

ISSN 2309-4001

БУКОВИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ЖУРНАЛ

Том 13, № 2

Чернівці  
Чернівецький національний університет  
2025

ISSN 2309-4001

**BIKOVINIAN  
MATHEMATICAL  
JOURNAL**

Volume 13, № 2

Chernivtsi  
Chernivtsi National University  
2025

Буковинський математичний журнал. – Т. 13, № 2. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2025. – 223 с.

Журнал входить до переліку наукових фахових видань України категорії "Б"  
(наказ МОНУ № 409 від 17.03.2020)

Спеціальності  
111 Математика  
113 Прикладна математика

Друкується за ухвалою Вченої ради  
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Журнал публікує оригінальні статті англійською та українською мовами із  
математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей і математичної  
статистики, математичного моделювання та обчислювальних методів

Реферується Zentralblatt MATH, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia  
Naukowa, WorldCat

### Редколегія:

Мартинюк О.В., д. ф.-м.н., проф., науковий редактор (Україна);	Лопушанський О.В., д. ф.-м.н., проф. (Польща);
Малик І.В., д. ф.-м.н., проф., заступник наукового редактора (Україна);	Маслюченко О.В., д. ф.-м.н., проф. (Польща);
Михайлюк В.В., д. ф.-м.н., проф., заступник наукового редактора (Україна);	Мельник А.М., д. т.н., проф. (Україна);
Літовченко В.А. д. ф.-м.н., проф., заступник наукового редактора (Україна);	Петрик М.Р. д. ф.-м.н., проф. (Україна);
Черевко І.М., д. ф.-м.н., проф., заступник наукового редактора (Україна);	Петришин Р.І., д. ф.-м.н., проф. (Україна);
Григорків В.С., д. ф.-м.н., проф. (Україна);	Попов М.М., д. ф.-м.н., проф. (Польща);
Григорчук Р.І., д. ф.-м.н., проф. (США);	Пукальський І.Д., д. ф.-м.н., проф. (Україна);
Загороднюк А.В., д. ф.-м.н., проф. (Україна);	Ронто М.Й., д. ф.-м.н., проф. (Угорщина);
Зарічний М.М., д. ф.-м.н., проф. (Польща);	Саміла А.П., д. т.н., проф. (Україна);
Карлова О.О., д. ф.-м.н., проф. (Україна);	Сидоров М.В., д. ф.-м.н., проф. (Україна);
Козьма Д.В., д. ф.-м.н., проф. (Молдова);	Скасків О.Б., д. ф.-м.н., проф. (Україна);
Конаровський В.В., к. ф.-м.н., проф. (Німеччина);	Станжицький О.М., д. ф.-м.н., проф. (Україна);
	Ткаченко В.І., д. ф.-м.н., проф. (Україна);
	Фішер А., д. ф.-м.н., проф. (Німеччина);
	Фориш У. д. ф.-м.н., проф. (Польща);
	Чоудхарі Н. доктор філософії, проф. (Індія);
	Яшан Б.О., доктор філософії, відповідальний секретар (Україна).

### Адреса редакції:

58012 м. Чернівці, вул. Університетська, 28, тел. (0372)58-48-80, e-mail: bm-journal@chnu.edu.ua

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації  
Державної реєстраційної служби України: серія КВ № 19465–9265 ПР від 07.11.2012  
(Видання є правонаступником Наукового вісника Чернівецького національного університету імені Юрія  
Федьковича. Серія: математика. Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової  
інформації Міністерства юстиції України: серія КВ № 15749–4221Р від 26.10.2009)

*Вітчизняне наукове видання*

Рік заснування 2013

© Чернівецький національний  
університет, 2025

The journal is included in the List of Scientific Professional Publications of Ukraine of category "B"

(Order of the Ministry of Education and Science №409 of March 17, 2020)

Specialties

111 Mathematics

113 Applied Mathematics

The journal publishes original papers in English and Ukrainian in mathematical analysis, differential equations, probability theory and mathematical statistics, mathematical modelling and methods of computations

Reviewed by Zentralblatt, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia Naukowa, WorldCat

### **Editorial Board of the issue:**

Martynyuk O.V., D.Sc., Prof., Scientific editor (Ukraine);	Lopushansky O.V., D.Sc., Prof. (Poland);
Malyk I.V., D.Sc., Prof., Deputy editor-in chief (Ukraine);	Maslyuchenko O.V., D.Sc., Prof. (Poland);
Mykhaylyuk V.V., D.Sc., Prof., Deputy editor-in chief (Ukraine);	Melnyk A.M., D. Tech. Sc., Prof. (Ukraine);
Litovchenko V.A., D.Sc., Prof., Deputy editor-in chief (Ukraine);	Petryk M.R., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Cherevko I.M., D.Sc., Prof., Deputy editor-in chief (Ukraine);	Petryshyn R.I., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Grygorkiv V.S., D.Sc., Prof. (Ukraine);	Popov M.M., D.Sc., Prof. (Poland);
Grygorchuk R.I., D.Sc., Prof. (USA);	Pukalskyi I.D., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Zagorodnyuk A.V., D.Sc., Prof. (Ukraine);	Ronto M.J., D.Sc., Prof. (Hungary);
Zarichnyi M.M., D.Sc., Prof. (Poland);	Samila A.P., D. Tech. Sc., Prof. (Ukraine);
Karlova O.O., D.Sc., Prof. (Ukraine);	Sidorov M.V. D.Sc., Prof. (Ukraine);
Cozma D.V., D.Sc., Prof. (Moldova);	Skaskiv O.B., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Konarovskyi V.V., C.Sc., Prof. (Germany);	Stanzhytskyi O.M., D.Sc., Prof. (Ukraine);
	Tkachenko V.I., D.Sc., Prof. (Ukraine);
	Fischer A. D.Sc., Prof. (Germany);
	Forys U. D.Sc., Prof. (Poland);
	Choudhary N. Doctor of philosophy, Prof. (India);
	Yashan B.O., Doctor of philosophy, Managing Editor (Ukraine).

### **Editorial office address:**

58012, Chernivtsi, Universytetska str., 28, tel. (0372)58-48-80, e-mail: bm-journal@chnu.edu.ua

Certificate of state registration of the print mass media of the State Registration Service of Ukraine: Series KB No 19465-9265 PR of 11/07/2012

(The journal is the assignee of Naukovyj Visnyk Chernivets'kogo Universytetu. Matematyka. Chernivets'kyj Universytet, Chernivtsi. Ukrainian. Certificate of state registration of the print mass media of the Ministry of Justice of Ukraine: Series KB No 15749-4221 P of 10/26/2009)

*National Scientific Publication*

Founded in 2013

©Chernivtsi National  
University, 2025

## ЗМІСТ

<i>Філіпчук М.П., Філіпчук О.І.</i> Багатоточкова крайова задача для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами .....	7
<i>Дорош А.Б., Черевко І.М.</i> Моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу .....	16
<i>Маценко В.Г.</i> Аналіз моделі Скеллама з дробовим показником у функції розмноження	24
<i>Пасічник Г.С.</i> Задача Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами .....	32
<i>Нікорак О.О., Ратушняк С.П.</i> Неперервний проєктор двійкового зображення чисел в ланцюгове $A_2$ -зображення .....	39
<i>Cozma D.</i> Center conditions for a cubic differential system with one invariant straight line and one invariant cubic .....	47
<i>Gutik O., Pozdniakova I.</i> On injective endomorphisms of the semigroup $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ with the two-element family $\mathcal{F}^2$ of inductive nonempty subsets of $\omega$ .....	58
<i>Малик І.В., Івасюк Р.В.</i> Оцінка параметрів неоднорідних прихованих напівмарківських моделей .....	70
<i>Vandura A.I., Kryshchtopa L.I., Mazur T.M., Petrechko N.V., Skaskiv O.B.</i> Growth and existence of analytic in a bidisc functions of bounded $L$ -index in joint variables .....	80
<i>Працьовитий М.В., Назарчук В.В., Василенко Н.А.</i> Однопараметрична сім'я фрактальних функцій, пов'язаних з $Q_s$ -зображенням чисел .....	88
<i>Грушка Я.І.</i> Про внутрішній час на синхронізованій орієнтованій множині* .....	96
<i>Бігун Я.Й., Українець О.З.</i> Математична модель впливу забруднення зовнішнього середовища на імунну відповідь організму людини .....	114
<i>Banakh T., Makarova K., Mazurenko O.</i> Monotheticity in one-parametric topological groups .....	125
<i>Andrytsuliak T., Martyniuk S.</i> Generalization of the Elo system for interactions between many agents .....	137
<i>Васькевич С.О., Вовк Ю.Ю., Працьовитий О.М.</i> Системи числення з ненульовою надлишковістю та їх застосування у теорії локально складних функцій .....	152
<i>Раєвська І., Раєвська М.</i> Про ендоциклічні 2-породжені групи порядку 256 та експоненти 16 .....	161
<i>Єлагін В.О.</i> Нескінченні згортки Бернуллі, керовані нега-двійковим рядом .....	170
<i>Litovchenko V.A.</i> Extension of the class of initial data of the Cauchy problem for the isotropic superdiffusion equation .....	177
<i>Grigorchuk R.I., Samarakoon S.T., Vorobets Y.</i> On the Second 2-Dimensional Rational Map Associated with the First Group of Intermediate Growth .....	188
<i>Симотюк М.М.</i> Задача з двома кратними вузлами для псевдодиференціальних рівнянь .....	201
<i>Мартинюк О.В.</i> Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка .....	219

## CONTENTS

<i>Filipchuk M.P., Filipchuk O.I.</i> Multipoint boundary value problem for a system of differential equations with many transformed arguments .....	7
<i>Dorosh A.B., Cherevko I.M.</i> Modeling boundary value problems for neutral-type integro-differential equations .....	16
<i>Matsenko V.G.</i> Analysis of the generalization of the Skellam model with a fractional exponent for the multiplication function .....	24
<i>Pasichnyk H.S.</i> Cauchy problem for a nonlinear second-order parabolic equation with increasing coefficients .....	32
<i>Nikorak O.O., Ratushniak S.P.</i> A Continuous projector from the binary representation of numbers to the continuous $A_2$ -representation .....	39
<i>Cozma D.</i> Center conditions for a cubic differential system with one invariant straight line and one invariant cubic .....	47
<i>Gutik O., Pozdniakova I.</i> On injective endomorphisms of the semigroup $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ with the two-element family $\mathcal{F}^2$ of inductive nonempty subsets of $\omega$ .....	58
<i>Malyk I.V., Ivasiuk R.V.</i> Parameter estimation of nonhomogeneous hidden semi-Markov models .....	70
<i>Bandura A.I., Kryshchtopa L.I., Mazur T.M., Petrechko N.V., Skaskiv O.B.</i> Growth and existence of analytic in a bidisc functions of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables .....	80
<i>Pratsiovytyi M.V., Nazarchuk V.V., Vasylenko N.A.</i> A one-parameter family of fractal functions related with the $Q_s$ -representation of real numbers .....	88
<i>Grushka Ya.I.</i> On internal time on a synchronized oriented set .....	96
<i>Bihun Y.Y., Ukrainets O.Z.</i> Mathematical Model of the Impact of Environmental Pollution on the Human Immune Response .....	114
<i>Banakh T., Makarova K., Mazurenko O.</i> Monotheticity in one-parametric topological groups .....	125
<i>Andrytsuliak T., Martyniuk S.</i> Generalization of the Elo system for interactions between many agents .....	137
<i>Vaskevych S.O., Vovk Yu.Yu., Pratsiovytyi O.M.</i> Numeral systems with non-zero redundancy and their applications in the theory of locally complex functions .....	152
<i>Raievska I., Raievska M.</i> Endocyclic 2-generated groups of order 256 of exponent 16 ....	161
<i>Yelahin V.O.</i> Infinite Bernoulli Convolutions Governed by a Negabinary Expansion ....	170
<i>Litovchenko V.A.</i> Extension of the class of initial data of the Cauchy problem for the isotropic superdiffusion equation .....	177
<i>Grigorochuk R.I., Samarakoon S.T., Vorobets Y.</i> On the Second 2-Dimensional Rational Map Associated with the First Group of Intermediate Growth .....	188
<i>Symotiuk M.M.</i> Two-point problem for linear systems of partial differential equations ...	201
<i>Martyniuk O.V.</i> International scientific conference dedicated to the 75th anniversary of the birth of Volodymyr Maslyuchenko .....	219

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.01>

Філіпчук М.П., Філіпчук О.І.

## БАГАТОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку багатоточкової крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів.

Запропоновано та обгрунтовано традиційну схему методу з визначальним рівнянням.

Отримано умови існування розв'язку розглядуваної крайової задачі та оцінку похибки побудованих послідовних наближень.

*Ключові слова і фрази:* чисельно-аналітичний метод, система диференціальних рівнянь, перетворений аргумент, крайова задача, багатоточкові крайові умови.

---

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна  
e-mail: [m.filipchuk@chnu.edu.ua](mailto:m.filipchuk@chnu.edu.ua), [o.filipchuk@chnu.edu.ua](mailto:o.filipchuk@chnu.edu.ua)

### Вступ

Одне з чільних місць в теорії диференціальних рівнянь займають питання дослідження існування та наближеної побудови розв'язків різноманітних крайових задач. Вдалим конструктивним методом, який дозволяє ефективно розв'язувати ці питання для досить широких класів задач, є чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка [1, 2, 3]. Актуальним є поширення цього методу на нові класи крайових задач, зокрема, для рівнянь з відхиленим аргументом [4].

У даній праці за допомогою чисельно-аналітичного методу досліджуватимемо питання існування та наближеної побудови розв'язку багатоточкової крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))), \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^N A_i x(t_i) = d, \quad (2)$$

---

УДК 517.929.7

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K10.

де  $t \in [0, T]$ ,  $T = \text{const} > 0$ ;  $x, f \in \mathbb{R}^n$ ;  $\lambda_i : [0, T] \rightarrow [0, T]$  ( $i = \overline{1, k}$ ) – довільні неперервні відображення;  $A_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ) – сталі  $n \times n$  матриці;  $N \geq 2$ ;  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ ;  $d$  – відомий сталий  $n$ -вимірний вектор.

Зауважимо, що випадки лінійних двоточкових та інтегральних крайових умов для системи (1) раніше були розглянуті в працях [5, 6] і [7] відповідно.

Функцію  $f(t, x, y_1, \dots, y_k)$  вважатимемо визначеною та неперервною в області

$$(t, x, y_1, \dots, y_k) \in [0, T] \times D^{k+1},$$

де  $D$  – замкнена обмежена область в  $\mathbb{R}^n$ , обмеженою вектором  $M \in \mathbb{R}^n$ ,  $M_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), і задовольняючою умову Ліпшица по  $x, y_1, \dots, y_k$  з матрицею  $K = \{k_{ij} \geq 0; i, j = \overline{1, n}\}$ :

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| \leq M, \quad (3)$$

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) - f(t, \bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)| \leq K \left( |\bar{x} - \bar{x}| + \sum_{i=1}^k |\bar{y}_i - \bar{y}_i| \right). \quad (4)$$

Тут

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| = (|f_1(t, x, y_1, \dots, y_k)|, \dots, |f_n(t, x, y_1, \dots, y_k)|)$$

і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

#### СХЕМА ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ ТА ЇЇ ОБҐРУНТУВАННЯ

Припустимо, що виконується умова

$$\det \left( \sum_{i=1}^N t_i A_i \right) \neq 0. \quad (5)$$

Позначимо через  $D_\beta$  множину точок  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , які містяться в області  $D$  разом зі своїм  $\beta$ -околом, де

$$\beta = T(E + L)M + T |Hd(x_0)|, \\ H = \left( \sum_{i=1}^N t_i A_i \right)^{-1}, \quad L = \sum_{i=1}^N t_i |H A_i|, \quad d(x_0) = d - \left( \sum_{i=0}^N A_i \right) x_0.$$

Нехай

$$D_\beta \neq \emptyset \quad (6)$$

і найбільше власне значення матриці  $Q = (k + 1)T(E + L)K$  не перевищує одиниці:

$$\lambda_{\max}(Q) < 1. \quad (7)$$

Розглянемо послідовність функцій, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$x_0(t, x_0) = x_0, \quad x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t g_{m-1}(s, x_0) ds - \\ - tH \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g_{m-1}(s, x_0) ds + tHd(x_0), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

де

$$g_{m-1}(t, x_0) \equiv f(t, x_{m-1}(t, x_0), x_{m-1}(\lambda_1(t), x_0), \dots, x_{m-1}(\lambda_k(t), x_0)),$$

а параметр  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що для довільних  $x_0$  всі функції цієї послідовності задовольняють крайові умови (2).

Має місце наступне твердження про збіжність послідовних наближень  $x_m(t, x_0)$  вигляду (8).

