = 9.472$, $x_2 = 0.528$. Тому $N_1^* = 2.1158$, $N_2^* = 0.8082$ – це значення, що складають періодичний розв'язок з періодом $T = 2$. При цьому $\mu = 0.0628$, що означає стійкість періодичного розв'язку (рис. 3а).

При $b = 3$, $a = 10$ квадратне рівняння $3x^2 - 52x + 117 = 0$ має корені $x_1 = 14.6759$, $x_2 = 2.6504$, тобто періодичний розв'язок задається двома числами: $N_1^* = 2.4483$, $N_2^* = 1.3839$. Мультиплікатор $\mu = 0.5879 < 1$, що забезпечує стійкість цього розв'язку (рис. 3б).



а б

Рис. 3. Існування та стійкість періодичних розв'язків рівняння (4) з періодом $T = 2$: а – $b = 1$, $a = 4$, $(a > 3b)$, $N_1^* = 2.1158$, $N_2^* = 0.8082$; б – $b = 3$, $a = 10$, $(a > 3b)$, $N_1^* = 2.4483$, $N_2^* = 1.3852$

При $b = 0.1$, $a = 1$ рівняння (7) має вигляд

$$x^2 - 8.8x + 0.11 = 0.$$

Звідки $x_1 = 8.7875$, $x_2 = 0.0125$, що дає $N_1^* = 2.06358$, $N_2^* = 0.23219$. Значення мультиплікатора $\mu = 1.31 > 1$, тому цей періодичний розв'язок нестійкий (рис. 4).

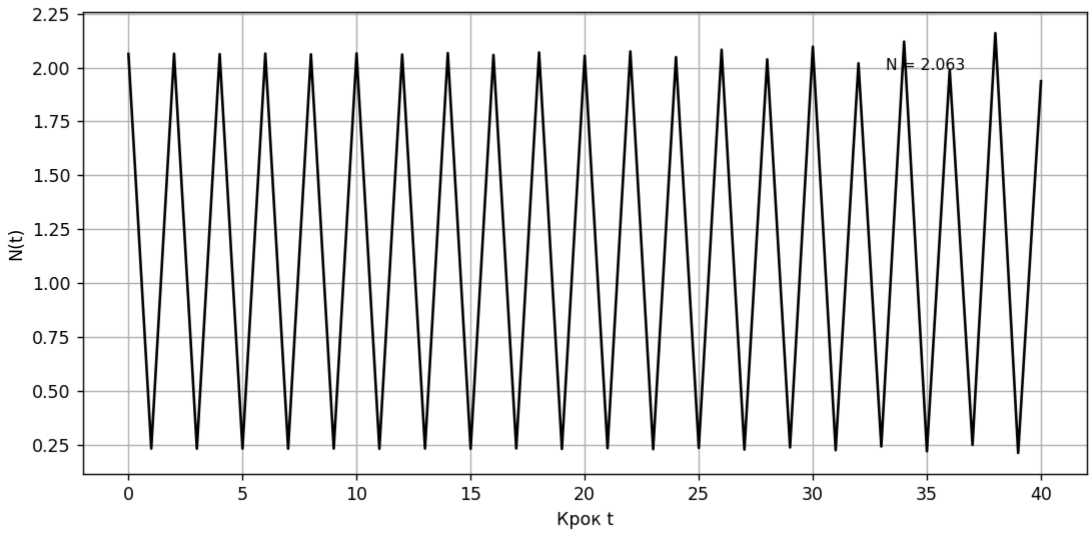


Рис. 4. Нестійкість періодичного розв'язку ($T = 2$) рівняння (4) при $a = 1$, $b = 0.1$, $N_1^* = 2.06358$, $N_2^* = 0.23219$

Знайдемо періодичний розв'язок рівняння (4) з періодом $T = 4$ (умова $N_{t+4} = N_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$). Якщо ввести позначення $N_t = x$, $N_{t+1} = y$, $N_{t+2} = z$, $N_{t+3} = u$, то для знаходження періодичного розв'язку з періодом $T = 4$ маємо систему вигляду

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax}{b + x^3} \equiv \varphi(x), \\ z = \dfrac{ay}{b + y^3} \equiv \varphi(y), \\ u = \dfrac{az}{b + z^3} \equiv \varphi(z), \\ x = \dfrac{au}{b + u^3} \equiv \varphi(u), \end{cases} \tag{10}$$

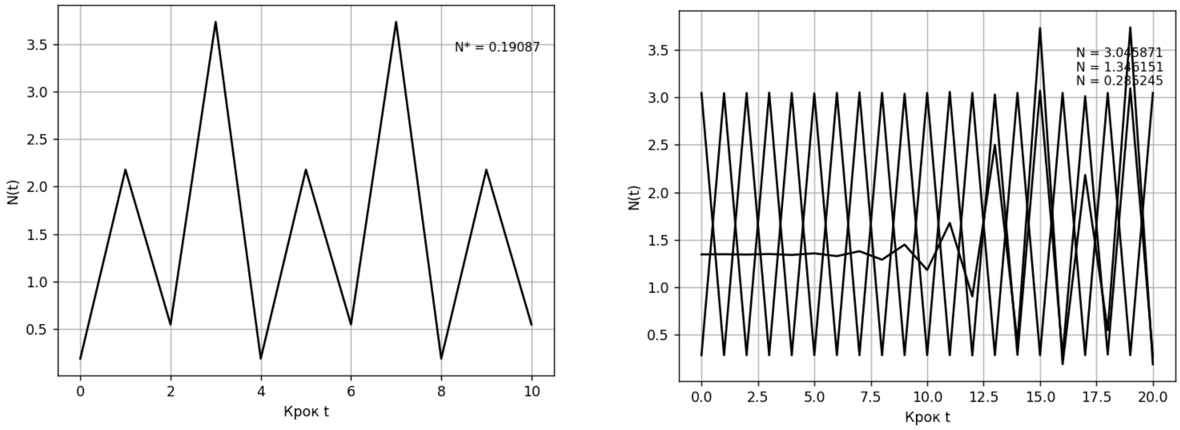
яку можна звести до одного рівняння

$$x = \left(\varphi\left(\varphi\left(\varphi\left(\varphi(x)\right)\right)\right)\right). \tag{11}$$

Такі рівняння можна розв'язувати, застосовуючи числові методи. Маючи розв'язок x, за формулами (10) знаходимо y, z, u. Тоді різні числові значення $N_1^* = x$, $N_2^* = y$, $N_3^* = z$, $N_4^* = u$ і визначають періодичний розв'язок рівняння (4) з періодом $T = 4$.

У комп'ютерних експериментах при $a = 2.67$, $b = 0.227$ (виконується умова $b < \dfrac{\sqrt{2} - 1}{3}a$) одержали періодичний розв'язок ($T = 4$), який задається числами 0.19087, 3.73198, 0.55059, 2.17832 (рис. 5а).

Мультиплікатор цього періодичного розв'язку $\mu = 0.0399 < 1$, що означає його стійкість (рис. 5б).



а б

Рис. 5. Графіки періодичних розв'язків з періодом $T = 4$ при $a = 2.67$, $b = 0.227$: а – $N_1^* = 0.19087$, $N_2^* = 3.731982$, $N_3^* = 0.550598$, $N_4^* = 2.178315$; б – його стійкість

Графічне розв'язування рівняння (11) в цьому випадку наведено на рис. 6.

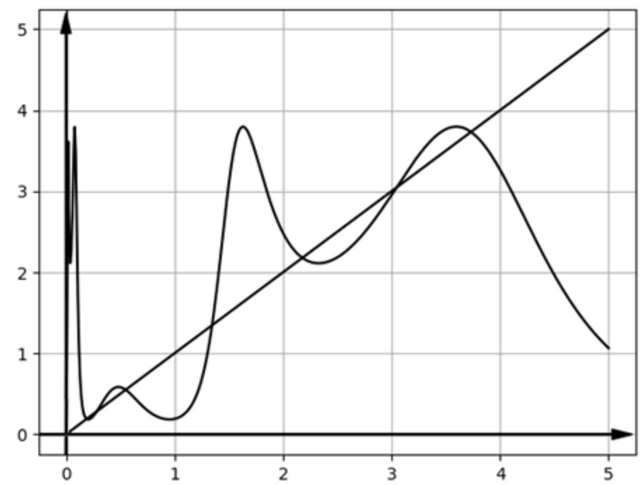


Рис. 6. Графічне розв'язування рівняння (11). При $a = 2.67$, $b = 0.227$ існує 7 коренів (0.190870, 0.285245, 0.550598, 1.346151, 2.178315, 3.045871, 3.731982)

Як бачимо з рис. 6, рівняння (11) має ще три корені (всього сім). Два з них, а саме $N_5^* = 0.285245$, $N_6^* = 3.04587$, визначають періодичний розв'язок з періодом $T = 2$. Він нестійкий, оскільки мультиплікатор $\mu = 1.4399 > 1$ (рис. 5б).

Ще один корінь $N_7^* = 1.346151$ визначає стаціонарну точку, яка теж нестійка (виконується умова $b < \dfrac{a}{3}$) (рис. 5б).

При подальшій відповідній зміні параметрів a та b послідовно відбуватиметься біфуркація подвоєння довжини циклу, тобто виникають нові стійкі цикли довжиною 2^m $(m > 2)$ і при цьому втрачається стійкість періодичного циклу довжиною 2^{m-1}.

У цій праці ще практично знайдені цикли довжиною вісім, зокрема при $a = 5.34$, $b = 0.227$. Рівняння типу (11) мали 15 різних коренів. Вісім з них задавали цикл довжиною вісім, чотири – цикл довжиною чотири, два – цикл довжиною два і один – стаціонарний розв'язок.

Перейдемо до знаходження періодичних розв'язків рівняння (4) з періодом $T = 3$ (виконується умова $N_{t+3} = N_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$).

Такі розв'язки складатимуть три різних числа: x, y, z. Для їх знаходження маємо систему вигляду

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax}{b + x^3} = \varphi(x), \\ z = \dfrac{ay}{b + y^3} = \varphi(y), \\ x = \dfrac{az}{b + z^3} = \varphi(z), \end{cases}$$

або рівняння

$$x = (\varphi(\varphi(\varphi(x)))) \,. \tag{12}$$

При проведенні комп'ютерних експериментів над розв'язуванням рівняння (12), не вдалося знайти такі значення параметрів a та b, щоб рівняння (12) мало три різні корені.

Існував лише єдиний корінь, що означає існування стаціонарного стану, для якого теж виконується умова $N_{t+3} = N_t$ (рис. 7).

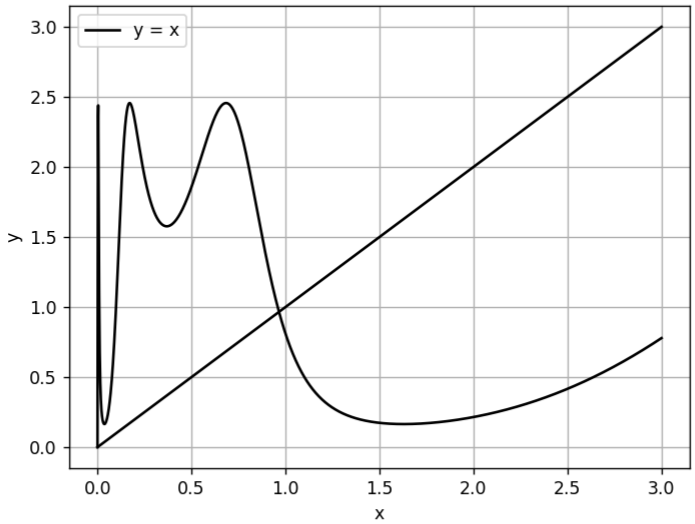


Рис. 7. Графічне розв'язування рівняння (12) при $a = 1$, $b = 0.1$. Корінь $N^* = 0.9654$

Зазначимо, що для моделей вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^2}, \quad N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^3}$$

періодичних розв'язків не існує.

2 Модель збору врожаю з м'якою стратегією

Узагальнимо модель (4) на випадок урахування збору врожаю з оберненим зв'язком, тобто коли збір урожаю залежить від стану популяції.

При цьому з популяції в певні моменти часу відбирається кількість особин, яка пропорційна загальній чисельності, тому модель (4) набуває вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^3} - kN_t, \;\; a, b > 0, \;\; k \in (0, 1), \;\; t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

де N_t, як і раніше, – чисельність популяції в момент часу t, k – параметр інтенсивності збору врожаю.

Рівняння (13) має два стани рівноваги $N_1^* = 0$ та $N_2^* = \sqrt[3]{\dfrac{a}{1+k} - b}$. Додатний стан N_2^* існує за умови, що $\dfrac{a}{1+k} > b$.

При $\dfrac{a}{b} < 1+k$ $N_1^* = 0$ стійкий (рис. 8), а при $\dfrac{a}{b} > 1+k$, коли з'являється N_2^*, нульовий розв'язок N_1^* втрачає стійкість. Зокрема, це має місце при $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.05$ (рис. 9). Тут $N_2^* = 0.9672$, натомість при $k = 0$, $N_2^* = 1.0$. Тобто при інтенсивності експлуатації $k = 0.05$, відбувається зменшення стаціонарного рівня на 3.28%.

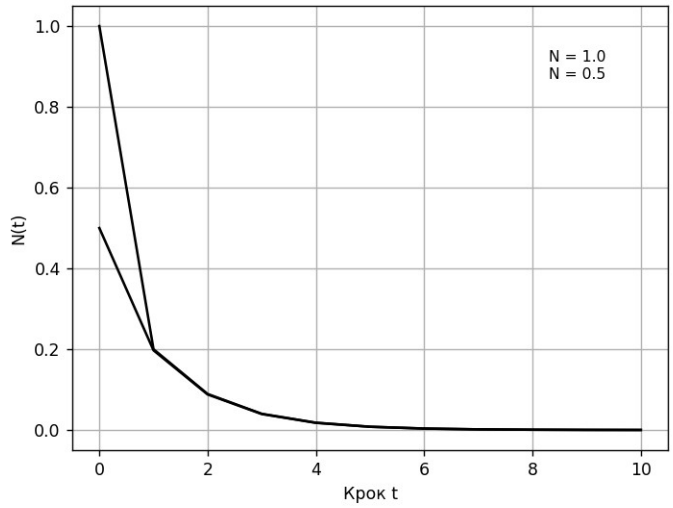


Рис. 8. Стійкість нульового розв'язку рівняння (13) при $a = 0.5$, $b = 1$, $k = 0.05$

Для визначення стійкості N_2^* обчислюємо мультиплікатор

$$\mu = \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} = \frac{a\,(b - 2N_2^*)}{b + (N_2^*)^3} - k.$$

З нерівності $|\mu| < 1$ одержуємо умови стійкості N_2^* у вигляді

$$\frac{1+2k}{(1+k)^2} < 3\frac{b}{a} < \frac{3+2k}{(1+k)^2}.$$

Для випадку, коли $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.05$ $|\mu| = 0.05 < 1$, що дає стійкість N_2^* (рис. 9).

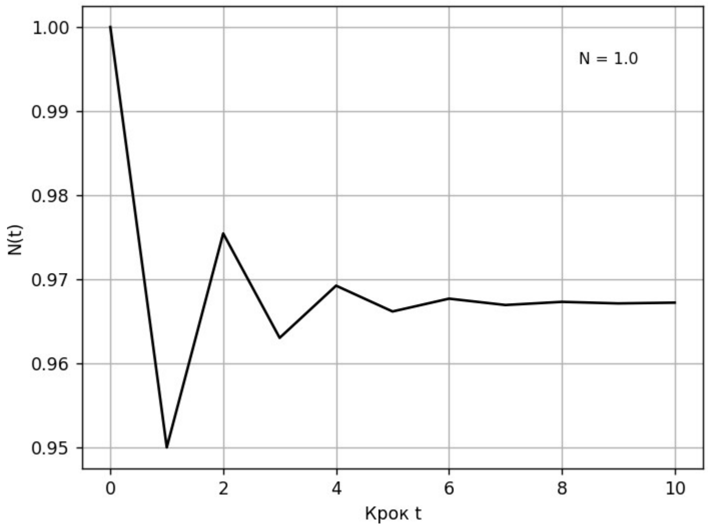


Рис. 9. Стійкість ненульового розв'язку $N_2^* = 0.9672$ при $a = 2$, $b = 1$, $k = 0.05$

Періодичний розв'язок рівняння (13) з періодом $T = 2$ існує, якщо система

$$N_t = \frac{aN_{t+1}}{b + N_{t+1}^3} - kN_{t+1} = \psi\left(N_{t+1}\right),$$

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^3} - kN_t = \psi\left(N_t\right),$$

або те ж саме, що рівняння

$$N_t = \psi\left(\psi\left(N_t\right)\right) \tag{14}$$

має два різних додатних розв'язки $N_1^* \neq N_2^*$.

Це рівняння є алгебраїчним рівнянням дев'ятого порядку, яке аналітично не розв'язується. Тому шукаємо його корені числовими методами на комп'ютері.

Графічний аналіз розв'язків рівняння (14) при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$ наведено на рис. 10.

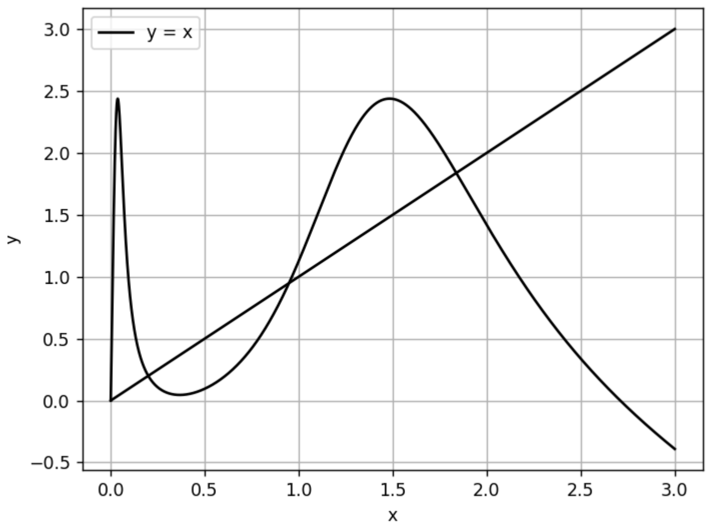


Рис. 10. Графічне розв'язування рівняння (14) при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$. Корені рівняння $N^* = 0.94815$ – стаціонарне значення, $N_1^* = 1.837915$; $N_2^* = 0.199450$ – періодичний розв'язок з періодом $T = 2$

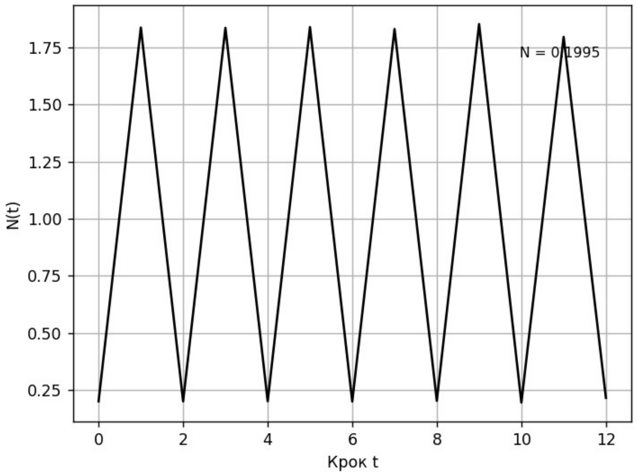
Як видно з графіка, що за умови

$$\frac{b}{a} < \frac{1}{3}\frac{1+2k}{(1+k)^2}$$

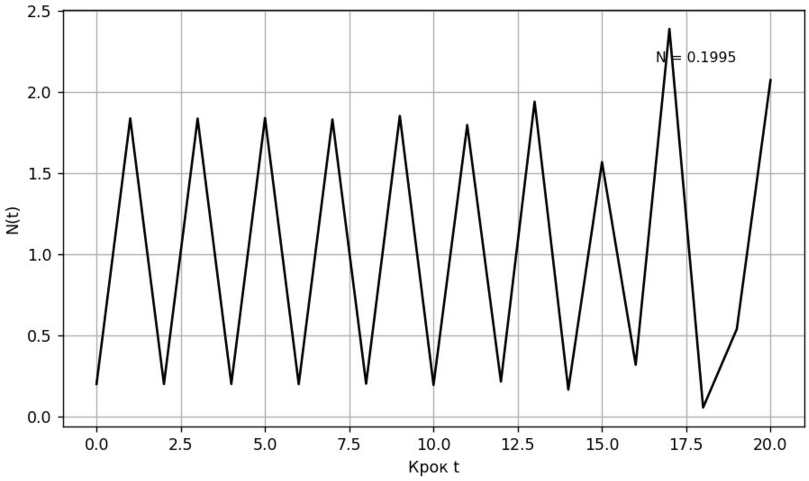
рівняння (13) має періодичні розв'язки з періодом $T = 2$.

Зокрема, в нашому випадку періодичний розв'язок складають два значення $N_1^* = 0.19945$ і $N_2^* = 1.83793$ (рис. 11а), причому він нестійкий (рис. 11б), оскільки мультиплікатор

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} = 2.5779 > 1.$$



a



b

Рис. 11. Графіки періодичного розв'язку ($T = 2$) при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$: а – $N_1^* = 0.1995$, $N_2^* = 1.8379$; б – його нестійкість

Нестійкий також стаціонарний розв'язок $N^* = 0.948152$. Для нього мультиплікатор $\mu = 1.81945 > 1$.

Періодичні розв'язки з періодом $T = 4$ знаходили з рівняння

$$x = \psi\left(\psi\left(\psi\left(\psi\left(x\right)\right)\right)\right). \tag{15}$$

Зокрема, при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$, побудувавши графіки правої та лівої частини рівняння (15) (рис. 12), знайдено періодичний розв'язок з періодом $T = 4$, який складають числа 0.128817, 1.25473, 0.571842, 2.064309.

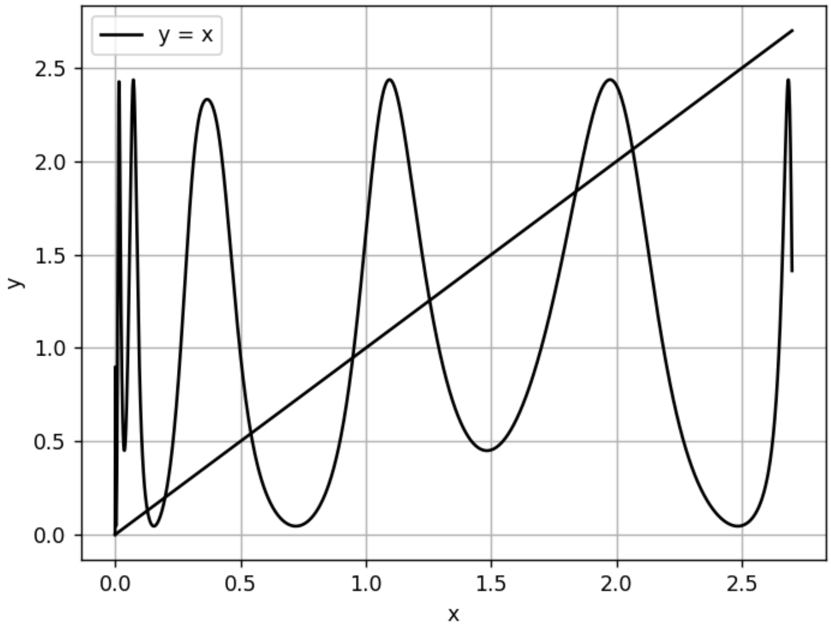


Рис. 12. Графічний аналіз розв'язків рівняння (15) при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$. Точки перетину графіків: 0.128817, 0.199447, 0.541842, 0.948151, 1.254730, 1.837915, 2.064309

Мультиплікатор цього розв'язку $\mu = 7.6214 > 1$, що означає його нестійкість (рис. 13). Хоча при $k = 0$ в цьому випадку існував стійкий періодичний розв'язок з періодом $T = 4$ (рис. 14).

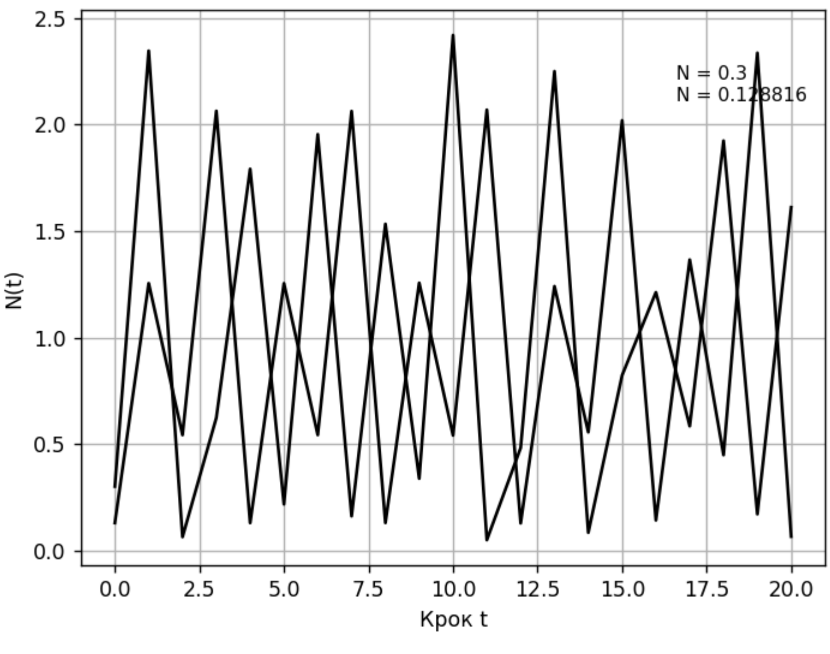


Рис. 13. Періодичний розв'язок рівняння (13) з періодом $T = 4$ та його нестійкість. $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$

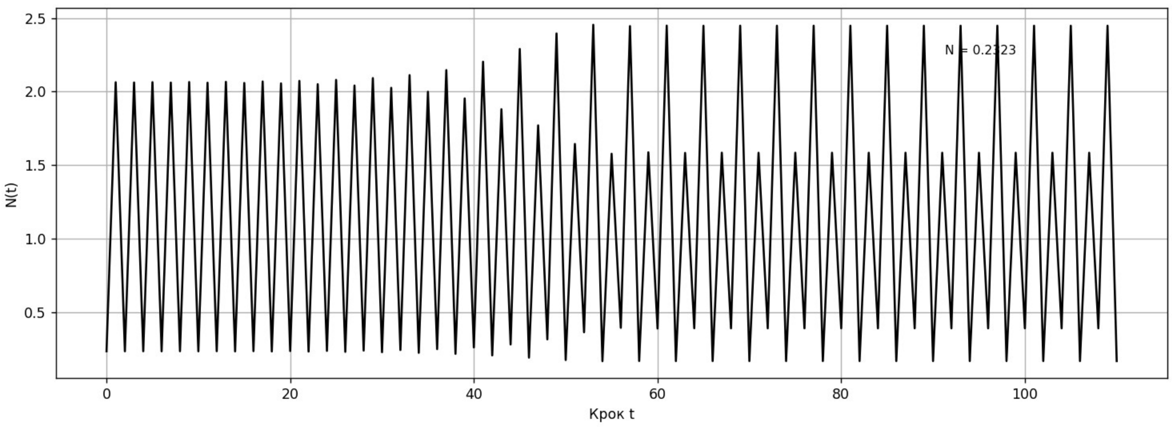


Рис. 14. Існування та стійкість періодичного розв'язку з періодом $T = 4$. ($a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0$) $N_1^* = 0.3886$, $N_2^* = 1.5842$, $N_3^* = 0.1656$, $N_4^* = 2.4488$

Розв'язки рівняння (13) з періодом $T = 3$ шукали з рівняння

$$x = \psi\left(\psi\left(\psi\left(x\right)\right)\right),$$

яке аналізувалось теж графічним методом (рис. 15).

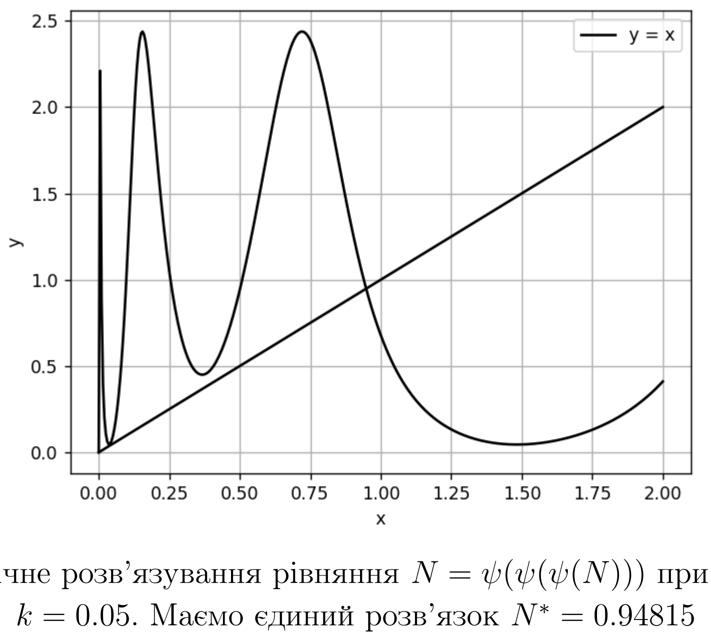


Рис. 15. Графічне розв'язування рівняння $N = \psi(\psi(\psi(N)))$ при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$. Маємо єдиний розв'язок $N^* = 0.94815$

У результаті комп'ютерних експериментів не знайдено таких значень a, b, k, щоб рівняння (13) мало періодичний розв'язок із періодом $T = 3$.

Зауважимо, що в експериментах отримано розв'язки рівняння (13), які мають хаотичну поведінку, зокрема при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$, $N_0 = 0.3$ (рис. 16).

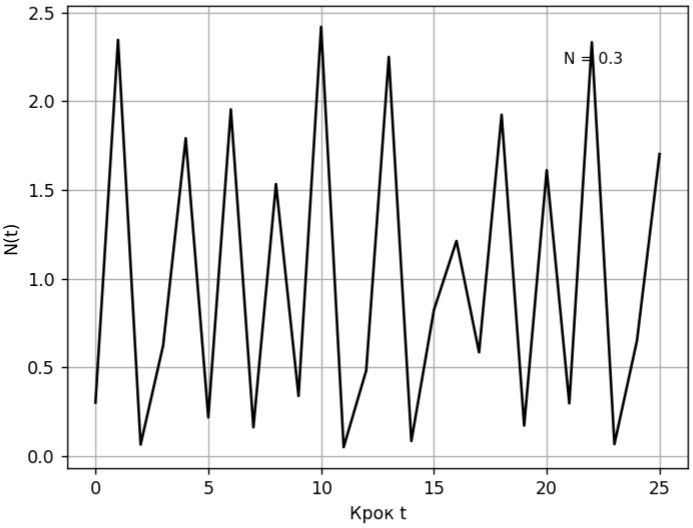


Рис. 16. Хаотична поведінка розв'язків рівняння (13) при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$, $N_0 = 0.3$

Як висновок правомірно констатувати, що узагальнення моделі Скеллама (4), (13) мають широкий спектр поведінки розв'язків – від стаціонарних до періодичних із різним періодом. Вони можуть бути як стійкими, так і нестійкими. При втраті стійкості розв'язків з періодом $T = 2^m$, з'являються стійкі періодичні розв'язки з періодом $T = 2^{m+1}$, $m \geq 1$. У цих рівняннях можливі хаотичні поведінки розв'язків. Характерно те, що при експлуатації популяцій може втрачатися стійкість розв'язків, яка мала місце в моделях без збору врожаю. Такі моделі дозволяють кількісно оцінити допустимий рівень навантаження на біологічні популяції, щоб зберегти їх існування.