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови (3)-(7). Тоді послідовність функцій  $x_m(t, x_0)$  вигляду (8) рівномірно збігається при  $t \rightarrow \infty$  в області  $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$  до граничної функції  $x^*(t, x_0)$ , яка задовольняє крайові умови (2) і є розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t g(s) ds - tH \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g(s) ds + tHd(x_0), \quad (9)$$

де

$$g(t) \equiv f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))),$$

який при  $t = 0$  проходить через точку  $x^*(0, x_0) = x_0$ . Крім цього,  $x^*(t, x_0)$  є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))) + \Delta(x_0), \quad \sum_{i=0}^N A_i x(t_i) = d, \quad (10)$$

де

$$\Delta(x_0) = Hd(x_0) - H \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g(t) dt.$$

Для відхилення  $x^*(t, x_0)$  від  $x_m(t, x_0)$  при всіх  $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$  і  $m = 1, 2, \dots$  вірна оцінка

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq W_m(x_0), \quad W_m(x_0) \equiv Q^m(E - Q)^{-1}\beta. \quad (11)$$

*Доведення.* Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (8) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що при  $x_0 \in D_\beta$  всі функції  $x_m(t, x_0)$  містяться в області  $D$ . На підставі (8) із врахуванням (3) знаходимо:

$$\begin{aligned} |x_1(t, x_0) - x_0| &\leq TM + T \sum_{i=1}^N |HA_i| Mt_i + T |Hd(x_0)| = \\ &= T \left( E + \sum_{i=1}^N t_i |HA_i| \right) M + T |Hd(x_0)| = T(E + L)M + T |Hd(x_0)| = \beta. \end{aligned} \quad (12)$$

Тому  $x_1(t, x_0) \in D$ , як тільки  $x_0 \in D_\beta$ . Індукцією легко показати, що для всіх  $m = 1, 2, \dots$ ,  $t \in [0, T]$  і будь-якого  $x_0 \in D_\beta$  функції  $x_m(t, x_0)$  вигляду (8) не виходять за межі області  $D$ .

Покладаючи  $r_{m+1}(t, x_0) = |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|$ , на підставі (8) із врахуванням (4) отримуємо:

$$r_{m+1}(t, x_0) \leq K \int_0^t \omega_m(s, x_0) ds + t \sum_{i=1}^N |HA_i| K \int_0^{t_i} \omega_m(s, x_0) ds, \quad (13)$$

де

$$\omega_m(s, x_0) = r_m(s, x_0) + \sum_{i=1}^k r_m(\lambda_i(s), x_0).$$

Згідно з (12),  $r_1(t, x_0) = |x_1(t, x_0) - x_0| \leq \beta$ , тому із (13) при  $m = 1$  знаходимо:

$$\begin{aligned} r_2(t, x_0) &\leq K(k+1)\beta t + t \sum_{i=1}^N |HA_i| K(k+1)\beta t_i \leq \\ &\leq (k+1)TK\beta + (k+1)T \sum_{i=1}^N t_i |HA_i| K\beta = (k+1)T(E+L)K\beta = Q\beta. \end{aligned}$$

Індукцією можна довести, що для всіх  $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$

$$r_{m+1}(t, x_0) \leq Q^m \beta, \quad m = 0, 1, \dots$$

Тому для  $j \geq 1$  маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq \sum_{i=1}^j r_{m+i}(t, x_0) \leq \left( \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \right) \beta = Q^m \left( \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right) \beta. \quad (14)$$

Умова (7) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}. \quad (15)$$

Тоді із (14) та (15) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність  $x_m(t, x_0)$  вигляду (8) рівномірно збігається при  $m \rightarrow \infty$  в області  $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$  і

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0). \quad (16)$$

Оскільки всі послідовні наближення  $x_m(t, x_0)$  задовольняють крайові умови (2), то й гранична функція  $x^*(t, x_0)$  також їх задовольняє. При  $j \rightarrow \infty$  із (14), враховуючи (16) та (15), для всіх  $m = 1, 2, \dots$ ,  $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$  отримуємо оцінку (11). Крім цього, переходячи із врахуванням (16) у (8) до границі при  $m \rightarrow \infty$ , бачимо, що функція  $x^*(t, x_0)$  є розв'язком інтегрального рівняння (9), який при  $t = 0$  проходить через точку  $x^*(0, x_0) = x_0$ . Отже, гранична функція  $x^*(t, x_0)$  справді є розв'язком крайової задачі (10). Теорему доведено.  $\square$

На підставі теореми 1, використовуючи стандартну техніку обґрунтування чисельно-аналітичного методу [2, 3], нескладно отримати наведені далі твердження.

Необхідні і достатні умови для того, щоб гранична функція  $x^*(t, x_0)$  послідовності (8) була розв'язком крайової задачі (1), (2), дає наступна теорема.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок  $x^*(t)$  початкової задачі*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))), \quad x(0) = x_0,$$

*був одночасно розв'язком крайової задачі (1), (2), необхідно і досить, щоб  $x_0$  було розв'язком визначального рівняння*

$$\Delta(x_0) = 0, \quad (17)$$

де

$$\Delta(x_0) = Hd(x_0) - H \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g^*(t, x_0) dt, \quad (18)$$

$$g^*(t, x_0) \equiv f(t, x^*(t, x_0), x^*(\lambda_1(t), x_0), \dots, x^*(\lambda_k(t), x_0)).$$

При цьому  $x^*(t) = x^*(t, x_0)$  і для всіх  $m = 1, 2, \dots, t \in [0, T]$  щодо відхилення точного розв'язку  $x^*(t) = x^*(t, x_0)$  крайової задачі (1), (2) від її наближеного розв'язку  $x_m(t, x_0)$  вигляду (8) вірна оцінка (11).

На підставі теореми 2 отримуємо наступний чисельно-аналітичний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (1), (2):

а) при  $x_0 \in D_\beta$  згідно з (8) будуюмо послідовність функцій  $x_m(t, x_0)$ , залежну від  $x_0$  як від параметра;

б) знаходимо граничну функцію  $x^*(t, x_0)$  цієї послідовності;

в) складаємо визначальну функцію  $\Delta(x_0)$  вигляду (18) і яким-небудь чисельним методом знаходимо розв'язок  $x_0 = x_0^*$  визначального рівняння (17);

г) шукаємо розв'язок початкової задачі  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t)))$ ,  $x(0) = x_0^*$ , або, що те саме, граничну функцію  $x^*(t, x_0^*)$  послідовності  $x_m(t, x_0^*)$ .

Отримана функція і буде точним розв'язком крайової задачі (1), (2), а за її наближений розв'язок, який дає похибку, що не перевищує  $W_m(x_0^*)$ , можна взяти функцію  $x_m(t, x_0^*)$  вигляду (8).

Головною проблемою при реалізації наведеного алгоритму є побудова в аналітичному вигляді функції  $x^*(t, x_0)$ . Крім цього, з точки зору практичного застосування, важливо вміти зробити висновок про існування розв'язку крайової задачі (1), (2) не за граничною функцією  $x^*(t, x_0)$ , а за її  $m$ -тим наближенням  $x_m(t, x_0)$ .

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

**Теорема 3.** Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:

1) існує опукла замкнена область  $D_1 \subset D_\beta$ , в якій наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_0) = 0, \quad (19)$$

де

$$\Delta_m(x_0) = Hd(x_0) - H \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{t_i} g_m(t, x_0) dt, \quad (20)$$

$$g_m(t, x_0) \equiv f(t, x_m(t, x_0), x_m(\lambda_1(t), x_0), \dots, x_m(\lambda_k(t), x_0)),$$

має для деякого фіксованого  $m \geq 1$  єдиний розв'язок  $x_0 = x_{0m}$  ненульового індексу;

2) на межі  $S_1$  області  $D_1$  виконується нерівність

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > (k+1)LKW_m(x_0).$$

Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язок  $x^*(t)$ , початкове значення

$$x^*(0) = x_0^* \quad (21)$$

якого визначається таким  $x_0^*$ , яке належить області  $D_1$ .

Оцінку близькості граничних функцій  $x^*(t, x'_0)$  і  $x^*(t, x''_0)$  для точок  $x'_0, x''_0 \in D_\beta$  дає наступне твердження.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для будь-яких точок  $x'_0, x''_0 \in D_\beta$  щодо відхилення граничних функцій  $x^*(t, x'_0)$  і  $x^*(t, x''_0)$  послідовностей  $x_m(t, x'_0)$  і  $x_m(t, x''_0)$  вигляду (8) відповідно вірна оцінка*

$$|x^*(t, x'_0) - x^*(t, x''_0)| \leq (E - Q)^{-1}(E + R_2) |x'_0 - x''_0|,$$

де

$$R_2 = T \left| H \sum_{i=0}^N A_i \right|.$$

Неперервну залежність визначальної функції  $\Delta(x_0)$  вигляду (18) від  $x_0$  дає наступне твердження.

**Теорема 5.** *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді функція  $\Delta(x_0)$  вигляду (18) визначена, неперервна в області  $D_\beta$  і для всіх  $x'_0, x''_0 \in D_\beta$  задовольняє оцінку*

$$|\Delta(x'_0) - \Delta(x''_0)| \leq \left[ \frac{1}{T} R_2 + (k + 1) LK (E - Q)^{-1} (E + R_2) \right] |x'_0 - x''_0|.$$

Необхідні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

**Теорема 6.** *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб деяка область  $D_2 \subset D_\beta$  містила точку  $x_0^*$ , яка визначає при  $t = 0$  початкове значення (21) розв'язку  $x^*(t)$  крайової задачі (1), (2), необхідно, щоб для всіх  $m$  і довільного  $\bar{x}_0 \in D_2$  виконувалась нерівність*

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \leq \sup_{x_0 \in D_2} \left[ \frac{1}{T} R_2 + (k + 1) LK (E - Q)^{-1} (E + R_2) \right] |x_0 - \bar{x}_0| + (k + 1) LK W_m(\bar{x}_0).$$

Оцінку відхилення наближеного розв'язку  $x_m(t, x_{0m})$ , де  $x_{0m}$  – розв'язок наближеного визначального рівняння (19), від точного розв'язку  $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$  крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

**Теорема 7.** *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді для відхилення наближеного розв'язку  $x_m(t, x_{0m})$ , де  $x_{0m}$  – розв'язок наближеного визначального рівняння (19), від точного розв'язку  $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$  крайової задачі (1), (2) вірна оцінка*

$$|x^*(t, x_0^*) - x_m(t, x_{0m})| \leq (E - Q)^{-1}(E + R_2) |x_0^* - x_{0m}| + W_m(x_{0m}).$$

Аналогічно [2, 3], при деяких додаткових умовах гладкості правої частини системи (1) можна показати, що  $|x_0^* - x_{0m}| \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  та довести рівномірну збіжність наближеного розв'язку  $x_m(t, x_{0m})$  до точного  $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$ .

Відмітимо також, що у частковому випадку  $k = 1$  (наявність лише одного перетвореного аргументу в системі) всі наведені в цій секції результати повторюватимуть результати, раніше отримані в [8].

## ПРИКЛАД

Проілюструємо використання розробленої схеми чисельно-аналітичного методу на конкретному прикладі. Для простоти та компактності викладок обмежимося розглядом скалярного випадку.

**Приклад.** Розглянемо крайову задачу

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{20} \left( x\left(\frac{t}{2}\right) - x\left(\frac{t}{3}\right) \right),$$

$$-x(0) + x(1) + x(2) = 5,$$

де  $t \in [0, 2]$ ,  $D = [0, 10]$ .

Нескладно перевірити, що в цьому випадку

$$k = 2, \quad N = 2, \quad T = 2, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad A_0 = -1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad d = 5,$$

$$M = \frac{1}{2}, \quad K = \frac{1}{20}, \quad \sum_{i=1}^N t_i A_i = 3 \neq 0, \quad H = \frac{1}{3}, \quad L = 1, \quad Q = \frac{3}{5},$$

$$d(x_0) = 5 - x_0, \quad \beta = 2 + \frac{2}{3} |5 - x_0|, \quad D_\beta \neq \emptyset,$$

а тому виконуються всі умови теореми 1.

Послідовні наближення  $x_1(t, x_0)$  і  $x_2(t, x_0)$ , знайдені згідно з (8), мають вигляд:

$$x_1(t, x_0) = x_0 + \frac{1}{3}(5 - x_0)t,$$

$$x_2(t, x_0) = x_0 + \frac{1}{3}(5 - x_0) \left( \frac{143}{144}t + \frac{1}{240}t^2 \right).$$

Відповідні їм наближені визначальні функції  $\Delta_1(x_0)$  і  $\Delta_2(x_0)$ , знайдені згідно з (20), мають вигляд:

$$\Delta_1(x_0) = \frac{143}{144} \cdot \frac{1}{3}(5 - x_0),$$

$$\Delta_2(x_0) = \frac{51481}{51840} \cdot \frac{1}{3}(5 - x_0).$$

Коренями наближених визначальних рівнянь  $\Delta_1(x_0) = 0$  і  $\Delta_2(x_0) = 0$  є відповідно  $x_{01} = 5$  і  $x_{02} = 5$ .

Тоді наближеним розв'язком розглядуваної крайової задачі буде функція

$$x_1(t, x_{01}) = x_2(t, x_{02}) = 5.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що точним розв'язком розглядуваної крайової задачі якраз і є функція  $x^*(t) = 5$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Наукова думка, Киев, 1985.
- [2] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Наукова думка, Киев, 1992.
- [3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1142/3962>
- [4] Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И. *Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III.* Укр. мат. журн. 1998, **50** (7), 960–979. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4876>
- [5] Філіпчук М.П. *Двоточкова крайова задача для системи з багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2017, **5** (1-2), 139–143. URL: <https://tinyurl.com/bmj2017-1and2-17>
- [6] Філіпчук М.П. *Про одну двоточкову крайову задачу для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2021, **9** (1), 284–290. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.24>
- [7] Філіпчук М.П., Філіпчук О.І. *Про крайову задачу з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2024, **12** (1), 107–119. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2024.01.10>
- [8] Філіпчук М.П., Бігун Я.Й. *Чисельно-аналітичний метод дослідження багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом.* Укр. мат. журн. 1998, **50** (11), 1581–1585. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4815>

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods for the Investigation of Solutions of Boundary-Value Problems. Naukova Dumka, Kiev, 1985. (in Russian)
- [2] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 1992. (in Russian)
- [3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1142/3962>
- [4] Ronto M.I., Samoilenko A.M., Trofimchuk S.I. *The theory of the numerical-analytic method: Achievements and new trends of development. III.* Ukr. Math. J. 1998, **50** (7), 960–979. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4876> (in Russian)
- [5] Filipchuk M.P. *Two-point boundary value problem for a system with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2017, **5** (1-2), 139–143. URL: <https://tinyurl.com/bmj2017-1and2-17> (in Ukrainian)
- [6] Filipchuk M.P. *On a two-point boundary value problem for a system of differential equations with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2021, **9** (1), 284–290. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.24> (in Ukrainian)
- [7] Filipchuk M.P., Filipchuk O.I. *On a boundary value problem with integral conditions for a system of differential equations with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2024, **12** (1), 107–119. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2024.01.10> (in Ukrainian)

- [8] Filipchuk M.P., Bigun Ya.I. *Numerical-analytic method for the investigation of multipoint boundary-value problems for systems of differential equations with transformed argument*. Ukr. Math. J. 1998, **50** (11), 1805–1810. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02524491> (translation of Ukr. Math. J. 1998, **50** (11), 1581–1585. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4815> (in Ukrainian))

Надійшло 01.08.2025

---

Filipchuk M.P., Filipchuk O.I. *Multipoint boundary value problem for a system of differential equations with many transformed arguments*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 7–15.

A boundary value problem for a system of differential equations with finite quantity of transformed arguments in the case of multipoint boundary conditions is considered in this paper.

To investigate the existence and approximate construction of the solution of such boundary value problem it is proposed a traditional scheme of the A.M. Samoilenko's numerical-analytic method with a determining equation.

A recurrent sequence of functions that depend on parameter, each of which satisfies given boundary conditions, is constructed. It is shown that under typical for numerical-analytic method assumptions, this sequence uniformly converges to the limit function. It is established the value of the parameter at which the limit function will be an exact solution of the original boundary value problem. Approximate determining function and approximate determining equation put into consideration, and on the basis of them sufficient conditions for the solvability of this boundary value problem are obtained. The necessary conditions for the solvability of the considered boundary value problem and an estimation of the deviation of the approximate solution from the exact solution were also obtained.

The proposed scheme of the numerical-analytic method is illustrated by concrete example.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.02>

Дорош А.Б., Черевко І.М.

## Моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу

Досліджено схему знаходження наближених розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу зі змінним відхиленням аргументів, що базується на запропонованій ітераційній схемі із застосуванням кубічних сплайнів дефекту два. Для практичного моделювання таких крайових задач розроблено прикладний застосунок зі зручним користувацьким інтерфейсом для задання вхідних параметрів та візуалізації отриманих результатів.

*Ключові слова і фрази:* крайова задача, інтегро-диференціальне рівняння, нейтральний тип, кубічний сплайн дефекту два, метод сплайн-апроксимації.

---

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна  
e-mail: [a.dorosh@chnu.edu.ua](mailto:a.dorosh@chnu.edu.ua) (Дорош А.Б.), [i.cherevko@chnu.edu.ua](mailto:i.cherevko@chnu.edu.ua) (Черевко І.М.)

### ВСТУП

Математичні моделі, що описуються інтегро-диференціальними рівняннями, виникають при вивченні прикладних фізичних, економічних, екологічних процесів. Зокрема, інтегро-диференціальні рівняння Вольтерри із запізненням відіграють важливу роль при моделюванні багатьох реальних явищ в екології [1]. Останніми роками зростає інтерес до інтегро-диференціальних рівнянь, які є комбінацією диференціальних та інтегральних рівнянь Фредгольма чи Вольтерри. Вони відіграють важливу роль у прикладних задачах техніки, астрономії, при математичному моделюванні поширення епідемій, в задачах математичної біології та хімічної кінетики [2, 3].

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням є достатньо складним об'єктом дослідження. Відомо, що не існує універсальних методів побудови їх точних розв'язків. Тому основними теоретичними питаннями при дослідженні таких задач є обґрунтування конструктивних підходів доведення існування їх розв'язків та розробка ефективних методів побудови наближених розв'язків. Важливою також є задача одержання оцінок похибок для наближених розв'язків. На даний час для знаходження розв'язків крайових задач із запізненням використовуються методи послідовних наближень, проєкційно-ітераційні методи,

---

УДК 517.956

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.

Information on some grant ...

методи сплайн-функцій [4, 5, 6, 7]. Цікавими для прикладних застосувань виявились схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь [8, 9, 10].

Метою даної роботи є застосування ітераційної схеми знаходження наближених розв'язків нового класу крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу з багатьма запізненнями за допомогою кубічних сплайнів дефекту два.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Введемо позначення

$$\begin{aligned} [y(x)] &= (y(x - \tau_0(x)), \dots, y(x - \tau_n(x))), \\ [y(x)]_1 &= (y'(x - \tau_0(x)), \dots, y'(x - \tau_n(x))), \\ [y(x)]_2 &= (y''(x - \tau_0(x)), \dots, y''(x - \tau_n(x))). \end{aligned} \tag{1}$$

Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2) + \\ &+ \int_a^b g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2) ds, \quad x \in [a, b], \end{aligned} \tag{2}$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), \quad p = 0, 1, 2, \quad x \in [a^*; a], \quad y(b) = \gamma, \tag{3}$$

де запізнення  $\tau_0(x) = 0$ , а  $\tau_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – неперервні невід'ємні функції, визначені на  $[a, b]$ ,  $\varphi(x)$  – задана двічі неперервно-диференційовна функція на  $[a^*; a]$ ,  $\gamma \in R$ ,

$$a^* = \min_{0 < i \leq n} \left\{ \inf_{x \in [a; b]} (x - \tau_i(x)) \right\}.$$

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями  $\tau_1(x), \dots, \tau_n(x)$ :

$$\begin{aligned} E_{i1} &= \{x_j \in [a, b] : x_j - \tau_i(x_j) = a, j = 1, 2, \dots\}, \\ E_{i2} &= \{x_j \in [a, b] : x_0 = a, x_{j+1} - \tau_i(x_{j+1}) = x_j, j = 0, 1, 2, \dots\}, \\ E_2 &= \bigcup_{i=1}^n (E_{i1} \cup E_{i2}). \end{aligned}$$

Припустимо, що запізнення  $\tau_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – такі функції, що множини  $E_{i1}, E_{i2}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , є скінченними. Занумеруємо точки множини  $E_2$  в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$P = \sup \left\{ \left| f(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2) \right| + \left| \int_a^b g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2) ds \right| : \right. \\ \left. \begin{aligned} & \left| y(x - \tau_i(x)) \right| \leq P_1, \quad \left| y'(x - \tau_i(x)) \right| \leq P_2, \\ & \left| y''(x - \tau_i(x)) \right| \leq P_3, \quad i = \overline{0, n}, \quad x, s \in [a; b] \end{aligned} \right\}, \\ J = [a^*; a], \quad I = [a, b], \\ I_1 = [a, x_1], \quad I_2 = [x_1, x_2], \quad \dots, \quad I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad I_{k+1} = [x_k, b], \\ B_2(J \cup I) = \left\{ y(x) : y(x) \in \left( C(J \cup I) \cap \left( C^1(J) \cup C^1(I) \right) \cap \right. \right. \\ \left. \left. \cap \left( \bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j) \right) \right), \quad |y(x)| \leq P_1, \quad |y'(x)| \leq P_2, \quad |y''(x)| \leq P_3 \right\},$$

де  $P_1, P_2, P_3$  – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (2)-(3) вважатимемо функцію  $y = y(x)$ , якщо вона задовольняє рівняння (2) на  $[a; b]$  (за можливим винятком точок множини  $E_2$ ) і крайові умови (3). Будемо шукати розв'язок задачі (2)-(3), який належить простору  $B_2(J \cup I)$ .

Із означення простору  $B_2(J \cup I)$  випливає, що розв'язок задачі (2)-(3) буде неперервно-диференційовним для будь-якого  $x \in [a, b]$ , де  $y'(a)$  – права похідна, а в точках множини  $E_2$  існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

Введемо норму в просторі  $B_2(J \cup I)$ :

$$\|y\|_{B_2} = \max \left\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |y(x)|, \frac{2}{b-a} \max \left( \max_{x \in J} |y'(x)|, \max_{x \in I} |y'(x)| \right), \right. \\ \left. \max \left( \max_{x \in J} |y''(x)|, \max_{x \in I_1} |y''(x)|, \dots, \max_{x \in I_{k+1}} |y''(x)| \right) \right\}.$$

Простір  $B_2(J \cup I)$  із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (2)-(3) еквівалентна інтегральному рівнянню [11, 12]

$$y(x) = \int_{a^*}^b \left[ f(s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1, [y(\xi)]_2) d\xi \right] \times \\ \times \overline{G}(x, s) ds + l(x), \quad x \in J \cup I, \tag{4} \\ \overline{G}(x, s) = \begin{cases} G(x, s), & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \\ l(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J, \\ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} (x-a) + \varphi(a), & x \in I, \end{cases}$$

де  $G(x, s)$  – функція Гріна крайової задачі

$$y''(x) = 0, \quad x \in I, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Визначимо оператор  $T$  у просторі  $B_2(J \cup I)$  наступним чином

$$(Ty)(x) = \int_{a^*}^b \left[ f(s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1, [y(\xi)]_2) d\xi \right] \bar{G}(x, s) ds + l(x), \quad x \in J \cup I.$$

Нехай функція  $f(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2)$  – неперервна у  $G = [a; b] \times G_1^{n+1} \times G_2^{n+1} \times G_3^{n+1}$ , а  $g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2)$  – неперервна у  $Q = [a; b] \times G$ , де  $G_1 = \{u \in R : |u| \leq P_1\}$ ,  $G_2 = \{v \in R : |v| \leq P_2\}$ ,  $G_3 = \{w \in R : |w| \leq P_3\}$ ,  $P_1, P_2, P_3$  – додатні сталі, що входять в означення простору  $B_2(J \cup I)$ .

Має місце наступна теорема.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови:*

- 1)  $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi(x)|, \frac{(b-a)^2}{8} P + \max \{ |\varphi(a)|, |\gamma| \} \right\} \leq P_1,$
- 2)  $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi'(x)|, \frac{b-a}{2} P + \left| \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} \right| \right\} \leq P_2,$
- 3)  $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi''(x)|, P \right\} \leq P_3,$
- 4) функції  $f(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2)$  і  $g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2)$  задовольняють умову Ліпшиця у  $G$  за змінними  $[y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2$  зі сталими  $L_i^1$  та  $L_i^2$ ,  $i = \overline{0, 3n+2}$ , відповідно,
- 5)  $\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i^1 + (b-a)L_i^2) + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i^1 + (b-a)L_i^2) + \sum_{i=2n+2}^{3n+2} (L_i^1 + (b-a)L_i^2) < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2)-(3) у просторі  $B_2(J \cup I)$ .

Доведення теореми нескладно одержати застосовуючи принцип стислих відображень для оператора  $T$  [7, 13].

## 2 ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА. ЗВІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ

Виберемо нерівномірну сітку  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$  на відрізку  $[a; b]$ , таку що  $E_2 \subset \Delta$ . Позначимо через  $S(x, y)$  інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на  $\Delta$  для функції  $y(x)$ , який належить простору  $B_2(J \cup I)$ .

Введемо позначення:

$$M_j^+ = S''(x_j + 0, y), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5)$$

$$M_j^- = S''(x_j - 0, y), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Сплайн  $S(x, y)$  дефекту два, що інтерполює функцію  $y(x)$ , має вигляд [6, 7]:

$$S(x, y) = M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j^- \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left( y_{j-1} - \frac{M_{j-1}^+ h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left( y_j - \frac{M_j^- h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}; x_j], \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Враховуючи властивості кубічного сплайна у внутрішніх вузлах сітки  $\Delta$ , маємо рівності:

$$S'_j(x_j - 0, y) = S'_{j+1}(x_j + 0, y), \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (8)$$

Рівності (8), враховуючи вигляд сплайна, перепишемо у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку задовольняють величини  $M_{j-1}^+$  і  $M_j^-$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

$$\begin{cases} h_{j+1}y_{j-1} - (h_j + h_{j+1})y_j + h_jy_{j+1} = \frac{h_j h_{j+1}}{6} \times \\ \times \left( h_j M_{j-1}^+ + 2h_j M_j^- + 2h_{j+1} M_j^+ + h_{j+1} M_{j+1}^- \right), \\ j = \overline{1, m-1}. \end{cases} \quad (9)$$

Будемо шукати розв'язок крайової задачі (2)-(3) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту два за наступною схемою:

А) Виберемо кубічний сплайн  $S(x, y^{(0)}) = \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$ , який задовольняє крайові умови (3) при  $x = a$  та  $x = b$ .

Б) Використовуючи вихідне рівняння (2) та сплайн  $S(x, y^{(k)})$ , знаходимо для  $k = 0, 1, \dots$ :

$$\begin{aligned} M_j^{+(k+1)} &= f(x_j, [S(x_j + 0, y^{(k)})], [S(x_j + 0, y^{(k)})]_1, [S(x_j + 0, y^{(k)})]_2) + \\ &+ \int_a^b g(x_j, s, [S(s, y^{(k)})], [S(s + 0, y^{(k)})]_1, [S(s + 0, y^{(k)})]_2) ds, \\ & j = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_j^{-(k+1)} &= f(x_j, [S(x_j - 0, y^{(k)})], [S(x_j - 0, y^{(k)})]_1, [S(x_j - 0, y^{(k)})]_2), \\ &+ \int_a^b g(x_j, s, [S(s, y^{(k)})], [S(s - 0, y^{(k)})]_1, [S(s - 0, y^{(k)})]_2) ds, \\ & j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (11)$$

У співвідношеннях (10), (11) підставляємо  $S^{(p)}(x, y^{(k)}) = \varphi^{(p)}(x)$ ,  $p = 0, 1, 2$  при  $x < a$ .

В) Обчислюємо  $y_j^{(k+1)}$ ,  $j = \overline{0, m}$ , розв'язуючи систему рівнянь (9).

Г) Одержуємо кубічний сплайн  $S(x, y^{(k+1)})$  у формі (7), використовуючи знайдені значення  $y_j^{(k+1)}$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $M_j^{+(k+1)}$ ,  $j = \overline{0, m-1}$ ,  $M_j^{-(k+1)}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sum_{i=0}^n (L_i^1 + (b-a)L_i^2), \\ \lambda_2 &= \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i^1 + (b-a)L_i^2), \quad \lambda_3 = \sum_{i=2n+2}^{3n+2} (L_i^1 + (b-a)L_i^2), \\ u &= \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8}, \quad v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3}, \\ \mu &= 5 \left( 1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

**Теорема 2.** Нехай розв'язок крайової задачі (2)-(3) існує та належить простору  $B_2(J \cup I)$ . Тоді при виконанні нерівності

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1 \tag{13}$$

існує таке  $H^*$ , що при всіх  $0 < H < H^*$  послідовність сплайнів  $\{S(x, y^{(k)})\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  рівномірно збігається на  $[a; b]$  і справджуються співвідношення

$$\left\| \lim_{k \rightarrow \infty} S^{(p)}(x, y^{(k)}) - y^{(p)}(x) \right\| \leq R_p \omega(y''(x), H), \quad p = 0, 1, 2, \tag{14}$$

$$R_0 = \sup_{H \leq H^*} \left( \frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2} \right), \quad R_1 = \sup_{H \leq H^*} \left( \frac{v\mu}{1-\theta} + 5H \right),$$

$$R_2 = \sup_{H \leq H^*} \left( \frac{\mu}{1-\theta} + 5 \right),$$

$$\omega(y''(x), H) = \max_{1 \leq r \leq l+1} \omega_r(y''(x), H),$$

де  $\omega_r(f, H)$  – це модуль неперервності функції  $f$  на відріжку  $\delta_r$ .

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно до теореми 1 для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням [11].

### 3 ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типів розроблено кросплатформне програмне забезпечення засобами мови JavaScript із використанням технології NodeJS та фреймворку NW.js, який дає змогу надати програмі зручний користувацький інтерфейс для введення параметрів різного типу.

Ітерація	№	x	Наближений розв'язок	Точний розв'язок	Абсолютна похибка	Відносна похибка
1	0	0	1	1	0	0%
1	5	0.39269908169872414	0.8453359602465906	0.84893393143109	0.003597971184499338	0.42%
1	10	0.7853981633974483	0.7583571734782967	0.7507287597009946	0.007628413777302057	1.02%
1	15	1.1780972450961724	0.7106610587978801	0.7136349063945409	0.0029738475966607503	0.42%
1	20	1.5707963267948966	0.75	0.75	0	0%
2	0	0	1	1	0	0%
2	5	0.39269908169872414	0.8510484517071263	0.84893393143109	0.0021145202760363135	0.25%
2	10	0.7853981633974483	0.7467318951321821	0.7507287597009946	0.0039968645688125415	0.53%
2	15	1.1780972450961724	0.7112452839770745	0.7136349063945409	0.0023896224174663194	0.33%
2	20	1.5707963267948966	0.75	0.75	0	0%

Рис. 1: Видяк вікна застосунку

У боковій частині вікна програми задаються параметри крайової задачі, а саме початок  $a$  та кінець відрізка  $b$ , кількість точок розбиття  $m$ , коефіцієнти рівняння  $a_i, b_i, c_i$ , запізнення  $\tau_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ), точність обчислення  $\varepsilon$  тощо. Функцію  $f$  можна ввести прямо в текстовому полі, її розпізнає вбудований синтаксичний аналізатор JavaScript. Якщо точний розв'язок рівняння невідомий, можна вимкнути прапорець “Показувати точний розв'язок”. За наявності інтегрального доданка у рівнянні користувач може обрати метод його обчислення – квадратурну формулу трапецій або Сімпсона. Математичний вигляд крайової задачі відображається у верхній частині вікна.

Увівши всі параметри, користувач натискає кнопку “Обчислити”, щоб побачити результат.

Програма виводить на екран усі ітерації обчислювальної схеми, поки не досягне потрібної точності. У таблиці з'явиться наступна інформація: номер ітерації, номер кожної точки відрізка та її значення, наближений розв'язок. Якщо задано точний розв'язок, то він теж буде відображатися разом з абсолютною та відносною похибкою між точним і наближеним розв'язками.

**Приклад.** Розглянемо крайову задачу:

$$y''(x) = -\alpha y''\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad (15)$$

$$y(x) = \sin x + 1, \quad y'(x) = \cos x, \quad y''(x) = -\sin x, \quad x \leq 0, \quad (16)$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \alpha.$$

При  $\alpha = 0.25$  існує єдиний розв'язок крайової задачі, а також виконується умова (13) теореми 2, оскільки при  $h = 0.1$  маємо, що  $\theta \approx 0.7357 < 1$ .

Точний розв'язок даної крайової задачі  $y(x)$  знайдено методом кроків:

$$y(x) = \alpha \cos x + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{\pi}{4} x + 1 - \alpha.$$

Наближений розв'язок  $y_S^{20}(x)$ , одержаний на 2-й ітерації при 20 точках розбиття відрізка та  $\alpha = 0.25$ , наведено в таблиці 1.

Табл. 1: Результати числових експериментів для крайової задачі (15)-(16).