Список літератури

[1] Маценко В.Г. *Моделювання процесів збору врожаю для популяцій із неперекривними поколіннями.* Буковинський матем. журнал. **10**(2). 2022. 165-175.

[2] Маценко В.Г. *Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю.* Буковинський матем. журнал. **12**(1). 2024. 74-83.

[3] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica, 1951. **38**. 196-218.

Список літератури

[1] Matsenko V.G. *Modeling harvesting processes for populations with non-overlapping generations.* Bukovinian Math. Journal. **10**(2). 2022. 165–175. (in Ukrainian)

[2] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy.* Bukovinian Math. Journal. **12**(1). 2024. 74-83. (in Ukrainian)

[3] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica, 1951. **38**. 196-218.

Надійшло 01.11.2024

Matsenko V.G. *Analysis of Skellam-type models with periodic regimes*, Bukovinian Math. Journal. **12** (2) (2024), 128–142.

Difference equations are used in order to model the dynamics of population with non-overlapping generations. In the simplest case such equations have the form $N_{t+1} = f(N_t) N_t$, where $N_t > 0$ is the population size at a moment of time t, $f(N_t) = \dfrac{N_{t+1}}{N_t}$ is a coefficient of natural reproduction.

In Skellam's model this coefficient has the form of a decreasing hyperbolic function: $f(N_t) = \dfrac{a}{b + N_t}$, $a, b > 0$. Parameter a here plays the role of the largest value of the reproduction coefficient, and b describes the influence of self-regulating mechanisms on population dynamics.

For the Skellam's model, both without harvesting and with harvesting, only regimes with monotonic stabilization of the population size are observed. At the same time, as in other discrete models, there are periodic and even chaotic solutions.

In this work, the following generalization of the Skellam model is proposed, which allows the existence of periodic regimes.

Namely, a function is taken for $f(N_t) = \dfrac{a}{b + N_t^3}$. This shows that at certain values of a and b there are stable stationary states, that later lose stability, whereas with a corresponding change in a and b, cycles of lengths 2, then 4, 8 appear. That is, there is a bifurcation of the doubling of the cycle.

Periodic solutions with period 3 where not found, although the existence of chaotic solutions was established. It has been established that stable periodic regimes during harvesting can lose their stability.

Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 2, 143–153 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №2, 143–153

Мединський І. П., Пасічник Г. С.

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ПАРАМЕТРА, ТА З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова із залежними від параметра зростаючими коефіцієнтами та з виродженням на початковій гіперплощині побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його властивості. Коефіцієнти рівняння є досить гладкими, а їх ріст залежить від росту деякої функції. Такі властивості є важливими для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтими, залежними від змінних основної групи.

Ключові слова і фрази: ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, зростаючі коефіцієнти, фундаментальний розв'язок задачі Коші, виродження на початковій гіперплощині.

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна (Мединський І. П.)
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна (Пасічник Г. С.)
e-mail: *ihor.p.medynskyi@lpnu.ua (Мединський І.П.), pasichnyk.gs@gmail.com (Пасічник Г.С.)*

Вступ

Дослідження класів параболічних рівнянь і систем рівнянь, які мають виродження на множині задання початкових даних, започатковані в середині 90-х років минулого століття у Чернівцях. Ними охоплено параболічні за Петровським чи за Ейдельманом системи з обмеженими або необмеженими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами, вироджені параболічні типу Колмогорова (ультрапараболічні) рівняння з обмеженими коефіцієнтами. Більшість вищеназваних результатів увійшли повністю, або частково до монографії [1], а огляди результатів містяться в [2, 3]. Питання побудови, дослідження і застосування фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічних типу Колмогорова рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині, коефіцієнти якого можуть зростають при $|x| \to \infty$, залишається відкритим. Ми розглядаємо ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова другого порядку з виродженнями на початковій гіперплощині, коефіцієнти якого задежать від параметра y_1 і можуть зростають при $|y_1| \to \infty$.

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K45, 35K65, 35K70, 35A08.

1 Постановка задачі

Нехай n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_2 \le n_1$; $n := n_1 + n_2$; $M := n_1 m_1 + n_2 m_2$, де $m_1 := 1/2$, $m_2 := 3/2$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. Будемо використовувати ще позначення: $x_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $x_1'' := (x_{1(n_2+1)}, \ldots, x_{1n_1})$; $X_1(t) = x_1$, $X_2(t) = x_2 + tx_1'$; α і β – неперервні на $[0, T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна; $B(t, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta$.

Розглядатимемо в шарі $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ рівняння

$$\Big(S - \beta(t)\Big(\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, y_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y_1)\partial_{x_{1j}} + a_0(t, y_1)\Big)\Big) u(t, x) = 0, \tag{1}$$

в якому $S := \alpha(t)\partial_t - \beta(t) \sum\limits_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}}$, y_1 – фіксована точка з $\mathbb{R}^{n_1}$.

Припускається, що на коефіцієнти рівняння (1) виконуються наступні умови.

$\mathbf{A}_1$. Існує неперервна функція $D : \mathbb{R}^{n_1} \to [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

1) $D(y_1) \to \infty$ при $|y_1| \to \infty$;

2) функції $b_{js}(t, x_1) \equiv a_{js}(t, y_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, $b_j(t, y_1) \equiv a_j(t, y_1)D(y_1)^{-1}$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $b_0(t, y_1) \equiv a_0(t, y_1)D(y_1)^{-2}$, $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $0 \le t \le T$, обмежені;

3) для рівняння без виродження на початковій гіперплощині

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, y_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, y_1)\partial_{x_{1j}} \left(-i\partial_{x_{n+1}}\right) - $$
$$ - b_0(t, y_1)\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right)^2\Big) v(t, x) = 0,$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} \quad \forall\, \mu \in \mathbb{R} :$$
$$\operatorname{Re}\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, x_1)\sigma_{1j}\sigma_{1s} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, x_1)\sigma_{1j}\mu - b_0(t, x_1)\mu^2\Big) \ge \delta\Big(|\sigma_1|^2 + \mu^2\Big). \tag{2}$$

.

$\mathbf{A}_2$. Існують неперервні похідні $\partial_{y_1}^{k_1} a_{js}$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, $\partial_{y_1}^{k_1} a_j$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $\partial_{y_1}^{k_1} a_0$, $|k_1| \le 2$, для яких справджуються оцінки

$|\partial_{y_1}^{k_1} a_{js}(t, y_1)| \le C(D(y_1))^{|k_1|(1-\varepsilon)}$, $|\partial_{y_1}^{k_1} a_j(t, y_1)| \le C(D(y_1))^{1+|k_1|(1-\varepsilon)}$,

$|\partial_{y_1}^{k_1} a_0(t, y_1)| \le C(D(y_1))^{2+|k_1|(1-\varepsilon)}$, $t \in [0, T]$, $\quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$,

де $C > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$; функції $b_{js}(t, y_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, $b_j(t, y_1)$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $b_0(t, y_1)$ як функції t є неперервними рівномірно щодо $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

$\mathbf{A}_3$. Похідні $\partial_{y_1}^{k_1} a_{js}$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n\}$, $\partial_{y_1}^{k_1} a_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, $\partial_{y_1}^{k_1} a_0$, $|k_1| \le 2$, задовольняють локальну умову Гельдера за y_1 з показником $\lambda \in (0, 1)$ рівномірно щодо $t \in [0, T]$, тобто

$$\forall R > 0 \quad \exists\, C > 0 \quad \forall \{y_1, z_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1},\ |y_1 - z_1| \le R \quad \forall\, t \in [0, T] :\ \ |\Delta_{y_1}^{z_1} a(t, y_1)| \le C|y_1 - z_1|^{\lambda}.$$

2 Побудова фундаментального розв'язоку задачі Коші (ФРЗК)

Розглянемо допоміжне рівняння

$$\Big(\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\beta(t)\Big(\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(t,y_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}}+\sum_{j=1}^{n_1}b_j(t,y_1)\partial_{x_{1j}}\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right)+$$

$$+b_0(t,y_1)\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right)^2\Big)\Big)v(t,x,x_{n+1})=0,\qquad (t,x,x_{n+1})\in\Pi_{(0,T]}\times\mathbb{R},\tag{3}$$

де y_1 – фіксована точка простору $\mathbb{R}^{n_1}$.

Функцію φ вважатимемо такою функцією, що всі подальші міркування є законними, зокрема, для неї існує перетворення Фур'є $\psi(\sigma):=F_{x\to\sigma}[\varphi],\quad \sigma\in\mathbb{R}^n$.

Шукаючи розв'язок задачі Коші для рівняння (3) у вигляді

$$v(t,x,x_{n+1})=F^{-1}_{\substack{\sigma\to x\\ \eta\to x_{n+1}}}[\tilde v(t,\sigma,\eta)],\quad t>0,\ (x,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1},\tag{4}$$

і використавши властивості оберненого перетворення Фур'є, одержимо для невідомої функції $\tilde v$ задачу Коші

$$\Big(\alpha(t)\partial_t+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_2}\sigma_{2j}\partial_{\sigma_{1j}}+\beta(t)\Big(\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(t,y_1)\sigma_{1j}\sigma_{1s}-$$

$$-i\sum_{j=1}^{n_1}b_j(t,y_1)\sigma_{1j}\eta-b_0(t,y_1)\eta^2\Big)\Big)\tilde v(t,\sigma,\eta)=0,\quad (t,\sigma,\eta)\in\Pi_{(\tau,T]}\times\mathbb{R},\tag{5}$$

$$\tilde v(t,\sigma,\eta))|_{t=\tau}=2\pi\psi(\sigma)\delta(\eta),\quad \sigma\in\mathbb{R}^n,\ \eta\in\mathbb{R}.\tag{6}$$

Рівняння (5) – це лінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку. Задача Коші для такого рівняння розв'язується методом характеристик, згідно з яким складаємо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt}{\alpha(t)}=\frac{d\sigma_{11}}{\beta(t)\sigma_{21}}=\ldots=\frac{d\sigma_{1n_2}}{\beta(t)\sigma_{2n_2}}=\frac{d\tilde v}{\beta(t)\Big(-\sum\limits_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(t,y_1)\sigma_{1j}\sigma_{1s}+i\sum\limits_{j=1}^{n_1}b_j(t,y_1)\sigma_{1j}\eta+b_0(t,y_1)\eta^2\Big)\tilde v}$$

і знаходимо її n_2+1 незалежних інтегралів

$$\sigma_{1j}-B(t,\tau)\sigma_{2j}=C_j,\quad j\in\{1,\ldots,n_2\};$$

$$\tilde v=C\exp\Big\{\int_\tau^t\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(\theta,y_1)\sigma_{1j}\sigma_{1s}+i\sum_{j=1}^{n_1}b_j(\theta,y_1)\sigma_{1j}\eta+b_0(\theta,y_1)\eta^2\Big)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Big\},$$

де C_j, C – довільні сталі. Задовольнивши початкову умову (6), в результаті одержимо

$$v(t,x,x_{n+1})=(2\pi)^{-(n+1)}\int_{\mathrm{R}^{n+1}}\exp\Big\{i((x,x_{n+1}),(\sigma,\eta))+$$

$$+\int_\tau^t\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(\theta,y_1)\big([\sigma_{1j}-B(t,\theta)\sigma_{2j}]\bar\varsigma_j+\sigma_{1j}\bar{\bar\varsigma}_j\big)\big([\sigma_{1s}-B(t,\theta)\sigma_{2s}]\bar\varsigma_s+\sigma_{1s}\bar{\bar\varsigma}_s\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1} b_j(\theta,y_1)\big([\sigma_{1j}-B(t,\theta)\sigma_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\sigma_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\eta+b_0(\theta,y_1)\eta^2\Big)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Bigg\}\times$$
$$\times\psi\left(\sigma_1'-B(t,\tau)\sigma_2;\ \sigma_1'';\ \sigma_2\right)\,(2\pi\delta(\eta))\,d\sigma\,d\eta,\quad t>\tau,\ \ x\in\mathrm{R}^n,\ \ x_{n+1}\in\mathbb{R},$$

де $\bar{\varsigma}_j:=\begin{cases}1,\ j\in\{1,...,n_2\},\\ 0,\ j\in\{n_2+1,...,n_1\},\end{cases}$ $\bar{\bar{\varsigma}}_j:=\begin{cases}0,\ j\in\{1,...,n_2\},\\ 1,\ j\in\{n_2+1,...,n_1\}.\end{cases}$

Зробивши заміну змінних інтегрування за формулами

$$\sigma_1'-B(t,\tau)\sigma_2=\mu_1',\quad \sigma_1''=\mu_1'',\quad \sigma_2=\mu_2,\qquad \eta=\nu,$$

змінивши порядок інтегрування, прийдемо до формули

$$v(t,x,x_{n+1})=\int\limits_{\mathrm{R}^{n+1}} G_0(t,x,\tau,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1)\varphi(\xi)\,d\xi\,d\xi_{n+1},$$
$$t>0,\ \ x\in\mathbb{R}^n,\ \ x_{n+1}\in\mathbb{R},$$

де

$$G_0(t,x,\tau,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1)=(2\pi)^{-(n+1)}\int\limits_{\mathrm{R}^{n+1}}\exp\Bigg\{i((x_1-\xi_1,\mu_1)+$$
$$+(x_2+B(t,\tau)x_1'-\xi_2,\mu_2)+(x_{n+1}-\xi_{n+1},\nu))+$$
$$+\int\limits_\tau^t\Bigg(-\sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(\theta,y_1)\big([\mu_{1j}+B(\theta,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\big([\mu_{1s}+B(\theta,\tau)\mu_{2s}]\bar{\varsigma}_s+\mu_{1s}\bar{\bar{\varsigma}}_s\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1} b_j(\theta,y_1)\big([\mu_{1j}+B(\theta,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\nu+b_0(\theta,y_1)\nu^2\Bigg)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Bigg\}\,d\mu\,d\nu=$$
$$=F^{-1}_{\substack{\mu\to X(B(t,\tau))-\xi\\ \nu\to x_{n+1}-\xi_{n+1}}}[V(t,\tau,\mu,\nu,y_1)](t,\tau,x,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1),\tag{7}$$

а функція

$$V(t,\tau,\mu,\nu,y_1)=\exp\Bigg\{\int\limits_\tau^t\Bigg(-\sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(\theta,y_1)\big([\mu_{1j}+B(\theta,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\big([\mu_{1s}+B(\theta,\tau)\mu_{2s}]\bar{\varsigma}_s+$$
$$+\mu_{1s}\bar{\bar{\varsigma}}_s\big)+i\sum_{j=1}^{n_1} b_j(\theta,y_1)\big([\mu_{1j}+B(\theta,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\nu+b_0(\theta,y_1)\nu^2\Bigg)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Bigg\}$$

є розв'язком задачі

$$\Bigg[\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t,y_1)\big([\mu_{1j}+B(t,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\big([\mu_{1s}+B(t,\tau)\mu_{2s}]\bar{\varsigma}_s+\mu_{1s}\bar{\bar{\varsigma}}_s\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1} b_j(t,y_1)\big([\mu_{1j}+B(t,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\nu+b_0(t,y_1)\nu^2\Big)\Bigg]V(t,\tau,\mu,\nu,y_1)=0,\tag{8}$$
$$V|_{t=\tau}=1.$$

В інтегралі (7) зробимо заміну змінних інтегрування за формулами

$$\mu_1 = (B(t,\tau))^{-1/2}\sigma_1,\ \mu_2 = (B(t,\tau))^{-3/2}\sigma_2,\ \nu = (B(t,\tau))^{-1/2}\eta,\ B(\theta,\tau) = B(t,\tau)\vartheta.$$

В результаті отримаємо рівність

$$G_0(t,x,\tau,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1) = (B(t,\tau))^{-(n_1+3n_2+1)/2}\times$$
$$\times F^{-1}_{\substack{\sigma_1\to(B(t,\tau))^{-1/2}(x_1-\xi_1)\\ \sigma_2\to(B(t,\tau))^{-3/2}(x_2+(t-\tau)x_1'-\xi_2)\\ \eta\to(B(t,\tau))^{-1/2}(x_{n+1}-\xi_{n+1})}}[\hat V(t,\tau,\sigma,\eta,y_1)](t,\tau,z,z_{n+1},y_1)\Big|_{\substack{z=(X(B(t,\tau))-\xi)_{B(t,\tau)}\\ z_{n+1}=(B(t-\tau))^{-1/2}(x_{n+1}-\xi_{n+1})}}, \quad (9)$$

в якій $x_t = (t^{-1/2}x_1, t^{-3/2}x_2)$, і з урахуванням обмеженості коефіцієнтів b_{js}, b_j, $j\in\{1,\dots,n_1\}$, та b_0

$$|\hat V(t,\tau,\sigma,\eta,y_1)| \le \exp\Big\{\int\limits_0^1\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\big([\sigma_{1j}+\vartheta\sigma_{2j}]\varsigma_j'+\sigma_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\sigma_{1s}+\vartheta\sigma_{2s}]\varsigma_s'+\sigma_{1s}\varsigma_s''\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\big([\sigma_{1j}+\vartheta\sigma_{2j}]\varsigma_j'+\sigma_{1j}\varsigma_j''\big)\eta+\eta^2\Big)d\vartheta\Big\}.$$

Як в [1], отримується оцінка

$$|\hat V(t,\tau,\sigma+i\gamma,\eta,y_1)| \le C\exp\{-\delta_1|\sigma|^2+c_1|\gamma|^2-\delta|\eta|^2\},$$
$$0<\tau<t\le T,\ \ \{\sigma,\gamma\}\subset\mathbb{R}^n,\ \eta\in\mathbb{R},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1},$$

де $C>0$, $\delta_1>0$, $c_1>0$, $\delta>0$. Тому

$$|V(t,\tau,\sigma+i\gamma,\eta,y_1)| \le C\exp\{(-\delta_1|\sigma_1|^2+c_1|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_1|\sigma_2|^2+c_1|\gamma_2|^2)(B(t,\tau))^3-$$
$$-\delta|\eta|^2B(t,\tau)\},\quad 0<\tau<t\le T,\ \ \{\sigma,\gamma\}\subset\mathbb{R}^n,\ \eta\in\mathbb{R},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad (10)$$

в якій $C>0$, $\delta_1>0$, $c_1>0$, $\delta>0$.

З (7) та (10) за умови $\mathbf{A}_1$ одержуємо, як в [1], оцінку

$$|\partial_x^k\partial_{x_{n+1}}^{k_{n+1}}G_0(t,x,\tau,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1)| \le C_{kk_{n+1}}(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}-|k_{n+1}|/2}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\times$$
$$\times\exp\Big\{-c\frac{|x_{n+1}-\xi_{n+1}|^2}{B(t,\tau)}\Big\},\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \{x_{n+1},\xi_{n+1}\}\subset\mathbb{R},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad (11)$$

де

$$E_c(t,x,\xi) = \exp\Big\{-c\Big(\frac{|X_1(t)-\xi_1|^2}{t}+\frac{|X_2(t)-\xi_2|^2}{t^3}\Big)\Big\},$$

а $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $k_{n+1}\in\mathbb{Z}_+^1$, $C_{kk_{n+1}}>0$, $c>0$ – деякі сталі, $M_{kl} := (|k_1|+|l_1|)m_1+(|k_2|+|l_2|)m_2$. При цьому, зокрема, похідна $\partial_x^kG_0(t,x,\tau,\xi,z,y_1)$, $z=z'+iz''\in\mathbb{C}$, як функція аргументу $(B(t,\tau))^{-1/2}z$ при фіксованих t,τ,x,ξ і y є цілою функцією, для якої справджуються оцінки

$$|\partial_x^kG_0(t,x,\tau,\xi,z,y_1)| \le C_k(t-\tau)^{-M-M_{k0}}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\exp\Big\{-c\frac{|z'|^2}{B(t,\tau)}+c'\frac{|z''|^2}{B(t,\tau)}\Big\},$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ z\in\mathbb{C},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad (12)$$

де $C_k > 0$, $c > 0$, $c' > 0$

Нехай $\hat{G}_0(t,x;\tau,\xi;\nu;y_1) \equiv F_{z\to\nu}[G_0(t,x;\tau,\xi;z;y_1)]$. Тоді функція $\hat{G}_0(t,x;\tau,\xi;\nu;y_1)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, $\nu\in\mathbb{R}$, є ФРЗК для рівняння

$$\Big(\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\beta(t)\Big(\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(t,y_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}}-\sum_{j=1}^{n_1}b_j(t,y_1)\partial_{x_{1j}}\nu-$$
$$-b_0(t,y_1)\nu^2\Big)\Big)\,\tilde{v}(t,x)=0,\qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\tag{13}$$

для довільно фіксованих точок $\nu\in\mathbb{R}$ і $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$.

З оцінок (12) на підставі леми 1.1 з [4, с. 35] про перетворення Фур'є випливають такі оцінки:

$$\left|\partial_x^k\hat{G}_0(t,x;\tau,\xi;\nu;y_1)\right|\le C_k(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\exp\{-c\nu^2B(t,\tau)\},$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \nu\in\mathbb{R}\quad y_1\in\mathbb{R}^{n_1}.\tag{14}$$

Тепер, поклавши $\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)\equiv\hat{G}_0(t,x;\tau,\xi;D(y_1);y_1)$, з оцінок (14) одержуємо

$$\left|\partial_x^k\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)\right|\le C_k(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\exp\{-cB(t,\tau)(D(y_1))^2\},$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi,\}\subset\mathbb{R}^n,\quad y_1\in\mathbb{R}^{n_1},\tag{15}$$

де $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $C_k>0$, $c>0$.

При цьому функція $\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)=F^{-1}_{\sigma\to X(B(t,\tau))-\xi}[V_0(t,\tau,\sigma,y_1)](t,\tau,x,\xi,y_1)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, в якій $V_0(t,\tau,\sigma,y_1)=V(t,\tau,\sigma,D(y_1),y_1)$ згідно з (8) є розв'язком рівняння

$$\Big[\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}a_{js}(t,y_1)\big([\sigma_{1j}+B(t,\tau)\sigma_{2j}]\varsigma'_j+\sigma_{1j}\varsigma''_j\big)\big([\sigma_{1s}+B(t,\tau)\sigma_{2s}]\varsigma'_s+\sigma_{1s}\varsigma''_s\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,y_1)\big([\sigma_{1j}+B(t,\tau)\sigma_{2j}]\varsigma'_j+\sigma_{1j}\varsigma''_j\big)+a_0(t,y_1)\Big)\Big]V_0(t,\tau,\sigma,y_1)=0,\tag{16}$$

є ФРЗК для рівняння (1) для кожної фіксованої точки $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$.

Зазначимо, з (10) випливає оцінка

$$|V_0(t,\tau,\sigma+i\gamma,y_1)|\le C\exp\{(-\delta_1|\sigma_1|^2+c_1|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_1|\sigma_2|^2+c_1|\gamma_2|^2)(B(t,\tau))^3-$$
$$-\delta(D(y_1))^2B(t,\tau)\},\quad 0<\tau<t\le T,\ \{\sigma,\gamma\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1},\tag{17}$$

де $C>0$, $\delta_1>0$, $c_1>0$, $\delta>0$.

3 Властивості ФРЗК для рівняння (1)

Оцінка (17) лежить в основі отримання повного аналітичного опису $\hat{G}$.

Наведемо деякі властивості ФРЗК для рівняння (1).

Властивість 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$. *Тоді справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k \partial_{y_1}^l \hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)\right| \leq C(B(t,\tau))^{-(M+M_{k0}+|l|(1-\varepsilon)/2)} E_c(B(t,\tau),x,\xi)\times$$
$$\times \exp\{-cB(t,\tau)(D(y_1))^2\},\ \ 0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1},\ k\in\mathbb{Z}_+^n,\ |l|\leq 2. \quad (18)$$

Доведення. Оцінимо спочатку похідні від $\hat{G}$ за y_1. Згідно з вищевикладеним досить одержати оцінку $V_0(t,\tau,\varrho,y_1)$, $0\leq\tau<t\leq T$, $\varrho\in\mathbb{C}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$. Диференціюючи рівність (16) за y_{1j}, $j\in\{1,...,n_1\}$, одержуємо

$$\partial_{y_{1j}} V_0(t,\tau,\varrho,y_1)=\int\limits_\tau^t V_0(t,\theta;\varrho;y_1)\times$$
$$\times\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\partial_{y_{1j}}a_{js}(\theta,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(\theta,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+B(\theta,\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{y_{1j}}a_j(\theta,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(\theta,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\partial_{y_{1j}}a_0(\theta,y_1)\Big)V_0(\theta,\tau,\varrho,y_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta.$$

Використавши умову $\mathbf{A}_2$, оцінку (17), нерівність

$$|r|^k\exp\{-c|r|^p\}\leq C_k\exp\{-c_0|r|^p\},\quad r\in\mathbb{R}, \quad (19)$$

в якій $k>0$, $p>0$, $c>0$, $0<c_0<c$, $C_k>0$, одержимо

$$\big|\partial_{y_{1j}}V_0(t,\tau;\varrho;y_1)\big|\leq C\exp\Big\{(-\delta_3|\sigma_1|^2+c_3|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_4|\sigma_2|^2+c_4|\gamma_2|^2)B(t,\tau)^3-$$
$$-\delta(D(y_1))^2B(t,\tau)\Big\}\Big((D(y_1))^{1-\varepsilon}+(D(y_1))^{2-\varepsilon}+(D(y_1))^{3-\varepsilon}\Big)B(t,\tau)\leq$$
$$\leq C\exp\Big\{(-\delta_3|\sigma_1|^2+c_3|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_4|\sigma_2|^2+c_4|\gamma_2|^2)B(t,\tau)^3-\delta^1(D(y_1))^2B(t,\tau)\Big\}\times$$
$$\times\Big(B(t,\tau)^{-(1-\varepsilon)/2}+B(t,\tau)^{-(2-\varepsilon)/2}+B(t,\tau)^{-(3-\varepsilon)/2}\Big)B(t,\tau)\leq$$
$$\leq C\exp\Big\{(-\delta_3|\sigma_1|^2+c_3|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_4|\sigma_2|^2+c_4|\gamma_2|^2)B(t,\tau)^3-\delta^1(D(y_1))^2B(t,\tau)\Big\}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-(1-\varepsilon)/2},\quad 0\leq\tau<t\leq T,\quad y_1\in\mathbb{R}^{n_1},\quad \varrho\equiv\sigma+i\gamma\in\mathbb{C}^n, \quad (20)$$

де $\delta_3>0$, $c_3>0$, $\delta_4>0$, $c_4>0$, $0<\delta^1<\delta$.

Диференціюючи рівність (16) за y_{1j} та y_{1k}, $\{j,k\}\subset\{1,...,n_1\}$, отримуємо

$$\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)=\int\limits_\tau^t V_0(t,\theta;\varrho;y_1)Q(\theta,\tau,\varrho,y_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta,$$

де

$$Q(t,\tau,\varrho,y_1)=$$
$$=\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\partial_{y_{1k}}a_{js}(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+B(t,\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{y_{1k}}a_j(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\partial_{y_{1k}}a_0(t,y_1)\Big)\partial_{y_{1j}}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)+$$

$$+\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\partial_{y_{1j}}a_{js}(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+B(t,\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{y_{1j}}a_j(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\partial_{y_{1j}}a_0(t,y_1)\Big)\partial_{y_{1k}}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)+$$

$$+\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}a_{js}(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+(t-\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}a_j(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t-\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}a_0(t,y_1)\Big)V_0(t,\tau,\varrho,y_1)/$$

За допомогою умови $\mathbf{A}_2$, оцінок (17), (20) та нерівності (19) одержуємо

$$\Big|\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)\Big|\le C\exp\Big\{(-\delta_5|\sigma_1|^2+c_5|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_6|\sigma_2|^2+c_6|\gamma_2|^2)B(t,\tau)^3-$$
$$-\delta^1(D(y_1))^2(t-\tau)\Big\}(B(t,\tau))^{-2(1-\varepsilon)/2},\ 0\le\tau<t\le T,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1},\quad \varrho\equiv\sigma+i\gamma\in\mathbb{C}^n.\quad (21)$$

Оцінки (20) та (21) дозволяють одержати повний аналітичний опис для похідних за y_1 від функції $\hat G$, тобто похідних

$$\partial^l_{y_1}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)=B(t,\tau)^{-M}F^{-1}_{\sigma\to z}[\partial^l_{y_1}V_0(t,\tau,\sigma,y_1)](t,\tau,x,z,y_1)\Big|_{z=(X(B(t,\tau))-\xi)_{B(t,\tau)}}$$
$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}.$$

□

Зауваження 1. З оцінок (18) випливають оцінки

$$\Big|\partial^{k_1}_{x_1}\hat G(t,x;\tau,\xi;x_1)\Big|\le C(B(t,\tau))^{-(M+M_{k_10})}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\times$$
$$\times\exp\{-cB(t,\tau)(D(x_1))^2\},\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad |k_1|\le 2,$$

Властивість 2. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$*–*$\mathbf{A}_3$*. Тоді справджуються оцінки*

$$\forall R>0\quad \exists C>0\quad \forall\{y_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1},\ |y_1-z_1|\le R:$$
$$|\Delta^{z_1}_{y_1}\partial^k_x\partial^l_{y_1}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\Big|\le C|y_1-z_1|^\lambda(B(t,\tau))^{-(M+M_{k0}+|l|(1-\varepsilon)/2)}E_c(B(t,\tau),x,\xi),$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad k\in\mathbb{Z}^n_+,\quad |l|\le 2,\qquad (22)$$

де $C>0$*,* $c>0$*,* $\lambda\in(0,1]$ *з умови* $\mathbf{A}_3$*,* $\varepsilon\in(0,1)$ *з умови* $\mathbf{A}_2$*.*

Доведення. Для отримання оцінки (22) досить одержати оцінку $|\Delta^{z_1}_{y_1}\partial^l_{y_1}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)|$, $\{y_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}$, $|y_1-z_1|\le R$, $0\le\tau<t\le T$, $\varrho\in\mathbb{C}^n$. Згідно з (16)

$$\Delta^{z_1}_{y_1}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)=\int_\tau^t V_0(t,\theta;\varrho;y_1)\times$$

$$\times\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\Delta^{z_1}_{y_1}a_{js}(\theta,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(\theta,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+B(\theta,\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{y_1}^{z_1}a_j(\theta,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(\theta,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\Delta_{y_1}^{z_1}a_0(\theta,y_1)\Big)V_0(\theta,\tau,\varrho,z_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta.$$

Скориставшись умовою $\mathbf{A}_3$ та оцінкою (17), маємо

$$\Big|\Delta_{y_1}^{z_1}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)\Big|\le C|y_1-z_1|^\lambda\exp\Big\{(-\delta_3|\sigma_1|^2+c_3|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_4|\sigma_2|^2+$$
$$+c_4|\gamma_2|^2)(B(t,\tau))^3\Big\},\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{y_1,z_1\}\subset B_R,\quad \varrho\equiv\sigma+i\gamma\in\mathbb{C}^n.$$

Аналогічно оцінюємо прирости похідних за y_1, використовуючи (18). □

Властивість 3. *Справджується рівність*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=\exp\Big\{\int\limits_\tau^t a_0(\theta,y_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Big\},\ 0\le\tau<t\le T,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}.\quad (23)$$

Доведення. Маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=F^{-1}_{\sigma\to X(B(t,\tau))-\xi}[V_0(t,\tau,\sigma,y_1)](t,\tau,x,\xi,y_1).$$

Здійснивши заміну змінних інтегрування ξ за формулами $X(B(t,\tau))-\xi=\eta$, одержуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(F^{-1}_{\sigma\to\eta}[V_0(t,\tau,\sigma,y_1)]\Big)(t,\tau,x,\eta,y_1)\,d\eta=$$

$$=F_{\eta\to0}[F^{-1}_{\sigma\to\eta}[V_0(t,\tau,\sigma,y_1)](t,\tau,x,\eta,y_1)]=V_0(t,\tau,x,0,y_1)=\exp\Big\{\int\limits_\tau^t a_0(\theta,y_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Big\}.$$

□

Зауваження 2. З (23) випливає, що

1) для довільних $k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$, $0\le\tau<t\le T$ і $x\in\mathbb{R}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$

$$\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=0;$$

2)

$$\lim_{t\to\tau}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=1$$

рівномірно щодо $x\in\mathbb{R}^n$, а якщо $a_0=0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=1,\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}.$$

В наступній властивості $z^{(1)}:=(z_1,x_2)$, $z^{(2)}:=(x_1,z_2)$, $\Delta_{x_s}^{z_s}f(\cdot,x,\cdot):=\Delta_x^{z^{(s)}}f(\cdot,x,\cdot)$, $s\in\{1,2\}$; $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^n,|x|\le R\}$, $R>0$.