$x$	Точний розв'язок $y(x)$	Наближений розв'язок $y_S^{20}(x)$	$\Delta_S^{20}$
0	1	1	0
$\frac{\pi}{8}$	0.848934	0.851048	0.002114
$\frac{\pi}{4}$	0.750729	0.746732	0.003997
$\frac{3\pi}{8}$	0.713635	0.711245	0.00239
$\frac{\pi}{2}$	0.75	0.75	0

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Cushing J.M. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 20. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

- [2] Yang Kuang. Delay differential equations: with applications in population dynamics. Academic Press, New York, 1993. 398 p.
- [3] Forrest-Owen O. Mathematical Modelling and it's Applications in Biology, Ecology and Population Study. Master's Thesis, Chester, 2016. 124 p.
- [4] Luchka A., Feruk, V. *Projection-iterative method for systems of differential equations with delay and constraints*. Nonlinear oscillations, 2003, **6** (2), 206–232. (in Ukrainian)
- [5] Bellour A., Bousselsal M. *Numerical Solution of Delay Integro-Differential Equations by Using Taylor Collocation Method*. Mathematical Methods in Applied Science, 2014, **37**, 1491–1506. doi:10.1002/mma.2910
- [6] Nikolova T.S., Bainov D.D. *Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations*. Yokohama Math. J., 1981, **29** (1), 108–122.
- [7] Cherevko I., Dorosh A. *Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations*. J. Numer. Anal. Approx. Theory, 2015, **44** (2), 154–165. doi:10.33993/jnaat442-1054
- [8] Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. Academic Press, New York, 1981. Pp. 155–197.
- [9] Cherevko I.M., Matviy O.V. *On the approximation of systems with a delay and their stability*. Nonlinear oscillations. 2004, **7** (2), 208–216.
- [10] Dorosh A.B., Tuzyk I.I., Cherevko I.M. *Approximation schemes for boundary value problems for integro-differential equations with delay*. Nonlinear oscillations. 2023, **26** (1), 33–41. (in Ukrainian)
- [11] Dorosh A., Cherevko I. *Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Dierential Equations With Many Delays*. Carpathian Mathematical Publications. 2018, **10** (1), 65–70. doi:10.15330/cmp.10.1.65-70
- [12] Grim L.J., Schmitt K. *Boundary value problems for delay differential equations*. Bull. Amer. Math. Soc. 1968, **74** (5), 997–1000.
- [13] Nastasieva N.P., Cherevko I.M. *Approximate method for solving boundary value problems for neutral type integro-differential equations*. Math Studios. 1998, **10** (2), 147–152. (in Ukrainian)

Надійшло 28.10.2025

---

Dorosh A.B., Cherevko I.M. *Modeling boundary value problems for neutral-type integro-differential equations*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 16–23.

A scheme for finding approximate solutions to boundary value problems for neutral-type integro-differential equations with variable argument deviation is studied, based on the suggested iterative scheme using cubic splines with the defect two. For a practical modeling of such boundary value problems, an application with a user-friendly interface for setting input parameters and visualizing the results has been developed.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.03>

МАЦЕНКО В.Г.

**Аналіз моделі Скеллама з дробовим показником у функції розмноження**

Запропоновано узагальнення дискретної моделі Скеллама на випадок, коли функція розмноження містить дробові показники для чисельності популяції  $N_t$ . Досліджується поведінка розв'язків моделі при зростанні показника від значення три до значення чотири. Показано, що має місце біфуркація циклів. Проведено комп'ютерні розрахунки розв'язків моделі.

*Ключові слова і фрази:* модель Скеллама, стаціонарні точки, періодичні режими, стійкість розв'язків, комп'ютерні експерименти.

---

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: [v.matsenko@chnu.edu.ua](mailto:v.matsenko@chnu.edu.ua)

**Вступ**

Моделі Скеллама широко використовуються для вивчення динаміки чисельності популяцій із неперекривними поколіннями [1, 2]. До таких популяцій слід віднести дрібних гризунів, багатьох комах з однорічною генерацією. У них ріст чисельності відбувається в окремі фіксовані моменти часу.

Математичні моделі таких популяцій – це дискретні рівняння, які в простішому випадку мають вигляд

$$N_{t+1} = f(N_t) N_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $N_t$  – чисельність популяції в момент часу  $t$ , а функція  $f(N_t)$  описує процес природного відтворення в популяції (коефіцієнт розмноження), тобто це середня кількість потомків, що припадає на одну особину, яка існувала в момент часу  $t$ .

У припущенні, що з ростом чисельності  $N_t$  вплив саморегулюючих факторів тільки посилюється, коефіцієнт розмноження  $f(N_t)$  описується монотонно спадними функціями.

У класичній моделі Скеллама  $f(N_t)$  – це спадна гіперболічна функція [1]

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t}.$$

Тут параметр  $a$  визначає найбільше значення розмноження, а параметр  $b$  описує вплив саморегулюючих факторів на динаміку дискретної популяції.

---

УДК 519.87:574.3

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

Сама модель Скеллама є дискретним рівнянням вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

У праці [3] вивчаються деякі узагальнення (1), а саме

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^2} \quad \text{і} \quad N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^2}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Показано, що для цих моделей має місце лише монотонна стабілізація чисельності до деякого стаціонарного рівня. Але в природі часто спостерігаються і періодичні поведінки чисельності  $N_t$ . Як показано в [4], періодичні режими існують для моделі з монотонною функцією розмноження  $f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}$ . З натурних спостережень відомо, що функція природного відтворення  $f(N_t)$  не завжди монотонна. Тому в [5] вивчається узагальнення моделі Скеллама з немонотонною функцією  $f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^4}$ . При цьому модель Скеллама  $N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^4}$  має як стаціонарні, так і періодичні розв'язки будь-якого періоду.

Якщо в знаменнику понизити степінь величини  $N_t$  до трьох, то, як показано в [5], в цьому випадку модель  $N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^3}$  володіє лише стаціонарними режимами і чисельність  $N_t$  з часом стабілізується до цих стаціонарних рівнів. Періодичні режими тепер повністю відсутні, хоча раніше існували цикли будь-яких періодів.

Цілоком логічно постає питання про дослідження періодичних режимів та їх властивостей при зміні показника від 3 до 4, тобто потрібно вивчити поведінку розв'язків для моделі

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b + N_t^{3+\alpha}}, \quad a, b > 0, \quad \alpha \in [0, 1], \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

При  $\alpha = 0$  та  $\alpha = 1$  дослідження моделі (2) повністю проведено в [5].

Перейдемо до вивчення поведінки розв'язків моделі (2) при  $\alpha \in (0, 1)$ .

## 1 ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ І ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ МОДЕЛІ (2)

Модель (2) – це нелінійне дискретне рівняння, загальні розв'язки якого в аналітичній формі не можна знайти, тому знайдемо простіші розв'язки і дослідимо їх на стійкість.

Стаціонарні розв'язки рівняння (2) знаходимо зі співвідношення

$$N_t^{3+\alpha} = aN_t - b. \quad (3)$$

Проведемо графічний аналіз існування додатних коренів цього рівняння.

Спочатку знайдемо точки  $N^*$ , в яких права та ліва частина рівняння (3) мають однаковий кутовий коефіцієнт. Це точка  $N^* = \left(\frac{a}{3+\alpha}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}} > 0$ . Тепер, якщо в цій точці значення правої

та лівої частин рівняння (3) збігаються, тобто  $b = \frac{a(2+\alpha)}{3+\alpha} \left(\frac{a}{3+\alpha}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}} \equiv q$ , то рівняння (3) має єдиний розв'язок  $N^*$ . А якщо  $b < q$ , то (3) має два дійсні різні додатні корені  $N_1^*$  і  $N_2^*$ . Якщо  $b > q$ , то (3) не має дійсних додатних коренів.

Зокрема, при  $a = 3$   $\alpha = 0.1$  знаходимо  $q = 2.0008$ . Тому, якщо  $b = 2.0008$ , то (3) має єдиний додатний корінь  $N^* = 0.9845$  (рис. 1а). При  $b = 0.1 < q$  існують два додатних корені:  $N_1^* = 0.03334$ ,  $N_2^* = 1.6712$  (рис. 1б) і при  $b = 2.5 > q$  таких коренів немає (рис. 1в).

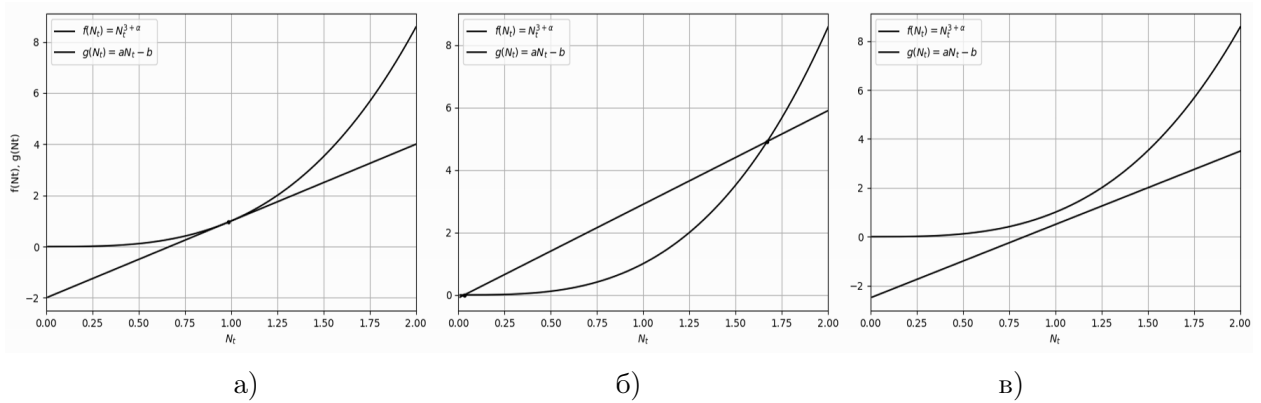


Рис.1. Графічний аналіз коренів рівняння (3): а)  $a = 3$ ,  $b = 2.0008$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $N_1^* = 0.9845$ ; б)  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ ,  $\alpha = 0.1$ .  $N_1^* = 0.03334$ ,  $N_2^* = 1.6712$ ; в)  $a = 3$ ,  $b = 2.5$ ,  $\alpha = 0.1$ . Коренів немає

Для дослідження стійкості стаціонарних режимів знаходимо похідну правої частини рівняння (2) в стаціонарних точках

$$\lambda = F'(N)|_{N^*} = \frac{aN^*(2b - (1 + \alpha)N^{*3+\alpha})}{(b + N^{*3+\alpha})^2}.$$

Її модуль порівнюємо з одиницею. Якщо  $|\lambda| < 1$ , то  $N^*$  стійкий, якщо  $|\lambda| > 1$ , то  $N^*$  нестійкий.

Періодичні розв'язки з періодом  $T = 2$  знаходимо з умови  $N_{t+2} = N_t$ ,  $N_{t+1} \neq N_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Для їх знаходження маємо рівняння

$$N_t = F(F(N_t)), \quad (4)$$

$$\text{де } F(N_t) = \frac{aN_t^2}{b + N_t^{3+\alpha}}.$$

Відповідно для знаходження періодичних розв'язків із періодом  $T = 4$  та  $T = 8$  маємо рівняння

$$N_t = F(F(F(F(N_t))))), \quad (5)$$

$$N_t = F(F(F(F(F(F(F(F(N_t))))))))). \quad (6)$$

Такі рівняння розв'язуються, в основному, лише числовими методами. Для дослідження стійкості періодичних розв'язків знаходимо їх мультиплікатори і порівнюємо з одиничним значенням.

## 2 КОМП'ЮТЕРНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ

Наведемо приклади розв'язків моделі (2) при різних значеннях показника  $\alpha$ , оскільки при зростанні  $\alpha$  від 0 до 1 спостерігаються різні типи поведінки чисельності  $N_t$ .

Комп'ютерний аналіз розв'язків рівняння (2) в залежності від  $\alpha$  проведемо, зокрема, при  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ . Результати обчислень показують, що у випадку, коли  $a = 3$ ,  $b = 0.1$  рівняння (2) має два стаціонарних режими для  $\alpha \in [0, 1]$ , але лише при  $\alpha \in [0, 0.06]$  існує стійкий стаціонарний розв'язок. Зокрема, при  $\alpha = 0.06$  маємо  $N_1^* = 0.0333$ ,  $N_2^* = 1.6881$ , причому  $N_1^*$  – нестійкий,  $N_2^*$  – стійкий (рис. 2), оскільки їх мультиплікатори  $\lambda_1 = 1.9976 > 1$ , а  $\lambda_2 = 0.996 < 1$  відповідно.

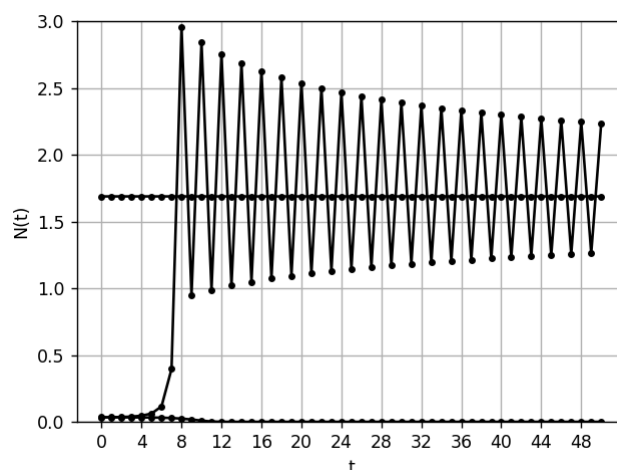


Рис. 2. Стаціонарні режими та їх стійкість при  $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.06$ .  $N_1^* = 0.0333$ ,  $N_2^* = 1.6881$

При  $\alpha \geq 0.07$  стаціонарний розв'язок  $N_2^*$  перестає бути стійким, натомість з'являються стійкі цикли з періодом  $T = 2$ . При  $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.1$  рівняння (2) має два нестійких стаціонарних розв'язки  $N_1^* = 0.03334, N_2^* = 1.6712$  та періодичний розв'язок з періодом  $T = 2$ , який задається значеннями  $N_3^* = 0.9353, N_4^* = 2.8757$ . Цей періодичний розв'язок стійкий, оскільки його мультиплікатор  $\lambda = 0.82 < 1$  (рис. 3). У комп'ютерних експериментах при  $a = 3, b = 0.1$  стійкість періодичних розв'язків встановлена при  $\alpha \in [0.07, 0.45]$ .

Починаючи з  $\alpha = 0.46$ , періодичні розв'язки з періодом  $T = 2$  хоча існують, але перестають бути стійкими, зате з'являються періодичні розв'язки з періодом  $T = 4$ .

Зокрема, при  $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.5$  цикл із періодом  $T = 2$  ( $N_3^* = 0.4302, N_4^* = 3.6474$ ) – уже нестійкий. Його мультиплікатор дорівнює  $1.196 > 1$  (рис. 4).

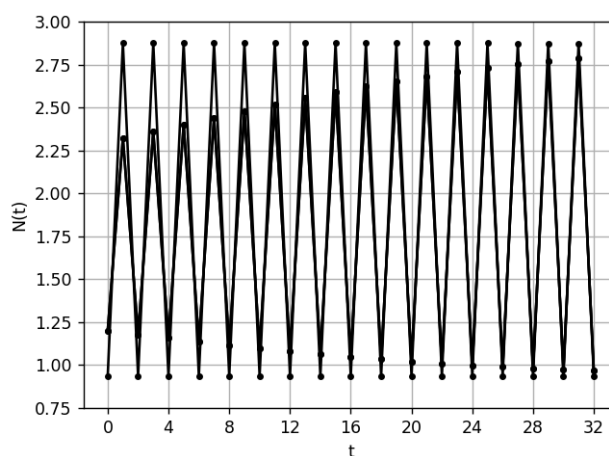


Рис. 3. Стійкий цикл із періодом  $T = 2$  при  $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.1$ .  $N_3^* = 0.9353, N_4^* = 2.8757$

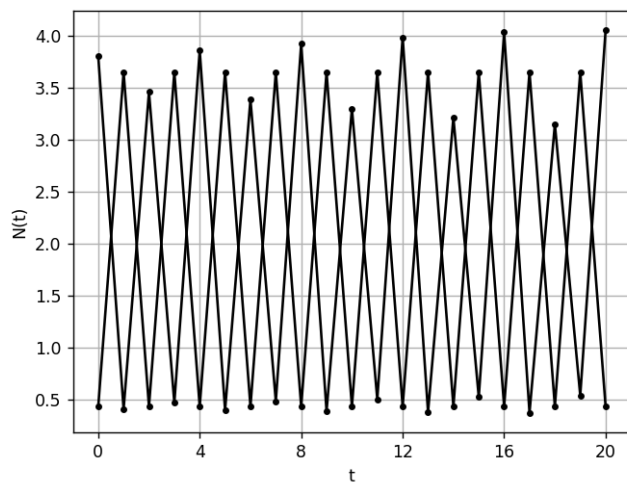


Рис. 4. Нестійкий цикл із періодом  $T = 2$  при  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ ,  $\alpha = 0.5$ .  $N_3^* = 0.4302$ ,  $N_4^* = 3.6474$

Водночас, як випливає з рівняння (5), існує періодичний розв'язок із періодом  $T = 4$ , що визначається числами  $N_5^* = 0.3663$ ,  $N_6^* = 0.5481$ ,  $N_7^* = 3.1019$ ,  $N_8^* = 4.0614$ . Він стійкий (рис. 5), оскільки його мультиплікатор  $\lambda = 0.267 < 1$ .

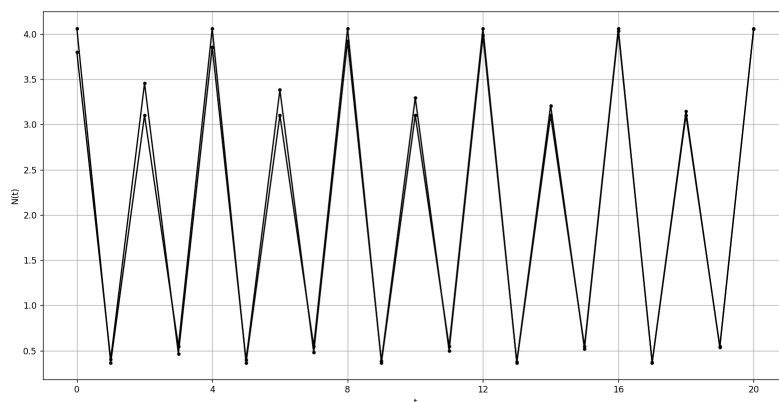


Рис. 5. Стійкий цикл із періодом  $T = 4$  при  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ ,  $\alpha = 0.5$ .  $N_5^* = 4.0614$ ,  $N_6^* = 0.3663$ ,  $N_7^* = 3.1019$ ,  $N_8^* = 0.5481$

В обчислювальних експериментах у випадку, коли  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ , стійкість розв'язку з періодом  $T = 4$  спостерігалася при  $\alpha \in [0.46, 0.56]$ . Починаючи з  $\alpha = 0.57$  цикли з періодом  $T = 4$  перестають бути стійкими, натомість з'являються цикли з періодом  $T = 8$ . Вони стійкі при  $\alpha \in [0.57, 0.59]$ . Зокрема, при  $\alpha = 0.57$  періодичний розв'язок з періодом  $T = 8$ , який складають числа  $N_9^* = 0.3209$ ,  $N_{10}^* = 0.3379$ ,  $N_{11}^* = 0.5824$ ,  $N_{12}^* = 0.6536$ ,  $N_{13}^* = 2.6343$ ,  $N_{14}^* = 2.8363$ ,  $N_{15}^* = 4.0161$ ,  $N_{16}^* = 4.1506$  (рис. 6), стійкий (рис. 7) (його мультиплікатор  $\lambda = 0.62 < 1$ ).

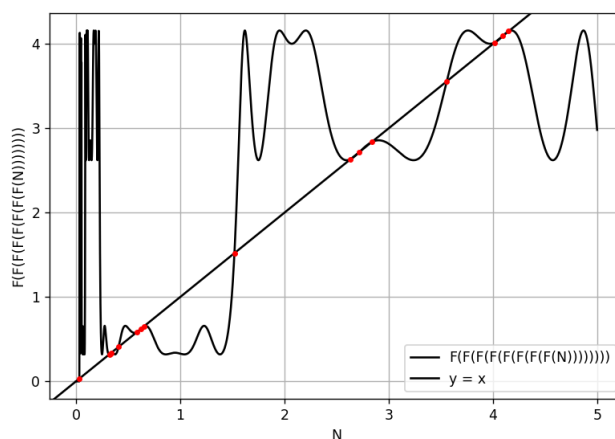


Рис. 6. Графічне дослідження коренів рівняння (6) при  $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.57$ . Існує 16 коренів

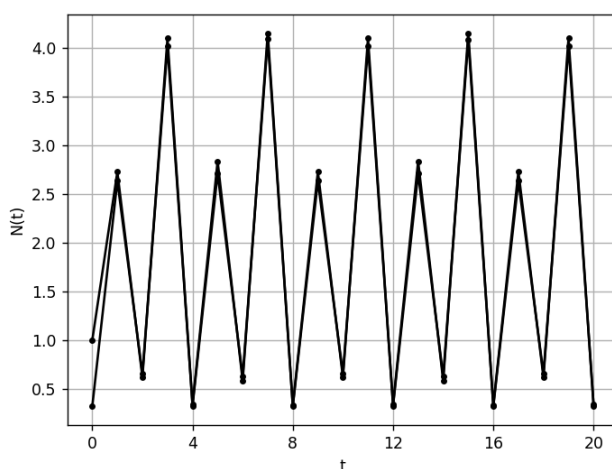


Рис. 7. Стійкість періодичного розв'язку з періодом  $T = 8$  при  $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.57$ .  
 $N_9^* = 0.3209, N_{10}^* = 2.6343, N_{11}^* = 0.6536, N_{12}^* = 4.0161, N_{13}^* = 0.3379, N_{14}^* = 2.8363,$   
 $N_{15}^* = 0.58324, N_{16}^* = 4.1506$

Далі при зростанні  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0.6$ ) цикли з періодом  $T = 8$  перестають бути стійкими, і виникають цикли нових періодів.

При  $a = 3, b = 0.1, \alpha = 0.57$  рівняння (2) має, крім стаціонарних розв'язків, ще й два розв'язки з періодом  $T = 3$  (рис. 8). Вони нестійкі (їх мультиплікатори більші за одиницю).

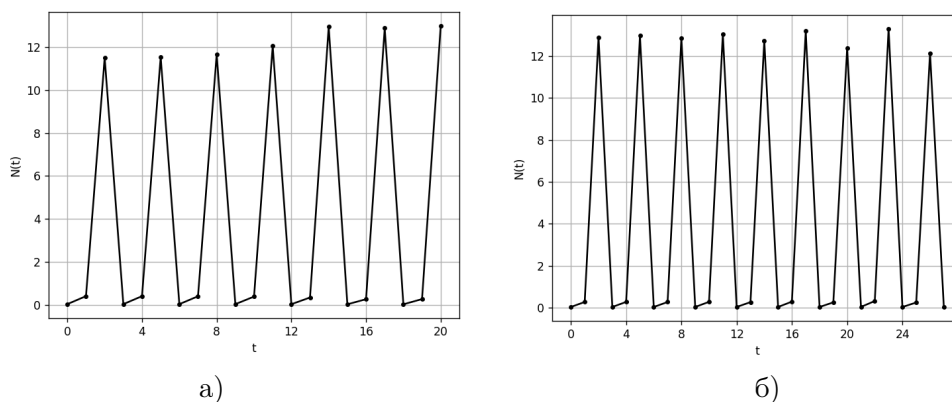


Рис. 8. Періодичні розв'язки з періодом  $T = 3$  при  $a = 3, b = 0.01, \alpha = 0.8$ . а)  $N_3^* = 0.0369, N_4^* = 0.4112, N_5^* = 11.4904$ ; б)  $N_3^* = 0.0299, N_4^* = 0.2682, N_5^* = 12.9232$

А це означає, що рівняння (2) допускає періодичні розв'язки будь-яких періодів [6], а також розв'язки з хаотичною поведінкою.

Отже, узагальнення (2) моделі Скеллама з немонотонною функцією народжуваності і дробовим показником для величини  $N_t$  володіє стаціонарними і періодичними режимами. При зростанні показника  $\alpha$  спостерігається біфуркація подвоєння циклу. Для всіх значень  $\alpha \in (0, 1]$  існують стаціонарні режими, але вони можуть бути стійкими лише при початкових значеннях показника  $\alpha$ . Далі при зростанні  $\alpha$  з'являються стійкі періодичні розв'язки з періодом  $T = 2$ , які згодом втрачають стійкість, натомість виникають стійкі цикли з періодом  $T = 4$  і т.д. Такі рівняння допускають і періодичні розв'язки з періодом  $T = 3$ , і як наслідок будь-яких періодів.

Проте існують такі значення параметрів  $a$ ,  $b$ , при яких рівняння (2) не буде мати періодичних розв'язків для всіх  $\alpha \in [0, 1]$ , наприклад при  $a = 2$ ,  $b = 1$ . Це має місце тоді, коли рівняння (2) при  $\alpha = 1$  не має періодичних розв'язків.

У даній роботі проілюстровано, що відносно прості дискретні моделі можуть мати досить складну поведінку чисельності  $N_t$ .

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Skellam J.G. *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika, 1951. **38**. 196-218.
- [2] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model*. Population Ecology. Online Version, 2023. <https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169>.
- [3] Маценко В.Г. *Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю*. Буковинський матем. журнал. **12**(1). 2024. 74-83.
- [4] Маценко В.Г. *Аналіз моделей типу Скеллама з періодичними режимами*. Буковинський матем. журнал. **12**(2). 2024. 128-142.
- [5] Маценко В.Г. *Аналіз моделей типу Скеллама з немонотонною функцією розмноження*. Буковинський матем. журнал. **13**(1). 2025. 52-65.
- [6] Шарковський А. Н. *Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя*. Украинский математический журнал, 1964. **XVI** (1). С. 61-71.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Skellam J.G. *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika, 1951. **38**. 196-218.
- [2] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model*. Population Ecology. Online Version, 2023. <https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169>.
- [3] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy*. Bukovinian Math. Journal. **12**(1). 2024. 74-83. (in Ukrainian)
- [4] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam-type models width with periodic regimes*. Bukovinian Math. Journal. **12**(2). 2024. 128-142. (in Ukrainian)
- [5] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam-type models with non-monotonic reproduction function*. Bukovinian Math. Journal. **13**(1). 2025. 52-65. (in Ukrainian)
- [6] Sharkovskii A. N. *Coexistence of cycles of continuous transformation straight into itself*. Ukrainian Mathematical Journal, 1964. **XVI** (1). P. 61-71. (in Russian)

---

Matsenko V.G. *Analysis of the generalization of the Skellam model with a fractional exponent for the multiplication function*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 24–31.

Difference equations are widely used as models of population dynamics with non-overlapping generations. In the simplest case, they have the form  $N_{t+1} = f(N_t)N_t$ , where  $N_t$  is the population size at a given time  $t$ ,  $f(N_t)$  is the natural reproduction rate. This function, in particular in the Skellam model, is monotonically decreasing. But as ecological observations show,  $f(N_t)$  is not always monotonic; for small values of  $N_t$ , the function  $f(N_t)$  is increasing, and for large values, it is decreasing.

Therefore, in paper [5], for  $f(N_t)$ , a generalization of the Skellam model for a nonmonotonic multiplication function of the form  $f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^4}$  is considered. It is shown that such a model has stationary and periodic modes of any period.

If we lower the exponent of the value of  $n$  in the denominator to 3, then the model with  $f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^3}$  allows only stationary solutions, and periodic modes no longer exist.

This paper considers a generalization of these models with an exponent for  $N_t$  ranging from 3 to 4, i.e. a model of the form  $N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^{3+\alpha}}$ ,  $a, b > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ . It is shown how, as the parameter  $a$  increases from 0 to 1, the behavior of the solutions of this model changes, namely, a bifurcation of the doubling of the cycle lengths occurs. In computational experiments, such solutions were found and their stability was studied. The existence of periodic solutions with period 3 has also been established, which means that this model has periodic solutions of any period and solutions with chaotic behavior.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.04>

Пасічник Г. С.

## ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Установлено існування та єдиність класичного розв'язку задачі Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку з зростаючими при  $|x| \rightarrow \infty$  коефіцієнтами лінійної частини. Цей розв'язок належить до класу гельдерових функцій з  $t \in (0; T_0]$ , де досить мале  $T_0 \in (0, T]$ . За допомогою цього результату доведено існування та єдиність розв'язку задачі про визначення коефіцієнта при невідомій функції у відповідному лінійному параболічному рівнянні з незалежними від  $t$  коефіцієнтами.

*Ключові слова і фрази:* нелінійне параболічне рівняння, зростаючі коефіцієнти, класичний розв'язок задачі Коші.

---

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна  
(Пасічник Г. С.)

e-mail: [pasichnyk.gs@gmail.com](mailto:pasichnyk.gs@gmail.com)

### ВСТУП

Найповніші результати про розв'язність задачі Коші для параболічних рівнянь на сьогодні отримано для випадку, коли рівняння лінійне [1]. Вагомий внесок у дослідження нелінійних задач зробив С.Д. Ейдельман, чие 105-річчя з дня народження відзначається у 2025 році. Праця [2] містить огляд результатів С.Д. Ейдельмана та їх розвиток до вивчення квазілінійних параболічних та ультрапараболічних рівнянь і систем рівнянь. Ці результати стосувались, в основному, нелінійних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами.

Питання коректної розв'язності задачі Коші для рівняння  $\partial_t u - \Delta u + uKu = f$ , де на оператор  $K$  накладаються спеціальні умови, вивчались у праці [3]. Аналогічні питання для рівняння  $\alpha(t)\partial_t u(t, x) - (Lu)(t, x) + u(t, x)(Ku)(t, x) = f(t, x)$ , де  $(Lu)(t, x) = \partial_{xx}^2 u(t, x) + x\partial_x u(t, x) + u(t, x)$ ,  $\alpha : [0; T] \rightarrow [0, \infty)$  – неперервна функція така, що  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(t) > 0$  при  $t > 0$  і  $\int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$ , розглянуто в [4].

У цій статті досліджується розв'язність задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку з коефіцієнтами лінійної частини, які зростають при  $|x| \rightarrow \infty$ . Доведення отриманих результатів здійснюється за методикою з [3] з використанням результатів з [5]. Частково результати доповідались на науковій конференції [6].

---

УДК 517.956.4

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K10, 35K55.

Information on some grant ...

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай  $\Pi_H := \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$ , де проміжок  $H \subset \mathbb{R}$ . Розглядається задача

$$(Lu)(t, x) + (uKu)(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (1)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де  $T > 0$ ,  $K$  – локально обмежений та локально ліпшицевий оператор у класі  $E_\alpha^\lambda(T)$  неперервних у  $\Pi_{[0, T]}$  функцій  $u$ , для яких

$$\max_{t \in [0, T]} |u(t, x)| \leq B \begin{cases} (|x|^2 + 1)^\alpha & \text{для } \lambda = 0, \\ \exp\{\alpha(|x|^2 + 1)^{\lambda/2}\} & \text{для } \lambda \in (0, 2], \end{cases}$$

$\alpha > 0$ ,  $B > 0$ , і диференціальний вираз

$$Lu := \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} \left( a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} u + a_j(t, x) u \right) - \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_{x_j} u - c(t, x) u.$$

Припускається, що дійснозначні функції  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\partial_{x_j} a_{ij}$ ,  $a_j$ ,  $\partial_{x_j} a_j$ ,  $b_j$ ,  $\partial_{x_j} b_j$  і  $c \in$  гельдеровими в кожній компактній підобласті шару  $\Pi_{[0, T]}$  та існують додатні сталі  $\mu$ ,  $C_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , і число  $\lambda \in [0, 2]$  такі, що для будь-яких  $(t, x) \in \Pi_{[0, T]}$  і  $\sigma \in \mathbb{R}^n$

$$\mu |\sigma|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \sigma_i \sigma_j \leq C_1 (|x|^2 + 1)^{(2-\lambda)/2} |\sigma|^2,$$

$$\max\{|\partial_{x_j} a_{ij}(t, x)|, |a_j(t, x)|, |b_j(t, x)|\} \leq C_2 (|x|^2 + 1)^{1/2},$$

$$\max\{c(t, x) + \partial_{x_j} a_j(t, x), c(t, x) - \partial_{x_j} b_j(t, x)\} \leq C_3 (|x|^2 + 1)^{\lambda/2}.$$

За сформульованих умов та додаткових умов на  $K$  вивчається питання існування та єдиності класичного розв'язку задачі (1), (2) та існування та єдиності розв'язку задачі про визначення коефіцієнта при невідомій функції у відповідному лінійному параболічному рівнянні з незалежними від  $t$  коефіцієнтами.

2 ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ

Для довільного  $\alpha > 0$ , як в [5], розглянемо функцію

$$g_\alpha(t, x) = \begin{cases} \ln \frac{(|x|^2 + 1)^\alpha}{1 - \beta t}, & \lambda = 0 \\ (\alpha + \beta t) (|x|^2 + 1)^{\lambda/2}, & \lambda \in (0; 2], \end{cases} \quad (t, x) \in \Pi_{[0; T_\alpha]},$$

де  $\beta = \beta(\alpha)$ , а величина  $T_\alpha$  буде означена нище. Нехай  $v^\alpha(t, x) = u(t, x) \exp\{-g_\alpha(t, x)\}$ ,  $(t, x) \in \Pi_{[0; T_\alpha]}$ . Тоді

$$\begin{aligned} (Lu)(t, x) &= \exp\{g_\alpha(t, x)\} \left( \partial_t v^\alpha(t, x) - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} \left( a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} v^\alpha(t, x) \right) - \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^n a_j^\alpha(t, x) \partial_{x_j} v^\alpha(t, x) - c^\alpha(t, x) v^\alpha(t, x) \right) \equiv \exp\{g_\alpha(t, x)\} (L^\alpha v^\alpha)(t, x), \end{aligned}$$

де

$$a_j^\alpha(t, x) := a_j(t, x) + b_j(t, x) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} g_\alpha(t, x),$$

$$c^\alpha(t, x) := c(t, x) + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} a_j(t, x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} g_\alpha(t, x) \partial_{x_j} g_\alpha(t, x) + \sum_{j=1}^n (a_j(t, x) + b_j(t, x)) \times \\ \times \partial_{x_j} g_\alpha(t, x) + \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} g_\alpha(t, x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i x_j}^2 g_\alpha(t, x) - \partial_t g_\alpha(t, x),$$

Очевидно, що  $(Lu)(t, x) = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $(L^\alpha v^\alpha)(t, x) = 0$ ,  $(t, x) \in \Pi_{(0; T_\alpha]}$ . Крім того, якщо  $Z^\alpha(t, x; \tau, \xi)$  є фундаментальним розв'язком рівняння  $(L^\alpha v^\alpha)(t, x) = 0$ , то

$$Z(t, x; \tau, \xi) = \exp\{g_\alpha(t, x) - g_\alpha(\tau, \xi)\} Z^\alpha(t, x; \tau, \xi) \quad (3)$$

є фундаментальним розв'язком рівняння  $(Lu)(t, x) = 0$ .