Властивість 4. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$, *а неперервна функція* $\varphi(t,x;\tau,\xi)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, *задовольняє умови*

$$|\varphi(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M-1+\varepsilon/2}E_c(B(t,\tau),x,\xi),\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$$
$$\forall R>0\quad \exists\lambda_1^s\in(0,1),\ \lambda_1^1<\varepsilon,\ \lambda_1^2<\frac{\varepsilon}{3}\quad \forall\{x,z^{(s)}\}\subset B_R:$$
$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\varphi(t,x;\tau,\xi)|\le C|x_s-z_s|^{\lambda_1^s}(B(t,\tau))^{-M-1+\lambda_2^s m_s}\Big(E_c(B(t,\tau),x,\xi)+E_c(B(t,\tau),z^{(s)},\xi)\Big),$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \lambda_2^1\equiv\varepsilon-\lambda_1^1,\quad \lambda_2^2\equiv\frac{\varepsilon}{3}-\lambda_1^2,\quad s\in\{1,2\}.$$

Тоді функція

$$w(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\theta,y,x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1}w$, $|k_1|\le 2$, *и* Sw, *для яких правильні формули*

$$\partial_{x_{1j}}w(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1j}}\hat G(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{x_{1j}x_{1l}}w(t,x;\tau,\xi)&=\int\limits_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^2_{x_{1j}x_{1l}}\hat G(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+\\&+\int\limits_{t_1}^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^2_{x_{1j}x_{1l}}\hat G(t,x;\theta,y;x_1)\Delta_y^{X(B(t,\theta))}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+\\&+\int\limits_{t_1}^t\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^2_{x_{1j}x_{1l}}\hat G(t,x;\theta,y;x_1)dy\right)\varphi(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}Sw(t,x;\tau,\xi)&=\varphi(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}S\hat G(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+\\&+\int\limits_{t_1}^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}S\hat G(t,x;\theta,y;x_1)\Delta_y^{X(B(t,\theta))}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+\\&+\int\limits_{t_1}^t\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}S\hat G(t,x;\theta,y;x_1)dy\right)\varphi(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},\end{aligned}\tag{26}$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad B(t,t_1)=B(t,\tau)/2.$$

Доведення. Доведення (24) – (26) проводиться модифікацією доведень аналогічних властивостей для рівняння без виродження на початковій гіперплощині та рівнянь з [1], використовуючи властивості оцінних функцій E_c з [5]. □

4 Висновки

Для виродженого параболічного рівняння другого порядку типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами, залежними від параметра $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, та з виродженням на початковій гіперплощині побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші. Аналогічні результати є правильними для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння з коефіцієнтами, залежними від t і параметра y, $y \in \mathbb{R}^n$.

Отримані результати можуть бути використані для дослідження фундаментального розв'язу задачі Коші для рівняння з виродженням на початковій гіперплощині і зростаючими коефіцієнтами, залежними від змінної $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

Список літератури

[1] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**).

[2] Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P., Pasichnyk H. S. *Parabolic Equations with degenerations on initial hyperplane* Bukovinian. Math. J. 2016. **4** (3–4), 57–68. (in Ukrainian)

[3] Mtdynsky I. *Fundamental solutsons of Cauchy problem for degeneratt equations* Thesis for the degree of Doctor of Science (DSc) Lviv, 2021. (in Ukrainian)

[4] Eidelman S. D. Parabolic systems. Nauka, Moscow, 1964. (in Russian) English edition: North-Holland, Amsterdam, 1969.

[5] Voznyak O., Ivasyshen S., Medynsky I. *On fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic kolmogorov-type equations with degeneration on the initial hyperplane.* Bukovinian. Mat. J. 2015. **3** (3-4), 41–51. (in Ukrainian)

Надійшло 15.12.2024

Medynskyi I. P., Pasichnyk H. S. *Fundamental solution of the Cauchy problem for an ultraparabolic equation with increasing coefficients depending on a parameter and with degeneration on the initial hyperplane*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 143–153.

For an ultraparabolic Kolmogorov type equation with parameter-dependent increasing coefficients and with degeneration on the initial hyperplane, a fundamental solution of the Cauchy problem is constructed and its properties are investigated. The coefficients of the equation are quite smooth, and their growth depends on the growth of some function. Such properties are important for constructing a fundamental solution of the Cauchy problem for an equation of Kolmogorov type with increasing coefficients depending on the variables of the main group.

Назарчук В.В., Васькевич С.О., Ратушняк С.П.

ОДИН КОНТИНУАЛЬНИЙ КЛАС ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ОЗНАЧЕНИХ В ТЕРМІНАХ Q_S^*-ЗОБРАЖЕННЯ

У статті вводиться в розгляд один континуальний клас багатопараметричних функцій, означених в термінах поліосновного s-символьного Q_s^*-зображення чисел. Обгрунтовуються структурні, фрактальні та тополого-метричні властивості множини значень функції і множин рівнів в залежності від параметрів.

Ключові слова і фрази: Q_s^*-зображення чисел, фрактальні функції, проєктори цифр, фрактальні множини, множина канторівського типу, інверсор.

Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine (Vaskevych S.O., Nazarchuk V.V.)
Institute of Mathematics of NASU, Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine (Ratushniak S.P.)
e-mail: *nazarchukvalentyna@imath.kiev.ua, svetaklymchuk@gmail.com, ratush404@gmail.com*

Вступ

Функції, у яких фрактальними є множина значень, графіки [2, 3, 7], рівні [4] або інші важливі для функції множини, ми відносимо до фрактальних [1, 5]. Серед функцій зі складною локальною структурою і фрактальними властивостями, визначених на відрізку $[0; 1]$, окремої уваги заслуговують функції, які мають зліченну множину точок розриву, а на множині решти точок є неперервними. Саме таким функціям присвячена дана робота. Для їх означення та аналітичного вивчення використовується поліосновне зображення чисел (Q_s^*-зображення), визначене нескінченною кількістю параметрів, яке є узагальненням класичного s-кового зображення. У роботі Q_s^*-зображення вважається фіксованим, а клас функцій, що розглядається, є однопараметричним (параметр $a \in [0; 1]$). У роботі вивчаються тополого-метричні властивості множини значень та множин рівнів функцій визначеного класу. Зауважимо, що до класу функцій, які вивчаються, входять дві неперервні функції: тотожне перетворення одиничного відрізка та інверсор цифр Q_s^*-зображення числа.

УДК 511.7+517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A21, 26A30.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (1030291, V.N.)

1 Поліосновне Q_s^*-зображення дійсних чисел

Нехай $A \equiv \{0, 1, ..., s-1\}$ – s-ковий алфавіт, $L \equiv A \times A \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту A; $||q_{in}||$ — стохастична матриця, така що $0 < q_{in} < 1$, $q_{0n} + q_{1n} + ... + q_{s-1n} = 1$, $n \in N$ і

$$\prod_{n=1}^{\infty} \max_{i \in A}\{q_{in}\} = 0. \tag{1}$$

Тоді відомо [6], що для довільного $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty}(\beta_{\alpha_n n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \tag{2}$$

де $\beta_{\alpha_n n} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_n - 1} q_{in}$ (тобто $\beta_{0n} = 0$, $\beta_{1n} = q_{0n}$, $\beta_{2n} = q_{0n} + q_{1n}, ..., \beta_{s-1,n} = 1 - q_{s-1n}$). Розклад числа x в ряд (2) називається Q_s^*-представленням цього числа, а скорочений запис $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ — його Q_s^*-зображенням.

Якщо $q_{in} = q_i$ $\forall n \in N$, $i \in A$, то Q_s^*-зображення є самоподібним Q_s-зображенням, при цьому якщо $q_i = \frac{1}{s}$ для будь-якого $i \in A$, то Q_s^*-зображення збігається з класичним s-ковим зображенням.

Існують числа, що мають два Q_s^*-зображення. Це числа зі зображеннями

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}\alpha_m(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}[\alpha_m - 1](s-1)}. \tag{3}$$

Вони називаються Q_s^**-бінарними*. Множина таких чисел є зліченною. Решта чисел одиничного відрізка мають єдине зображення. Вони називаються Q_s^**-унарними*.

Означення 1. *Циліндром* $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m}$ *рангу* m *з основою* $c_1c_2...c_m$ *називається множина чисел*

$$\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m} = \left\{x : x = \sum_{k=1}^{m}\beta_{c_k k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j} + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i i} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty}\beta_{\alpha_n n}\prod_{j=m+1}^{n-1} q_{\alpha_j j}\right\}.$$

$\forall(c_1, ..., c_m)$ і $\forall m \in N$ циліндри Q_s^*-зображення мають властивості:

1) $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1}\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m i}$;

2) $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m} = [a; b]$, $a = \sum\limits_{i=1}^{m}\beta_{c_i i}\prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{c_j j}$, $b = a + \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i}$;

3) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m} = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m...} = x$;

4) $|\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i} = q_{c_m m}|\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_{m-1}}|$, $\Delta^{Q_s^*}_{c_1} = q_{c_1 1}|[0; 1]|$.

Зауваження 1. *Далі ми розглядаємо Q_s^*-зображення, яке задовольняє умови:*

$$0 < \varepsilon < \min_i\{q_{in}\} \text{ і } \max_i\{q_{in}\} < \delta < 1 \ \forall n \in N,$$

які гарантують умови нуль-мірності множин канторівського типу

$$C[Q_s^*, V_n] = \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in V_n \subset A\},$$

коли $V_n \neq A$ нескінченну кількість разів [6].

2 Основний об'єкт дослідження

Нехай a — фіксоване число з одиничного відрізка $[0;1]$, що має s-кове зображення

$$a = \Delta^s_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \ldots + \frac{a_n}{s^n} + \ldots, \text{ де } (a_n) \in L.$$

Основним об'єктом розгляду у даній роботі є функція f_a, означена на $[0;1]$ рівністю:

$$f_a(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{|a_1 - \alpha_1||a_2 - \alpha_2| \ldots |a_n - \alpha_n| \ldots}. \tag{4}$$

Очевидно, що a є одним з параметрів, що визначають функцію f_a. Клас таких функцій позначимо через F.

Найпростішими представниками класу F є такі функції:

$$f_a(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2][s-1-\alpha_3] \ldots [s-1-\alpha_n] \ldots}, a = \Delta^{Q_s^*}_{(s-1)} \tag{5}$$

Функція, означена рівністю (5), називається інверсором цифр Q_s^*-зображення. Вона є неперервною строго спадною сингулярною функцією, коли $q_{in} \neq q_{[s-1-i]n}$ $\forall n \in N$, $i \in A$.

$$f_a(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k} \ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{[s-1-\alpha_1]\alpha_2[s-1-\alpha_3] \ldots [s-1-\alpha_{2k-1}]\alpha_{2k} \ldots}, a = \Delta^{Q_s^*}_{([s-1]0)}. \tag{6}$$

Оскільки має місце нерівність
$f_a(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n (0)}) = \Delta^{Q_s^*}_{|a_1 - \alpha_1| \ldots |a_n - \alpha_n| a_{n+1} \ldots} \neq f_a(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots [\alpha_n - 1](s-1)}) = \Delta^{Q_s^*}_{|a_1 - \alpha_1| \ldots |a_n - \alpha_n + 1||a_{n+1} - s + 1| \ldots}$,
то для більшості функцій класу F коректність їх означень вимагає домовленості використовувати лише одне з двох зображень Q_s^*-бінарних чисел. Нехай те, що містить (0).

Зауважимо, що значення функції f_a від двох різних зображень одного і того ж числа збігаються лише у випадку, коли $a_{n+i} = s - 1 - |a_{n+i} - s + 1|$ для довільного $i \in N \cup \{0\}$, тобто при $a_{n+i} = s - 1$ або $a_{n+i} = 0$ для $\forall n \in N$.

Лема 1. *Для чисел $a = \Delta^s_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ і $b = \Delta^s_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$ таких, що $(\frac{a_n + b_n}{2}) \in L$ має місце рівність*

$$f_a(x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}) = f_b(x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}), \ c_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Доведення. Нехай задано число $a = \Delta^{Q_s^*}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$. Виберемо число $b \in [0;1]$ таке, що $b = \Delta^{Q_s^*}_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$ і $\frac{a_n + b_n}{2} \in A$ $\forall n \in N$ (очевидно, що таке число існує). Тоді

$$f_a(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_n \ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{\frac{|a_1 - b_1|}{2} \ldots \frac{|a_n - b_n|}{2} \ldots} = \Delta^{Q_s^*}_{\frac{|b_1 - a_1|}{2} \ldots \frac{|b_n - a_n|}{2} \ldots} =$$
$$= \Delta^{Q_s^*}_{\frac{|2b_1 - (a_1 + b_1)|}{2} \ldots \frac{|2b_n - (a_n + b_n)|}{2} \ldots} = \Delta^{Q_s^*}_{|b_1 - \frac{a_1 + b_1}{2}| \ldots |b_n - \frac{a_n + b_n}{2}| \ldots} = f_b(x_0). \qquad \square$$

Наслідок 1. *Якщо* $a = \Delta^s_{[2d_1][2d_2]...[2d_n]...}$, *то* $f_a(x = \Delta^{Q^*_s}_{d_1d_2...d_n...}) = x$.

Справді, для $a = \Delta^s_{[2d_1]...[2d_n]...}$ має місце $f_a(x = \Delta^{Q^*_s}_{d_1...d_n...}) = \Delta^{Q^*_s}_{|2d_1-d_1|...|2d_n-d_n|...} = x$.

Теорема 1. *Функції* f_a *класу* F *є неперервними на множині* Q^*_s*-унарних чисел, а на множині* Q^*_s*-бінарних чисел неперервними функціями є лише* f_a, *коли* $a = 0$ *або* $a = 1$.

Доведення. Для $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...}$ і відповідної функції f_a доведемо неперервність у Q^*_s-унарній точці. Нехай $x_0 = \Delta^{Q^*_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha'_n...}$ — Q^*_s-унарна точка. Розглянемо точку x таку, що $x \neq x_0$. Для неї існує такий номер n, що $\alpha'_n = \alpha_n(x_0) \neq \alpha_n(x)$, але $\alpha_k(x) = \alpha_k(x_0)$ при $k < n$. Умова $n \to \infty$ рівносильна $x \to x_0$. Використовуючи означення неперервності функції f в точці, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, маємо $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$. Покажемо, що

$$\lim_{x\to x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| = 0.$$

Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} |f_a(x) - f_a(x_0)| =& |f_a(\Delta^{Q^*_s}_{\alpha_1...\alpha_{n-1}\alpha_n...}) - f_a(\Delta^{Q^*_s}_{\alpha_1...\alpha_{n-1}\alpha'_n...})| = \\ =& |\Delta^{Q^*_s}_{|a_1-\alpha_1|...|a_{n-1}-\alpha_{n-1}||a_n-\alpha_n|...} - \Delta^{Q^*_s}_{|a_1-\alpha_1|...|a_{n-1}-\alpha_{n-1}||a_n-\alpha'_n|...}| = \\ =& \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i i} \cdot W, \text{ де } 0 < W \leq 1. \end{aligned}$$

Тоді

$$\lim_{x\to x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| \leq \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i i} \leq \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \max_{\alpha_i \in A}\{q_{\alpha_i i}\} = 0.$$

А отже, $\lim\limits_{x\to x_0} f_a(x) = f_a(x_0)$ в кожній Q^*_s-унарній точці.

Враховуючи домовленість, що значення функції f_a у Q^*_s-бінарній точці (3) обчислюється за формулою (4) за першим зображенням, у цій точці вона має неусувний розрив. □

3 Структурні властивості функцій класу F

Теорема 2. *Множиною значень* E_{f_a} *функції* f_a, *де* $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...}$, *є множина виду*

$$C[Q^*_s; V_n] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta^{Q^*_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \alpha_n \in V_n \equiv \{0, 1, ..., \max\{s-1-a_n, a_n\}\}, n \in N\}.$$

Доведення. Нехай задано функцію f_a, де $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...}$. Тоді значення функції f_a має зображення $\Delta^{Q^*_s}_{|a_1-\alpha_1|...|a_n-\alpha_n|...}$, де $(\alpha_n) \in L$. Зрозуміло, що n-та цифра Q^*_s-зображення числа y може набувати значень $V_n = \{a_n, |a_n - 1|, ..., |a_n - s + 1|\}$. Оскільки $a_n \in A$, то множині V_n належать послідовні цифри алфавіту A, окрім тих, що в сумі з a_n перевищують $(s-1)$, тобто цифри від 0 до більшого з $(s-1-a_n)$ або a_n. Таким чином, множина значень довільної цифри Q^*_s-зображення y визначає множину значень функції f_a. □

Наслідок 2. *Множина значень функції f_a є підмножиною відрізка* $[0; \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_n...}]$, *де* $c_n = \max\{s-1-a_n, a_n\}$, $n \in N$.

Теорема 3. *Нехай $s > 2$. Множина значень E_{f_a} функції f_a, де $a = \Delta^s_{a_1...a_n...}$, є об'єднанням відрізків, якщо для скінченної кількості місць $a_n \in \{1, 2, ..., s-2\}$, або континуальною ніде не щільною нуль-множиною, якщо для нескінченної кількості місць $a_n \in \{1, 2, ..., s-2\}$.*

Доведення. Для доведення континуальності множини E_{f_a} покажемо, що для довільної цифри Q_s^*-зображення значення функції множина $V_n = \{0, 1, ..., \max\{s-1-a_n, a_n\}\}$, де $a_n \in A_s$ складається принаймні з двох елементів. Оскільки елементи $(s-1-a_n)$ і a_n є інверсними в s-ковому алфавіті, то найменше значення, якого може набувати $\max\{s-1-a_n, a_n\}$, дорівнює $\frac{s}{2}$, якщо s — парне, або $\frac{s-1}{2}$, якщо s — непарне. Таким чином, для довільного n множина V_n містить 0 та 1 для будь-якого $s > 2$, а тому кожна цифра Q_s^*-зображення значення функції має принаймні дві альтернативи. Оскільки цифр у зображенні числа y зліченна множина, то різних послідовностей цифр, що визначають значення функції, континуальна множина, тобто множина E_{f_a} континуальна.

Нехай існує k місць $n_1, n_2, ..., n_k$, для яких $a_{n_i} \in \{1, 2, ..., s-2\}$ $\forall i = \overline{1, k}$. Для простоти міркувань будемо вважати, що $a_{n_i} = 1$ $\forall i = \overline{1, k}$. Тоді $V_{n_i} = \{0, 1, ..., s-2\}$, тобто

$$E_{f_a} = [0; 1] \setminus (\bigcup_{r_{n_1} \neq s-1} \bigcup_{r_{n_2} \neq s-1} ... \bigcup_{r_{n_k} \neq s-1} \Delta^{Q_s^*}_{r_1...r_m}).$$

Оскільки циліндр Q_s^*-зображення є відрізком, то після вилучення з одиничного відрізка s^k неперетинних відрізків (циліндрів виду $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_{[i-1]}[s-1]}$, $i = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$), бачимо, що множина E_{f_a} є скінченним об'єднанням циліндрів (n_k+1)-го рангу. А тому є скінченним об'єднанням відрізків.

Нехай існує нескінченна кількість місць, для яких $a_{n_i} \in \{1, 2, ..., s-2\}$ $\forall i \in N$. Тоді розглянемо довільний циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m}$. Існують циліндри $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m...r_{m+j}} \subset \Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m}$, які не містять точок множини E_{f_a}. Такими циліндрами, наприклад, є $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m...r_{m+j-1}0}$ і $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m...r_{m+j-1}[s-1]}$. Оскільки m — довільне натуральне число, то для будь-якого відрізка, кінці якого належать множині E_{f_a}, існує цілий інтервал точок, що не належать E_{f_a}. А тому E_{f_a} є ніде не щільною множиною.

Для евристичного доведення нуль-мірності $C[Q_s^*; V_n]$ покажемо, що її міра рівна нулю за умови $q_{[s-1]n} = \min_i\{q_{in}\}$, яка не порушує загальність міркувань. Розглянемо множину виду

$$C[Q_s^*; V_n] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \alpha_n \in V_n \equiv \{0, 1, ..., s-2\} \; \forall n \in N\}.$$

Множину $C[Q_s^*; V_n]$ можна подати у вигляді:

$$C[Q_s^*; V_n] = [0; 1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} (\bigcup_{c_1 \in V_1} ... \bigcup_{c_m \in V_m} \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m[s-1]}).$$

Тоді за адитивною властивістю міри Лебега

$$\lambda(C[Q_s^*; V_n]) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (\prod_{i=1}^{m-1} q_{c_i i} q_{[s-1]m}) = 0.$$

Оскільки міра Лебега "наймасивнішої"множини рівна нулю, то зрозуміло, що міра Лебега множини значень для будь-якого a, такого що на нескінченній кількості місць $a_n \in \{1, 2, ..., s-2\}$, рівна нулю. $\square$

Зауваження 2. *Якщо $s = 2$, то $E_{f_a} = [0; 1]$.*

Нагадаємо, що множиною рівня y_0 функції називається множина

$$f_a^{-1}(y_0) = \{x \in [0; 1] : f_a(x) = y_0\}.$$

Приклад 1. Нехай $a = \Delta^5_{(314)}$. Тоді множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_5^*}_{4(0)}$ є порожньою; множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_5^*}_{(0)}$ містить лише одну точку $f_a^{-1}(\Delta^{Q_5^*}_{(0)}) = \{a = \Delta^{Q_5^*}_{(314)}\}$; множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_5^*}_{\underbrace{110...110}_{3n}(0)}$ містить 4^n точок; множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_5^*}_{(110)}$ є континуальною.

Теорема 4. *Нехай $s > 2$. Множина f_a^{-1} рівня $y_0 = \Delta^{Q_s^*}_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$ функції f_a, породженої параметром $a = \Delta^s_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$, є*

1) *порожньою множиною, якщо $b_n = s-1$, $a_n \in \{1, 2, ..., s-2\}$;*

2) *скінченною множиною, якщо лише для скінченної кількості n має місце*

$$\begin{cases} a_n + b_n \in A, \\ a_n - b_n \in A; \end{cases} \qquad \text{або } b_n = 0 \ \forall n \in N,$$

3) *континуальною множиною, якщо для нескінченної кількості n має місце*

$$\begin{cases} b_n \neq 0, \\ a_n + b_n \in A, \\ a_n - b_n \in A. \end{cases}$$

Доведення. Нехай задано число $a = \Delta^s_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ і функція f_a, ним породжена. Розглядається $y_0 = \Delta^{Q_s^*}_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$. Тоді множиною рівня y_0 є корені рівняння $f_a(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x) \ldots \alpha_n(x) \ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{b_1 \ldots b_n \ldots}$. Згідно з означення функції маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} |a_1 - \alpha_1| = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |a_n - \alpha_n| = b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{7}$$

Оскільки $b_n \in A$, то рівняння виду $|a_n - \alpha_n| = b_n$ рівносильне сукупності рівнянь $a_n - \alpha_n = b_n$ і $a_n - \alpha_n = -b_n$, тобто $\alpha_n = a_n - b_n$ або $\alpha_n = a_n + b_n$. При цьому, якщо $a_n - b_n$ і $a_n + b_n$ належить до A одночасно, то рівняння $|a_n - \alpha_n| = b_n$ має не більше двох розв'язків, якщо ж це виконується для нескінченної кількості рівнянь системи (7) і $b_n \neq 0$ нескінченну кількість раз (в цьому випадку рівняння $|a_n - \alpha_n| = b_n$ має два розв'язки), то вона має континуальну множину розв'язків.

Якщо лише одне із значень $\alpha_n = a_n - b_n$ або $\alpha_n = a_n + b_n$ належить до A або $b_n = 0$ $\forall n \in N$, то дане рівняння має лише один розв'язок. При цьому, якщо лише скінченна кількість рівнянь має два розв'язки, а усі решта — один, то система (7) має скінченну кількість розв'язків. Якщо для рівняння $|a_n - \alpha_n| = b_n$, $b_n = s-1$, а $a_n \neq s-1$ або $a_n \neq 0$, то дане рівняння не має розв'язків, а тому і система (7) їх також не має.

Кількість розв'язків системи (7) відповідає кількості прообразів рівня y_0, що й доводить теорему. □

4 Деякі часткові випадки

Нехай Q_s^*-зображення є Q_3-зображенням з параметрами (q_0, q_1, q_2).

Приклад 1. Якщо $a_n = 1$ для будь-якого $n \in N$, то:

1) множиною значень функції є самоподібна множина канторівського типу $C[Q_3, \{0,1\}]$ з фрактальною розмірністю, що є розв'язком рівняння $q_0^x + q_1^x = 1$;

2) множиною рівня $y_0 = \Delta_{(1)}^{Q_3}$ є самоподібна множина канторівського типу $C[Q_3, \{0,2\}]$, фрактальна розмірність якої є розв'язком рівняння $q_0^x + q_2^x = 1$.

Зауважимо, що для цього випадку легко виписати фрактальні властивості всіх рівнів функції.

Список літератури

[1] Jarnicki M., Pflug P. Continuous nowhere differentiable functions. The Monsters of Analysis. Springer Monographs in Mathem., 2015.

[2] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliash N.V., Ratushniak S.P. *Inversor of digits of Q_2^*-representative*, Mat. Stud. 55 (2021), 37–43.

[3] Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O., Lysenko I.M., Maslova Yu.P. *Inversor of digits of two-bases G-representation of real numbers and its structural fractality*, Bukovinian Mathematical Journal, 2022, 10(1), 100–109 (in Ukrainian).

[4] Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P., Klymchuk S.O. *Level sets of asymptotic mean of digits function for 4-adic representation of real number.* Methods Funct. Anal. Topology. 2016, **22** (2), 184–196.

[5] Pratsiovytyi M. V., Panasenko O. B. *Fractal properties of one class of one-parameter continuous non-differentiable functions*, Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ. Ser. 1. Phys. Math., 2006. **№7**, 160–167. (in Ukrainian).

[6] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach to investigation of singular probability distributions, Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ. Publ., Kyiv, 1998 (in Ukrainian).

[7] Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. *Properties and distributions of values of fractal functions related to Q_2-representations of real numbers*, Theory of Probability and Mathem. Stat. 99 (2019), 211-228.

Надійшло 30.11.2024

Nazarchuk V.V., Vaskevych S.O., Ratushniak S.P. *One continuum class of fractal functions defined in terms of Q_s^*-representation*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 154–161.

In the paper we study one class F of multiparameter functions defined in terms of a polybasic s-adic Q_s^*-representation of numbers by the equality

$$f_a(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{|a_1-\alpha_1||a_2-\alpha_2|\ldots|a_n-\alpha_n|\ldots},$$

where (a_n) is a sequence of digits for s-adic representation of the parameter $a \in [0;1]$,

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty}(\beta_{\alpha_n n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j})$$

is Q_s^*-representation of real numbers generated by the positive stochastic matrix $||q_{ij}||$, $\beta_{\alpha_n n} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_n-1} q_{in}$. For a fixed Q_s^*-representation of numbers the function f_a is defined by the parameter a, make the class of functions f_a continuum. In this paper we investigate the continuity of the function f_a on the sets of Q_s^*-binary and Q_s^*-unary numbers. We prove that the functions in this class are continuous on the set of numbers with a unique Q_s^*-representation, furthermore we show that all functions, except f_0 and f_1 have a countable set of discontinuities at Q_s^*-binary points. We provide a classification of the topological types of the value sets of the function f_a depending on the parameter a, we prove that if the value set is of the Cantor type then it is zero-dimensional. These properties reveal the fractal nature of the functions in the class F. We describe the structural properties of the level sets of the function in terms of the digits of the s-adic representation of the parameter a. In particular we establish that the level set of the function f_a can be an empty set, a finite set, or a continuum. For certain values of s we provide examples of fractal level sets and calculate its fractal dimensions.

Нестеренко В.В., Фотій О.Г.

ПРО СЛАБКУ ГОРИЗОНТАЛЬНУ КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА СУКУПНУ КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЬ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Досліджується сукупна квазінеперервність зверху (знизу) многозначних відображень від двох змінних. Перенесено на випадок многозначних відображень деякі результати про сукупну квазінеперервність функцій від двох змінних. Для цього спочатку вводиться поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності зверху (знизу). З допомогою цього поняття встановлються достатні увоми за яких многозначне відображення від двох змінних є сукпно квазінеперервним. Зокрема встановлено, що якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір і многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ слабко горизонтально квазінеперервне зверху та знизу та квазінеперервне знизу відносно другої змінної при значеннях першої змінної з деякої залишкової множини в X, то F – сукупно квазінеперервне знизу відображення. Подібний результат встановлено і для сукупної квазінеперервності зверху: якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – нормальний, простір і $F : X \times Y \to Z$ замкненозначне відображення, яке горизонтально квазінеперервне зверху та знизу та квазінеперервне зверху відносно другої змінної при значеннях першої змінної з деякої залишкової множини в X, то F – сукупно квазінеперервне зверху відображення.

Також отримано необхідні та достатні умови того, що многозначне відображення від двох змінних є сукупно квазінеперервним зверху (знизу). Зокрема встановлено, що якщо X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір, то компактнозначне многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ є сукупно квазінеперервне зверху і знизу тоді і тільки тоді, коли F слабко горизонтально квазінеперервне зверху і знизу та F^x квазінеперервне зверху і знизу для всіх x з деякої залишкової множини в X.

Ключові слова і фрази: Многозначне відображення, квазінеперервність зверху і знизу, сукупна квазінеперервність зверху і знизу, слабка горизонтальна квазінеперервність зверху і знизу.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *v.nesterenko@chnu.edu.ua (Нестеренко В.В.), o.fotij@chnu.edu.ua (Фотій О.Г.)*

Вступ

Поняття горизонтальної квазінеперервності, яке є узагальненням на топологічні простори властивості (A) з [1], застосовувалося в багатьох результатах для отримання су-

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08, 54C60.

купних властивостей відображень. Це стосувалося як однозначних відображень, так і многозначних.

Тут ми будемо відштовхуватися від основоположного огляду Т.Нойбруна [2] про властивості квазінеперервності многозначних відображень. Зокрема там дано достатні умови того, щоб многозначне відображення від двох змінних було сукупно квазінеперервним зверху чи знизу. Цей результат узагальнювався в працях багатьох математиків (див. [4, 5, 6]). Серед цих праць слід відзначити роботу [4], де встановлено необхідні та достатні умови того, що многозначне відображення від двох змінних є сукупно квазінеперервне зверху чи знизу.

В [3] було введено слабку горизонтальну квазінеперервність, що є більш ширшим поняттям ніж горизонтальна квазінеперервність. Для топологічних просторів X, Y та Z відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *слабко горизонтально квазінеперервним*, якщо для довільних відкритих непорожніх множин U в X і V в Y та множини A в X, що $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.