При побудові фундаментального розв'язку  $Z^\alpha$  важливу роль відіграє знак коефіцієнта  $c^\alpha$ . Якщо  $\lambda = 0$ , то

$$c^\alpha(t, x) \leq 4C_1\alpha^2 + 2(n+2)(2C_1 + C_2)\alpha + C_3 - \frac{\beta}{1 - \beta t}$$

і тоді, якщо  $\beta(\alpha) = 2(4C_1\alpha^2 + 2(n+2)(2C_1 + C_2)\alpha + C_3)$ , а  $T_\alpha = \min\{T, 1/(2\beta(\alpha))\}$ , маємо, що  $c^\alpha(t, x) < 0$ ,  $(t, x) \in \Pi_{[0, T_\alpha]}$ . Якщо  $\lambda > 0$ , то

$$c^\alpha(t, x) \leq (|x|^2 + 1)^{\lambda/2} \left( C_1\lambda^2(\alpha + \beta t)^2 + (n+2)\lambda(C_1 + C_2)(\alpha + \beta t) + C_3 - \beta \right) \leq \\ \leq \delta^\alpha(t)(|x|^2 + 1)^{\lambda/2}.$$

Тоді за  $\beta$  треба взяти  $\beta(\alpha) = 2(C_1\lambda^2\alpha^2 + (n+2)\lambda(C_1 + C_2)\alpha + C_3)$ , а  $T_\alpha = \min\{T, \tilde{T}_\alpha\}$ , де  $\tilde{T}_\alpha$  – додатний корінь рівняння  $\delta^\alpha(t) = -\beta(\alpha)/4$ , щоб виконувалась нерівність  $c^\alpha(t, x) < 0$ ,  $(t, x) \in \Pi_{[0, T_\alpha]}$ .

В обох випадках  $T_\alpha$  є незростаючою функцією змінної  $\alpha$  і  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} T_\alpha = T_0(C_1, C_2, C_3) \leq T$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_\alpha = 0$ . Тому  $0 < T_\alpha \leq T_0$ ,  $\alpha \in (0; \infty)$ .

У праці [5] для задачі Коші

$$(Lu)(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (4)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

доведено існування і єдиність розв'язку та одержано інтегральне зображення для нього

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0; T_\alpha]}, \quad (6)$$

якщо функція  $\varphi$  неперервна в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  неперервна і задовольняє умову Гельдера за  $x$  рівномірно в кожній обмеженій області шару  $\Pi_{(0; T]}$ , а також  $\varphi$  і  $f$  належать до класу  $E_\alpha^\lambda(T)$ .

Розв'язок задачі (4), (5), який визначається формулою (6), при заданих вище умовах на функції  $f$  і  $\varphi$  належить до класу  $E_{\alpha_1}^\lambda(T_{\alpha_1})$  з  $\alpha_1 = 2\alpha$  при  $\lambda = 0$  і  $\alpha_1 = \alpha + \beta(\alpha)T_\alpha$  при  $\lambda \in (0; 2]$  і він єдиний в класі функцій  $E_\alpha^\lambda(T_\alpha)$  з довільним  $\alpha > 0$ .

У зображенні (6)  $Z$  є фундаментальним розв'язком рівняння  $Lu = 0$  має вигляд (3), де  $Z^\alpha$  є фундаментальним розв'язком рівняння  $L^\alpha u^\alpha(t, x) = 0$ , який визначений для  $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T_\alpha$ , причому

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z^\alpha(t, x; \tau, \xi) d\xi = 1, \\ 0 \leq Z^\alpha(t, x; \tau, \xi) \leq C(t - \tau)^{-n/2}, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T_\alpha,$$

де  $C$  – стала, яка залежить від  $n$  і  $\mu$  і не залежить від  $\alpha$ .

З того, що розв'язок (6) належить до класу  $E_\alpha^\lambda(T_\alpha)$ , випливає нерівність

$$|u(t, x)| \leq C(1 + T_\alpha) \exp\{g_\alpha(t, x)\}, \quad (t, x) \in \Pi_{(0; T_\alpha]}.$$

Розглядатимемо означені в [4] простори гельдерових функцій  $H^{l, l/2}(\Pi_{(0; T]})$  і  $H^l(\mathbb{R}^n)$ , де  $l$  – неціле додатне число, і відповідні норми

$$\begin{aligned} \|u\|_{(0; T]} &\equiv \sup_{(t, x) \in \Pi_{(0; T]}} |u(t, x) \exp\{-g_\alpha(t, x)\}|, \\ \|\varphi\| &\equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x) \exp\{-g_\alpha(0, x)\}|. \end{aligned}$$

Вважатимемо, що оператор  $K$  задовольняє такі умови:

$$1) \|Ku\|_{(0; T]} \leq B_1(\|u\|_{(0; T]}, T),$$

$$2) \|Ku_1 - Ku_2\|_{(0; T]} \leq B_2(\|u_1\|_{(0; T]}, \|u_2\|_{(0; T]}, T) \|u_1 - u_2\|_{(0; T]},$$

де  $u \in E_\alpha^\lambda(T)$  і неперервна в  $\Pi_{[0, T]}$ , а функції  $B_1(a, c)$  і  $B_2(a, b, c)$  обмежені, коли аргументи змінюються в обмеженій області.

**Теорема 1.** Нехай коефіцієнти рівняння (1) і оператор  $K$  задовольняють умови, сформульовані вище,  $f \in H^{l, l/2}(\Pi_{(0; T]}) \cap E_\alpha^\lambda(T)$ ,  $\varphi \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E_\alpha^\lambda(T)$ . Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (1), (2) з простору  $H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0; T]}) \cap E_{\alpha_1}^\lambda(T_0)$ , де  $T_0$  – досить мале додатне число,  $l \in (0; 1)$ ,  $\alpha_1 = 2\alpha$  при  $\lambda = 0$  і  $\alpha_1 = \alpha + \beta(\alpha)T_\alpha$  при  $\lambda \in (0; 2]$ .

*Доведення.* Доведення проводиться за методикою з [4]. У просторі  $C^{1,2}(\Pi_{(0; T]}) \cap E_\alpha^\lambda(T)$  задача (1), (2) еквівалентна рівнянню

$$u(t, x) = (Nu)(t, x), \tag{7}$$

де

$$\begin{aligned} (Nu)(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi - \\ &- \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) u(\tau, \xi) (Ku)(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0; T]}. \end{aligned} \tag{8}$$

Переконаємось, що в просторі  $C^{1,2}(\Pi_{(0; T]}) \cap E_\alpha^\lambda(T)$  рівняння (7) для досить малих  $T$  має розв'язок. Скориставшись властивостями потенціалів, ядрами яких є фундаментальний розв'язок  $Z$ , одержуємо

$$|(Nu)(t, x)| \leq \left( \|\varphi\| + T_\alpha \|f\|_{(0; T_\alpha]} + T_\alpha \|u\|_{(0; T_\alpha]} \|Ku\|_{(0; T_\alpha]} \right) \exp\{g_\alpha(t, x)\}.$$

Тому

$$\|Nu\|_{(0; T_\alpha]} \leq \|\varphi\| + T_\alpha \|f\|_{(0; T_\alpha]} + T_\alpha \|u\|_{(0; T_\alpha]} \|Ku\|_{(0; T_\alpha]}. \tag{9}$$

Нехай  $M = 2(\|\varphi\| + T_\alpha \|f\|_{(0; T_\alpha]})$ . Тоді з (9), використавши умову 1), отримаємо для розв'язку  $u \in C^{1,2}(\Pi_{(0; T]}) \cap E_\alpha^\lambda(T)$  такого, що  $\|u\|_{(0; T_\alpha]} \leq M$ , нерівність

$$\|Nu\|_{(0; T_\alpha]} \leq \frac{M}{2} + T_\alpha M B_1(M, T_\alpha). \tag{10}$$

Виберемо  $T_\alpha$  так, що  $2T_\alpha B_1(M, T_\alpha) \leq 1$ . Такий вибір можливий, бо  $B_1(M, T_\alpha) \in$  обмеженою величиною. Тому з (10) отримуємо  $\|Nu\|_{(0;T_\alpha]} \leq M$ .

Нехай  $\{u_1, u_2\} \subset C^{2,1}(\Pi_{(0;T]}) \cap E_\alpha^\lambda(T)$  і  $\|u_1\|_{(0;T_\alpha]} \leq M$ ,  $\|u_2\|_{(0;T_\alpha]} \leq M$ . Тоді

$$(Nu_1)(t, x) - (Nu_2)(t, x) = - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) \left( (u_1(\tau, \xi) - u_2(\tau, \xi))(Ku_1)(\tau, \xi) + \right. \\ \left. + u_2(\tau, \xi) \left( (Ku_1)(\tau, \xi) - (Ku_2)(\tau, \xi) \right) \right) d\xi.$$

Звідси, згідно з умовою 1), одержується

$$\|Nu_1 - Nu_2\|_{(0;T_\alpha]} \leq T_\alpha \left( \|u_1 - u_2\|_{(0;T_\alpha]} \|Ku_1\|_{(0;T_\alpha]} + \|u_2\|_{(0;T_\alpha]} \|Ku_1 - Ku_2\|_{(0;T_\alpha]} \right) \leq \\ \leq T_\alpha \|u_1 - u_2\|_{(0;T_\alpha]} \left( B_1(M, T_\alpha) + MB_2(M, M, T_\alpha) \right). \quad (11)$$

Взявши  $T_\alpha$  так, щоб  $2B_1(M, T_\alpha) + MB_2(M, M, T_\alpha) \leq 1$ , з (11) отримуємо

$$\|Nu_1 - Nu_2\|_{(0;T_\alpha]} \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{(0;T_\alpha]}.$$

Скориставшись принципом стиснених відображень, одержуємо, що оператор  $N$  має єдину нерухому точку в просторі  $C^{1,2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$  з  $T_0$  таким, що  $2T_\alpha B_1(M, T_\alpha) \leq 1$  і  $2B_1(M, T_\alpha) + MB_2(M, M, T_\alpha) \leq 1$ .

Отже, рівняння (7) має єдиний розв'язок  $u$  в просторі  $C^{1,2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$  з досить малим  $T_0$ .

Переконаємось, що цей розв'язок належить до простору  $H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ . З рівності (8), використовуючи властивості потенціалів, ядрами яких є фундаментальний розв'язок  $Z$  та його похідні, одержуємо, що  $(Nu) \in H^{l+1, (l+1)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ . Тоді з (7) випливає, що  $u \in H^{l+1, (l+1)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ , а тому  $(Ku) \in H^{l, l/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$  і, отже,  $(u(Ku)) \in H^{l, l/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ . Продовжуючи ці міркування, з (8) дістаємо  $(Nu) \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ , а тому й  $u \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ .  $\square$

**Теорема 2.** Якщо для функцій  $f_i \in H^{l, l/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$  і  $\varphi_i \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$  існують розв'язки  $u_i \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0;T_0]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , задачі Коші (1), (2), а оператор  $K$  задовольняє умову 2), то

$$\|u_1 - u_2\|_{(0;T_0]} \leq C_4 \|f_1 - f_2\|_{(0;T_0]} + C_5 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{(0;T_0]},$$

де сталі  $C_4$  і  $C_5$  залежать від  $T_0$ ,  $\|u_i\|_{(0;T_0]}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\|Ku_1\|_{(0;T_0]}$ .

*Доведення.* Оскільки  $u_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , є розв'язками задачі Коші (1), (2), то для  $w = u_1 - u_2$  маємо задачу

$$(Lw)(t, x) + w(t, x)(Ku_1)(t, x) = f_1(t, x) - f_2(t, x) - u_2(t, x) \left( (Ku_1)(t, x) - (Ku_2)(t, x) \right), \\ (t, x) \in \Pi_{(0;T_0]}, \\ w(t, x)|_{t=0} = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

Розв'язок задачі (12) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 w(t, x) = & \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)(\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) \times \\
 & \times w(\tau, \xi)(Ku_1)(\tau, \xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) u_2(\tau, \xi) \left( (Ku_1)(\tau, \xi) - (Ku_2)(\tau, \xi) \right) d\xi + \\
 & + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) (f_1(\tau, \xi) - f_2(\tau, \xi)) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0; T_0)},
 \end{aligned}$$

З цього зображення, скориставшись оцінками потенціалів з [5] і умовою 2), одержуємо нерівність

$$\begin{aligned}
 \|w\|_{(0; T_0]} \leq & \left( \|\varphi_1 - \varphi_2\| + T_0 \|f_1 - f_2\|_{(0; T_0]} + \|Ku_1\|_{(0; T_0]} + C_1(\|u_1\|_{(0; T_0]}, \|u_2\|_{(0; T_0]}, T_0) \times \right. \\
 & \left. \times \|u_2\|_{(0; T_0]} \right) \int_0^{T_0} \|w\|_{(0; \tau]} d\tau.
 \end{aligned}$$

Застосувавши лему Гронуолла [1], з останньої нерівності отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}
 \|w\|_{(0; T_0]} \leq & \left( \|\varphi_1 - \varphi_2\| + T_0 \|f_1 - f_2\|_{(0; T_0]} \right) \times \\
 & \times \exp\{ \|Ku_1\|_{(0; T_0]} + C_1(\|u_1\|_{(0; T_0]}, \|u_2\|_{(0; T_0]}, T_0) \|u_2\|_{(0; T_0]} \},
 \end{aligned}$$

з якої випливає твердження теореми 2. □

### 3 ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПРИ НЕВІДОМІЙ ФУНКЦІЇ

Розглянемо задачу визначення коефіцієнта при невідомій функції в параболічному рівнянні другого порядку. Задача полягає у знаходженні функцій  $u \in H^{l+4, (l+4)/2}(\Pi_{(0; T)} \cap E_\alpha^\lambda(T))$  і  $q \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E_\alpha^\lambda(T_0)$  з умов

$$\begin{aligned}
 (Lu)(t, x) + q(x)u(t, x) &= f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0; T]}, \\
 u(t, x)|_{t=0} &= 0, \quad u(t, x)|_{t=T} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,
 \end{aligned} \tag{13}$$

де  $f \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0; T)} \cap E_\alpha^\lambda(T))$ ,  $\psi \in H^{l+4}(\mathbb{R}^n) \cap E_\alpha^\lambda(T)$ ,  $f(0, x) = 0$ ,  $\psi(x) \geq \psi_0 > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Вважатимемо, що коефіцієнти  $L$  не залежать від  $t$ .

Ввівши позначення  $v(t, x) := \partial_t u(t, x)$ , для функцій  $v \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0; T]} \cap E_\alpha^\lambda(T))$  і  $g \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \cap E_\alpha^\lambda(T)$  з (13) отримуємо задачу

$$\begin{aligned}
 (Lv)(t, x) + q(x)v(t, x) &= \partial_t f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0; T]}, \\
 v(t, x)|_{t=0} &= 0, \quad v(t, x)|_{t=T} = (L\psi)(x) - q(x)\psi(x) + f(T, x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Якщо з третьої умови в (14) знайти  $q$  і підставити його в рівняння, то одержимо, що  $v$  є розв'язком задачі

$$\begin{aligned}
 (Lv)(t, x) + v(t, x) \frac{1}{\psi(x)} \left( (L\psi)(x) + f(T, x) - v(T, x) \right) &= \partial_t f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0; T]}, \\
 v(t, x)|_{t=0} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Застосувавши до задачі (15) теорему 1, отримаємо, що вона має єдиний розв'язок  $v \in H^{l+2, (l+2)/2}(\Pi_{(0; T_1]}) \cap E_\alpha^\lambda(T_1)$ , де  $T_1$  – досить мале додатне число. Звідси випливає, що й задача (13) має єдиний розв'язок.

#### 4 ВИСНОВКИ

У просторах гельдерових функцій встановлено існування та єдиність класичного розв'язку задачі Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку з зростаючими при  $|x| \rightarrow \infty$  коефіцієнтами лінійної частини. За допомогою цього результату доведено існування та єдиність розв'язку задачі про визначення коефіцієнта при невідомій функції у відповідному лінійному параболічному рівнянні з незалежними від  $t$  коефіцієнтами.

Отримані результати можуть бути використані для дослідження розв'язності задачі Коші для нелінійних параболічних рівнянь довільного порядку, в тому числі й з виродженням на початковій гіперплощині, і зростаючими коефіцієнтами при  $|x| \rightarrow \infty$ .

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Eidelman S. D. *Parabolic systems*. North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [2] Medynsky I. P. *Eidelman's study of nonlinear problems and their development*. Nauk. Visnyk Cherniv. Univer. 2011. **1**. (1–2). 114–128. (in Ukrainian)
- [3] Beznoshchenko N. Ya. *On the Cauchy problem for the equation  $u_t - \Delta u + u Au = f$* . Diff. Eq. 1983. **19**, (6), 991–1000.
- [4] Lavrenchuk V. P. *Cauchy problem for a nonlinear second-order parabolic equation with unlimited coefficient and degenerate*. Nauk. Visnyk Cherniv. Univer. 2000. (76). 50–53. (in Ukrainian)
- [5] Aronson D. G., Besala P. *Parabolic equations with unbounded coefficients*. J. of Diff. Eq. 1967. **3** (1), 1–14.
- [6] Ivasyshen S. D., Lavrenchuk V. P., Pasichnyk H. S. *On the Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with increasing coefficients*. Diff. Eq. and their applications: Proceedings of the Intern. Scientific Conf. dedicated to the 70th anniversary of Prof. V. V. Marints. Uzhgorod, 2012. 36. (in Ukrainian)

Надійшло 15.09.2025

---

Pasichnyk H. S. *Cauchy problem for a nonlinear second-order parabolic equation with increasing coefficients*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 32–38.