Тут ми узагальнюємо деякі результати з [4], де однією з достатніх умов було те, що многозначне відображення горизонтально квазінеперервне зверху чи знизу.

Основні поняття та означення

Нам будуть потрібні наступні означення. Нехай X та Z – топологічні простори і $F : X \to Z$ – многозначне відображення від однієї змінної. Многозначне відображення F називається *квазінеперервним зверху (знизу) в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної відкритої множини W в Z, такої, що $F(x_0) \subseteq W$ $(W \cap F(x_0) \neq \varnothing)$, довільного околу U точки x в просторі X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F(x) \subseteq W$ $(W \cap F(x) \neq \varnothing)$ для всіх $x \in G$. Многозначне відображення $F : X \to Z$ називається *квазінеперервним зверху (знизу)*, якщо воно є таким в кожні й точці з X.

Нехай X, Y та Z – топологічні простори і $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення. Переносячи поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності на многозначні відображення ми отримуємо поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності. Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається:

- *слабко горизонтально квазінеперервним зверху (знизу) в точці* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої множини W в Z, такої, що $F(x_0, y_0) \subseteq W$ $(W \cap F(x_0, y_0) \neq \varnothing)$, довільних околів U та V точок x та y відповідно в просторах X та Y існує відкрита непорожня множина G в X і відображення $g : G \to V$, такі, що $G \subseteq U$ і $F(x, g(x)) \subseteq W$ $(W \cap F(x, g(x)) \neq \varnothing)$ для всіх $x \in G$;

- *сукупно квазінеперервним зверху (знизу) в точці* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої множини W в Z, такої, що $F(x_0, y_0) \subseteq W$ $(W \cap F(x_0, y_0) \neq \varnothing)$, довільних околів U та V точок x та y відповідно в просторах X та Y існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $G \times H \subseteq U \times V$ і $F(x, y) \subseteq W$ $(W \cap F(x, y) \neq \varnothing)$ для всіх $(x, y) \in G \times H$.

Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається *слабко квазінеперервним зверху (знизу) чи сукупно квазінеперервним*, якщо воно є таким в кожні й точці з $X \times Y$. Зрозуміло, що сукупно квазінеперервне зверху (знизу) многозначне відображення є слабко горизонтально квазінеперервне зверху (знизу).

Для відображення $F : X \times Y \to Z$ розглянемо відображення $F^x : Y \to Z$ та $F_y : X \to Z$ для кожного $x \in X$ та $y \in Y$ відповідно. Нагадаємо, що система відкритих непорожніх множин $\mathcal{V}$ простору Y утворює *зліченну псевдобазу*, якщо кожна відкрита непорожня множина в Y містить деяку множину з $\mathcal{V}$.

1 Сукупна квазінеперервність знизу

Ми почнемо з результатів для сукупної квазінеперервності знизу.

Теорема 1. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір, $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення, яке задовольняє наступні умови:*

1) F – слабко горизонтально квазінеперервне зверху та знизу;

2) $M = \{x \in X : F^x$ – квазінеперервне знизу$\}$ – залишкова множина в X.

Тоді F – сукупно квазінеперервне знизу відображення.

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Покажемо, що відображення F сукупно квазінеперервне знизу в точці p_0. Візьмемо відкриту множину W в Z, таку, що $F(p_0) \cap W \neq \varnothing$, і U та V – околи відповідно точок x_0 в X та y_0 в Y. Оскільки простір Z регулярний, то існує замкнена множина W_1, така, що $W_1 \subseteq W$ і $F(p_0) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing$. Відображення F слабко горизонтально квазінеперервне знизу в точці p_0, тому існують відкрита множина $U_1 \subseteq U$ і відображення $g : U_1 \to V$, такі, що $F(x, g(x)) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing$ для кожного $x \in U_1$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Розглянемо множини

$$A_n = \{x \in U_1 \cap M : \forall y \in V_n, F(x, y) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing\}.$$

Покажемо, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M$. Включення $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq U_1 \cap M$ є очевидним, оскільки кожна множина A_n міститься в $U_1 \cap M$. Якщо ж $x \in U_1 \cap M$, то відображення F^x є квазінеперервним знизу в точці $g(x)$. Зауважимо, що $F^x(g(x)) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing$. З квазінеперервності знизу відображення F^x в точці $g(x)$ випливає, що існує відкрита непорожня множина V^x, така, що $V^x \subseteq V$ і $F^x(y) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing$ для кожного $y \in V^x$. Оскільки $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, то існує номер n, такий, що $V_n \subseteq V^x$. Тоді $F^x(y) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing$ для кожного $y \in V_n$. Це означає, що $x \in A_n$, а тому $U_1 \cap M \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Отже,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M.$$

Оскільки простір X берівський, то множина $U_1 \cap M$ другої категорії в X. Тоді існує номер n_0, такий, що $A = A_{n_0}$ щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2 \subseteq U_1$, тобто $U_2 \subseteq \overline{A}$ і $V_{n_0} \subseteq V$.

Отже, ми одержали відкриту непорожню множину U_2 в X, щільну в U_2 множину A і відкриту непорожню множину $H = V_{n_0}$ в Y, такі, що $U_2 \subseteq U_1$, $U_2 \subseteq \overline{A}, H \subseteq V$ і $F(x, y) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing$ для всіх $(x, y) \in A \times H$.

Покажемо, що $F(p) \cap W_1 \neq \varnothing$ для кожного $p \in U_2 \times H$. Нехай це не так, і існує точка $p_1 \in U_2 \times H$, така, що $F(p_1) \cap W_1 = \varnothing$. Оскільки множина W_1 – замкнена, то множина $W_2 = Z \setminus W_1$ – відкрита і $F(p_1) \subseteq W_2$. З слабкої горизонтальної квазінеперервності зверху маємо, що існують відкрита непорожня множина $U_3 \subseteq U_2$ і відображення $g_1 : U_3 \to H$, такі, що $F(x, g_1(x)) \subseteq W_2$ для кожного $x \in U_3$. Оскільки $U_3 \cap A \neq \varnothing$, то існує точка $a \in U_3 \cap A$). Тоді $F(a, g_1(a)) \subseteq W_2$ і $F(a, g_1(a)) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing$. Отримали суперечність. Отже, $F(p) \cap W_1 \neq \varnothing$ для кожного $p \in U_2 \times H$, а значить і $F(p) \cap W \neq \varnothing$. Це означає, що відображення F сукупно квазінеперервне знизу в точці p_0. □

2 Сукупна квазінеперервність зверху

Тепер перейдемо до встановлення відповідного результату для сукупної квазінеперервності зверху.

Теорема 2. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – нормальний, простір і $F : X \times Y \to Z$ замкненозначне відображення, яке задовольняє наступні умови:*

1) F – горизонтально квазінеперервне зверху та знизу;

2) $M = \{x \in X : F^x$ – квазінеперервне зверху$\}$ – залишкова множина в X.

Тоді F – сукупно квазінеперервне зверху відображення.

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Покажемо, що відображення F сукупно квазінеперервне зверху в точці p_0. Візьмемо відкриту множину W в Z, таку, що $F(p_0) \subseteq W$ і $U \times V$ – окіл точки p_0. Оскільки простір Z нормальний, то існує замкнена множина W_1 і відкрита множина W_2, такі, що $F(p_0) \subseteq W_2 \subseteq W_1 \subseteq W$. Відображення F слабко горизонтально квазінеперервне зверху в точці p_0, тому існують відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$ і відображення $g : U_1 \to V$, такі, що $F(x, g(x)) \subseteq W_2$ для кожного $x \in U_1$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Розглянемо множини

$$A_n = \{x \in U_1 \cap M : \forall y \in V_n, F(x, y) \subseteq W_2\}.$$

Покажемо, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M$. Включення $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq U_1 \cap M$ є очевидним, оскільки кожна множина A_n міститься в $U_1 \cap M$. Якщо ж $x \in U_1 \cap M$, то відображення F^x є квазінеперервним зверху в точці $g(x)$. Зауважимо, що $F^x(g(x)) \subseteq W_2$. З квазінеперервності зверху відображення F^x в точці $g(x)$ випливає, що існує відкрита непорожня множина V^x, така, що $V^x \subseteq V$ і $F^x(y) \subseteq W_2$ для кожного $y \in V^x$. Оскільки $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, то існує номер n, такий, що $V_n \subseteq V^x$. Тоді $F^x(y) \subseteq W_2$ для кожного $y \in V_n$. Це означає, що $x \in A_n$, а тому $U_1 \cap M \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Отже,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M.$$

Оскільки простір X берівський, то множина $U_1 \cap M$ другої категорії в X. Тоді існує номер n_0, такий, що A_{n_0} щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2 \subseteq U_1$, тобто $U_2 \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і $V_{n_0} \subseteq V$.

Отже, ми одержали відкриту непорожню множину U_2 в X, щільну в U_2 множину $A = A_{n_0}$ і відкриту непорожню множину $H = V_{n_0}$ в Y, такі, що $U_2 \subseteq U_1$, $U_2 \subseteq \overline{A}, H \subseteq V$ і $F(x, y) \subseteq W_2$ для всіх $(x, y) \in A \times H$.

Покажемо, що $F(p) \subseteq W_1$ для кожного $p \in U_2 \times H$. Нехай це не так, тобто існує точка $p_1 \in U_2 \times H$ така, що $F(p_1) \not\subseteq W_1$. Тоді множина $W_3 = Z \setminus W_1$ відкрита і $F(p_1) \cap W_3 \neq \varnothing$. З слабкої горизонтальної квазінеперервності знизу маємо, що існують відкрита непорожня множина $U_3 \subseteq U_2$ і відображення $g_1 : U_3 \to H$, такі, що $F(x, g(x)) \cap W_3 \neq \varnothing$ для кожного $x \in U_3$. Оскільки $U_3 \cap A \neq \varnothing$, то існує точка $a \in U_3 \cap A$. Тоді $F(a, g(a)) \cap W_3 \neq \varnothing$ і $F(a, g(a)) \subseteq W_2$. Отримали суперечність. Тоді $F(p) \subseteq W_1$ для кожного $p \in U_2 \times H$, а отже, і $F(p) \subseteq W$. Це і означає сукупну квазінеперервність зверху функції F. □

3 Характеризація сукупної квазінеперервності

Для встановлення характеризації сукупної квазінеперервності нам будуть потрібні наступні теореми, які встановлені в [4].

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і $F : X \times Y \to Z$ – многозначне многозначне відображення, яке сукупно квазінеперервне знизу. Тоді множина*

$$M = \{x \in X : F^x - \textit{квазінеперервне знизу}\}$$

залишкова в X.

Теорема 4. *Нехай X — топологічний простір, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне відображення, яке сукупно квазінеперервне зверху. Тоді множина*

$$\{x \in X : F^x - \textit{квазінеперервне знизу}\}$$

залишкова в X.

Тепер ми можемо встановити основний результат цієї статті.

Теорема 5. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір і $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне многозначне відображення. Відображення F сукупно квазінеперервне зверху і знизу тоді і тільки тоді, коли F слабко горизонтально квазінеперервне зверху і знизу та F^x квазінеперервне зверху і знизу для всіх x з деякої залишкової множини в X.*

Доведення. Зауважимо, що метризовний простір Z є нормальним, а отже, і регулярним. Додаткова умова сепарабельності простору Z гарантує те, що цей простір буде задовольняти другу аксіому зліченності.

Необхідність випливає з теорем 3 і 4, оскільки перетин двох залишкових множин є залишковою множиною, і зауваження про те, що сукупно квазінеперервне зверху (знизу) многозначне відображення є слабко горизонтально квазінеперервне зверху (знизу).

Достатність випливає з теорем 1 і 2. □

Список літератури

[1] Bögel K. Über partiell differenzierbare Funktionen// Math. Z. – 1926. – **25**. – S. 490–498.

[2] Neubrunn T. Quasi-continuity// Real Anal. Exch. – 1989. – **14**, 3. – P. 259–306.

[3] Nesterenko V. Weak horizontal quasi-continuity// Math. Bull. of Shevchenko Scientific Society. – 2008. – **5**, – P. 177–182. (in Ukrainian)

[4] Fotij O., Maslyuchenko O., Nesterenko V. Characterization of quasi-continuity of multifunctions of two variables// Math. Slovaca. – 2016. – **66**, 1. – P. 281–286.

[5] Holá L., Mirmostafaee A. Some results on joint continuity of two variable set-valued mappings// Topology Appl. – 2024. – **341**. – P. 254–269.

[6] Piotrowski Z. Quasi-continuity and product spaces// Geometric topology, Proc. int. Conf., Warszawa: – 1980. – P. 349–352.

Надійшло 05.12.2024

Nesterenko V.V., Fotij O.G. *On weak horizontal quasi-continuity and joint quasi-continuity of multivalued mappings*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 162–167.

The joint upper (lower) quasi-continuity of multivalued mappings from two variables is investigated. Some results on joint quasi-continuity of functions of two variables are transferred to the case of multivalued mappings. For this purpose, the concept of upper (lower) weak horizontal quasi-continuity is first introduced. With the help of this concept, sufficient conditions are established under which the multivalued mapping from two variables is joint quasi-continuous. In particular, it is established that if X is a Baire space, a space Y has a countable pseudobase, Z a regular space, and the multivalued mapping $F : X \times Y \to Z$ is upper and lower weakly horizontally quasi-continuous and lower quasi-continuouswith respect to the second variable for the values of the first variable from some residual set in X, then F is a joint lower quasi-continuous mapping. A similar result was established for the joint upper quasi-continuity: if X is a Baire space, a space Y has a countable pseudobase, Z a normal space, and $F : X \times Y \to Z$ is a closed-valued mapping that is upper and lower weakly horizontally quasi-continuous and upper quasi-continuous with respect to of the second variable at the values of the first variable from some residual set in X, then F is an upper quasi-continuous mapping . Necessary and sufficient conditions are also obtained that the multivalued mapping from two variables is joint upper (lower) quasi-continuous. In particular, it is established that if X is a Baire space, Y a second countable space, Z a metric separable space, then the compact-valued multivalued mapping $F : X \times Y \to Z$ is joint upper and lower quasi-continuous if and only if F is upper and lower weakly horizontally quasicontinuous and F^x is upper and lower quasicontinuous for of all x from some residual set in X.

Петрина Г.О., Станжицький О.М., Мартинюк О.В.

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ У НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

У статті представлено детальну схему апроксимації у середньому квадратичному для еволюційних стохастичних рівнянь із запізненням у нескінченновимірних просторах.

Основна увага приділяється заміні початкової системи з післядією еволюційною системою стохастичних рівнянь без післядії. Запропонований підхід передбачає розбиття інтервалу запізнення на підінтервали та побудову відповідної системи рівнянь, яка апроксимує поведінку початкової системи. Важливо зазначити, що кількість рівнянь у такій апроксимуючій системі збільшується зі зростанням кількості підінтервалів. Основний результат дослідження показує, що за умови, коли розбиття стає дедалі дрібнішим (тобто кількість підінтервалів прямує до нескінченності), відстань у середньому квадратичному між розв'язками рівняння із запізненням і розв'язками системи без запізнення прямує до нуля.

Теоретична основа методу апроксимації використовує ключові поняття та результати зі стохастичного аналізу в нескінченновимірних просторах, зокрема, для вирішення проблем, пов'язаних із функціональною природою післядії та необмеженістю простору станів. Дослідження не лише узагальнює попередні результати для скінченновимірних випадків до нескінченновимірного середовища, але й розширює методи, застосовані для детермінованих рівнянь із запізненням, на стохастичні системи. Методологія базується на класичній ідеї розкладу розв'язку рівняння із запізненням за формулою Тейлора за довжиною інтервалу запізнення $h > 0$ h>0. Такий підхід дозволяє замінити початкову задачу для рівняння із запізненням системою задач Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, побудованих спеціальним чином.

Результати роботи мають значні практичні наслідки, особливо для систем, де запізнення є природними, таких як стохастичні системи управління, динаміка популяцій або нескінченновимірні системи, описувані стохастичними рівняннями в частинних похідних. Замінюючи складні системи із запізненнями більш простими системами без запізнень, запропонований метод не лише спрощує чисельні обчислення, але й забезпечує глибше розуміння динаміки таких систем. Доведення умов, за яких апроксимація є коректною, сприяє розвитку теоретичної бази стохастичних рівнянь із запізненнями у нескінченновимірних просторах та пропонує потужний інструмент для їх аналізу та моделювання.

Ключові слова і фрази: запізнення, стохастичний інтеграл, процес Вінера, генератор, напівгрупа, апроксимація.

УДК 517.925
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E05.
Дослідження Олександра Станжицького підтримано Національним фондом досліджень України, проект 2023, 03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із банатозначною та стохастичною динамікою".

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *grpetryna@gmail.com, ostanzh@gmail.com, o.martynyuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Дана робота є продовженням досліджень роботи [5], де подібна задача розглядалась у скінченновимірному випадку. Основна ідея даних досліджень полягає у заміні вихідного об'єкту із післядією, системою рівнянь без післядії. Кількість рівнянь такої системи залежить від кількості точок розбиття інтервала запізнення. Виявляється, якщо кількість інтервалів розбиття спрямувати до нескінченності, то відстань у середньому квадратичному між відповідними розв'язками рівняння із запізненнями і розв'язками апроксимуючої системи без запізнень прямує до нуля. Як дана робота так і робота [5] узагальнює на стохастичний випадок результати робіт І.М. Черевка та його учнів [6, 7, 8]. У вказаних роботах початкова задача для системи рівнянь із запізненнями заміюється набором задач Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, побудованої спеціальним чином за вихідною системою із запізненнями. Даний підхід базується на ідеї М.М. Красовського, пов'язаної із розкладом розв'язків системи із запізненням за формулою Тейлора за довжиною $h > 0$ відрізка запізнення

Робота складається зі вступу та чотирьох частин. У першій частині приведені необхідні у подальшому поняття та результати пов'язані зі стохастичними рівняннями у нескінченновимірних просторах. Друга частина роботи присвячена постановці задачі, формулюванню основного результату, та деяким допоміжним твердженням. Доведення основної теореми приведено у частині три. У четвертій частині приведено приклад застосування отриманого результату для стохастичних рівнянь у частинних похідних.

1 Простори, оператори та стохастичні функціонально-диференціальні рівняння

Нехай H і K гільбертові простори з нормами $||\cdot||$ і $||\cdot||_K$ відповідно. Нехай також $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ є повним ймовірнісним простором, а Q лінійний, обмежений коваріаційний оператор такий, що $Tr(Q) < \infty$. Введемо Q- ядерний K-значний вінерівський процес

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\beta_i(t) l_i, \quad t \geq 0.$$

Тут $\beta_i(t)$ - стандартні, одновимірні, незалежні у сукупності процеси броунівського руху, $l_i, i \geq 1$ ортонормований базис в K, послідовність невід'ємних чисел λ_i задовольняє умови

$$Ql_i = \lambda_i l_i, \quad i = \overline{1, 2, ...}$$

та

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i < \infty$$

$\mathcal{F}_t, t \geq 0$ нормальна фільтрація, що задовільняє умови:

1. $W(t)$ є $\mathcal{F}_t$-вимірним;

2. $W(t+h) - W(t)$ не залежить від σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ для всіх $t \geq 0$ та $h \geq 0$.

Через $L_2^0 = \mathcal{L}_2(Q^{\frac{1}{2}}(K), H)$ позначимо простір операторів Гільберта-Шмідта, що діють з $Q^{\frac{1}{2}}$ в H зі скалярним добутком

$$\langle \Phi, \Psi\rangle_{L_2^0} = Tr(\Phi Q \Phi^*)$$

. Нехай $A : H \to H$- необмежений, замкнутий, лінійний оператор і $D(A) \subset H$- його область визначення.

Будемо вважати , що він є генератором компактної напівгрупи $S(t), t > 0$ в H.

Для L_2^0- значних, $\mathcal{F}_t$- вимірних випадкових процесів $\Phi(t)$ таких, що

$$\mathbb{P}\{\int_0^T ||\Phi(t)||^2_{L_0^2} dt < \infty\} = 1,$$

введемо, аналогічно [1] H- значний стохастичний інтеграл

$$\int_0^t \Phi(t) dW(s).$$

Знову аналогічно [1] будемо використовувати стохастичну конволюцію

$$\int_0^t \mathcal{S}(t-s)\Phi(t) dW(s),$$

для якої справедливе твердження.

Лема 1. *[1] Нехай $p > 2$, $T > 0$ та $\Phi \in L_2^0$- значний, $\mathcal{F}_t$- вимірний процес, що*

$$\mathbb{E}\int_0^T ||\Phi(t)||^2_{L_0^2} dt \leq \infty.$$

Тоді існує стала $M = M(T) > 0$, така, що

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]} ||\int_0^t \mathcal{S}(t-s)\Phi(s)dW(s)||^p \leq M\mathbb{E}\int_0^T ||\Phi(s)||^2_{L_0^2} ds$$

Через $C = C([-h, 0]; H)$ позначимо простір H-значних, неперервних функцій φ : $[-h, 0] \to H$ із супремною нормою

$$||\varphi||_C = \sup_{t\in[-h,0]} ||\varphi(t)||,$$

тут $h > 0$- інтервал запізнення.

В даній роботі розглядається нескінченновимірне стохастичне рівняння із запізненням вигляду

$$du(t) = [Au(t) + f(t, u(t), u(t-h))]dt + \sigma(t, u(t), u(t-h))dW(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0].$$

Відносно відображень f і σ будемо вважати виконаними наступні умови:

1. $f : [0, T] \times H \times H \to H, \sigma : [0, T] \times H \times H \to L_2^0$ є неперервним за сукупністю аргументів;

2. існує стала $L > 0$, що виконана умова лінійного росту

$$||f(t, u, v)||^2 + ||\sigma(t, u, v)||^2_{L_2^0} \leq L(1 + ||u||^2 + ||v||^2),$$

для довільних t, u, v з області визначення;

3. та умова Ліпшиця

$$||f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)||^2 + ||\sigma(t, u_1, v_1) - \sigma(t, u_2, v_2)||^2_{L_2^0} \leq L(||u_1 - u_2||^2 + ||v_1 - v_2||^2),$$

для $t \in [0, T]$ та довільних $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$;

4. початкова невипадкова функція $\varphi : [-h, 0] \to H$ є неперервною.

Розв'язок початкової задачі (1) будемо розуміти у м'якому сенсі.

Означення 1. *Неперервний $\mathcal{F}_t$ адаптований випадковий процес $u : [-h, T] \times \Omega \to H$ назвемо м'яким розв'язком початкової задачі* (1) *на* $[0, T]$ *якщо:*

1. $u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]$;

2. *На* $[0, T]$ $u(t)$ *задовольняє інтегральне рівняння*

$$u(t) = S(0)\varphi(0) + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)f(s, u(s), u(s-h))ds + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\sigma(s, u(s), u(s-h))dW(s), \tag{2}$$

з [1]. Тут перший інтеграл розуміється як інтеграл Бохнера, а другий як стохастичний інтеграл Іто.

З роботи [3] випливає, що за виконання умов 1-4, початкова задача (1) має єдиний на [0, T] м'який розв'язок, який має обмежений p-момент ($p \geq 1$).

2 Постановка задачі. Основний результат

За рівнянням (1) побудуємо наступну систему стохастичних еволюційних рівнянь без запізнення, яку ми назвемо апроксимуючою.

Зафіксуємо натуральне m та розіб'ємо відрізок $[-h, 0]$ точками $\frac{h}{m}j, j = \overline{0,m}$ на m частин. Визначимо процеси $z_j(t) \in H$ як розв'язки наступних задач Коші

$$\begin{cases} dz_0(t) = [Az_0 + f(t, z_0(t), z_m(t))]\, dt + \sigma(t, z_0(t), z_m(t))\, dW(t), & \\ dz_j(t) = \frac{m}{h}\left(z_{j-1}(t) - z_j(t)\right), & t \in [0,T], \\ z_j(0) = \varphi\left(-\frac{hj}{m}\right), & j = \overline{0,m}. \end{cases} \tag{3}$$

Тут $z_0(t)$- розв'язок першого рівняння, розуміється у м'якому сенсі, а решта m рівнянь у звичайному сенсі, де $\frac{dz_j(t)}{dt}$ розглядається як сильна, за нормою простору H похідна. З [1] випливає, що задача Коші (3) має єдиний на $[0,T]$ розв'язок, де процес $z_0(t)$ задовільняє (3) у м'якому сенсі, а $z_j(t)$ задовільняють наступні m рівнянь у звичайному сенсі.

Означення 2. *Система* (3) *називається апроксимуючою для* (1) *у середньому квадратичному, якщо*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}||u(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)||^2 \to 0, \quad m \to \infty, \quad j = \overline{0,m}.$$

Основним результатом цієї роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *За виконання умов 1-4 система* (3) *є апроксимуючою у середньому квадратичному для початкової задачі* (1) *рівномірно по* $j = \overline{0,m}$, *тобто*

$$\sup_{j=\overline{0,m}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}||u(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)||^2 \to 0, \quad m \to \infty. \tag{4}$$

В подальшому нам знадобиться лема, що є аналогом леми 1 з роботи [5] для нескінченновимірного випадку.

Лема 2 (Про модуль неперервності)**.** *За виконання умов 1-4 для розв'язку початкової задачі* (1) *справедлива нерівність*

$$\sup_{t_1\in[-h,T]} \mathbb{E} \sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]} ||u(t_2) - u(t_1)||^2 \le C(T, ||\varphi||_C, l) \to 0, \quad l \to 0 \tag{5}$$

Доведення. З означення розв'язку маємо

$$\begin{aligned} \|u(t)\| \le 3\,\|\mathcal{S}(t)\varphi(0)\|^2 + 3\left(\int_0^t \|\mathcal{S}(t-s)f(s, u(s), u(s-h))\|\, ds\right)^2 \\ +3\left\|\int_0^t \mathcal{S}(t-s)\sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s)\right\|^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ є напівгрупою класу C_0, то $\|\mathcal{S}\| \leq M$, при $t \in [0,T]$ [2]. Тоді, в силу умови 2, матимемо

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2 \leq & 3M \|\varphi(0)\|^2 + 3TM \int_0^t L \left(1 + \|u(s)\|^2 + \|u(s-h)\|^2\right) ds \\
& + 3 \sup_{s\in[0,t]} \left\| \int_0^s \mathcal{S}(t-\tau)\sigma(\tau, u(\tau), u(\tau-h)) dW(\tau) \right\|^2 \\
\leq & 3\Bigg(M \|\varphi(0)\|^2 + TM \int_0^t L \Big(1 + \sup_{\tau\in[0,s]} \|u(\tau)\|^2 + \sup_{\tau\in[0,s]} \|u(\tau-h)\|^2 \Big) ds \\
& + \sup_{s\in[0,t]} \left\| \int_0^s \mathcal{S}(t-\tau)\sigma(\tau, u(\tau), u(\tau-h)) dW(\tau) \right\|^2 \Bigg),
\end{aligned} \tag{7}$$

при цьому для оцінки першого інтеграла використана нерівність Коші-Буняковського.

Очевидною є наступна нерівність

$$\sup_{s\in[0,t]} \|u(s-h)\|^2 \leq \|\varphi\|_C^2 + \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\|^2 . \tag{8}$$

Врахувавши (8) та Лему 1, матимемо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\|^2 \leq & 3\Big(M \|\varphi(0)\| + T^2 LM \|\varphi\|_C + T^2 ML + 2TM \int_0^t L\mathbb{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|u(\tau)\|^2 \, ds \\
& + C_1(T, \|\varphi\|_C) + C_2(T, \|\varphi\|_h) LM \int_0^t \mathbb{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|u(\tau)\|^2 \, d\tau \Big),
\end{aligned}$$

звідси, в силу нерівності Грогуолла, отримаємо оцінку

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\|^2 \leq C_3(T, \|\varphi\|_T). \tag{9}$$

Нехай $t_2 = t_1 + r$. Далі, якщо $t_1 \geq 0$ то із (2) матимемо

$$
\begin{aligned}
u(t_2) - u(t_1) = & (\mathcal{S}(t_2) - \mathcal{S}(t_1))\varphi(0) \\
& + \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_2 - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) f(s, u(s), u(s-h))\, ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{S}(t_2 - s) f(s, u(s), u(s-h))\, ds \\
& + \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_2 - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{S}(t_2 - s) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \\
= & (\mathcal{S}(t_1 + r) - \mathcal{S}(t_1))\varphi(0) \\
& + \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_1 + r - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) f(s, u(s), u(s-h))\, ds \\
& + \int_{t_1}^{t_1+r} \mathcal{S}(t_1 + r - s) f(s, u(s), u(s-h))\, ds \\
& + \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_1 + r - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \\
& + \int_{t_1}^{t_1+r} \mathcal{S}(t_1 + r - s) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1 + l]} \|u(t_2) - u(t_1)\|^2 = \mathbb{E} \sup_{r \in [0,l]} \|u(t_1 + r) - u(t_1)\|^2 \\
& \leq 5 \Bigg(\sup_{r \in [0,l]} \|\mathcal{S}(t_1 + r)\varphi(0) - \mathcal{S}(t_1)\varphi(0)\|^2 \\
& \quad + T\mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,l]} \int_0^{t_1} \|\mathcal{S}(t_1 + r - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)\|^2 \|f(s, u(s), u(s-h))\|^2\, ds \\
& \quad + \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,l]} \int_{t_1}^{t_1 + l} L \|\mathcal{S}(t_1 + r - s)\|^2 \left(1 + \mathbb{E}\|u(s)\|^2 + \mathbb{E}\|u(s-h)\|^2\right) ds \\
& \quad + \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,l]} \left\| \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_1 + r - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \right\|^2 \\
& \quad + \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,l]} \left\| \int_{t_1}^{t_1 + r} \mathcal{S}(t_1 + r - s) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \right\|^2 \Bigg) \\
& = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Оцінимо кожен доданок в (11). Оскільки напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ є напівгупою класу C_0, то в силу рівномірної неперервності вираз I_1 рівномірно по t_1 прямує до нуля при $r \to 0$.

Далі, для оцінки I_2 маємо

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le T\mathbb{E}\Bigg(\sup_{\tau\in[0,l]} \int_0^{t_1} \|\mathcal{S}(t_1+r-s)-\mathcal{S}(t_1-s)\|^2\, ds \sup_{s\in[0,t_1]} \|f(s,u(s),u(s-h))\|^2 \Bigg) \\
&\le T\int_0^T \|\mathcal{S}(t+r)-\mathcal{S}(t)\|^2\, dt\, L\Big(1+2C_3(T,\|\varphi\|_h)\Big),
\end{aligned} \tag{12}
$$

в силу (9). Оскільки напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ компактна, то в силу [2], вона є неперервною в рівномірній операторній топології при $t>0$, а тому вираз у правій частині (12) прямує до 0 при $r\to 0$, в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність. Оцінимо вираз I_3. Маємо в силу (9)

$$
I_3 \le L(1+2C_3(T,\|\varphi\|_h))\int_{t_1}^{t_1+l} \|\mathcal{S}(t_1+r-s)\|^2 \le LM^2(1+2C_3(T,\|\varphi\|_h))l\to 0, \tag{13}
$$

при $l\to 0$. Для оцінки I_4 використаємо факторизаційну формулу [1], згідно з якою

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_1+r-s)-\mathcal{S}(t_1-s))\sigma(s,u(s),u(s-h))\, dW(s) \\
&= \frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\int_0^{t_1} \Big((t_1+r-s)^{\alpha-1}\mathcal{S}(t_1+r-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{S}(t_1-s)\Big)\mathcal{Y}(s)\, ds.
\end{aligned} \tag{14}
$$

де

$$
\mathcal{Y}(s)=\int_0^s (s-v)^{-\alpha}\mathcal{S}(s-v)\sigma(v,u(v),u(v-h))dW(v),
$$

$\alpha\in(0,1)$

Виберемо для $p>1,\ \alpha\in(\frac{1}{2p},\frac{1}{2})$. Тоді, із нерівності Гельдера для оцінок доданку I_4 отримуємо

$$
\begin{aligned}
I_4 \le \mathbb{E}\Bigg(\sup_{r\in[0,1]} \Bigg(\int_0^{t_1} \Big\| (t_1+r-s)^{\alpha-1}\mathcal{S}(t_1+r-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{S}(t_1-s)\Big\|^{2q} ds\Bigg)^{\frac{p}{q}} \times \\
\times \int_0^{t_1} \|\mathcal{Y}(s)\|^{2p}\, ds\Bigg) = \sup_{r\in[0,1]} \Bigg(\int_0^{T_1} \big|(s+r)^{\alpha-1}\mathcal{S}(s+r)-s^{\alpha-1}\mathcal{S}(s)\big|^{2q}\, ds\Bigg)^{\frac{p}{2q}} \times \\
\times\, \mathbb{E}\int_0^{t_1} \|\mathcal{Y}(s)\|^{2p}\, ds.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Але, оскільки напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ компактна при $t>0$, то вона неперервна в рівномірній операторній топології. Отже перший співмножник у (15) прямує до нуля в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність. Покажемо, що другий співмножник обмежений. Маємо

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\|\mathcal{Y}(t)\|^{2p} = \mathbb{E}\left\| \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{S}(t-s)\sigma(s,u(s),u(s-h))dW(s)\right\|^{2p} \le \\
C_T\mathbb{E}\left(\int_0^t (t-s)^{-2\alpha}\|\sigma(s,u(s),u(s-h)\|^2_{L_2^0}\right)^p.
\end{aligned}
$$

Звідси, використовуючи нерівність Юнга, отримаємо

$$\int_0^{t_1} \mathbb{E}\,\|\mathcal{Y}(t)\|^{2p}\,dt \le C_T \left(\int_0^T (t-s)^{-2\alpha}\right)^p \mathbb{E}\int_0^T \|\sigma(s),u(s),u(s-h)\|^{2p}_{L_2^0}$$
$$\leqslant C_3 \int_0^T L^P\left(1+E\|u(s)\|^p + E\|u(s-h)\|^p\right)ds \le C_4.$$

Оцінюємо нарешті доданок I_5. Маємо

$$I_5 \le \mathbb{E}\sup_{r\in[0,l]} \|\int_{t_1}^{t+r} \mathcal{S}\left(t_1+r-s\right)\sigma(s,u(s),u(s-h)dW(s)\|^2 \le$$
$$\le \mathbb{E}\int_{t_1}^{t_1+l} M^2\|\sigma\Big(s,u(s),u(s-h)\|^2_{L_2^0}ds \le C_5 l \to 0,\ l\to 0.$$

Якщо ж t_1 та t_1+l належать $[-h,0]$, то в силу означення розв'язку маємо, що

$$\mathbb{E}\sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}\|u(t_2)-u(t_1)\|^2 = \sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}\|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)\|^2 \to 0,\ l\to 0,$$

в силу рівномірної неперервності на $[-h,0]$ функції $\varphi(t)$.

Якщо ж $t_1\in[-h,0]$, а $t_2>0$, то $\|u(t_2)-u(t_1)\| \le \|u(t_2)-\varphi(0)\| + \|u(t_1)-\varphi(0)\|$.

Очевидно, що $t_1\to 0$ і $t_2\to 0$, якщо $l\to 0$. Тоді, врахувавши, що всі отримані вище оцінки рівномірні по t_1, отримуємо доведення леми. □

3 Доведення основного результату

Зауважимо, що принциповою відмінністю даної роботи від [5] є доведення леми про модуль нерівності. В решті роботи ідеї доведення схожі з [5], тому ми детально не будемо його повторювати, а зупинимось лише на тих відмінностях, які з'являються завдяки нескінченновимірності.

Зазначимо, що з [1] випливає неперервність траєкторії $u(t)$ в нормі простору H. Введемо наступний згладжений випадковий процес $u_\mu(t)$ побудований для кожного малого $\mu>0$ наступним чином

$$u_\mu(t) = \frac{1}{\mu}\int_t^{t+\mu} u(s)ds, \quad t\in[-h,T]. \tag{16}$$

При цьому для $t\ge T$ процес $u(s)$ продовжено як сталу випадкову величину за неперервністю. Із властивостей інтегралу Бохнера випливає сильна гладкість процесу $u_\mu(t)$ і з [5]

$$\dot{u}_\mu(t) = \frac{1}{\mu}[u(t+\mu)-u(t)]. \tag{17}$$

Оцінимо різницю у середньому квадратичному між $u(t)$ і $u_\mu(t)$. Маємо

$$\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}\|u(t)-u_\mu(t)\|^2 = \frac{1}{\mu^2}\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}\left\|\int_t^{t+\mu}(u(s)-u(t))ds\right\|^2 \leqslant$$
$$\leq \frac{1}{\mu^2}\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}\left(\int_t^{t+\mu}\|(u(s)-u(t))\|\,ds\right)^2 \leqslant \frac{1}{\mu}\sup_{t\in[-h,T]}\int_t^{t+\mu}\mathbb{E}\,\|(u(s)-u(t))\|^2\,ds \leq$$
$$\leq C(T,\|\varphi\|_C,\mu)\to 0,\ \mu\to 0,$$

в силу леми про модуль неперервності.

Оскільки в системі (3) всі рівняння починаючи з другого є лінійними рівняннями із обмеженими сталими операторами, то вони мають єдиний сильний розв'язок.

Далі система (3) розбивається на дві системи, і розв'язок $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$ подається в даній формі, де $z_j^{(1)}$ розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot z_1^{(1)} = u(t) - z_1^{(1)} \\ \dfrac{h}{m}\dot z_j^{(1)} = z_{j-1}^{(1)} - z_j^{(1)}, \quad j=\overline{1,m}, \\ z_j^{(1)}(0) = u(-\dfrac{hj}{m}). \end{cases} \tag{18}$$

а $z_j^{(2)}$ розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot z_1^{(2)} = -z_1^{(2)} + (z_0 - x) \\ \dfrac{h}{m}\dot z_j^{(2)} = z_{j-1}^{(2)} - z_j^{(2)}, \quad j=\overline{1,m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left\|u(t-\frac{hj}{m})-z_j(t)\right\|^2 \leq 2\left(\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left\|u(t-\frac{hj}{m})-z_j^{(1)}(t)\right\|^2 + \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left\|z_j^{(2)}(t)\right\|^2\right). \tag{20}$$

Позначимо $(y_j(t) = u(t-\frac{hj}{m}), iiN_j(t) = \mathbb{E}\left\|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right\|^2, \quad j=\overline{0,m}.$

Далі, аналогічно [5], для першого доданку у (19) отримується нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{E\left\|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right\|^2} \leq \frac{2h}{\mu}C^{\frac12}(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m}) + 3C^{\frac12}(T,\|\varphi\|_C,\mu)). \tag{21}$$

Якщо в останній нерівності покласти $\mu = C^{\frac14}(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m})$, то матимемо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{E\left\|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right\|^2}\leq\frac{2h}{\mu}C^{\frac14}(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m})+3C^{\frac12}(T,\|\varphi\|_C,C^{\frac14}(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m}))=$$
$$=\alpha(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m})\to 0,\quad m\to\infty. \tag{22}$$

Відповідні оцінки для системи (19) набирають вигляду

$$E\left\|z_j^{(2)}(t)\right\|^2\leq\sup_{t\in[0,T]}N_0(t). \tag{23}$$

Тому, аналогічно [5] отримується нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{N_j(t)}\leq\alpha\left(T,\|\varphi_C\|,\frac{h}{m}\right)+\sqrt{\sup_{t\in[0,T]}N_0(t)}. \tag{24}$$

Нарешті оцінимо $N_0(t)$. Маємо

$$z_0(t)-u(t)=\int_0^t\mathcal{S}(t-s)(f(s,z_0(s),z_m(s))ds+$$
$$+\int_0^t\mathcal{S}(t-s)(\sigma(s,z_0(s),z_m(s))-\sigma(s,u(s),u(s-h))dW(s).$$

Із властивостей стохастичних інтегралів тоді отримуємо

$$N_0(t)\leq 2T\int_0^t LM^2\left(\mathbb{E}\|z_0(s)-u(s)\|^2+\mathbb{E}\|z_m(s)-u(s-h)\|^2\right)ds\leq$$
$$\leq 2TLM^2\int_0^t 4L\sup_{\tau\in[0,s]}N_0(s)ds+2\alpha^2C(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m}).$$

Звідси, з урахуванням леми Гронуолла, матимемо

$$\sup_{t\in[0,T]}N_0(t)\leq 2\alpha^2C(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m})e^{(T+1)LMT}\to 0,\quad m\to\infty.$$

Остання оцінка із урахуванням (24) доводять теорему.

4 Приклад застосування

Проілюструємо отриманий результат наступним стохастичним функціонально-диференціальним рівнянням типу реакція-дифузія.

Нехай D-обмежена область в $\mathbb{R}^d$ із межею ∂D, що задовольняє умову Ляпунова $H=L^2(D)$ і оператор A є диференціальним оператором другого порядку еліптичного типу

$$\mathrm{A}\, u = \sum_{i,j=1}^{d} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = \mathrm{div}(a(x)\nabla u).$$

Тут a_{ij} є неперервним за Гельдером коефіцієнтами із показниками Гельдера $\beta \in (0,1)$, симетричними, обмеженими, що задовольняють умову рівномірної еліптичності

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\eta_i\, \eta_j \geq C_0 |\eta|^2, \quad \eta \in \mathbb{R}^d,$$

для деякою сталої $C_0 > 0$, $|\cdot|$ - евклідова норма в $\mathbb{R}^d$. Нехай $e_n(x)$- ортонормований базис в H такий, що $e_n(x) \in L^\infty(D)$, $\sup_n \|e_n\|_{L^\infty(D)} < \infty$. Введемо коваріаційний оператор $Q \in \mathcal{L}(H)$ такий, що Q є невід'ємним і $Tr(Q) < \infty$, а також $Qe_n = \lambda_n e_n$. При цьому λ_n є послідовність невід'ємних чисел, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.$$

Тепер визначимо H-значний Q-ядерний процес Вінера

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\, \beta_i(t) e_i(x), \quad t \geq 0.$$

При цьому вважаємо, що простори K і H в означенні вінерівського процесу співпадають, тобто $K = H = L^2(H)$. Позначимо $V := Q^{\frac{1}{2}}(L^2(D))$. Як випливає з [4](Лема 2.2) $V \subset L^\infty(D)$.

Тоді можна ввести мультиплікативний оператор $\Psi : V \to H$ наступним чином. Для кожного фіксованого $\varphi \in L^2(D)$ покладемо $\Psi(\varphi) = \varphi{\cdot}\psi$, для $\psi \in V$. Оскільки $\varphi \in L^2(D)$ та $\psi \in L^\infty(D)$, то оператор Ψ коректно визначений, а також $\Psi \circ Q^{\frac{1}{2}} : L^2(D) \to L^2(D)$ визначає оператор Гільберта-Шмідта із оцінкою норми

$$\left\|\Psi \circ Q^2\right\|_{L_2^0}^2 \leq \mathrm{Tr}(Q) \sup_n \|e_n\|_\infty^2 \|\varphi\|_{L^2(D)}^2 .$$

Розглянемо наступне рівняння

$$\begin{cases} d(u(t,x)) = [\mathrm{A}\, u + f(t, u(t), u(t-h))]\, dt + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \sigma(t, u(t), u(t-h)) e_i(x)\, d\beta_i(t) \\ u(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \in [-h, 0],\ u(0,x) = \varphi_0(x) \quad \text{в } D, \\ u(t,x) = 0, \quad x \in \partial D,\ t \geq 0. \end{cases} \tag{25}$$

Тут дійснозначні функції $f : [0,T] \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$, визначені, неперервні за сукупністю змінних та задовольняють за другою та третьою змінними глобальну умову Ліпшиця та умову лінійного росту. Із [2] випливає, що оператор А є генератором компактної напівгрупи операторів $\mathcal{S}(t) : H \to H$. Неважко бачити, що умови 1-4 для рівняння (25) виконані, а тому для (25) справедливе твердження теореми.

Список літератури

[1] De Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 454p.

[2] Pazy A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1983, 279p.

[3] Stanzytskiy A., Misiats O., and Stanzhytskiy O. *Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non-Lipschitz coefficients.* Evolution equations and Control theory 2022, **11** (6), 1929–1953 DOI: 10.3934/eect.2022005

[4] Manthey R., Zausinger T. *Stochastic evolution equations in* L_p^{2v}. Stochastics and Stochastic Reports 1999, **66**, 37–85

[5] Петрина Г.О., Станжицький А.О. *Апроксимація систем стохастичних рівнянь із запізненнями стохастичною системою без запізнення.* Буковинський математичний журнал 2024, **12** (1), 120–136. (in Ukrainian)

[6] Матвій О.В., Черевко І.М. *Про апроксимацію систем із запізненням і їх стійкість.* Нелінійні коливання 2004, **7** (2), 208–216. (in Ukrainian)

[7] Матвій О.В., Черевко І.М. *Про наближення систем диференціально-різнецевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь.* Нелінійні коливання 2007, **10** (3), 328–335. (in Ukrainian)

[8] Іліка С.А., Матвій О.В., Піддубна Л.А., Черевко І.М. *Схема апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування.* Буковинський математичний журнал 2014, **2** (2-3), 107–111. (in Ukrainian)

Список літератури

[1] De Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 454p.

[2] Pazy A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1983, 279p.

[3] Stanzytskiy A., Misiats O., and Stanzhytskiy O. *Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non-Lipschitz coefficients.* Evolution equations and Control theory 2022, **11** (6), 1929–1953 DOI: 10.3934/eect.2022005

[4] Manthey R., Zausinger T. *Stochastic evolution equations in* L_p^{2v}. Stochastics and Stochastic Reports 1999, **66**, 37–85

[5] Petryna G.O., Stanzhytskiy A.O. *Approximation of systems of stochastic equations with delays by a stochastic system without delays.* Bukovinian Mathematical Journal 2024, **12** (1), 120–136. (in Ukrainian)

[6] Matviy O.V., Cherevko I.M. *On the approximation of systems with delay and their stability.* Nonlinear oscillations 2004, **7** (2), 208–216. (in Ukrainian)

[7] Matviy O.V., Cherevko I.M. *On the approximation of systems of differential-difference equations of neutral type by systems of ordinary differential equations.* Nonlinear oscillations 2007, **10** (3), 328–335. (in Ukrainian)

[8] Ilika S.A., Matviy O.V., Piddubna L.A., Cherevko I.M. *Scheme of approximation of differential functional equations and their applications.* Bukovinian Mathematical Journal 2014, **2** (2-3), 107–111. (in Ukrainian)

Надійшло 16.12.2024

Petryna G., Stanzhytskiy O., and Martynyuk O. *On the Approximation of Stochastic Delay Equations in Infinite-Dimensional Spaces*, Bukovinian Math. Journal. **12** (2) (2024), 168–181.

The article presents a detailed scheme for the mean square approximation of evolutionary stochastic delay equations in infinite-dimensional spaces. The primary focus lies in substituting the original system with delay by a system of evolutionary stochastic equations without delay. The proposed approach involves partitioning the delay interval into subintervals and constructing a corresponding system of equations that approximates the original system's behavior. Notably, the number of equations in the approximating system grows as the number of partition subintervals increases. A significant result of this study demonstrates that, as the partitioning becomes finer (i.e., the number of subintervals approaches infinity), the mean square distance between the solutions of the delay equation and the solutions of the delay-free approximating system converges to zero.

The theoretical framework of the approximation method leverages key concepts and results from infinite-dimensional stochastic analysis, incorporating tools to address the challenges posed by the functional nature of the delay term and the unboundedness of the state space. The study not only generalizes earlier finite-dimensional results to the infinite-dimensional setting but also extends the methods used for deterministic delay systems to stochastic systems. The methodology builds on the classical idea of decomposing the solution of the delay equation using a Taylor expansion in terms of the delay length $h > 0$. This decomposition allows the construction of an approximating system that replaces the original delay equation with a system of Cauchy problems for ordinary differential equations (ODEs).

The results have significant implications for practical applications, particularly for systems where delays naturally arise, such as in stochastic control, population dynamics, and infinite-dimensional systems described by stochastic PDEs.

The ability to replace complex delay systems with delay-free approximations not only simplifies numerical computations but also provides insight into the underlying dynamics of these systems. By rigorously establishing the conditions under which the approximation is valid, this work contributes to the theoretical foundation of stochastic delay equations in infinite-dimensional spaces and offers a robust tool for analyzing and simulating such systems.

Попов М. М., Українець О. З.

ЦІЛОЧИСЛЕННІ ТОВАРНІ ВЕКТОРИ У МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ ЕРРОУ-ДЕБРЕ

Ми розглядаємо невід'ємні цілочисленні товарні вектори у моделі економіки Ерроу-Дебре. Наш основний результат є версією теореми Ерроу-Дебре про рівноважну ціну, адаптовану до випадку цілочисленних товарних векторів. Доведення базується на геометричній формі теореми Гана-Банаха та істотно використовує специфіку цілочисленного простору товарів. Наше доведення працює лише для одноточкової множини агентів, і ми не знаємо, чи можна його модифікувати для загального випадку, використовуючи ту ж саму ідею.

Ключові слова і фрази: модель Ерроу-Дебре, відношення переваги, товарний вектор, функція попиту.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine (Popov M. M.)
Yury Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine (Ukrainets O. Z.)
e-mail: *o.ukrainets@chnu.edu.ua (Ukrainets O. Z.), misham.popov@gmail.com (Popov M.M.)*

Вступ

Класична модель економіки Ерроу-Дебре побудована ще в середині минулого століття. Незважаючи на це, вона залишається актуальною темою сучасних досліджень, див. [4], [5], [7]. Автори даної замітки у недавній статті [8] досліджували модель типу Ерроу-Дебре на основі нового фазового простору, який називається комплементарним простором, і який узагальнює простори Рісса та булеві кільця.

В даній статті розглядається версія класичної моделі Ерроу-Дебре, в якій розглядаються лише цілочисленні кількості товарів, що є природним обмеженням для практичних задач. Таке обмеження дозволяє по-новому осмислити задачу існування рівноважної ціни. Доведення цілочисленної версії теореми Ерроу-Дебре, з одного боку, виглядає простішим. Але, з іншого боку, доведення, яке базується на геометричній версії теореми Гана-Банаха, годиться лише для випадку одного агента. Залишається відкритим питання, чи можна дану ідею доведення застосувати до випадку довільної скінченної кількості агентів.

УДК 519.865
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 47B38; Secondary 47B65.

1 Термінологія моделі Ерроу-Дебре

Загальноприйняту термінологію та позначення з теорії векторних ґраток ми запозичили з підручника Аліпрантіса і Буркіншава [2].

Нагадаємо, що бінарне відношення $\succeq$ на множині P називається ***відношенням переваги*** (див. [1, Definition 1.1.1]), якщо виконуються наступні умови для довільних $x, y, z \in P$:

1. $x \succeq x$ (рефлексивність);

2. $x \succeq y$ або $y \succeq x$ (лінійність);

3. якщо $x \succeq y$ та $y \succeq z$, то $x \succeq z$ (транзитивність).

Очевидно, що кожне відношення нестрогого лінійного порядку є відношенням переваги, але, наприклад, максимальне відношення P^2, тобто, $(\forall x, y \in P)\, x \succeq y$ є відношенням переваги, яке не є відношенням порядку. З іншого боку, на фактор-множині по відношенню еквівалентності $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли $x \succeq y$ та $y \succeq x$, відношення переваги індукує відношення порядку. Запис $x \not\succeq y$ означає заперечення $x \succeq y$. "Строга" версія відношення переваги визначається так: $x \succ y$ означає, що $x \succeq y$ та $y \not\succeq x$. Вживають також $y \preceq x$, як рівносильну версію запису $x \succeq y$ (аналогічне правило стосується відношень $\succ$ та $\not\succeq$). Відношення $x \not\succ y$ означає заперечення $x \succ y$.

Нехай $\succeq$ – відношення переваги на множині P. Елемент $q_0 \in Q$ підмножини $Q \subseteq P$ називається ***$\succeq$-максимальним*** (чи просто ***максимальним***, якщо зрозуміло, про яке відношення переваги йдеться), якщо не існує $x \in Q$ такого, що $x \succ q_0$.

Класична модель економіки Ерроу-Дебре [3], [1] базується на додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$ d-вимірного простору Рісса $\mathbb{R}^d$, де $d \in \mathbb{R}$ – це кількість товарів даної економіки. Вектори $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d_+$ розглядаються як вибірки кількостей товарів і називаються ***товарними векторами***, які можуть вироблятися, продаватися, обмінюватися та споживатися.

Для елементів $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ та $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ простору Рісса $\mathbb{R}^d$ вважається, що:

- $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$, якщо $u_i \leq v_i$ для кожного $i = 1, \dots, d$;

- $\mathbf{u} < \mathbf{v}$, якщо $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ та $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ називається:

- ***монотонним***, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d_+$ з умови $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ випливає $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$;

- ***строго монотонним***, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d_+$ з умови $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ випливає $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$.

Елементи дуального простору Рісса $(\mathbb{R}^d)'$ всіх лінійних на $\mathbb{R}^d$ функціоналів, який ототожнюється із самим $\mathbb{R}^d$, називаються ***цінами***. Таким чином, кожна ціна $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d_+$, як функція на E^+, визначає ціну довільного стану $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_+$ за допомогою виразу $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, який дорівнює $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d p_k x_k$.

Кожна фіксована ціна $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d_+$ та фіксований товарний вектор $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$ (який називається ***початковим запасом***) визначають ***бюджетну множину*** товарних векторів за допомогою рівності:

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) := \big\{x \in \mathbb{R}^d_+ : \mathbf{p}(\mathbf{x}) \le \mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})\big\}.$$

Геометрично, бюджетна множина – це багатовимірна піраміда, яка за умови $\mathbf{p} \gg 0$ є компактною підмножиною $\mathbb{R}^d$, і яка цілком природно має $\succeq$-максимальні елементи для широкого класу відношень переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ (див. [1, Subsection 1.2]), а при певних умовах на відношення переваги максимальний елемент єдиний [1, Theorem 1.2.3] (на просторі Рісса $\mathbb{R}^d$ відношення $(x_1, \dots, x_d) \gg (y_1, \dots, y_d)$ означає, що $x_k > y_k$ для всіх $k = 1, \dots, d$). Оскільки умова $\mathbf{p} \gg 0$, яка рівносильна до умови $\mathbf{p} \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^d_+$, є, очевидно, необхідною для обмеженості бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$, то максимальні елементи бюджетних множин розглядаються лише для цін $\mathbf{p}$ з внутрішності $\operatorname{Int} \mathbb{R}^d_+$.

Нехай $\succeq$ – відношення переваги на $\mathbb{R}^d_+$ та $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$ – початковий запас. Позначимо через $\mathcal{D}^{\succeq}_{\boldsymbol{\omega}}$ – множину всіх цін $\mathbf{p} \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^d_+$, для яких існує єдиний $\succeq$-максимальний елемент у бюджетній множині $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, який називатимемо ***вектором попиту*** відношення переваги $\succeq$ при дії ціни $\mathbf{p}$ і позначатимемо через $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$. Відповідне відображення $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}} \colon \mathcal{D}^{\succeq}_{\boldsymbol{\omega}} \to \mathbb{R}^d_+$ називається ***функцією попиту***, що відповідає відношенню переваги $\succeq$.

Позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх відношень переваги на $\mathbb{R}^d_+$.

Нехай A – скінченна множина (елементи якої називаються **агентами**). Довільне відображення $\mathcal{E} \colon A \to \mathbb{R}^d_+ \times \mathcal{P}$ називається **економікою обміну**.

Значення економіки обміну записують в індексній формі: для кожного агента $k \in A$ значення $\mathcal{E}_k = (\boldsymbol{\omega}_k, \succeq_k)$ характеризує початковий запас k-го агента $\boldsymbol{\omega}_k$ та відношення переваги $\succeq_k$, яке він обрав. Далі уводиться поняття ***повного запасу економіки***, яке дорівнює $\boldsymbol{\omega} := \sum_{k \in A} \boldsymbol{\omega}_k$. Для кожного $k \in A$ функція попиту $\mathbf{x}_{k,\boldsymbol{\omega}_k} \colon \mathcal{D}^{\succeq_k}_{\boldsymbol{\omega}_k} \to \mathbb{R}^d_+$ визначена на своїй області. Тому розглянемо спільну область визначення економіки обміну $\mathcal{E}$ рівністю $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \bigcap_{k \in A} \mathcal{D}^{\succeq_k}_{\boldsymbol{\omega}_k}$. Нарешті, ***функція надлишкового попиту*** $\zeta \colon \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}^d$ уводиться за допомогою формули

$$\zeta(\mathbf{p}) := \sum_{k \in A} \big(\mathbf{x}_{k,\boldsymbol{\omega}_k}(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}_k\big) = \sum_{k \in A} \mathbf{x}_{k,\boldsymbol{\omega}_k}(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Вектор цін $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ називається ***рівноважним***, якщо $\zeta(\mathbf{p}) = 0$. Основне питання моделі економікиЕрроу-Дебре полягає у наступному.

Проблема 1. *За яких умов на економіку обміну існує рівноважний вектор цін?*

Класична теоремаЕрроу-Дебре дає позитивну відповідь для, так званої, неокласичної економіки обміну (див. [3], [1, Theorem 1.4.9]).

2 Випадок цілочисленних товарних векторів

У даному розділі ми розглядатимемо випадок, у якому кількість товарів не може бути дробовою, що є вельми природною вимогою для значної кількості товарів. Отже, товарні вектори розглядатимуться у множині $\mathbb{N}_0^d$ замість $\mathbb{R}_+^d$, де $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді роль внутрішності $\operatorname{Int} \mathbb{R}_+^d$ для $\mathbb{N}_0^d$ замість $\mathbb{R}_+^d$ відіграватиме $\mathbb{N}^d$. Решта понять з попереднього підрозділу залишаються без змін. Зокрема, ціни, як і раніше, розглядаються з додатного конусу $p \in \mathbb{R}_+^d$.

Позначимо $\mathbf{e}_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}_0^d \subseteq \mathbb{R}_+^d$ при $i = 1, \ldots, d$.

Твердження 1. *Для довільного ненульового початкового запасу $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{N}_0^d$ і довільної ціни $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}_+^d$ наступні умови рівносильні:*

(i) *бюджетна множина $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ скінченна;*

(ii) $\mathbf{p} \gg 0$.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай, навпаки, існує число $i \in \{1, \ldots, d\}$ таке, що $p_i = 0$, де $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо $n \cdot \mathbf{e}_i \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, що суперечить (i).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Для довільного $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ та довільного $i \in \{1, \ldots, d\}$ маємо

$$p_i x_i \le \sum_{j=1}^{d} p_j x_j \le \mathbf{p}(\boldsymbol{\omega}).$$

Оскільки $p_i > 0$, то з попередньої нерівності отримуємо $x_i \le \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})}{p_i}$. Беручи до уваги, що $x_i \in \mathbb{N}_0$, отримуємо $x_i \in \left\{0, 1, \ldots, \left[\frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})}{p_i}\right]\right\}$, де через $[z]$ позначається ціла частина числа $z \in \mathbb{R}$. Тому кількість елементів бюджетної множини має оцінку

$$|\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})| \le \prod_{i=1}^{d} \left(\left[\frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})}{p_i} \right] + 1 \right).$$

□

Твердження 2. *Нехай $\succeq$ – відношення переваги на $\mathbb{R}_+^d$ та $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{N}_0^d$ – ненульовий початковий запас. Тоді для кожної ціни $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^d$ існує $\succeq$-максимальний елемент у бюджетній множині $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$. Якщо, крім того, відношення переваги $\succeq$ є лінійним порядком, то такий максимальний елемент єдиний, а отже, $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\omega}}^{\succeq} = \mathbb{N}^d$.*

Доведення. Згідно з твердженням 1, бюджетна множина $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ скінченна. Використовуючи лінійність відношення переваги $\succeq$, індукцією за кількістю елементів $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ доводимо існування максимального елементу. Єдиність максимального елементу є безпосереднім є наслідком того, що відношення переваги є відношенням лінійного порядку. □

3 Коротке доведення версії теореми Ерроу-Дебре для випадку цілочисленних товарних векторів

Нагадаємо, що підмножина $K \subseteq \mathbb{R}^d$ називається ***опуклою***, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ та довільного скаляру $\lambda \in (0, 1)$ маємо $\lambda\, \mathbf{x} + (1 - \lambda)\, \mathbf{y} \in K$. ***Опукла оболонка***

$\operatorname{conv} K$ довільної підмножини $K \subseteq \mathbb{R}^d$ визначається, як перетин всіх опуклих підмножин $\mathbb{R}^d$, що містять K. Опукла оболонка довільної підмножини є коректно визначеною. Безпосередньо легко довести, що $\operatorname{conv} K$ є опуклою множиною.

Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ називається ***опуклим***, якщо для довільного $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d_+$ множина $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_+ : \mathbf{x} \succeq \mathbf{z}\}$ є опуклою в $\mathbb{R}^d$.

Дещо інакше дається означення строго опуклого відношення переваги (див. [1, Definition 1.1.5]). Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ називається ***строго опуклим***, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d_+$ з умов $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ та $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ випливає, що для довільного $\lambda \in (0,1)$ маємо $\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$.

Наведемо версію останнього означення, адаптовану до випадку цілочисленних товарних векторів.

Означення 1. *Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{N}_0^d$ називатимемо* **строго опуклим**, *якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{N}_0^d$ з умов $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ та $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ випливає, що для довільного $\lambda \in (0,1)$ з умови $\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y} \in \mathbb{N}_0^d$ випливає, що $\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$.*

Позначимо через $\mathcal{P}_0$ множину всіх строго монотонних і строго опуклих відношень переваги на $\mathbb{N}_0^d$.

Теорема 1. *Кожна одноагентна економіка обміну $\mathcal{E} \colon \{a\} \to \mathbb{N}_0^d \times \mathcal{P}_0$ з умовою $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \mathbb{N}^d$ має рівноважний вектор цін $\mathbf{p}_0 \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^d_+$.*

Доведення базується на геометричній формі теореми Гана-Банаха.

Лема 1 (Теорема Гана-Банаха, [6], с. 280)**.** *Нехай A, B – неперетинні опуклі підмножини дійсного нормованого простору X, причому A – відкрита множина. Тоді існує ненульовий лінійний неперервний функціонал $f \colon X \to \mathbb{R}$ та дійсне число γ такі, що $f(x) < \gamma$ для довільного $x \in A$ та $f(y) \geq \gamma$ для довільного $y \in B$.*

Доведення теореми 1. Позначимо $\mathcal{E}(a) = (\boldsymbol{\omega}, \succeq)$; $\boldsymbol{\omega} = (\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_d)$. Тоді сума (1) складається з одного доданку, а отже, означення рівноважного вектору $\mathbf{p}_0$ зводиться до рівності

$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_0) = \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

яку потрібно довести.