The existence and uniqueness of a classical solution to the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation of the second order with coefficients of the linear part increasing as  $|x| \rightarrow \infty$  are established. This solution belongs to the class of Hölder functions with  $t \in (0; T_0]$ , where  $T_0 \in (0, T]$  is sufficiently small. With the help of this result, the existence and uniqueness of a solution to the problem of determining the coefficient of an unknown function in the corresponding linear parabolic equation with coefficients independent of  $t$  are proved.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.05>

НІКОРАК О.О., РАТУШНЯК С.П.

## НЕПЕРЕРВНИЙ ПРОЄКТОР ДВІЙКОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ В ЛАНЦЮГОВЕ $A_2$ -ЗОБРАЖЕННЯ

У роботі вводиться в розгляд і вивчається одна неперервна функція, що є проєктором цифр класичного двійкового зображення чисел в цифри ланцюгового  $A_2$ -зображення з нульовою надлишковістю, а саме функція виду:

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}\right) = 1/2^{\alpha_1-1} + 1/2^{-\alpha_2} + 1/2^{\alpha_3-1} + 1/2^{-\alpha_4} + \dots + 1/2^{\alpha_{2k-1}-1} + 1/2^{-\alpha_{2k}} + \dots, \alpha_n \in \{0; 1\}.$$

В роботі обґрунтовується коректність означення функції  $f$ , яка могла бути порушена через існування чисел, що мають два формально різні двійкові зображення, доводиться її неперервність та монотонність. Використовуючи нормальні властивості чисел за їх двійковим зображенням (властивості, якими володіють зображення чисел множини повної міри Лебега) і теорему Лебега, яка констатує існування майже скрізь скінченної похідної у неперервної монотонної функції, доводиться сингулярність функції  $f$ . Під сингулярною функцією розуміється неперервна функція, відмінна від константи, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега.

У статті висвітлюється взаємозв'язок розглядуваної функції, оператора правостороннього зсуву цифр та інверсора цифр ланцюгового зображення чисел. На основі даного взаємозв'язку обґрунтовується сингулярність інверсора цифр ланцюгового зображення чисел.

*Ключові слова і фрази:* ланцюговий дріб,  $A_2$ -зображення чисел, проєктор цифр, інверсор цифр, сингулярна функція, нормальна властивість чисел за його зображенням, суперпозиція сингулярних функцій.

<sup>1,2</sup>Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, <sup>2</sup>Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

e-mail: [nikorak@imath.kiev.ua](mailto:nikorak@imath.kiev.ua), [ratush404@gmail.com](mailto:ratush404@gmail.com)

### ВСТУП

Функції зі складними локальними властивостями часто виникають як відображення, породжені перетворювачами цифр одного зображення чисел в інше. Ці зображення можуть збігатися, можуть бути узгоджені (геометрією, алфавітами). Окрему увагу заслуговує клас неперервних функцій, для яких системи зображення узгоджені потужностями алфавітів, але

УДК 511.7+517.5

2010 *Mathematics Subject Classification*: 26A30.

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, R.S.)

не обов'язково геометрією зображення. Серед цікавих прикладів таких функцій зі складних диференціальними властивостями, означених в термінах ланцюгових зображень чисел можна навести такі: сингулярна функція Мінковського [8], сингулярна функція типу Сендова [2], неперервні ніде не монотонні функції типу Трибін-функцій [13, 12] тощо. Вивчення їх диференціальних властивостей в кожному з випадків вимагає свої індивідуальні підходи. Загальних методів доведення сингулярності функції, хоча б одна зі змінних якої записана ланцюговим зображенням чисел, на сьогодні нам невідомі.

В роботі досліджується одна неперервна функція, значення якої записане нескінченним ланцюговим  $A_2$ -зображенням чисел і доводимо її сингулярність, черпаючи ідеї доведення реалізовані в роботі [2].

## 1 ЛАНЦЮГОВЕ $A_2$ -ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Ланцюговим дробом називається вираз виду

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \equiv a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 \dots \equiv [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

де  $a_i \in R$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a_0 \in \mathbb{N}_0$ . Збіжність нескінченного ланцюгового дроби забезпечує теорема Зейделя [9]. Відомо, що будь-яке дійсне число  $x \in \mathbb{R}$  можна подати у вигляді елементарного ланцюгового дроби, тобто такого, для якого  $a_n \in \mathbb{N}$ .

Значення скінченного ланцюгового дроби  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$  є раціональним числом, тобто  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ , причому дріб  $\frac{p_n}{q_n}$  нескоротний. Дріб виду  $\frac{p_n}{q_n}$  називають *підхідним дробом* ланцюгового дроби  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$

Для підхідних дробів мають місце наступні рекурентні співвідношення:

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{де} \quad \begin{cases} p_0 = a_0, \\ q_0 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} p_{-1} = 1, \\ q_{-1} = 0. \end{cases}$$

Справедливими є наступні властивості підхідних дробів [3]: для будь-якого  $k \in \mathbb{N}$

- 1)  $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$ ;
- 2)  $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1]$ ;
- 3)  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}$ , де  $r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$ .

Для нескінченного ланцюгового дроби  $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$  і відповідних підхідних дробів  $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$  має місце рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots].$$

Розглянемо одне кодування дійсних чисел відрізка  $[\frac{1}{2}; 1]$  нескінченними ланцюговими дробами, а саме  $A_2$ -дробами. Нехай  $A_2 \equiv \{\frac{1}{2}, 1\}$  – алфавіт,  $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$  – простір послідовностей елементів алфавіту  $A_2$ .

*Ланцюговим  $A_2$ -дробом* (коротко  $A_2$ -дробом) називається ланцюговий дріб виду

$$0 + 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots, \quad \text{де } a_n \in A_2.$$

**Теорема 1.** [1] Для довільного числа  $x \in [\frac{1}{2}; 1]$  існує послідовність  $(a_n) \in L_2$  така, що

$$x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}. \quad (1)$$

Розклад числа  $x$  в ланцюговий дріб  $[0; a_1, \dots, a_n, \dots]$  називається ланцюговим  $A_2$ -представленням, а запис виду  $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}$  – його ланцюговим  $A_2$ -зображенням.

**Означення 1.** [1] Циліндром рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$  називається множина  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}$  чисел виду  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots}^{A_2}$ , тобто

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}, a_n \in A_2 \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Циліндр  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}$  є відрізком з кінцями:

$$[0; c_1, \dots, c_m, (e_1, e_0)] \text{ і } [0; c_1, \dots, c_m, (e_0, e_1)],$$

причому де лівий, а де правий залежить від парності і непарності  $m$ .

Діаметр (довжина) циліндра  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}$  виражається формулою [1, 10]:

$$|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}| = \frac{1}{(q_{m-1} + q_m)(q_{m-1} + 2q_m)} = \frac{(2c^2 + 1 + 2c^{\frac{q_{m-1}}{q_m}})}{(1 + c^{\frac{q_{m-1}}{q_m}})} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c}^{A_2}|. \quad (2)$$

З тополого-метричною і ймовірнісною теоріями ланцюгового  $A_2$ -зображення чисел можна ознайомитися в роботах [4, 5, 6].

## 2 ОСНОВНИЙ ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для означення об'єкту дослідження нагадаємо, що під класичним двійковим зображенням чисел ми розуміємо запис виду  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2$ ,  $\alpha_n \in \{0; 1\} \equiv A$  і його зміст

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2, \quad \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2 = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2^i}; \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \right].$$

Розглядається функція  $f$ , означена рівністю

$$f(x) = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} \dots}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} (\frac{1}{2})^{\alpha_2} \dots (\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]} (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}} \dots}. \quad (3)$$

Означення функції рівністю (3) є коректним, незважаючи на те, що двійково-раціональні числа (тобто числа виду  $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 0(1)}^2 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 1(0)}^2$ ) мають два формально різні зображення. Справді,

$$f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2n}(0)}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}} (\frac{1}{2} 1)} = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n-1}} (\frac{1}{2} 1)} = f(\Delta_{\alpha_1 \dots [\alpha_{2n}-1](1)}^2),$$

$$f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2n-1}(0)}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} \dots (\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]} (\frac{1}{2} 1)} = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} \dots (\frac{1}{2})^{2-\alpha_{2n-1}} (\frac{1}{2} 1)} = f(\Delta_{\alpha_1 \dots [\alpha_{2n-1}-1](1)}^2).$$

**Теорема 2.** Функція  $f(x)$  є неперервною строго спадною функцією, причому  $f(0) = 1$  і  $f(1) = \frac{1}{2}$ .

*Доведення.* Обґрунтуємо окремо неперервність функції  $f$  по множині двійково-раціональних та двійково-іраціональних чисел. Нехай  $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2$  – двійково-іраціональна точка відрізка  $[0; 1]$ . Функція  $f$  є неперервною в точці  $x_0$ , якщо для довільної послідовності двійково-іраціональних чисел має місце рівність  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ . З того, що  $x \neq x_0$  слідує, що існує такий номер  $m$ , що  $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$  і  $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ ,  $i < m$ . Тоді умова  $x \rightarrow x_0$  рівносильна тому, що  $m \rightarrow \infty$ . Не порушуючи загальності, вважатимемо, що  $\alpha_m(x_0) = \alpha_m$ , тоді  $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} [1-\alpha_m] \alpha'_{m+1} \alpha'_{m+2} \dots}$ . Нехай

$$f(x_0) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m}^{A_2} = \frac{r_{m+1} p_m + p_{m-1}}{r_{m+1} q_m + q_{m-1}}, \quad r_{m+1} = [b_{m+1}; b_{m+2}, b_{m+3} \dots]$$

$$f(x) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_{m-1} b'_m}^{A_2} = \frac{r'_{m+1} p_m + p_{m-1}}{r'_{m+1} q_m + q_{m-1}}, \quad r'_{m+1} = [b'_{m+1}; b'_{m+2}, b'_{m+3} \dots].$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{r_{m+1} p_m + p_{m-1}}{r_{m+1} q_m + q_{m-1}} - \frac{r'_{m+1} p_m + p_{m-1}}{r'_{m+1} q_m + q_{m-1}} \right| = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|r_{m+1} - r'_{m+1}|}{(r_{m+1} q_m + q_{m-1})(r'_{m+1} q_m + q_{m-1})} = 0. \end{aligned}$$

В силу довільності вибору  $x_0$ , функція  $f$  є неперервною по множині двійково-іраціональних чисел. Неперервність функції  $f$  по множині двійково-раціональних чисел є прямим наслідком коректності означення функцій в двійково-раціональній точці.

Розглянемо два довільні числа  $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^2$  і  $x_2 = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^2$ , такі що  $x_1 < x_2$ , тобто існує таке натуральне число  $n$ , що має місце одна з умов:

$$\alpha_i = \beta_i, i = 1, 2, \dots, 2n, \text{ але } 0 = \alpha_{2n+1} < \beta_{2n+1} = 1,$$

$$\alpha_i = \beta_i, i = 1, 2, \dots, 2n - 1, \text{ але } 1 = \alpha_{2n} > \beta_{2n} = 0,$$

тоді для відповідних значень функції мають місце нерівності (згідно з правилами порівняння чисел за їх ланцюговим зображенням [1]):

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \Delta_{\left(\frac{1}{2}\right)^{[1-\alpha_1]} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_{2n}} \frac{1}{2} \dots}^{A_2} > \Delta_{\left(\frac{1}{2}\right)^{[1-\alpha_1]} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_{2n}} 1 \dots}^{A_2} = f(x_2), \\ f(x_1) &= \Delta_{\left(\frac{1}{2}\right)^{[1-\alpha_1]} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_{2n-1}} 1 \dots}^{A_2} > \Delta_{\left(\frac{1}{2}\right)^{[1-\alpha_1]} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_{2n-1}} \frac{1}{2} \dots}^{A_2} = f(x_2). \end{aligned}$$

Отже, з умови  $x_1 < x_2$  випливає, що  $f(x_1) > f(x_2)$ , а значить функція є строго спадною, причому  $f(0) = f(\Delta_{(0)}^2) = \Delta_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{A_2} = 1$ ,  $f(1) = f(\Delta_{(1)}^2) = \Delta_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{A_2} = \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Теорема 3.** Функція  $f$  є сингулярною.

*Доведення.* Оскільки функція  $f$  неперервна і монотонна, то згідно з теоремою Лебега, вона має скінченну похідну у майже всіх точках області визначення. Позначимо множину таких точок через  $D$ . Розглянемо число  $x_0 \in D$ , таке, що є нормальним числом [2] (тобто використовує довільний набір нулів та одиниць нескінченну кількість раз у своєму двійковому зображенні, як відомо, множина  $H$  таких чисел є множиною повної міри Лебега). Тоді  $x_0 \in W = D \cap H$ . Таким чином  $\lambda(W) = 1$ , як міра перерізу двох множин повної міри Лебега.

Нехай  $f(x_0) = f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}$ . Використовуючи означення циліндричної похідної [10], маємо

$$\begin{aligned} -f'(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2)|}{|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}|}{|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}|}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{2|\Delta_{a_1 \dots a_k}^{A_2}|}{|\Delta_{a_1 \dots a_{k-1}}^{A_2}|} = \\ &= \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2|\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}|}{|\Delta_{a_1 \dots a_{n-1}}^{A_2}|} = \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 + a \frac{q_{n-1}}{q_n})}{2a^2 + 1 + 2a \frac{q_{n-1}}{q_n}} = \\ &= \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{a} + 2 \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2 \frac{q_{n-1}}{q_n}}, \quad a \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки останній вираз під добутком не прямує до 1, коли  $n \rightarrow \infty$ , а тому необхідна умова збіжності нескінченного добутку не виконується, то з того, що  $x_0 \in W$ , маємо  $f'(x_0) = 0$  майже скрізь у розумінні міри Лебега. А отже, функція  $f$  сингулярна.  $\square$

**Лема 1.** Графік  $\Gamma_f$  функції є автомодельною множиною (тобто такою, що можна подати у вигляді об'єднання підмножин, які еквівалентні усій множині відносно деякої групи перетворень площини)  $\Gamma_f = \bigcup_{(i,j) \in A \times A} g_{ij}(\Gamma_f)$ , де

$$g_{ij} : \begin{cases} x' = \frac{x}{2^2} + \frac{2i+j}{2^2}, \\ y' = \frac{1}{2^{i-1} + \frac{1}{2^{-j+y}}}, \end{cases} \quad (i, j) \in A \times A, \quad g_{ij}(M(x; y)) = M'(x'; y').$$

*Доведення.* Розглянемо довільну точку  $M(x'; y') \in \Gamma_f$ , тоді  $M(x'; y') \in \Delta_{ij}^2 \times \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-i]}(\frac{1}{2})^j}$ , де  $(i, j) \in A \times A$ . Згідно з означенням функції

$$x' = \Delta_{ij\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}^2, \quad y = f(x) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-i]}(\frac{1}{2})^j(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]}(\frac{1}{2})^{\alpha_2}\dots(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]}(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}}}$$

Тоді для  $x' \in \Delta_{ij}^2$  очевидно є рівність

$$x' = \Delta_{ij\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}^2 = \frac{i}{2} + \frac{j}{2^2} + \frac{1}{2^2}x,$$

де  $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}^2 \in [0; 1]$ ,  $\alpha_i \in A$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ;

$$y' = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-i]}(\frac{1}{2})^j(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]}(\frac{1}{2})^{\alpha_2}\dots(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]}(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}}} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^{[1-i]} + \frac{1}{(\frac{1}{2})^{j+y}}},$$

де  $y = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]}(\frac{1}{2})^{\alpha_2}\dots(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]}(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}}} \in [\frac{1}{2}; 1]$ ,  $\alpha_i \in A$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Отже, довільна точка графіка є образом деякої точки графіка під дією перетворення  $g_{ij}$ . Таким чином, графік функції  $f$  є автомодельною множиною.  $\square$

### 3 ПРИКІНЦЕВІ ЗАУВАЖЕННЯ

**Теорема 4.** Функція, означена рівністю

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}\dots}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{\alpha_1}(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_2]}\dots(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n-1}}(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n}]}\dots}, \quad (4)$$

є неперервною строго зростаючою сингулярною функцією.