Визначимо множини $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_+ : \mathbf{x} < \boldsymbol{\omega}\}$, $B_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}_0^d : x \succeq \boldsymbol{\omega}\}$ та $B := \operatorname{conv} B_0$. З опуклості відношення переваги $\succeq$ отримуємо:

$$B \cap N_0^d = B_0. \tag{3}$$

Згідно з означеннями,

$$(\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d_+)\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) \in B_0 \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}), \tag{4}$$

а отже, поклавши $B_0^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}_0^d : x \succ \boldsymbol{\omega}\}$, отримуємо, що умова (2) рівносильна до наступної:

$$B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_0) = \varnothing. \tag{2'}$$

Розглянемо $\mathbb{R}^d$, як нормований простір, наприклад з евклідовою нормою $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_d^2$ для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Відкритість та опуклість множини A доводяться стандартно, використовуючи лише означення. Виберемо, згідно з лемою 1, функціонал $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbb{R}^d$ та дійсне число γ так, щоб $\mathbf{q}(\mathbf{x}) < \gamma$ для довільного $\mathbf{x} \in A$ та $\mathbf{q}(\mathbf{y}) \geq \gamma$ для довільного $\mathbf{y} \in B$. Оскільки $\mathbf{0} \in A$, то $0 = \mathbf{q}(\mathbf{0}) < \gamma$. Отже, $\gamma > 0$.

Покладемо $\lambda_m := 1 - \frac{1}{m}$ та $\mathbf{x}_m := \lambda_m \boldsymbol{\omega}$ для $m = 1, 2, \ldots$. Тоді $\lim_{m\to\infty} \|\boldsymbol{\omega} - \mathbf{x}_m\| = 0$ та $\mathbf{x}_m \in A$. З неперервності $\mathbf{q}$ та нерівності $\mathbf{q}(\mathbf{x}_m) < \gamma$ отримуємо $\mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) \leq \gamma$, а з умови $\boldsymbol{\omega} \in B$ – нерівність $\mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) \geq \gamma$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{d} q_i \overline{\omega}_i = \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) = \gamma. \tag{5}$$

Оскільки для кожного $i \in \{1, \ldots, d\}$ маємо $\boldsymbol{\omega} - \overline{\omega}_i \mathbf{e}_i \in A$, то

$$\gamma - q_i \overline{\omega}_i = \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega} - \overline{\omega}_i \mathbf{e}_i) < \gamma,$$

звідки дістаємо, що $q_i \overline{\omega}_i > 0$, а отже, $q_i > 0$. Таким чином,

$$\mathbf{q} \gg 0. \tag{6}$$

Позначимо через $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_d)$ відповідний вектор попиту, який є коректно визначений, згідно з (6). З максимальності вектора попиту випливає, що $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \in B_0$, а отже, $\mathbf{q}\big(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})\big) \geq \gamma$. З іншого боку, оскільки $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$, то з (5) дістаємо $\mathbf{q}\big(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})\big) \leq \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) = \gamma$. Таким чином,

$$\mathbf{q}\big(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})\big) = \gamma. \tag{7}$$

Отже, вектор попиту $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ лежить на гіперплощині $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \gamma\}$. Будувати шуканий вектор ціни $\mathbf{p}_0$ з умовою (2) будемо за рахунок "малого" збурення вектора $\mathbf{q}$.

Якщо $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\omega}$, то $\mathbf{p}_0 := \mathbf{q}$ є шуканим вектором цін з умовою (2). Розглянемо випадок $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \neq \boldsymbol{\omega}$. Тоді з максимальності та єдиності максимального вектора $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ випливає $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \succ \boldsymbol{\omega}$. Зі строгої монотонності відношення переваги випливає, що існує координата $i \in \{1, \ldots, d\}$ така, що

$$\overline{x}_i > \overline{\omega}_i. \tag{8}$$

Вектор цін $\mathbf{p}_0$ шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{p}_\varepsilon = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_i + \varepsilon, q_{i+1}, \ldots, q_d), \ \ \varepsilon > 0. \tag{9}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ маємо

$$\mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})) \overset{(9)}{=} \mathbf{q}(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})) + \varepsilon \overline{x}_i \overset{(7)}{=} \gamma + \varepsilon \overline{x}_i \overset{(8)}{>} \gamma + \varepsilon \overline{\omega}_i \overset{(5)}{=} \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) + \varepsilon \overline{\omega}_i \overset{(9)}{=} \mathbf{p}_\varepsilon(\boldsymbol{\omega}),$$

тобто, $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \notin \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)$, а отже, $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ не може бути вектором попиту $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)$ при дії ціни $\mathbf{p}_\varepsilon$. Аналогічно, для довільних $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B_0$ та $\varepsilon > 0$ виконується імплікація

$$(x_i > \overline{\omega}_i) \ \Rightarrow \ \Big(\mathbf{x} \notin \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)\Big). \tag{10}$$

Доведемо включення

$$\bigcap_{\varepsilon\in(0,1]} \big(B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)\big) \subseteq B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}). \tag{11}$$

Дійсно, нехай $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ – довільний елемент B_0^*. Якщо для довільного $\varepsilon \in (0, 1]$ виконується $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)$, то

$$(\forall\varepsilon \in (0, 1])\ \mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{d} q_j y_j + \varepsilon y_i \le \sum_{j=1}^{d} q_j \overline{\omega}_j + \varepsilon\overline{\omega}_i,$$

звідки при $\varepsilon \downarrow 0$ дістаємо

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{d} q_j y_j \le \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}),$$

а отже, (11) доведено. Оскільки всі множини, які фігурують в (11), є підмножинами скінченної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_1)$, то всі ці множини теж скінченні. Тому з очевидного включення $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_{\varepsilon_1}) \supseteq \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_{\varepsilon_2})$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ випливає, що серед множин лівої частини (11), які стоять в перетині, є найбільший (в розумінні включення) елемент. Отже, умова (11) може бути рівносильно переписана так:

$$\big(\exists\varepsilon_0 \in (0, 1]\big)\ \big(B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_{\varepsilon_0})\big) \subseteq B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}). \tag{11$'$}$$

З (11$'$) випливає, що коли за допомогою збурення q_i на ε_0 ми виключаємо з множини B_0^* елемент $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \ne \boldsymbol{\omega}$, який не потрапляє до множини бюджетних векторів збуреного вектора $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_{\varepsilon_0})$, ми не отримуємо нових бюджетних векторів, а отже, кількість елементів множини $B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ зменшується на 1. Залишається розглянути при цьому можливість при новому виключенні чергового елементу повторного отримання вже вилученого раніше. Якщо на якомусь етапі вилучення вектора $\mathbf{z}$ при збуренні певної координати q_s на довільне $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$ у відповідній множині бюджетних векторів з'являється вже вилучений на попередніх етапах вектор $\mathbf{u}$, то в цьому випадку вектор $\mathbf{u}$ є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{\omega}$ та $\mathbf{z}$ (інакше вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{z}$ можна було б відокремити прямою, що проходить через вектори $\boldsymbol{\omega}$, при певному збуренні ε). Оскільки на кожному етапі вилучення відповідні координати вектора $\mathbf{z}$ задовольняють умову (8), а з імплікації (10) випливає, що координати вектора $\mathbf{u}$ не можуть задовольняти аналогічну умову, то вектори $\mathbf{z}$ та $\mathbf{u}$ знаходяться по різні боки прямої від точки $\boldsymbol{\omega}$. Це означає, що існує $\lambda \in (0, 1)$ таке, що $\boldsymbol{\omega} = \lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{u}$. Оскільки $\mathbf{z}, \mathbf{u} \in B_0$ та $\mathbf{z} \ne \mathbf{u}$, зі строгої опуклості відношення переваги $\succeq$ випливає, що $\boldsymbol{\omega} = \lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{u} \succ \boldsymbol{\omega}$, – суперечність. Отже, строга опуклість відношення $\succeq$ гарантує, що при поетапному збуренні вектора ціни $\mathbf{q}$ на кожному етапі будуть виключатися по одному вектору з $B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$, причому не лише нових елементів не з'явиться, але й не повернуться вже вилучені вектори. За рахунок скінченності множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ процес вилучення призведе до порожньої у залишку множини $B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_0)$. Таким чином, теорему доведено. □

Список літератури

[1] Aliprantis C. D., Brown D. J., Burkinshaw O. *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*, Springer-Verlag, Berlin. (1989). DOI 10.1007/978-3-662-21893-8

[2] Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators, Springer, Dordrecht, 2006.

[3] Arrow K. J., Debreu G. Existence of an equilibrium for a competetive economy, Econometrica 1954, **22**, 265–290.

[4] Chen P.-A., Lu C.-J., Lu, Y.-S. An alternating algorithm for finding linear Arrow-Debreu market equilibria. Preprint. (2019). Available at arXiv:1902.01754. https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.01754

[5] Fratini S. M. Interest, profit and saving in Arrow-Debreu equilibrium models. Review of Keynesian Economics, 8, (2020), no 1, 39–53.

[6] Кадець В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: СПД Чижиков, 2011, – 600 с.

[7] Keller C., Tseng M. C. Arrow-Debreu meets Kyle: Price discovery for derivatives. Preprint. (2023). Available at arXiv:2302.13426. https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.13426

[8] Popov M. M., Ukrainets O. Z. A maximal Riesz-Kantorovich theorem with applications to markets with an arbitrary commodity set. Mat. Studii. 62 (2024), no 2, 199–210. https://doi.org/10.30970/ms.62.2.199-210

Надійшло 15.12.2024

Popov M. M., Ukrainets O. Z. *Integer commodity vectors in the Arrow-Debreu model of economy*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 182–189.

We consider nonnegative integer values of commodity in the Arrow-Debreu model of economy. Our main result is a version of the Arrow-Debreu equilibrium price theorem adapted to the setting of integer commodity vectors. The proof is based on the geometric form of the Hahn-Banach theorem and essentially uses peculiarity of the integer-valued commodity space. Our proof works for one-point set of agents only, and we do not know, whether it can be adjusted to the general case using the same idea.

Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 2, 190–199 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №2, 190–199

Працьовитий М.В., Черчук Н.В.

НІДЕ НЕ МОНОТОННА ФУНКЦІЯ ТИПУ СЕРПІНСЬКОГО, ПОВ'ЯЗАНА ІЗ ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ РЯДАМИ КАНТОРА

У роботі означено ніде не монотонну функцію, аргумент якої представлений у канторівській системі числення з послідовністю натуральних основ (s_k), де $s_k = 2k+1$:

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 \cdot s_2} + ... + \frac{\alpha_k}{s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_k} + ... \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...},$$

де $\alpha_k(x) \in A_k \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\}$, $s_k = 2k+1$. Значення функції визначається ланцюговою залежністю цифр Q_s-зображення числа від цифр зображення аргументу і мають наступний вигляд:

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2...\beta_k...}, \;\; \beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\},$$

де $\beta_1 = \gamma(\alpha_1)$ і $\beta_k = \gamma(\alpha_k)$, якщо $c_k = 0$ або $\beta_k = 2-\gamma(\alpha_k)$, якщо $c_k \neq 0$. Також $c_1 = c_2 = 0$, $c_k = c_{k-1}$, якщо $\alpha_{k-1} \neq \frac{s_{k-1}-1}{2}$ або $c_k = 1 - c_{k-1}$, якщо $\alpha_{k-1} = \frac{s_{k-1}-1}{2}$ і $\gamma(\alpha) \in A_3$.

Описано властивості її рівнів, диференціальні та фрактальні властивості.

Ключові слова і фрази: Q_s-зображення числа, неперервна ніде не монотонна функція, канторівська система числення.

Institute of mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine
e-mail: *prats444@gmail.com, nadiacercuk@gmail.com*

Вступ

Більшість функцій з метричного простору $C_{[0;1]}$, у топологічному сенсі, є ніде не монотонними та ніде не диференційовними. Яскравим прикладом являється функція Серпінського [4], для задання якої використовується трійкове та п'ятіркове зображення дійсних чисел. Різні системи зображення чисел та перетворювачі символів одного зображення у інше [9],[7], [6] дозволяють розширити класи таких функцій та вивчати їх властивості [3], [8], [14],[13],[15].

У даній роботі розглядається неперервна ніде не монотонна функція — аналог функції Серпінського, яка досліджувалася у роботах [1], [3], [5], [10],[11], [12], [14]. Для задання її аргументу використовується канторівське зображення чисел з послідовністю

УДК 519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60Exx.

основ (s_k), де $s_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, а значення функції визначається залежністю цифр Q_3 – зображенням числа.

(s_k) — задана послідовність натуральних чисел; $A_k \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\}$ — послідовність алфавітів, $L \equiv A_1 \times ... \times A_k \times ...$ — простір послідовностей алфавітів, $L = \{(\alpha_k) : \alpha_k \in A_k, k \in \mathbb{N}\}$. Як відомо [2], подання числа $x \in [0; 1]$ рядом

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 \cdot s_2} + ... + \frac{\alpha_k}{s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_k} + ... \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...} \tag{1}$$

називається (s_k) - представленням, а формальний запис $\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}$ — (s_k)-зображення числа x (зображення числа x у канторівській системі числення з послідовністю основ (s_k)).

Числа, для яких

$$\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1...\alpha_m(0)} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1...\alpha_{m-1}[\alpha_m-1][s_{m+1}-1][s_{m+2}-1]...} \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1...[\alpha_m-1](s_{m+k}-1)},$$

мають два (s_k) – зображення називаються (s_k) – бінарними. Решта — мають єдине (s_k) – зображення і називаються (s_k) – унарними.

Розглянемо число x , що належить відрізку $[0; 1]$. Його розклад

$$x = \beta_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{a_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j(x)} \right) \equiv \Delta^{Q_s}_{a_1(x)a_2(x)...a_k(x)...},$$

де $a_k(x) \in A_s \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $\beta_0 = 0$, $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} q_j$ називається Q_s – розкладом [9], а $\Delta^{Q_s}_{a_1(x)a_2(x)...a_k(x)...}$ — Q_s – зображенням числа x.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – упорядкований набір елементів алфавіту A_s. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2 \ldots c_m$ називають множину чисел $x \in [0; 1]$, що мають Q_s-зображення $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_m a_{m+1}...a_{m+k}...}$, $a_{m+k} \in A_s$.

Властивості циліндрів:

1. Циліндр $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_m}$ є відрізком $[\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_m(0)}; \Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_m(s-1)}]$.

2. $\Delta^{Q_s}_{c_1...c_m} = \Delta^{Q_s}_{c_1...c_m0} \cup \ldots \cup \Delta^{Q_s}_{c_1...c_m[s-1]}$.

3. Довжина циліндра $|\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i}$.

4. $|\Delta^{Q_s}_{c_1...c_m i}| = q_i |\Delta^{Q_s}_{c_1...c_m}|$.

Відрізкок $[\Delta^{(s_k)}_{a_1...a_m(0)}; \Delta^{(s_k)}_{a_1...a_m([s_{m+k}-1])}]$ є циліндром $\Delta^{(s_k)}_{a_1...a_m}$ з основою $(a_1, \ldots, a_m)$, $a_k \in A_{s_k}$, який відповідає (s_k) – зображенню, має довжину $\frac{1}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m}$.

1 Об'єкт дослідження

Нехай $A_{s_k} \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\}$ — послідовність алфавітів. Визначимо на A_{s_k} дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha \in A_k \setminus \{0, s_k - 1\}, \\ 2, & \text{якщо } \alpha = s_k - 1. \end{cases} \tag{2}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_1 \times ... \times A_k \times ...$ визначимо послідовність (c_k): $c_1 = c_2 = 0, c_k = 1 - c_{k-1}$, якщо $\alpha_{k-1} = k - 1$ та $c_k = c_{k-1}$ в усіх інших випадках.

На відрізку $[0; 1]$ розглядається функція g, значення якої має Q_3-зображення:

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2...\beta_k...}, \ \beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\}, \tag{3}$$

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \ \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

2 Коректність означення функції та її неперервність

Покажемо, що функція g коректно визначена в (s_k) – бінарній точці, тобто для одного й того ж аргумента, який має два різні зображення

$$x_1 \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s_{k+i}-1)} \equiv x_2,$$

значення $g(x_1)$ і $g(x_2)$ співпадають.

Очевидно, що $g(x_1) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1...\beta_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}...\beta_{k+n}...}$, $g(x_2) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1...\beta_{k-1}\beta^*_k\beta^*_{k+1}...\beta^*_{k+n}...}$.

Тому

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \prod_{i=1}^{k-1} q_{\beta_i} |\Delta^{Q_3}_{\beta_k...\beta_{k+n}...} - \Delta^{Q_3}_{\beta^*_k...\beta^*_{k+n}...}|$$

Для $i \leq k$, $c_i(x_1) = c_i(x_2)$. Якщо $i > k$, то можливі випадки

$$\begin{cases} c_k = c_{k+1}(x_1), \\ c_k = c_{k+1}(x_2); \end{cases} \quad \begin{cases} c_k \neq c_{k+1}(x), \\ c_k = c_{k+1}(x^*); \end{cases} \quad \begin{cases} c_k = c_{k+1}(x), \\ c_k \neq c_{k+1}(x^*). \end{cases}$$

Розглянемо кожен із випадків.

1) Якщо $c_{k+1}(x_1) = c_k = c_{k+1}(x_2)$, тоді $\alpha_k(x) \in A_k \setminus \{\frac{s_k-1}{2}\}$.

Якщо $c_k = 0$, то $\beta^*_k = \beta_k - 1$, а якщо $c_k = 1$, то $\beta_k = \beta^*_k - 1$,

$$\beta_{k+n} = \begin{cases} 0 \text{ при } c_k = 0, \\ 2 \text{ при } c_k = 1; \end{cases} \quad \beta^*_{k+n} = \begin{cases} 0 \text{ при } c_k = 1, \\ 2 \text{ при } c_k = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\delta_{\beta_k} = \delta_{\beta_{k-1}} + q_{\beta_k - 1}$, то отримаємо

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{k-1} q_{\beta_i} \left|\Delta^{Q_3}_{\beta_k(0)} - \Delta^{Q_3}_{[\beta_k-1](2)}\right| = 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{k-1} q_{\beta_i} \left|\Delta^{Q_3}_{[\beta^*_k-1](2)} - \Delta^{Q_3}_{\beta^*_k(0)}\right| = 0. \end{cases}$$

2) Якщо $c_{k+1}(x) \neq c_k = c_{k+1}(x^*)$, тоді $\alpha_k(x) = \frac{s_k-1}{2}$ або $\alpha_k(x) - 1 = \frac{s_k-1}{2}$. Оскільки

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots},$$

де $\beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$, причому

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \;\; \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), \;\text{якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), \;\text{якщо } c_k \neq 0, \end{cases}$$

отримаємо $\beta_n = \beta_n^*$ для всіх $n = k, k+1, k+2 \ldots$. Тоді, $g(x) - g(x^*) = 0$.

Випадок коли $c_{k+1}(x) = c_k \neq c_{k+1}(x^*)$ розглядається аналогічно.

Звідки, очевидно, що $g(x_1) = g(x_2)$. Тобто, у (s_k) – бінарній точці функція визначена коректно.

У (s_k) – унарній точці коректнійсть функції очевидна.

Теорема 1. *Функція g є неперервною на відрізку* $[0; 1]$.

Доведення. Для доведення неперервновсті функції g в довільній точці $x_0 \in [0; 1]$ покажемо, що

$$\lim_{x \to x_0} |g(x) - g(x_0)| = 0.$$

Спершу розглянемо випадок, коли x_0 — (s_k) – унарна точка. Для довільного $x_0 \in [0; 1]$ існує $m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_j(x) = \alpha_j(x_0), \;\; j = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0), \end{cases}$$

причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$. Тоді,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots} \right| = \\ &= \left| \prod_{i=1}^{m-1} q_{\beta_i} (\Delta^{Q_3}_{\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots}) \right| \leq \prod_{i=1}^{m-1} q_{\beta_i} \to 0 \;\text{ при } m \to \infty, \end{aligned}$$

де $g(x) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots}, \;\; g(x_0) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots}$.

Отже, функція g є неперервною в (s_k) – унарній точці.

Для (s_k) – бінарної точки неперервність функції g випливає із доведення її коректності.

□

3 Ніде не монотонність функції

Нагадаємо, що неперервна функція g називається ніде не монотонною, якщо вона не має жодного проміжку монотонності.

Теорема 2. *Функція g є ніде не монотонною на відрізку* $[0; 1]$.

Доведення. Розглянемо циліндр $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m}$, кінці якого відповідно $g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m(s_{m+k}-1)})$ та $g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m(0)})$.

Відомо, що приростом функції g на циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m}$ називається різниця

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m}) = g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m(s_{m+k}-1)}) - g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m(0)}).$$

Для доведення ніде не монотонності функції g достатньо показати, що для довільного циліндра $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m}$ рангу m знайдеться циліндр $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_mj}$ рангу $(m+1)$ такий, що прирости $\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m})$ і $\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_mj})$ набувають різних знаків.

Використавши означення функції, розглянемо всі можливі випадки для значення μ_g.

1) Якщо $c_m = 0$, то

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m}) = \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\ldots b_m(2)} - \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\ldots b_m(0)} = \prod_{i=1}^{m} q_{b_i}.$$

2) Якщо $c_m = 1$, то

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m}) = \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\ldots b_m(0)} - \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\ldots b_m(2)} = -\prod_{i=1}^{m} q_{b_i}.$$

Очевидно, що для кожного із випадків, завжди можна вказати циліндр рангу $(m+1)$ прирости на якому в кожному з випадків набуватимуть різного знаку. Отже, функція g є ніде не монотонною. □

Наслідок 1. *Приріст функції g на циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m}$ рангу m визначаєтьcя за формулою*

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_m}) = (-1)^{c_m} \prod_{i=1}^{m} q_{d_i}$$

.

4 Диференціальні властивості функції

Теорема 3. *Функція g є ніде не диференційовною.*

Доведення. 1) Розглянемо $x_0 = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$— (s_k) – унарну точку.
Приріст функції g на циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ визначається рівністю

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}) = (-1)^{c_m} \prod_{i=1}^{m} q_{b_i}.$$

Тоді

$$g'(x_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m})}{|\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}|} = (-1)^{c_m} \prod_{i=1}^{m} s_i q_{b_i}.$$

Оскільки $s_i q_{b_i} > 1, i \in \overline{1,m}$, за вийнятком, можливо, скінченної кількості для якої $s_i q_{b_i} = 1$ або $s_i q_{b_i} < 1$, то

$$g'(x_0) = \pm\infty.$$

2) Нехай $x_0 = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$— (s_k) – бінарна точка, тобто

$$x_0 = x_0^{(2)} \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\ldots[\alpha_n-1](s_{n+k}-1)} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)} \equiv x_0^{(1)}, k \in \mathbb{N}$$

Розглянемо послідовністі $(x_j^{'})$, $(x_j^{''})$:

$$x_j^{'} = x_0^{(1)} + \frac{1}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n+j}} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\underbrace{0\ldots0}_{j-1}1(0)},$$

$$x_j^{''} = x_0^{(1)} - \frac{1}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n+j}} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\ldots[\alpha_n-1]\underbrace{[s_{n+1}-1]\ldots[s_{n+j-1}-1]}_{j-1}[s_{n+j}-2](s_{n+j+k}-1)},$$

$$x_j^{'} \to x_0 + 0, x_j^{''} \to x_0 - 0, \text{при } j \to \infty.$$

Згідно формул (3)-(4), маємо

$$g(x_0^{(1)}) = \begin{cases} \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 0, \\ \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(2)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 1; \end{cases}$$

$$g(x_0^{(2)}) = \begin{cases} \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta'_n(2)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 0, \\ \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta'_n(0)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 1; \end{cases}$$

$$g(x_j^{'}) = \begin{cases} \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\underbrace{0\ldots0}_{j-1}1(0)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 0, \\ \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\underbrace{2\ldots2}_{j-1}1(2)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 1; \end{cases}$$

$$g(x_j^{''}) = \begin{cases} \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta'_n\underbrace{2\ldots2}_{j-1}1(2)} \text{ при } c_n(x_0^{(2)}) = 0, \\ \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta'_n\underbrace{0\ldots0}_{j-1}1(0)} \text{ при } c_n(x_0^{(2)}) = 1. \end{cases}$$

Таким чином

$$g(x_j^{'}) - g(x_0^{(1)}) = \begin{cases} q_0^j \prod_{i=1}^{n} q_{b_i}, \text{ якщо } c_n(x_0^{(1)}) = 0, \\ -q_2^{j-1}\frac{q_1}{1-q_2}\prod_{i=1}^{n} q_{b_i}, \text{ якщо } c_n(x_0^{(1)}) = 1; \end{cases}$$

$$g(x_0^{(2)}) - g(x_j^{''}) = \begin{cases} q_2^{j-1}\frac{q_1}{1-q_2}\prod_{i=1}^{n} q_{b_i}, \text{ якщо } c_n(x_0^{(2)}) = 0, \\ -q_0^j \prod_{i=1}^{n} q_{b_i}, \text{ якщо } c_n(x_0^{(2)}) = 1. \end{cases}$$

Розглянемо

$$B_j^{'}=\frac{g(x_j^{'})-g(x_0^{(1)})}{x_j^{'}-x_0^{(1)}}=\begin{cases} q_0^j\prod\limits_{m=n}^{n+j}s_m\left(\prod\limits_{i=1}^{n}s_iq_{b_i}\right), \text{ якщо } c_n(x_0^{(1)})=0\\ -q_2^{j-1}\dfrac{q_1}{1-q_2}\prod\limits_{m=n}^{n+j}s_m\left(\prod\limits_{i=1}^{n}s_iq_{b_i}\right), \text{ якщо } c_n(x_0^{(1)})=1;\end{cases}$$

та

$$B_j^{''}=\frac{g(x_0)-g(x_j^{''})}{x_0-x_j^{''}}=\begin{cases} q_2^{j-1}\dfrac{q_1}{1-q_2}\prod\limits_{m=n}^{n+j}s_m\left(\prod\limits_{i=1}^{n}s_iq_{b_i}\right), \text{ якщо } c_n(x_0^{(2)})=0\\ -q_0^j\prod\limits_{m=n}^{n+j}s_m\left(\prod\limits_{i=1}^{n}s_iq_{b_i}\right), \text{ якщо } c_n(x_0^{(2)})=1.\end{cases}$$

Легко бачити, якщо $c_n(x_0^{(1)})\neq c_n(x_0^{(2)})$, то

$$\lim_{j\to\infty}B_j^{'}\neq\lim_{j\to\infty}B_j^{''}.$$

Якщо ж $c_n(x_0^{(1)})=c_n(x_0^{(2)})$, то, оскільки $s_mq_0>1$ та $s_mq_2>1$, $m\in\overline{n,n+j}, j\in\mathbb{N}$, отримаємо, що

$$\lim_{j\to\infty}B_j^{'} \text{ та } \lim_{j\to\infty}B_j^{''} \text{є нескінченними.}$$

Тому $g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})$ у (s_k)— бінарній точці є недиференційовною. Отже, функція g є всюди не диференційовною. □

5 Множини рівнів функції

Означення 1. *Множиною рівня y_0 функції g називається множина:*

$$g^{-1}(y_0)=\{x:g(x)=y_0\}$$

Лема 1. *1) Якщо $y_0=\Delta^{Q_3}_{d_1d_2\ldots d_k\ldots}$, де $d_k\in A_3\backslash\{1\}, k\in\mathbb{N}$, то множина $g^{-1}(y_0)$ містить єдину точку $x=\Delta^{(s_k)}_{m_1m_2\ldots m_k\ldots}$, (s_k) — цифри зображення якої визначаються за формулою:*

$$m_k=\begin{cases}0, \text{ якщо } d_k=0,\\ s_k-1, \text{ якщо } d_k=s_k-1.\end{cases} \tag{5}$$

2) Якщо Q_3—зображення точки y_0 містить скінченну кількість цифр "1", які розташовані на місцях $k_{n_1},k_{n_2},\ldots,k_{n_m}$, то множина $g^{-1}(y_0)$ є скінченною і містить $N=(2k_{n_1}-1)\cdot\ldots\cdot(2k_{n_m}-1)$ точок.

3) Якщо $y_0=\Delta^{Q_3}_{d_1d_2\ldots d_k\ldots}$, де

$$\begin{cases}d_{k_n}(y_0)=1, \; n\in\mathbb{N}\\ d_j(y_0)\neq 1, \; j\notin\{k_n\},\end{cases}$$

то множина $g^{-1}(y_0)$ є континуальною.

Доведення. Нехай $y_0 = \Delta^{Q_3}_{d_1 d_2 \ldots d_k \ldots}$, де $d_k \in A_3 \backslash \{1\}, k \in \mathbb{N}$, тоді згідно формул (2)-(4) слідує, що $c_k = 0$, а тому множина $f^{-1}(y_0)$ містить єдину точку x, цифри якої визначаються за формулами (5).

Нехай в зображенні точки y_0 міститься скінченна кількість цифр "1", які розташовані на місцях $k_{n_1}, k_{n_2}, \ldots, k_{n_m}$. З означення функції g слідує, що для кожної цифри $d_{k_{n_j}}(y_0) = 1$ існує $(2k_{n_j} - 1)$ цифр $\alpha_{k_{n_j}}(x)$. Тому загальну кількість елементів, що входить до множини $g^{-1}(y_0)$, можна визначити за формулою $N = (2k_{n_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (2k_{n_m} - 1)$.

Аналогічними міркуваннями, можна прийти до висновку, що кількість елементів множини $g^{-1}(y_0)$, при виконанні умов пункту (3) теореми, визначається за формулою $N = \prod\limits_{j=1}^{\infty} (2k_{n_j} - 1)$, а множина $g^{-1}(y_0)$ є континуальною.

$\square$

Наслідок 2. *Якщо* $y_0 = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{m} d_{m+1} d_{m+2} \ldots}$, *де* $d_{m+j} \in A_3 \backslash \{1\}, j \in \mathbb{N}$, *то множина* $g^{-1}(y_0)$ *є скінченною і містить* $N = (2m-1)!!$ *точок.*

Список літератури

[1] Bush K.A. *Continuous functions without derivatives* // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 59, no. 4. — P. 222-225.

[2] Cantor G. *Uber die einfachen Zahlesysteme* // Z. Math.Phys.— 1869. — 10, Bd. 14. — P. 121-128.

[3] Pratsiovytyi M., Vasylenko N. *Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation* // Int. J. of Math. Anal. – 2013. – **7**(64). – P. 3155–3169. doi:10.12988/ijma.2013.311278

[4] Sierpinski W. *Arytmetyczny przyklad funkcji ciaglej, nierozniczkowalnej* // Wektor. – 1914. – № 8. – P. 337-343.

[5] Wunderlich W. *Eine uberall stetige und nirgends difftrenziebare funktion* // Elem. Math. – 1952. – no.7. – Pp. 73–79.

[6] Працьовитий М. В. *Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел* — Київ: Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, 2012. — 68 с.

[7] Працьовитий М. В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування* — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.

[8] Працьовитий М. В. *Ніде не монотонніі сингулярні функції*// Наук. часопис Нац. пед.ун-ту ім. М.П.Драгоманова. Сер. 1. Фіз. - мат. науки. — 2011. – №12 — С.24-35.

[9] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів* – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[10] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. *Недиференційовна функція, що є одним з узагальнень відомої функції Серпінського* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1, Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – № 11. – С. 170–181.

[11] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. *Одна сім'я неперервних функцій з всюди щільною множиною особливостей* // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Серія 1, Фіз.-мат. науки. — 2011. – № 12. – С. 152–167.

[12] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. *Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу* // Нелінійні коливання, 2018, Том 21, №1. – С. 116–130.

[13] Працьовитий М., Панасенко О. *Диференціальні та фрактальні властивості класу самоафінних функцій* ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ, Серія мех.-мат. 2009, вип. 70, С. 128–142.

[14] Працьовитий М. В., Черчук Н. В., Вовк Ю. Ю., Шевченко А. В. *Ніде не монотонні функції, пов'язані з зображеннями чисел рядами Кантора* Збірник праць Ін–ту математики НАН України, 2019, Том 16, № 3. — С. 232–243.

[15] Працьовитий М. В., Калашніков А. В. *Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, повязані з Q-зображенням дійсних чисел*// Укр. мат.журнал — 2013. – 65, №3 — С.405-417.

Список літератури

[1] Bush K.A. *Continuous functions without derivatives* // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 59, no. 4. — P. 222-225.

[2] Cantor G. *Uber die einfachen Zahlesysteme* // Z. Math.Phys.— 1869. — 10, Bd. 14. — P. 121-128.

[3] Pratsiovytyi M., Vasylenko N. *Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation* // Int. J. of Math. Anal. – 2013. – **7**(64). – P. 3155–3169. doi:10.12988/ijma.2013.311278

[4] Sierpinski W. *Arytmetyczny przyklad funkcji ciaglej, nierozniczkowalnej* // Wektor. – 1914. – № 8. – P. 337-343.

[5] Wunderlich W. *Eine uberall stetige und nirgends difftrenziebare funktion* // Elem. Math. – 1952. – no.7. – Pp. 73–79.

[6] Pratsiovytyi M.V. *Geometry of Classical Binary Representation of Real Numbers* — Kyiv: Publishing House of the M. P. Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — 68 pages. (in Ukrainian)

[7] Pratsiovytyi M.V. *Arbitrary Systems of Real Number Coding and Their Applications* — Kyiv: Naukova Dumka, 2022. — 316 pages. (in Ukrainian)

[8] Pratsiovytyi M.V. *Nowhere Monotonic Singular Functions*// Scientific Journal of the M. P. Dragomanov National Pedagogical University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences. — 2011. – No.12 — P.24-35. (in Ukrainian)

[9] Pratsiovytyi M.V. *Fractal Approach in the Study of Singular Distributions* – Kyiv: Publishing House of the M.P. Dragomanov National Pedagogical University. – 1998. – 296 pages. (in Ukrainian)

[10] Pratsiovytyi M.V., Vasylenko N.A. *A Non-Differentiable Function as a Generalization of the Well-Known Sierpinski Function* // Scientific Journal of the M.P. Dragomanov National Pedagogical University. Series 1, Physical and Mathematical Sciences. – Kyiv: M.P. Dragomanov National Pedagogical University, 2010. – No. 11. – P. 170–181. (in Ukrainian)

[11] Pratsiovytyi M.V., Vasylenko N.A. *A Family of Continuous Functions with a Dense Set of Singularities* // Scientific Journal of the National Pedagogical Dragomanov University. Series 1, Physical and Mathematical Sciences.. — 2011. – No. 12. – P. 152–167. (in Ukrainian)

[12] Pratsovytyi M. V., Svynchuk O. V. *Scattering of Values of a Fractal Continuous Non-Monotonic Cantor-Type Function* // Nonlinear Oscillations, 2018, Vol. 21, No. 1. – P. 116–130. (in Ukrainian)

[13] Pratsovytyi M., Panasenko O. *Differential and Fractal Properties of a Class of Self-Affine Functions* Bulletin of Lviv University, Series Mechanics and Mathematics, 2009, Issue 70., P. 128–142. (in Ukrainian)

[14] Pratsovytyi M. V., Cherchuk N. V., Vovk Yu. Yu., Shevchenko A. V. *Nowhere Monotonic Functions Related to Representations of Numbers by Cantor Series* Collection of Works of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2019, Vol. 16, No. 3. — P. 232–243. (in Ukrainian)

[15] Pratsovytyi M. V., Kalashnikov A. V. *Self-Affine Singular and Nowhere Monotonic Functions Related to Q-Representations of Real Numbers*// krainian Mathematical Journal, 2013, Vol. 65, No. 3. — P.405-417. (in Ukrainian)

Надійшло 01.12.2024

Pratsiovytyi M.V., Cherchuk N.V. *Nowhere Monotonic Function of the Sierpinski Type Associated with the Representation of Numbers by Cantor Series*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 190–199.

In the paper, is defined a continuous nowhere monotonic function such that its argument is represented in Cantor numeral system with a sequence of natural bases (s_k), where $s_k = 2k+1$:

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 \cdot s_2} + ... + \frac{\alpha_k}{s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_k} + ... \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...},$$

where $\alpha_k(x) \in A_k \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\}$, $s_k = 2k + 1$. Value of the function is determined by a chain dependence of digits of Q_s-representation of a number on digits of representation of the argument and given in the following form:

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2...\beta_k...}, \ \ \beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\},$$

where $\beta_1 = \gamma(\alpha_1)$ and $\beta_k = \gamma(\alpha_k)$, if $c_k = 0$ or $\beta_k = 2 - \gamma(\alpha_k)$, if $c_k \neq 0$. Also $c_1 = c_2 = 0$, $c_k = c_{k-1}$, if $\alpha_{k-1} \neq \frac{s_{k-1}-1}{2}$ or $c_k = 1 - c_{k-1}$, if $\alpha_{k-1} = \frac{s_{k-1}-1}{2}$ and $\gamma(\alpha) \in A_3$.

We describe properties of level sets of these functions, differential and fractal properties.

Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В КРАЙОВІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ $2B$-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ

Досліджується задача вибору оптимального керування системою, що описується крайовою задачею для $2b$-параболічних рівнянь з інтегральною нелокальною умовою і обмеженим внутрішнім, межовим та стартовим керуванням. Критерій якості задається сумою об'ємних та поверхневих інтегралів. За допомогою функції Гріна загальної крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння встановлено існування, єдиність та інтегральне зображення розв'язків нелокальної крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння з інтегральною умовою за часовою змінною. Знайдено оцінки розв'язку нелокальної крайової задачі та його похідних в гельдерових просторах. Одержані результати використані для встановлення необхідних і достатніх умов існування оптимального розв'язку систем, що описуються параболічною крайовою задачею з нелокальною інтегральною умовою за часовою змінною. Розглянуто випадки обмежених внутрішніх, стартових та межових керувань.

Ключові слова і фрази: функція Гріна, стартове керування, межове керування, нелокальна задача, задача оптимізації, гельдерові простори, метод послідовних наближень, резольвента інтегрального рівняння.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), b.yashan@chnu.edu.ua (Яшан Б.О.)*

Вступ

Теорія оптимального керування системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, багата результатами і активно розвивається в наш час. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема, гідро- і газодинаміки, фільтрації, дифузії, фізики тепла, теорії біологічних популяцій. Її основи вперше систематично описано в монографії [1]. Важливі результати теорії оптимального керування системами у випадку еволюційних рівнянь, що задані на обмеженому часовому проміжку, отримані, зокрема, у працях [2, 3, 4, 5, 6].

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.
Information on some grant ...

У роботах [7, 8, 9, 10] вивчаються задачі оптимального керування системами, що описуються нелінійними рівняннями з частинними похідними. Зокрема, у праці [10] представлені аналітичні і чисельні розв'язки задачі оптимального керування для квазілінійних параболічних рівнянь. Доведено існування і єдиність розв'язку цієї задачі.

Задачам вибору оптимального керування системами, що описуються параболічними крайовими задачами з обмеженим внутрішнім керуванням присвячено праці [11, 12, 13]. Функціонали якості визначаються обмеженими інтегралами.

У цій статті розглядається задача вибору оптимального керування системою, що описується крайовою задачею для $2b$-параболічного рівняння з інтегральною нелокальною умовою і обмеженим внутрішнім, межовим та стартовим керуванням. За допомогою функції Гріна загальної крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння доведено існування єдиного розв'язку параболічної задачі з інтегральною умовою за часовою змінною. Одержані результати використані для встановлення необхідних і достатніх умов існування оптимального розв'язку системи, що описується параболічною крайовою задачею з нелокальною інтегральною умовою за часовою змінною і обмеженим внутрішнім, стартовим та межовим керуванням. Критерій якості задається сумою об'ємних та поверхневих інтегралів.

1 Постановка задачі та основний результат

Нехай T, T_1, T_2, T_3 – фіксовані додатні числа, $T_\lambda \leq T$, $\lambda \in \{1,2,3\}$. D – обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$. В області $Q = [0,T) \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій (u,q), $q = (q_1,q_2,q_3)$, на яких функціонал

$$\begin{aligned} I(q) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D F_1\left(t,x;u(t,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x)),q_1(x)\right)dx+ \\ +\int\limits_0^{T_1} dt \int\limits_D F_2(t,x;u(t,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x)),q_2(x))dx+ \\ +\int\limits_0^{T_2} dt \int\limits_{\partial D} F_3(t,x;u(t,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x)),q_3(x))d_xS \end{aligned} \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \{q|q_1 \in C^\alpha(D),\ q_2 \in C^{2b+\alpha}(D),\ q_3 \in C^{2b-r+\alpha}(\Gamma),\ \nu_{\lambda 1}(x) \leq q_\lambda \leq \nu_{\lambda 2}(x)$, із яких $u(t,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x))$ задовольняє при $(t,x) \in Q$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|\leq 2b} A_k(t,x)\partial_x^k\right]u = f_0(t,x;q_1(x)), \tag{2}$$

інтегральну умову за часовою змінною

$$u(0,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x)) + \int\limits_0^{T_3} a(\tau,x)u(\tau,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x))d\tau = \varphi(x;q_2(x)), \tag{3}$$

а на межі області $\Gamma = [0,T] \times \partial D$ крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left(Bu^{(\mu)} - f_\mu\right)(t,x) = \lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|\le r_\mu} b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k u - f_\mu(t,x;q_3(x))\right] = 0, \qquad (4)$$

$|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_n}^{k_n}$, $\mu = \{1,\ldots,b\}$, $r = \min\limits_{\mu} r_\mu$.

Будемо вважати виконаними такі умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t,x) \in C^{l+\alpha}(Q)$, $a(t,x) \in C^{2b+\alpha}(Q)$, $b_k^{(\mu)}(t,x) \in C^{2b+l-r_\mu+\alpha}(\Gamma)$, $\partial D \in C^{2b+\alpha+l}$, $l = 4b+1-2\tau$ і задача

$$(Lu)(tx) = \tilde{f}_0(t,x), \quad u(0,x) = \tilde{\varphi}(x), \quad \lim_{x\to z\in\partial D}\left(Bu^{(\mu)} - \tilde{f}_\mu\right) = 0$$

задовольняє в області Q рівномірну умову параболічності та умову Я.Б. Лопатинського [14];

б) функції $\varphi(x;q_2(x)) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $f_0(t,x;q_1(x)) \in C^{\alpha}(Q)$, $f_\mu(t,x;q_3(x)) \in C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)$, $\lim\limits_{x\to z\in\partial D}\left[f_\mu(0,x;q_3(x)) + \int\limits_0^{T_3} a(\tau)f_\mu(\tau,x;q_3(x))d\tau - B^\mu\varphi(x,q_2(x))\right]$, $x \in \partial D$;

в) $f_0(t,x;q_1(x)) \equiv d_0(t)g_0(x;q_1(x))$, $f_\mu(t,x;q_3(x)) = d_\mu(t)g_\mu(x;q_3(x))$, $F_1(t,x;u;q_1(x))$, $F_2(t,x;u;q_2(x))$, $F_3(t,x;u;q_3(x))$, $\varphi(x;q_2(x))$ мають похідні другого порядку за змінними $(u;q_1;q_2;q_3)$, які належать, як функції змінних (t,x), x відповідно просторам $C^{\alpha}(Q)$, $C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)$, $C^{2b+\alpha}(D)$, $\nu_{1j} \in C^{\alpha}(Q)$, $\nu_{2j} \in C^{2b+\alpha}(D)$, $\nu_{3j} \in C^{2b-r+\alpha}(\Gamma)$, $j \in \{1,2\}$.

За умов, накладених на коефіцієнти рівняння (2), крайових умов (4), існує функція Гріна $(G_0, G_1, \ldots, G_b)$ крайової задачі ([14], теорема 1)

$$(Lv)(t,x) = f_0(t,x;q_1(x)), \quad v(0,x) = \varphi(x;q_2(x)), \quad \lim_{x\to z\in\partial D}\left(Bv^{(\mu)} - f_\mu\right)(t,x) = 0, \qquad (5)$$

за допомогою якої розв'язок задачі (5) визначається формулою

$$v(t,x;q) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1(\xi))d\xi + \int\limits_D G_0(t,x;0;\xi)\varphi(\xi,q_2(\xi))d\xi +$$

$$+\sum_{\mu=0}^{b}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D} G_\mu(t,x;\tau;\xi)f_\mu(\tau,\xi;q_3(\xi))d_\xi S. \qquad (6)$$

При виконані умов а), б) згідно з теоремою 1 [14] існує єдиний розв'язок задачі (5) в просторі $C^{2b+\alpha}(Q)$ при довільних $q \in V$ і для нього правильна оцінка

$$\|v\|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \le c\left(\|f_0\|_{C^{\alpha}(Q)} + \|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)} + \sum_{\mu=1}^{b}\|f_\mu\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)}\right). \qquad (7)$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови а), б),* $\int\limits_0^{T_3} |a(\tau)| d\tau \int\limits_D |G_0(t,x,0,\xi)| d\xi \le d < 1$. *Тоді існує функція Гріна* $\left(\vec{G}, \vec{E}\right) = (G_0, G_1, \ldots, G_b; E_0, E_1, \ldots, E_b;)$ *задачі* (2)–(4) *єдиний її розв'язок зображається формулою*

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi) f_0(\tau,\xi; q_1(\xi)) d\xi + \int\limits_D G_0(t,x;0;\xi)\varphi(\xi, q_2(\xi)) d\xi +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^b \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_\mu(t,x;\tau;\xi) f_\mu(\tau,\xi; q_3(\xi)) d_\xi S + \int\limits_0^{T_3} d\tau \int\limits_D E_0(T_3;t,x;\tau,\xi) f_0(\tau,\xi;q_1(\xi)) d\xi +$$

$$+ \int\limits_D E_0(T_3;t,x;0;\xi)\varphi(\xi, q_2(\xi)) d\xi + \sum_{\mu=1}^b \int\limits_0^{T_3} d\tau \int\limits_{\partial D} E_\mu(T_3;t,x;\tau;\xi) f_\mu(\tau,\xi;q_3(\xi)) d_\xi S$$

і для нього правильна оцінка

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \le c \left(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)} + \|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)} + \sum_{\mu=1}^b \|f_\mu\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)} \right). \quad (8)$$

Доведення. Розв'язок задачі (2)–(4) шукаємо у вигляді

$$u(t,x;q) = \int\limits_D G_0(t,x,0,\xi) u(0,\xi;q) d\xi + v(t,x;q), \quad (9)$$

де $v(t,x;q)$ – розв'язок крайової задачі (5).

Задовольнивши інтегральну умову (3), матимемо

$$u(0,x;q) + \int\limits_0^{T_3} a(t) \left(\int\limits_D G_0(t,x;0,\xi) u(0,\xi;q) d\xi \right) dt = -\int\limits_0^{T_3} a(t) v(t,x;q) dt \equiv F(x;q). \quad (10)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (10) шукаємо методом послідовних наближень. Враховуючи нерівність $d < 1$, одержуємо розв'язок інтегрального рівняння (10), для якого правильна нерівність

$$|u(0,x;q)| \le \frac{c}{1-d} \left(\|f_0\|_{C(Q)} + \|\varphi\|_{C(D)} + \sum_{\mu=1}^b \|f_\mu\|_{C(\Gamma)} \right).$$

Запишемо розв'язок інтегрального рівняння (10) у вигляді

$$u(0,x;q) = F(x,q) + \int\limits_D R(x,y) F(y;q) dy, \quad (11)$$

де $R(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$R(x,\xi)=\int\limits_0^{T_2} a(t)G_0(t,x,0,\xi)dt-\int\limits_D R(x,y)dy\int\limits_0^{T_3} a(t)G_0(t,y,0,\xi)dt,$$

звідки отримуємо оцінку

$$\left|\int\limits_D R(x,\xi)d\xi\right|\le \frac{d}{1-d}.$$

Підставляючи у рівність (10) замість $F(x,q)$ значення

$$F(x,q)=-\int\limits_0^{T_2} a(t)\left[\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1(\xi))d\xi+\int\limits_D G_0(t,x,0,\xi)\varphi(\xi;q_2(\xi))d\xi+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{b}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D} G_\mu(t,x;\tau;\xi)f_\mu(\tau,\xi;q_3(\xi))d_\xi S\right]dt$$

і змінюючи порядок інтегрування, отримаємо

$$u(0,x;q)=\int\limits_0^{T_3} d\tau\int\limits_D \Gamma_0(T_3,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1)d\xi+\int\limits_D \Gamma_0(T_3,x,0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{b}\int\limits_0^{T_3} d\tau\int\limits_{\partial D}\Gamma_\mu(T_2,x;\tau;\xi)f_\mu(\tau,\xi;q_3)d_\xi S,$$

де

$$\Gamma_0(T_3,x,\tau,\xi)=-\int\limits_\tau^{T_3} a(t)G_0(t,x,\tau,\xi)dt-\int\limits_\tau^{T_3} dt\int\limits_D a(t)R(x,y)G_0(t,y,\tau,\xi)dy,$$

$$\Gamma_\mu(T_3,x,\tau,\xi)=-\int\limits_\tau^{T_3} a(t)G_\mu(t,x,\tau,\xi)dt-\int\limits_\tau^{T_3} dt\int\limits_D a(t)R(x,y)G_\mu(t,y,\tau,\xi)dy.$$

Підставляючи значення $u(0,x;q)$ у рівність (9) та змінюючи порядок інтегрування, отримаємо для розв'язку задачі (2)–(4) зображення

$$u(t,x,q)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q)d\xi+\int\limits_D G_0(t,x,0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{b}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D} G_\mu(t,x;\tau;\xi)f_\mu d_\xi S+\int\limits_0^{T_3} d\tau\int\limits_D E_0(T_3,t,x,\tau,y)f_0(\tau,y;q)dy+$$

$$+\int_D E_0(T_3,t,x,0,y)\varphi(y;q_2)dy+\sum_{\mu=1}^{b}\int_0^{T_3}d\tau\int_{\partial D}E_\mu(T_3,t,x;\tau;y)f_\mu d_yS, \tag{12}$$

де

$$E_\mu(T_3,t,x,\tau,y)=\int_D G_0(t,x,\tau,\xi)\Gamma_\mu(T_3,\xi,\tau,y)d\xi.$$

Знайдемо оцінку норми $\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)}$.

Враховуючи оцінки компонент функції Гріна задачі (5) із [14] і рівняння (10), маємо

$$\|u(0,x;q)\|_{C^{2b+\alpha}(D)}\le c\left(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)}+\|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)}+\sum_{\mu=1}^{b}\|f_\mu\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)}\right). \tag{13}$$

На підставі теореми 1 із [13], враховуючи властивості функції $G_0(t,x,0,\xi)$ і формулу (9), знаходимо

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)}\le c\left(\|u(0,x,q)\|_{C^{2b+\alpha}(D)}+\|v\|_{C^{2b+\alpha}(Q)}\right). \tag{14}$$

Підставляючи (7), (13) в (14), одержимо оцінку норми $\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)}$. □

2 Задача оптимального керування

В області Q розглянемо задачу (1)–(4). Будемо вважати, що виконані умови а)-в).

Позначимо через

$$\lambda_1(\xi)=\int_0^T dt\int_0^t d_0(\tau)d\tau\int_D\frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u}G_0(t,x,\tau,\xi)dx+\int_0^T dt\int_0^{T_3} d_0(\tau)d\tau\int_D\frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u}\times$$

$$\times E_0(T_3,t,x,\tau,\xi)dx+\int_0^{T_1} dt\int_0^t d_0(\tau)d\tau\int_D\frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u}G_0(t,x,\tau,\xi)dx+$$

$$+\int_0^{T_1} dt\int_0^{T_3} d_0(\tau)d\tau\int_D\frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u}E_0(T_3,t,x,\tau,\xi)dx+$$

$$+\int_0^{T_2} dt\int_0^{t} d_0(\tau)d\tau\int_{\partial D}\frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u}G_0(t,x,\tau,\xi)d_xS+$$

$$+\int_0^{T_2} dt\int_0^{T_3} d_0(\tau)d\tau\int_{\partial D}\frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u}E_0(T_3,t,x,\tau,\xi)d_xS.$$

$$\lambda_2(\xi)=\int_0^T dt\int_D\frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u}\left[G_0(t,x,0,\xi)+E_0(T_3,t,x,0,\xi)\right]dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_1} dt \int\limits_D \frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u}\left[G_0(t,x,0,\xi)+E_0(T_3,t,x,0,\xi)\right]dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_2} dt \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u}\left[G_0(t,x,0,\xi)+E_0(T_3,t,x,0,\xi)\right]dx,$$

$$P_\mu(\xi)=\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t d_\mu(\tau)d\tau\int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u}G_\mu(t,x,\tau,\xi)dx+\int\limits_0^T dt\int\limits_0^{T_3} d_\mu(\tau)d\tau\int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u}\times$$

$$\times E_\mu(T_3,t,x,\tau,\xi)dx+\int\limits_0^{T_1} dt\int\limits_0^t d_\mu(\tau)d\tau\int\limits_D \frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u}G_\mu(t,x,0,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_1} dt\int\limits_0^{T_3} d_\mu(\tau)d\tau\int\limits_D \frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u}E_\mu(T_3,t,x,0,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_2} dt\int\limits_0^t d_\mu(\tau)d\tau\int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u}G_\mu(t,x,\tau,\xi)d_xS+$$

$$+\int\limits_0^{T_2} dt\int\limits_0^{T_3} d_\mu(\tau)d\tau\int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u}E_\mu(T_3,t,x,\tau,\xi)d_xS,$$

$$H_1(\xi,u,\lambda_1,q_1)=\lambda_1(\xi)f_0(\xi;q_1(\xi))+\int\limits_0^T F_1(t,\xi;u,q_1)dt,$$

$$H_2(\xi,u,\lambda_2,q_2)=\lambda_2(\xi)\varphi(\xi;q_2(\xi))+\int\limits_0^{T_1} F_2(t,\xi;u,q_2)dt,$$

$$H_3(\xi,u,P,q_3)=\sum_{\mu=1}^{b}P_\mu(\xi)g_\mu(\xi,q_3(\xi))+\int\limits_0^{T_2} F_3(t,\xi;u,q_3)d\xi,$$

$q^{(0)}=\left(q_1^{(0)},q_2^{(0)},q_3^{(0)}\right)$ – оптимальне керування, $u(t,x;q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (1)–(4).

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми 1 і умова в). Тоді*

1) якщо $D_{q_l}H_l>0$, $l\in\{1,2,3\}$, то оптимальне керування $q^{(0)}=(\nu_{11},\nu_{21},\nu_{31})$;

2) якщо $D_{q_l}H_l>0$, $l\in\{1,2\}$, $D_{q_3}H_3<0$, то оптимальне керування $q^{(0)}=(\nu_{11},\nu_{21},\nu_{32})$;

3) якщо $D_{q_1}H_1>0$, $D_{q_2}H_2<0$, $D_{q_3}H_3<0$, то оптимальне керування $q^{(0)}=(\nu_{11},\nu_{22},\nu_{32})$;

4) якщо $D_{q_l}H_l<0$, $l\in\{1,2,3\}$, то оптимальне керування $q^{(0)}=(\nu_{12},\nu_{22},\nu_{32})$;

5) якщо $D_{q_1}H_1<0$, $D_{q_2}H_2>0$, $D_{q_3}H_3>0$, то оптимальне керування $q^{(0)}=(\nu_{12},\nu_{21},\nu_{31})$.

Доведення. Розглянемо випадок 1). Нехай $\Delta q = (\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3)$ – допустимий приріст керування $q = (q_1, q_2, q_3)$. Через $\Delta u = \Delta_{q_1} u + \Delta_{q_2} u + \Delta_{q_3} u$ позначимо приріст функції $u(t, x; q_1, q_2, q_3)$. Тоді $\Delta_{q_k} u$ в області Q будуть розв'язками відповідних крайових задач

$$
\begin{gathered}
(L\Delta_{q_k} u)(t,x) = \delta_{k1} r_0(t) \Delta f_0(x, q_1), \\
B(\Delta_{q_k} u)(x) = \delta_{k2} \Delta\varphi(x, q_2), \\
\left(B^{(\mu)} \Delta_{q_k} u\right)(t,x)\big|_{\Gamma} = \delta_{k3} \Delta f_\mu(x, q_3) r_\mu(t),
\end{gathered}
\tag{15}
$$

де δ_{ki} – символ Кронекера, $i, k \in \{1,2,3\}$.

За теоремою 1 існує функція Гріна задачі (15) і прирости $\Delta_{q_k} u$ зображаються формулами

$$
\begin{gathered}
\Delta_{q_1} u = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi) \Delta f_0(\xi, q_1(\xi)) r_0(\tau) d\xi + \\
+ \int\limits_0^{T_3} d\tau \int\limits_D E_0(T_3, t, x, \tau, \xi) \Delta f_0(\xi; q_1(\xi)) r_0(\tau) d\xi, \\
\Delta_{q_2} u = \int\limits_D \left[G_0(t,x,0,\xi) + E_0(T_3,t,x,0,\xi)\right] \Delta\varphi(\xi; q_2(\xi)) d\xi, \\
\Delta_{q_3} u = \sum_{\mu=1}^{b} \left[\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_\mu(t,x,\tau,\xi) \Delta f_\mu(\xi, q_3(\xi)) r_\mu(\tau) d_\xi S + \right. \\
\left. + \int\limits_0^{T_3} d\tau \int\limits_{\partial D} E_\mu(T_3,t,x,\tau,\xi) \Delta f_\mu(\xi, q_3(\xi)) r_\mu(\tau) d_\xi S \right].
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Розглянемо приріст функціоналу

$$
\Delta I(q) = \Delta_{q_1} I(g) + \Delta_{q_2} I(g) + \Delta_{q_3} I(g). \tag{17}
$$

Скористаємось формулою Тейлора, тоді

$$
\begin{gathered}
\Delta_{q_k} I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial u} \Delta_{q_k} u + O\left(\|\Delta_{q_k} u\|^2\right) + \delta_{k1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_1} \Delta q_1 + O\left(|\Delta q_1|^2\right)\right)\right] dx + \\
+ \int\limits_0^{T_1} dt \int\limits_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial u} \Delta_{q_k} u + O\left(\|\Delta_{q_k} u\|^2\right) + \delta_{k2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_2} \Delta q_2 + O\left(|\Delta q_2|^2\right)\right)\right] dx + \\
+ \int\limits_0^{T_2} dt \int\limits_{\partial D} \left[\frac{\partial F_3}{\partial u} \Delta_{q_k} u + O\left(\|\Delta_{q_k} u\|^2\right) + \delta_{k3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial q_3} \Delta q_3 + O\left(|\Delta q_3|^2\right)\right)\right] d_x S.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Підставляючи (10), (18) у (17) і змінюючи при цьому порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(q)=\int\limits_{D}\left[D_{q_1}H_1(\xi,u,\lambda_1,q_1)\Delta q_1+\partial_{q_2}H_2(\xi,u,\lambda_2,q_2)\Delta q_2+O\left(|\Delta q_1|^2\right)+O\left(|\Delta q_2|^2\right)\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\partial D}\left[D_{q_3}H_3(\xi,u,\lambda_3,q_3)\Delta q_3+O\left(\|\Delta_{q_3}u\|^2\right)\right]d_xS.$$

Якщо $q_k=\nu_{k1}(x)$ і $D_{q_k}H_k>0$, то при досить малих Δq_k маємо $\Delta I(q)>0$, $k\in\{1,2,3\}$.

Нехай $q^{(0)}$ – оптимальне керування, тобто $\Delta I(q)>0$. Перевіримо виконання умови 1) теореми 2. Якщо вирази $D_{q_1}H_1$, $D_{q_2}H_2$, $D_{q_3}H_3$ знакозмінні величини, тобто $D_{q_1}H_1>0$ в $D_1\subset D$, $D_{q_2}H_2>0$ в $D_2\subset D$, $D_{q_3}H_3>0$ в Γ_1 і $D_{q_1}H_1<0$ в $D\setminus D_1$, $D_{q_2}H_2<0$ в $D\setminus D_2$, $D_{q_3}H_3<0$ в $\partial D\setminus\Gamma_1$, то використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(q)=D_{q_1}H_1(x^+,u^+,\lambda_1^+,q_1^+)\int\limits_{D_1}\Delta q_1dx-\left|D_{q_1}H_1(x^-,u^-,\lambda_1^-,q_1^-)\right|\int\limits_{D\setminus D_1}\Delta q_1dx+$$

$$+D_{q_2}H_2(x^+,u^+,\lambda_2^+,q_2^+)\int\limits_{D_2}\Delta q_2dx-\left|D_{q_2}H_2(x^-,u^-,\lambda_2^-,q_2^-)\right|\int\limits_{D\setminus D_2}\Delta q_2dx+$$

$$+D_{q_3}H_3(x^+,u^+,\lambda_3^+,q_3^+)\int\limits_{\Gamma_1}\Delta q_3d_xS-\left|D_{q_3}H_3(x^-,u^-,\lambda_3^-,q_3^-)\right|\int\limits_{\partial D\setminus\Gamma_1}\Delta q_3d_xS+$$

$$+\int\limits_{D}\left[O\left(|\Delta q_1|^2\right)+O\left(|\Delta q_2|^2\right)\right]dx+\int\limits_{\partial D}O\left(|\Delta_{q_3}|^2\right)d_xS.$$

При досить малих Δq_k знак ΔI визначається першими шістьма доданками суми. Різниця перших двох і наступних пар двох доданків змінює знак в залежності від величин $mesD_1$, $mes(D\setminus D_1)$, $mesD_2$, $mes(D\setminus D_2)$, $mes\Gamma_1$, $mes(\partial D\setminus\Gamma_1)$, Δq_k, $k\in\{1,2,3\}$. При досить малих величинах $mesD_1<0$, $mesD_2<0$, $mes\Gamma_1<0$ і $\Delta q_k>0$ маємо $\Delta I(q)<0$ і навпаки $\Delta I(q)>0$, якщо малі величини $mes(D\setminus D_1)$, $mes(D\setminus D_2)$, $mes(\partial D\setminus\Gamma_1)$ і $\Delta q_k>0$. Отже, функціонал $I(q)$ не досягає мінімуму. Знаходження оптимального керування $q^{(0)}$ у інших випадках, які залежать від знаку величин $D_{q_k}H_k$, $k\in\{1,2,3\}$, доводяться аналогічно. □

Нехай умови теореми 2 не виконані.

Тоді правильна така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 1. Для того, щоб керування* $q^{(0)}=\left(q_1^{(0)},q_2^{(0)},q_3^{(0)}\right)$ *було оптимальним, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*

1) функції $H_l(\xi,u,\lambda_l,q_l)$, $l\in\{1,2\}$, $H_3(\xi,u,p,q_3)$ *за аргументами* q_k, $k\in\{1,2,3\}$ *мають в точці* $q_k^{(0)}$ *мінімальні значення;*

2) для довільного вектора $\left(l_k^{(1)},l_k^{(2)}\right)\neq 0$ *виконується нерівність*

$$D_u^2F_k\left(t,x;u,q_k^{(0)}\right)\left(l_k^{(1)}\right)^2+2D_uD_{q_k}F_k\left(t,x;u,q_k^{(0)}\right)l_k^{(1)}l_k^{(2)}+$$

$$+D^2_{q_k} F_k\left(t,x;u,q_k^{(0)}\right)\left(l_k^{(2)}\right)^2 > 0, \quad k \in \{1,2,3\}.$$

Доведення теореми 3 проводиться за допомогою методики доведення теореми 2.14 із [15].

Список літератури

[1] Lions J.-L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Mir. Moscow. 1972. 416. (in Russian)

[2] Zgurovsky M. Z., Melnik V.S., Novikov A. N. Applied methods of analysis and control of nonlinear processes and fields. Naukova dumka. Kiev. 2004. 588. (in Russian)

[3] Bermudez A. Some applications of optimal control theory of distributed systems. Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2002. 8. 195-218.

[4] Casas E., Vexler B., Zuazua E. Sparse initial data identification for parabolic PDE and its finite element approximations. Mathematical Control and Related Fields. 2015. 5(3). 377-399.

[5] Farrukh N. Dekhkonov. Boundary control problem associated with a pseudo-parabolic equation. Stochastic Modelling and Computational Sciences. 2023. 3(1). 119-130.

[6] Feiyue He, Leung A., Stojanovic S. Periodic optimal control for parabolic Volterra-Lotka type equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1995. 18. 127–146.

[7] Homberg D., Krumbiegel K., Rehberg J. Optimal control of a Parabolic Equation with Dunamic Boundary Condition. Applied Mathematics and Optimization. 2013. 67(1). 3-31.

[8] Bintz J., Finotti H., Lenhart S. Optimal control of resourse coefficient in a parabolic population model, edited by R. Mondaini. BIOMAT 2013 International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Press. Singapure. 2013. 121–135.

[9] Farag M.H. Computing optimal control with a quasilinear parabolic partial differential equation. Surveys in Mathematics and its Applications. 2009. 4. 139–153.

[10] Khater A.H., Shamardan A.B., Farag M.H., Abel-Hamid A.H. Analytical and numerical solutions of a quasilinear parabolic optimal control problem. Journal of Computational and Applied Mathematics. 1998. 95(1-2). 29-43.

[11] Pukalskyi I.D. Green function of a parabolic boundary value problem and the optimization problem. Ukrainian Mathematical Journal, 2000, 52(4), 567-571. (in Ukrainian)

[12] I.M. Isariuk, I.D. Pukal's'kyi. Internal and Startup Controls of the Solutions of Boundary-Value Problem for Parabolic Equations with Degenerations. Journal of Mathematical Sciences. 2023. 272(2). 14-29.

[13] I.D. Pukal's'kyi, B.O. Yashan. Multipoint Boundary-Value Problem of Optimal Control for Parabolic Equations with Degeneration. Journal of Mathematical Sciences. 2023. 273(6). 901-924.

[14] Ivasishen S.D. Green's matrices of general inhomogeneous boundary value problems for parabolic ones according to I.G. Petrovsky systems. Preprint of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, 1968, 2-52. (in Russian)

[15] Pukalskyi I.D., Luste I.P. Boundary value problems for parabolic equations of the second order. Tutorial Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2021, 284 p. (in Ukrainian)

Надійшло 12.11.2024

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. *Optimal control in a boundary value problem for 2b-parabolic equations with an integral nonlocal condition*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 200–210.

The theory of optimal control of systems described by equations with partial derivatives is rich in results and is actively developing nowadays. The popularity of this kind of research is connected with their active use in solving problems of natural science, in particular, hydro- and gas dynamics, filtration, diffusion, heat physics, theory of biological populations.

The problem of choosing the optimal system control described by the boundary value problem for $2b$-parabolic equations with an integral non-local condition and limited internal, boundary and starting control is investigated. The quality criterion is given by the sum of volume and surface integrals. Using Green's function of the general boundary value problem for the $2b$ parabolic equation, the existence, uniqueness, and integral image of the solutions of the nonlocal boundary value problem for the $2b$ parabolic equation with the integral condition on the time variable have been established. Estimates of the solution of the nonlocal boundary value problem and its derivatives in Hölder spaces are found. The obtained results are used to establish the necessary and sufficient conditions for the existence of an optimal solution of systems described by a parabolic boundary value problem with a nonlocal integral condition for the time variable. The cases of limited internal, starting and boundary controls are considered.

Сергійко Д.М., Ратушняк С.П.

СИНГУЛЯРНІ ФУНКЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНІ З МАРКОВСЬКИМ ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ

У статті вводиться в розгляд трисимвольне марковське зображення чисел, що грунтується на розкладі числа в ряд

$$x=\sum_{i=0}^{\alpha_1-1} q_i+\sum_{k=1}^{\infty}\left(q_{\alpha_1}\sum_{i=0}^{\alpha_k-1} q_{\alpha_k i}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\right)=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},\alpha_k\in A=\{0,1,2\},$$

де $\|q_{ij}\|$ — додатня стохастична матриця (матриця перехідних ймовірностей), $(q_0;q_1;q_2)$ — додатний стохастичний вектор. Дане зображення є узагальненням класичного трійкового зображення чисел і співпадає з ним при $q_i=\frac{1}{3}=q_{ij}\ \forall i,j\in A$. Описано тополого-метричні властивості циліндрів марковського зображення, зокрема виписано основне метричне відношення довжин циліндрів попереднього і наступного рангів. Введено поняття марковсько-нормального числа і доведено, що множина чисел, асимптотична частота кожної цифри i яких відповідно рівна $\sum\limits_{i\in A} q_jq_{ji}$, $i,j\in A$, має повну міру Лебега.

Введена в розгляд функція (інверсор цифр), означена рівністю

$$I(x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Доведено, що функція I є неперервною строго спадною функцією на відрізку $[0;1]$. На основі поняття циліндричної похідної знайдено вираз похідної функції I в точці. Використовуючи нормальну властивість числа за його марковським зображенням і отриманий вираз похідної знайдено умови, рівності похідної нулю майже в кожній точці одничного відрізка у розумінні міри Лебега, тобто умови сингулярності функції I.

Ключові слова і фрази: сингулярна функція, нормальна властивість числа, марковське зображення дійсних чисел, інверсор цифр зображення.

Dragomanov Ukrainian State University, Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine
e-mail: *21fmf.d.serhiiko@std.npu.edu.ua, ratush404@gmail.com*

Вступ

Неперервна строго зростаюча функція розподілу випадкової величини, цифри трійкового зображення якої є випадковими величинами з марковською залежністю, індукує

УДК 511.7+517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A30.

нову систему кодування дробової частини дійсного числа (марковське трисимвольне зображення) [5]. Це є аналогом відомого двосимвольного марковського зображення, що вивчалось у роботах [1, 2], яке заслуговувало на окрему увагу в силу мінімальності алфавіту. Геометрія цього зображення чисел, породжена залежністю цифр, продукує складніші тополого-метричні властивості множин різного роду особливостей функцій, визначених автоматами зі скінченною пам'яттю у просторах марковських зображень.

Стаття присвячена одній сингулярній функції (неперервній функції, відмінній від константи, похідна якої дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), означеній в термінах марковського зображення чисел. Розглядувана функція відноситься до класу "інверсорів цифр прикладами таких є інверсор цифр Q_2-зображення чисел [6], інверсор цифр Q_2^*-зображення [3], інверсор цифр Q_3-зображення чисел [7] тощо. Для доведення сингулярності інверсора цифр поглиблюється ергодична теорії марковського зображення чисел, а саме вводиться марковсько-нормальна властивість числа.

1 Марковське трисимвольне зображення дійсних чисел

Нехай $A \equiv \{0, 1, 2\}$ – алфавіт, $L = A \times A \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту, q_0, q_1, q_2 – фіксований набір додатних чисел такий, що $\sum\limits_{i=0}^{2} q_i = 1$, $\|q_{ij}\|$ — стохастична матриця 3-го порядку $(\sum\limits_{j=0}^{2} q_{ij} = 1, \forall i \in A, q_{ij} > 0)$.

Теорема 1. *Для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує $(\alpha_n) \in L$ така, що має місце рівність*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \tag{1}$$

де $\beta_{\alpha_1} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_1 - 1} q_i, \beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} = q_{\alpha_1} \sum\limits_{i=0}^{\alpha_k - 1} q_{\alpha_k i}$.

Доведення. Доведемо існування розкладу для довільного числа $x \in [0; 1]$. Зазначимо, що має місце рівність $x \in [0; 1] = [\beta_0; \beta_1] \cup [\beta_1; \beta_2] \cup [\beta_2; \beta_3] = \bigcup_{i=0}^{2} [\beta_i; \beta_{i+1}]$. Тоді існує $\alpha_1 \in A$ таке, що $x \in [\beta_{\alpha_1}; \beta_{\alpha_1 + 1}]$, тобто

$$\beta_{\alpha_1} \le x < \beta_{\alpha_1 + 1}, 0 \le x - \beta_{\alpha_1} \equiv x_1 < \beta_{\alpha_1 + 1} - \beta_{\alpha_1} = q_{\alpha_1} \Rightarrow x = \beta_{\alpha_1} + x_1.$$

Якщо $x_1 = 0$, то $x = \beta_{\alpha_1} = \Delta_{\alpha_1 (0)}$. Тобто $\alpha_n = 0 \; \forall n > 1$.

Якщо $x_1 > 0$, то можна знову запустити аналогічний процес:

$$x_1 \in [0; q_{\alpha_1}) = \bigcup_{i=0}^{2} [\beta_{\alpha_1 i}; \beta_{\alpha_1 (i+1)},$$

то існує $\alpha_2 \in A$ таке, що

$$\beta_{\alpha_1 \alpha_2} q_{\alpha_1} \le x_1 < \beta_{\alpha_1 (\alpha_2 + 1)} q_{\alpha_1},$$

тобто

$$0 \leq (x_1 - \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1}) \equiv x_2 < q_{\alpha_1}(\beta_{\alpha_1(\alpha_2+1)} - \beta_{\alpha_1\alpha_2})$$

$$0 \leq x_2 < q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2}.$$

Отже, $x_1 = \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} + x_2$, а $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} + x_2$.

Якщо $x_2 = 0$, то $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2(0)} \forall n > 2$.

Продовжуючи цей процес, знайдемо числа α_3, α_4, ..., α_n і x_3, x_4, ..., x_n, такі, що

$$0 \leq x_{n-1} - \beta_{\alpha_{n-1}\alpha_n} q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} ... q_{\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}} = x_n \text{ і}$$

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} + ... + \beta_{\alpha_{n-1}\alpha_n} q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} ... q_{\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}} + x_n.$$

Аналогічно, записуємо, що оскільки

$$x_n \in [0; q_{\alpha_1} \prod_{k=1}^{n-1} q_{\alpha_k\alpha_{k+1}}) = \bigcup_{i=0}^{2} [\beta_{\alpha_n i}; \beta_{\alpha_n(i+1)}),$$

то існує $\alpha_{n+1} \in A$, таке, що

$$0 \leq x_n - \beta_{\alpha_n\alpha_{n+1}} q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} ... q_{\alpha_{n-1}\alpha_n} \equiv x_{n+1} < q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} ... q_{\alpha_{k-1}\alpha_k} q_{\alpha_k\alpha_{k+1}} = q_{\alpha_1} \prod_{k=1}^{n} q_{\alpha_k\alpha_{k+1}}.$$

Цей процес є нескінченним, але збіжним, оскільки $x_{n+1} < (\max\{q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{11}\})^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Отже, розклад числа x в ряд (1) існує, що й доводить теорему. □

Запис числа x у формі ряду (1) називається *марковським представленням* цього числа, а формальний запис $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ – його *марковським зображенням*, елемент α_n називають n-ою цифрою (символом) марковського зображення числа x.

Існують числа, що мають два зображення. Це числа виду:

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}i(2)} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}[i+1](0)}, i \in \{0, 1\}.$$

Їх називатимемо *марковсько-бінарними.* Решта чисел мають єдине зображення, їх називатимемо *марковсько-унарними.*

2 Геометрія марковського зображення чисел

Під геометрією марковського зображення чисел ми розуміємо геометричний зміст цифр, метричні співвідношення та геометричні властивості множин чисел (фігур), що мають на фіксованих місцях задані марковські цифри. Такими множинами є циліндри, напівциліндри, хвостові множини тощо [4].

Означення 1. *Нехай $(c_1, c_2, ..., c_n)$ – фіксований впорядкований набір цифр алфавіту A. Циліндром рангу n з основою $(c_1c_2...c_n)$ називається множина $\Delta_{c_1c_2...c_n}$ всіх чисел $x \in [0; 1]$, які мають наступне марковське зображення $x = \Delta_{c_1c_2...c_n\alpha_{n+1}...\alpha_{n+m}...}, \alpha_{n+i} \in A$.*

Циліндр $\Delta_{c_1...c_n}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta_{c_1...c_n(0)}$ і $b = \Delta_{c_1...c_n(2)}$, тобто $\Delta_{c_1...c_n} = [a;b]$. Його внутрішність будемо позначати через $\nabla_{c_1...c_n}$ і називатимемо циліндричним інтервалом, тобто $\nabla_{\alpha_1...\alpha_n} = int\Delta_{c_1...c_n} = (a,b)$.

Вивчимо властивості циліндрів.

Властивість 1. *Для довільного* $(c_1,...,c_n) \in A^n$ *має місце рівність*

$$\Delta_{c_1...c_n} = \Delta_{c_1...c_n0} \cup \Delta_{c_1...c_n1} \cup \Delta_{c_1...c_n2}.$$

Випливає безпосередньо з означення циліндра.

Властивість 2. $\forall i = \overline{0,1}$ *виконуються рівності:*

$$\max\Delta_{c_1...c_ni} = \min\Delta_{c_1...c_n(i+1)},\ \max\Delta_{c_1...c_n2} = \max\Delta_{c_1...c_n},\ \min\Delta_{c_1...c_n0} = \max\Delta_{c_1...c_n}.$$

Властивість 3. *Основне метричне відношення обчислюється за формулою:*

$$\frac{|\Delta_{c_1...c_nij}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = q_{ij},\ \text{де } i,j \in A.$$

З властивості 1 для циліндрів (n+1)-го рангу маємо:

$$\Delta_{c_1...c_ni} = \Delta_{c_1...c_ni0} \cup \Delta_{c_1...c_ni1} \cup \Delta_{c_1...c_ni2}, i \in A.$$

З врахуванням властивості 2, перепишемо останню рівність у вигляді:

$$|\Delta_{c_1...c_ni}| = |\Delta_{c_1...c_ni0}| + |\Delta_{c_1...c_ni1}| + |\Delta_{c_1...c_ni2}|,$$

$$1 = \frac{|\Delta_{c_1...c_ni}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = \frac{|\Delta_{c_1...c_ni0}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} + \frac{|\Delta_{c_1...c_ni1}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} + \frac{|\Delta_{c_1...c_ni2}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|}.$$

Тоді

$$\frac{|\Delta_{c_1...c_ni2}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = 1 - q_{i0} - q_{i1} = q_{i2},\ \frac{|\Delta_{c_1...c_ni1}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = 1 - q_{i0} - q_{i2} = q_{i1},\ \frac{|\Delta_{c_1...c_ni0}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = 1 - q_{i1} - q_{i2} = q_{i0}.$$

Властивість 4. *Довжина циліндра* $\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}$ *обчислюється за формулою*

$$|\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}| = q_{\alpha_1}\prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i\alpha_{i+1}}.$$

З властивості 3 циліндрів n-го рангу маємо:

$$|\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}| = q_{\alpha_{[n-1]}\alpha_n}|\Delta_{\alpha_1...\alpha_{[n-2]}\alpha_{[n-1]}}| = ... = q_{\alpha_{[n-1]}\alpha_n}q_{\alpha_{[n-2}\alpha_{[n-1]}}...q_{\alpha_2\alpha_3}q_{\alpha_1\alpha_2}|\Delta_{\alpha_1}| =$$
$$= q_{\alpha_1}\prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i\alpha_{i+1}}.$$

Властивість 4. *Для довільної послідовності* $(\alpha_n) \in L$: $|\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}| \to 0$ $(n \to \infty)$. Випливає з того, що $|\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}| \le (\max_{i\in A} q_i)(\max_{i,j\in A}\{q_{ij}\})^{n-1} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Властивість 5. *Циліндри одного рангу не перетинаються або збігаються (рівні), причому* $\Delta_{c_1c_2...c_n} = \Delta_{c'_1c'_2...c'_n} \Leftrightarrow c_i = c'_i, i = \overline{1,m}$.

Властивість 6. *Для довільної послідовності* $(c_n) \in L$, *існує єдина точка* $x \in [0;1]$, *така, що належить всім циліндрам послідовності, тобто* $x = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2...c_n} = \Delta_{c_1c_2...c_n...}$.

3 Марковсько-нормальні властивості числа

Нехай $N_i(x,k)$ – кількість цифр i в марковському зображенні числа x до k-го місця включно. Тоді границя (якщо вона існує) $\nu_i(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k}$ називається частотою (асимптотичною частотою) цифри i в марковському зображенні числа x.

Лема 1. *Якщо в марковському зображенні числа x існують $\nu_{i_1}(x)$ і $\nu_{i_2}(x)$, де $i_1\neq i_2$ та $i_1,i_2\in\{0,1,2\}$ то існує $\nu_{3-i_1-i_2}(x)$.*

Доведення. Згідно означення з введених позначень можемо записати:

$$N_0(x,k)+N_1(x,k)+N_2(x,k)=k,$$

тоді

$$\frac{N_0(x,k)}{k}+\frac{N_2(x,k)}{k}+\frac{N_2(x,k)}{k}=1.$$

Тоді, якщо існують границі $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_{i_1}(x,k)}{k}$ і $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_{i_2}(x,k)}{k}$, то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_{i_1}(x,k)}{k}+\lim_{k\to\infty}\frac{N_{i_1}(x,k)}{k}=\lim_{k\to\infty}(1-\frac{N_{3-i_1-i_2}(x,k)}{k}),$$

тобто

$$\nu_{i_1}(x)+\nu_{i_2}(x)=1-\nu_{3-i_1-i_2}(x).$$ □

Означення 2. *Число $x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ називається марковсько-нормальним, якщо для його частот справджуються рівності*

$$\nu_j=\sum_{i\in A}q_iq_{ij},\ \forall i,j\in A. \tag{2}$$

Теорема 2. *Міра Лебега множини всіх марковсько-нормальних чисел відрізка $[0;1]$ дорівнює 1.*

Доведення. Доведемо, що для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел x одиничного відрізка виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_j(x,k)}{k}=\sum_{i\in A}q_iq_{ij},\quad \forall j\in A.$$

Розглянемо функцію $f(x)$, таку що

$$f(x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}=\alpha_1q'_{1-\alpha_1}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_nq'_{1-\alpha_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}q'_{\alpha_k}$ — Q_3-зображення чисел з параметрами $q'_0=q_0q_{00}+q_1q_{10}+q_2q_{20}$, $q'_1=q_0q_{01}+q_1q_{11}+q_2q_{21}$, $q'_2=q_0q_{02}+q_1q_{12}+q_2q_{22}$.

Відомо [7], що міра Лебега тих чисел $x=\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$, для частот яких мають місце рівності $\nu_0(x)=q_0$, $\nu_1(x)=q_1$, $\nu_2(x)=q_2$, є повною, а тому властивість числа мати частоти цифр 0, 1, 2 відповідно рівними q_0, q_1, q_2 є нормальною.

Оскільки функція f є проєктором цифр двох топологічно еквівалентних зображень (трисимвольного марковського зображення в Q_3-зображення чисел), а тому є бієкцією $[0;1]$ в $[0;1]$, то

$$\nu_i(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_i(y,n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n} = q'_i, i = \{0,1,2\}.$$

Отже, множина тих чисел, які в марковському трисимвольному зображенні мають частоти цифр відповідно рівні q'_0, q'_1, q'_2, є множиною повної міри. □

Введемо такі фіксовані частоти для пари цифр (ij), $\forall i,j \in A$. Нехай $N_{ij}(x,n)$ – кількість тих $k \le n$ для яких $\alpha_k(x) = i$ і $\alpha_{k+1}(x) = j$ в марковському зображенні числа x до n-го місця включно. Тоді границя (якщо вона існує) $\nu_{ij}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_{ij}(x,n)}{n}$ називається *частотою пари* (i,j) в марковському зображенні числа x.

Означення 3. *Число* $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, *для частот пар цифр якого справджуються рівності*

$$\nu_j(x) = \nu_{0j} + \nu_{1j} + \nu_{2j} = q_0q_{0j} + q_1q_{1j} + q_2q_{2j}, \text{ де } \nu_{ij} = q_iq_{ij}, (i,j) \in A,$$

називається марковсько-нормальним.

4 Інверсор цифр марковського зображення

Розглядається функція (інверсор цифр), означена рівністю:

$$I(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Очевидно, що означення функції I є коректним на множині чисел, що мають два формально різних зображення: $I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}) = I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)})$.

Теорема 3. *Функція* I *є неперервною строго спадною функцією на відрізку* $[0;1]$.

Доведення. Неперервність функції I у множині марковсько-бінарних точках є наслідком коректності її означення. Покажемо неперервність функції у множині марковсько-унарних точках, тобто що виконується рівність $\lim\limits_{x'\to x} |I(x') - I(x)| = 0$, де x – марковсько-унарне число. Нехай $x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots}$, $x' = \Delta_{c_1\ldots c_m\ldots}$. Умова $x' \to x$ рівносильна тому, що $m \to \infty$, де $\alpha_m(x) \ne c_m(x')$, але $a_j(x) = c_j(x')$ при $j < m$. Нехай $a_m = 1$ та $c'_m \ne 1$ – m-ті цифри марковського числа відповідно для $I(x)$ та $I(x')$. Тоді

$$\lim_{x'\to x} |I(x') - I(x)| = \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{m-1} q_{[2-\alpha_{j-1}][2-\alpha_j]} \cdot |A| = 0,$$

$A \equiv \beta_{[2-c_m][2-c_{m+1}]} - \beta_{1[2-\alpha_{m+1}]} + \beta_{[2-c_{m+1}][2-c_{m+2}]} q_{[2-c_m][2-c_{m+1}]} - \beta_{[2-\alpha_{m+1}][2-\alpha_{m+2}]} q_{1[2-\alpha_{m+1}]} + \ldots$.

Отже, $I(x)$ неперервна в усіх точках відрізка $[0;1]$. Тепер доведемо, що інверсор є спадною функцією на відрізку $[0;1]$. Розглянемо x_1 і x_2 такі, що $x_1 = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\ldots} <$

$x_2 = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\alpha'_n \ldots}$, причому $\alpha_n < \alpha'_n$, тоді $2 - \alpha_n > 2 - \alpha'_n$ і

$$I(x_1) - I(x_2) = \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_{n-1}][2-\alpha_n]\ldots} - \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_{n-1}][2-\alpha'_n]\ldots} =$$
$$= \left(\beta_{[2-\alpha_{n-1}][2-\alpha_n]} - \beta_{[2-\alpha_{n-1}][2-\alpha'_n]}\right) \prod_{j=1}^{n-2} q_{[2-\alpha_j][2-\alpha_{j+1}]} +$$
$$+ \left(\beta_{[2-\alpha_n][2-\alpha_{n+1}]} - \beta_{[2-\alpha'_n][2-\alpha'_{n+1}]}\right) \prod_{j=1}^{n-1} q_{[2-\alpha_j][2-\alpha_{j+1}]} + \ldots > 0.$$

Тому $I(x_1) > I(x_2)$ при $x_1 < x_2$, тобто функція I є монотонно спадною на $[0;1]$. □

Теорема 4. *Якщо $I'(x)$ існує, то*

$$I'(x) = -\lim_{n\to\infty} \frac{\left|I(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)})\right|}{\left|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|} = -\frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}} \lim_{n\to\infty} \prod_{i,j\in A} \left(\frac{q_{[2-i][2-j]}}{q_{ij}}\right)^{\frac{N_{ij}(x,n) - N_{[2-i][2-j]}(x,n)}{n}}.$$

Доведення. Оскільки функція I є монотонною на $[0;1]$, то згідно з теоремою Лебега вона має скінченну похідну майже скрізь у розумінні міри Лебега. Скористаємось циліндричною похідною. Тоді

$$-I'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|I(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)})\right|}{\left|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\Delta_{[2-\alpha_1(x)][2-\alpha_2(x)]\ldots[2-\alpha_n(x)]}\right|}{\left|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{q_{[2-\alpha_1]} \prod_{i=1}^{n-1} q_{[2-\alpha_i][2-\alpha_{i+1}]}}{q_{\alpha_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i\alpha_{i+1}}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}} \cdot \frac{q_{00}^{N_{22}(x,n)} q_{01}^{N_{21}(x,n)} q_{02}^{N_{20}(x,n)} q_{10}^{N_{12}(x,n)} q_{11}^{N_{11}(x,n)} q_{12}^{N_{10}(x,n)} q_{20}^{N_{02}(x,n)} q_{21}^{N_{01}(x,n)} q_{22}^{N_{00}(x,n)}}{q_{00}^{N_{00}(x,n)} q_{01}^{N_{01}(x,n)} q_{02}^{N_{02}(x,n)} q_{10}^{N_{10}(x,n)} q_{11}^{N_{11}(x,n)} q_{12}^{N_{12}(x,n)} q_{20}^{N_{20}(x,n)} q_{21}^{N_{21}(x,n)} q_{22}^{N_{22}(x,n)}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}} \cdot \frac{q_{00}^{N_{22}(x,n)-N_{00}(x,n)} q_{01}^{N_{21}(x,n)-N_{01}(x,n)} q_{02}^{N_{20}(x,n)-N_{02}(x,n)} q_{10}^{N_{12}(x,n)-N_{10}(x,n)}}{q_{12}^{N_{12}(x,n)-N_{10}(x,n)} q_{20}^{N_{20}(x,n)-N_{02}(x,n)} q_{21}^{N_{21}(x,n)-N_{01}(x,n)} q_{22}^{N_{22}(x,n)-N_{00}(x,n)}} =$$
$$= \frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}} \lim_{n\to\infty} \prod_{i,j\in A} \left(\frac{q_{[2-i][2-j]}}{q_{ij}}\right)^{\frac{N_{ij}(x,n) - N_{[2-i][2-j]}(x,n)}{n}}.$$ □

Теорема 5. *Якщо принаймні для однієї з пар $q_{00} \neq q_{22}$, $q_{01} \neq q_{21}$, $q_{02} \neq q_{20}$ або $q_{10} \neq q_{12}$, то інверсор I є сингулярною функцією (тобто неперервною функцією похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).*

Доведення. Нехай W – множина точок, для яких існує похідна скінченна $I'(x)$, а B – множина марковсько-нормальних чисел. Оскільки міри Лебега $\lambda(W) = \lambda(B) = 1$, то $\lambda(W \cap B) = 1$. Покажемо, що $I'(x) = 0$ для будь-якого $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \in W \cap B$. Оскільки $x \in B$, то

$$\nu_{ij}(x) = q_i q_{ij}, \quad i,j \in A.$$

Взявши до уваги теорему 4, обчислимо похідну

$$-I'(x)=\frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}}\lim_{n\to\infty}\prod_{i,j\in A}\left(\frac{q_{[2-i][2-j]}}{q_{ij}}\right)^{\frac{N_{ij}(x,n)-N_{[2-i][2-j]}(x,n)}{n}}=\frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{\frac{N_{22}(x,n)}{n}-\frac{N_{00}(x,n)}{n}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{\frac{N_{21}(x,n)}{n}-\frac{N_{01}(x,n)}{n}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{\frac{N_{20}(x,n)}{n}-\frac{N_{02}(x,n)}{n}}\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{\frac{N_{12}(x,n)}{n}-\frac{N_{10}(x,n)}{n}}\right)^n$$

$$=\frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}\right)^n.$$

Оцінимо значення виразу $\frac{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}$:

- якщо $q_{00}<q_{22}$, $q_{01}<q_{21}$, $q_{02}<q_{20}$, $q_{10}<q_{12}$, то

$$\frac{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1;$$

- якщо хоча б одна з умов $q_{00}<q_{22}$, $q_{01}<q_{21}$, $q_{02}<q_{20}$ порушується (не порушуючи загальності, припустимо, що $q_{00}>q_{22}$), але $q_{10}<q_{12}$ та $q_2<q_0$, то

$$\frac{q_{00}}{q_{22}}>1,\ \frac{\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_2q_{22}}}{\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_0q_{00}}}<1,\ \frac{\left(\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1;$$

- якщо ж усі умови попереднього випадку зберігаються, але $q_2>q_0$, то

$$\frac{q_{00}}{q_{22}}>1,\ \frac{q_2}{q_0}<1,\ \frac{\left(\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1.$$

  Цей випадок аналогічним чином працює і для інших пар з умов

$$q_{00}<q_{22},q_{01}<q_{21},q_{02}<q_{20};$$

- якщо ж порушуються кілька або всі зразу умови $q_{00}<q_{22},q_{01}<q_{21},q_{02}<q_{20}$, але $q_{10}<q_{12}$, то аналогічним до попередніх двох випадків чином можна показати, що

$$\frac{\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_2q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_2q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_2q_{20}}}{\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_0q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_0q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_0q_{02}}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1;$$

- якщо ж $q_{10}>q_{12}$, то $q_1(q_{12}-q_{10})<0$, то $\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1$.

Тоді маємо, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}\right)^n=0.$$

А тому $I'(x)=0$ для точок множини $W\cap B$. Отже, похідна функції I на відрізку $[0;1]$ дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега, тобто функція є сингулярною. Теорему доведено. $\square$

Список літератури

[1] Markitan V.P. *Fractal properties of sets and functions related to the Markov representation of real numbers defined by a double stochastic matrix* // Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2017, 14(4), 34-48.

[2] Pratsiovytyi O.M. *On a specific method of encoding real numbers and its applications* // Students' physical and mathematical sketches, 2008, 3, 57-67.

[3] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliah N.V., Ratushniak S.P. *Inversor of digits of Q_2^*-representative*, Mat. Stud. 2021, 55, .37–43.

[4] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach to investigation of singular probability distributions, Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ. Publ., Kyiv, 1998 (in Ukrainian).

[5] Pratsiovytyi M.V. *Singular and fractal properties of distributions of random variables digits of polybasic representations of which a form homogeneous Markov chain*, Ukr.Math.J., 2000, 52(3), (2000), 368-374.

[6] Pratsiovytyi M.V., Skrypnyk S.V. *Q_2-representation of fraction part of real number and inversor of its digits* Nauk. Chas. Nats. Ped. Univ. im. Drahomanova, Ser. Fiz.-Mat. Nauk 2013, **15**, 134–143. (in Ukrainian)

[7] Zamrii I.V., Prats'ovytyi M.V., Singularity of the digit inversor for the Q_3-representation of the fractional part of a real number, its fractal and integral properties, Journal of Mathematical Sciences, 2016, 215(3), 323–340.

Надійшло 08.12.2024

Serhiiko D.M., Ratushniak S.P. *Singular function related with Markov representation of numbers*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 211–219.

In this article, we introduce the three-symbol Markov representation of numbers, based on the decomposition of a number into the series

$$x = \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} q_i + \sum_{k=1}^{\infty}\left(q_{\alpha_1}\sum_{i=0}^{\alpha_k-1} q_{\alpha_k i}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\right) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_k \in A = \{0,1,2\},$$

where $\|q_{ij}\|$ is a positive stochastic matrix (transition probability matrix), and $(q_0; q_1; q_2)$ is a positive stochastic vector. This representation corresponds to thee classical ternary representation of numbers and coincides with it if $q_i = \frac{1}{3} = q_{ij}$ $\forall i, j \in A$. The topological and metric properties of the cylinders in this Markov representation are described. In particular, the basic metric ratio between the lengths of cylinders of the successive ranks is derived. Moreover, the concept of a Markov-normal number is introduced, and it is proved that the set of numbers for which the asymptotic frequency of each digit i equals to $\sum\limits_{i\in A} q_j q_{ji}$, $i, j \in A$, has full Lebesgue measure. The function (inversor of numbers) is introduced and defined by the equality

$$I(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

It is proved that the function I is a continuous, strictly decreasing function on the interval $[0;1]$. An expression for the derivative of the function I at a point is foud based on the concept of a cylindric derivate. Using the normal property of a number in its Markov representation and the obtained expression for the derivative, conditions for the derivative to be zero at almost every point of the unit interval in the sense of the Lebesgue measure are established. Therefore, the conditions for the singularity of the function I are determined.