*Доведення.* Дане твердження є очевидним в силу взаємозв'язку функції  $\bar{f}$  з функцією  $f$ :

$$\bar{f}(x) = \omega(f(x)),$$

де  $\omega(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}) = \Delta_{a_2 \dots a_n}^{A_2} = \frac{1}{x} - a_1(x)$  – оператор зсуву цифр ланцюгового зображення чисел [7]. □

**Зауваження 1.** Функція, обернена до функції  $\bar{f}$ , є неперервною сингулярною функцією.

**Зауваження 2.** Для інверсора цифр ланцюгового зображення має місце рівність:

$$I(\Delta_{(\frac{1}{2})^{\alpha_1} (\frac{1}{2})^{\alpha_2} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_n} \dots}) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} (\frac{1}{2})^{[1-\alpha_2]} \dots (\frac{1}{2})^{[1-\alpha_n]} \dots} = f(\bar{f}^{-1}(x)).$$

Таким чином, інверсор  $I$  цифр ланцюгового  $A_2$ -зображення чисел є композицією двох сингулярних функцій (що не є взаємно оберненими функціями) [11], а тому **інверсор є сингулярною функцією**.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V. *A<sub>2</sub>-continued fraction representation of real numbers and its geometry* // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [2] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Y.V., Lysenko I.M., Ratushniak S. P. *Continued A<sub>2</sub>-fractions and singular functions*. Matematychni Studii, 2022, 58(1), doi: 10.30970/ms.58.1.3-12.
- [3] Pratsiovytyi M., Goncharenko Ya., Lysenko I., Ratushniak S. *Finite A<sub>2</sub>-continued fractions in the problems of rational approximations of real numbers* Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, vol. 75, no. 6, June 2023, pp. 849-858.
- [4] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. *Properties of the distribution of the random variable defined by A<sub>2</sub>-continued fraction with independent elements* // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.
- [5] Pratsiovytyi M.V., Kyurchev D.V. *Singularity of the distribution of a random variable represented by an A<sub>2</sub>-continued fraction with independent elements*. Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2010. Vol. 81. С. 159 — 175.
- [6] Pratsiovytyi M., Makarchuk O. *On some metric results for representation numbers by continued A<sub>2</sub>-fractions*, 2025. Bukovinian Mathematical Journal, V.13, No.1., 100-108,doi10.31861/bmj2025.01.09.
- [7] Pratsiovytyi M., Chuikov A. *Continuous distributions whose functions preserve tails of an A<sub>2</sub>-continued fraction representation of numbers* // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.
- [8] Salem R. *On some singular monotonic functions with are stricly increasing*. Trans. Amer. Math. Soc. 1943, **53**, 423–439.
- [9] Seidel L. *Untersuchungen über die Konvergenz and Divergenz der Kettenbrüche*. — München: Habilschrift, 1846.
- [10] Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування чисел та їх застосування. К.: Наукова думка, 2022.– 316 с.
- [11] Працьовитий М.В., Косопльоткіна О.В. *Фрактальні властивості суперпозиції сингулярних функцій розподілу*. Теорія ймовірностей та математична статистика. 2002. Вип. 67. С. 122–129.

- [12] Працьовитий М.В., Чуйков А.С. *Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових  $A_2$ -дробів*. Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2018, Т.15, № 1. С. 147-161.
- [13] Ратушняк С.П. *Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового  $A$ -зображення чисел*. Буковинський математичний журнал. 2023; 11(2). <https://doi.org/https://doi.org/10.31861/bmj2023.02.23>

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V.  *$A_2$ -continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal*. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [2] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Y.V., Lysenko I.M., Ratushniak S. P. *Continued  $A_2$ -fractions and singular functions*. Matematychni Studii, 2022, 58(1), doi: 10.30970/ms.58.1.3-12.
- [3] Pratsiovytyi M., Goncharenko Ya., Lysenko I., Ratushniak S. *Finite  $A_2$ -continued fractions in the problems of rational approximations of real numbers* Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, vol. 75, no. 6, June 2023, pp. 849-858.
- [4] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. *Properties of the distribution of the random variable defined by  $A_2$ -continued fraction with independent elements // Random Oper. Stochastic Equations*, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.
- [5] Pratsiovytyi M.V., Kyurchev D.V. *Singularity of the distribution of a random variable represented by an  $A_2$ -continued fraction with independent elements*. Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2010. Vol. 81. С. 159 — 175.
- [6] Pratsiovytyi M., Makarchuk O. *On some metric results for representation numbers by continued  $A_2$ -fractions*, 2025. Bukovinian Mathematical Journal, V.13, No.1., 100-108,doi10.31861/bmj2025.01.09.
- [7] Pratsiovytyi M., Chuikov A. *Continuous distributions whose functions preserve tails of an  $A_2$ -continued fraction representation of numbers // Random Operators and Stochastic Equations*, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.
- [8] Salem R. *On some singular monotonic functions with are stricly increasing*. Trans. Amer. Math. Soc. 1943, **53**, 423–439.
- [9] Seidel L. *Untersuchungen über die Konvergenz and Divergenz der Kettenbrüche*. — München: Habilschrift, 1846.
- [10] Pratsiovytyi M.V. Two-symbol systems of encoding of real numbers and their applications). Naukova Dumka, Kyiv (2022). (in Ukrainian)
- [11] M.V. Pratsiovytyi, O.V. Kosoplotkina *Fractal properties of superposition of singular distribution functions*. Theor. Probability and Math. Statist., No. 67, 2002, pp. 122-129. (in Ukrainian)
- [12] Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S. *A continuous nowhere monotonic function defined in terms of negaternary and continued  $A_2$ - fractions*. Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine , 2018, Т.15, № 1. pp. 147-161. (in Ukrainian)
- [13] Ratushniak S.P. *Continuous nowhere monotonic function defined by terms continued  $A$ -representations of numbers* Bukovinian Mathematical Journal. 2023; 11(2). <https://doi.org/https://doi.org/10.31861/bmj2023.02.23> (in Ukrainian)

Nikorak O.O., Ratushniak S.P. *A Continuous projector from the binary representation of numbers to the continuous  $A_2$ -representation*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 39–46.

In this paper, we introduce and study a continuous function that projects the digits of the classical binary representation of an arbitrary real number onto the digits of the continued  $A_2$ -representation with zero redundancy. The function is defined by

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}\right) = 1/2^{\alpha_1-1} + 1/2^{-\alpha_2} + 1/2^{\alpha_3-1} + 1/2^{-\alpha_4} + \dots + 1/2^{\alpha_{2k-1}-1} + 1/2^{-\alpha_{2k}} + \dots,$$

where  $\alpha_n \in \{0;1\}$ . We justify the correctness of this definition, which is nontrivial because some numbers possess two distinct binary expansions. Using the fact that almost all real numbers have normal binary expansions, together with Lebesgue's theorem on the derivative of continuous monotone functions, we show that the function  $f$  is singular. Here, a singular function refers to a continuous, non-constant function whose derivative is equal to zero almost everywhere with respect to the Lebesgue measure.

In addition, we reveal the relationship between the function  $f$ , the right-shift digit operator, and invensor of digits of the  $A_2$ -representation of numbers. Based on this relationship, we also demonstrate the singularity of the invensor of digits of the  $A_2$ -representation.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.06>

COZMA D.

## CENTER CONDITIONS FOR A CUBIC DIFFERENTIAL SYSTEM WITH ONE INVARIANT STRAIGHT LINE AND ONE INVARIANT CUBIC

In this paper the conditions for the existence of one invariant straight line and one invariant cubic in a cubic differential system with a singular point of a center or a focus type, when these curves have not intersecting points, are found. It is proved that the singular point is a center if and only if the first five Lyapunov quantities vanish. The center conditions were determined by using the method of Darboux integrability.

*Key words and phrases:* Cubic differential system, the center-focus problem, invariant straight line, invariant cubic, Lyapunov quantity.

---

Ion Creanga State Pedagogical University, Chisinau, Republic of Moldova  
e-mail: [cozma.dumitru@upsc.md](mailto:cozma.dumitru@upsc.md), [dcozma@gmail.com](mailto:dcozma@gmail.com) (Cozma D.)

### 1 THE PROBLEM OF THE CENTER

We consider a planar system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

where  $P(x, y)$  and  $Q(x, y)$  are coprime polynomials with real coefficients in the real variables  $x, y$ . The degree  $n$  of this polynomial system is the maximum degrees of the polynomials  $P$  and  $Q$ ,  $n = \max\{\deg P(x, y), \deg Q(x, y)\}$ . Associated to this polynomial differential system there is the polynomial vector field  $\mathcal{X} = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ . If  $n = 2$  ( $n = 3$ ), then the system (1) is called a quadratic (respectively, a cubic) differential system.

Let  $O(0, 0)$  be a singular point of differential system (1), i.e.  $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ , and consider the linearization of (1) at  $O(0, 0)$ :

$$\frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y, \quad \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y. \quad (2)$$

The most important question which is still open for planar systems of differential equations is the following one [6], [19]: under which conditions do the original system (1) and the linearized

---

УДК 517.925

2010 *Mathematics Subject Classification*: 34C05.

This work was supported by the National Agency for Research and Development of the Republic of Moldova under project number "25.80012.5007.76SE Qualitative and algebraic investigation of differential models".

system (2) have the same qualitative behavior and the same topological structure around a singular point  $O(0,0)$  ?

This problem has been solved for (1) unless if the singular point  $O(0,0)$  is of a center or a focus type, i.e. the eigenvalues of the linearized system are purely imaginary  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\beta \neq 0$  and  $n \geq 3$ . In this case, by using a nondegenerate transformation of variables and a time rescaling, the system (1) can be brought to the canonical form

$$\frac{dx}{dt} = y + \sum_{j=2}^n P_j(x, y) \equiv P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x + \sum_{j=2}^n Q_j(x, y) \equiv Q(x, y), \quad (3)$$

where  $P_j$  and  $Q_j$  are homogeneous polynomials of degree  $j$  with real variables and coefficients. A singular point  $O(0,0)$  is either a focus or a center for (3), called *a weak focus*, *a fine focus* or *a monodromic singular point*.

The problem of distinguishing between a center or a focus is called *the problem of the center* or *the center-focus problem*. The interest in solving the problem of the center for differential systems (3) arose as part of investigation of the local 16th Hilbert problem.

The problem of the center was solved for some classes of cubic differential systems with invariant algebraic curves: four invariant straight lines [6], [17]; three invariant straight lines [6], [22]; two parallel invariant straight lines [13], [20]; two invariant straight lines and one invariant conic [3], [4], [5], [6]; two invariant straight lines and one invariant cubic [8], [9], [10], [15].

The goal of this paper is to obtain new center conditions for a cubic differential system with two invariant algebraic curves. The paper is organized as follows. In Section 2 we present some known results concerning the local integrability and the center variety. In Section 3 we discuss the relation between the existence of algebraic solutions and the Darboux integrability. In Section 4 we obtain necessary and sufficient conditions for a cubic system, with a singular point  $O(0,0)$  of a center or a focus type, to have one invariant straight line and one irreducible invariant cubic such that these curves have not intersection points. In Section 5 we prove that the singular point  $O(0,0)$  is a center if and only if the first five Lyapunov quantities vanish. Finally, we give four sets of necessary and sufficient conditions for a singular point  $O(0,0)$  to be a center.

## 2 LYAPUNOV'S QUANTITIES

An approach to the problem of the center is to study the integrability of a differential system (3). Lyapunov [18] proved that the problem of the center is equivalent to the problem of local integrability of a differential system (3) in the neighborhood of a singular point  $O(0,0)$ . A singular point  $O(0,0)$  is a center for (3) if and only if the system has in some neighborhood of  $O(0,0)$  a nonconstant analytic first integral [1]

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} F_k(x, y) = C \quad (4)$$

or an analytic integrating factor of the form

$$\mu(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x, y), \quad (5)$$

where  $F_k$ ,  $\mu_k$  are homogeneous polynomials of degree  $k$ .

According to [18] the problem of the center can be reduced to the problem of solving an infinite system of polynomial equations whose variables are parameters of the differential system. There exists a formal power series  $F(x, y) = \sum F_k(x, y)$ , defined in a neighbourhood of the origin, such that the rate of change of  $F(x, y)$  along trajectories of system (3) is

$$\frac{dF}{dt} = L_1(x^2 + y^2)^2 + L_2(x^2 + y^2)^3 + \dots \quad (6)$$

where the quantities  $L_k, k = 1, 2, \dots$  are polynomials in the coefficients of system (3) called *the Lyapunov (focus) quantities*. The stability of the origin is determined by the first nonvanishing Lyapunov quantity.

The origin is a fine focus of *order*  $m$  if  $L_k = 0, k = \overline{1, m-1}$  and  $L_m \neq 0$ . In this case at most  $m$  small amplitude limit cycles can bifurcate from a fine focus of order  $m$ .

**Theorem 1.** *The origin is a center for differential system (3) if and only if all the Lyapunov quantities vanish ( $L_k = 0, k = \overline{1, \infty}$ ).*

By the Hilbert's basis theorem, there is a natural number  $N$  such that  $L_k = 0$  for all  $k$  if and only if  $L_k = 0$  for all  $k \leq N$ . It is only necessary to find a finite number of Lyapunov quantities, though in any given case it is not known a priori how many are required. We come to the following Open Problem [6]:

**Problem 1.** *For any degree  $n, n \geq 3$ , of the differential system (3) to find such  $N = N(n)$  that vanishing the first  $N$  Lyapunov quantities implies the existence of a center.*

The problem of the center was solved for: quadratic differential systems ( $N = 3$ ); cubic symmetric differential systems ( $N = 5$ ); the Kukles differential system ( $N = 8$ ).

### 3 ALGEBRAIC SOLUTIONS AND DARBOUX INTEGRABILITY

An important problem concerning the integrability of differential systems (3) is whether the trajectories to (3) can be described implicitly by an algebraic formula, for example,  $\Phi(x, y) = 0$ , where  $\Phi$  is a polynomial.

**Definition 1.** *An invariant algebraic curve of system (3) is the solution set in  $\mathbb{C}^2$  of an equation  $\Phi(x, y) = 0$ , where  $\Phi$  is a polynomial in  $x, y$  with complex coefficients such that*

$$\mathcal{X}\Phi = P(x, y)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} = K\Phi, \quad (7)$$

for some polynomial in  $x, y, K = K(x, y)$  of degree  $n - 1$  with complex coefficients, called the cofactor of the invariant algebraic curve  $\Phi(x, y) = 0$ .

**Definition 2.** *An invariant algebraic curve  $\Phi(x, y) = 0$  is called an algebraic solution of (3) if  $\Phi(x, y)$  is an irreducible polynomial in  $\mathbb{C}[x, y]$ .*

Let  $\Phi = 0$  be an algebraic solution of degree  $m$  for system (3). Then this algebraic solution is:

- 1) an *invariant straight line* if  $m = 1$ , and it has the form  $a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0$ ;
- 2) an *invariant conic* if  $m = 2$ , and it has the form

$$a_{20}x^2 + a_{11}xy + c_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0;$$

3) an *invariant cubic* if  $m = 3$ , and it has the form

$$a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0.$$

Since Darboux found in 1878 connections between invariant algebraic curves and the existence of first integrals of planar polynomial differential systems, the theory of invariant algebraic curves is still full of open questions [21], [23].

**Problem 2.** Give a method to find an upper bound  $M$  to the degree of the algebraic solutions for a fixed polynomial system (1) of degree  $n \geq 2$ .

**Problem 3.** What is the maximum number  $\alpha(n)$  of algebraic invariant curves in the set of all polynomial differential systems of degree  $n > 1$  having finitely many invariant algebraic curves?

For a given polynomial system (1) of degree  $n$  the calculation of the invariant algebraic curves is a very hard problem because in general we don't have any evidence about the number of invariant algebraic curves and the degree of a curve.

Invariant algebraic curves are central object in the theory of integrability of polynomial differential systems. This motivates the growing interest of researchers in application and development of the algebraic method of integrability for polynomial systems. This kind of integrability is usually called *Darboux integrability*, and it provides a link between the *integrability of polynomial differential systems and the number of invariant algebraic curves* they have [6], [21].

Suppose the polynomial differential system (1) of degree  $n$  has  $q$  invariant algebraic curves  $\Phi_j(x, y) = 0$ ,  $j = 1, \dots, q$ . Darboux proposed to search for a first integral (an integrating factor) in the form

$$\Phi_1^{\alpha_1} \Phi_2^{\alpha_2} \dots \Phi_q^{\alpha_q}, \quad (8)$$

where  $\Phi_j$  are invariant algebraic curves and  $\Phi_j \in C[x, y]$ ,  $\alpha_j \in C$ .

**Problem 4.** For polynomial systems of degree  $n$  determine the relations between the number  $q$  of invariant algebraic curves, their degrees and the existence of first integrals.

A partial answer to this problem was given by Darboux in the following Theorem [21].

**Theorem 2.** Suppose system (1) has  $q$  distinct irreducible invariant algebraic curves  $\Phi_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, q$ . If  $q \geq \frac{1}{2}n(n+1)$ , then either we have a Darboux first integral or a Darboux integrating factor.

The method of Darboux is very useful and elegant one to prove integrability for some families of differential systems if we have "enough" invariant algebraic curves. This motivates the following problem for polynomial differential systems (3).

**Problem 5.** Find the polynomial differential systems (3) with a fewer number of invariant algebraic curves than  $n(n+1)/2$  for which a singular point  $O(0, 0)$  is a center.

In [21] Schlomiuk proved that the method of Darboux can be applied to prove centers in all cases of the quadratic systems: any quadratic system ( $n = 2$ ) with a singular point of a center type is Darboux integrable. The Darboux integrability conditions for some families of cubic systems having invariant algebraic curves were found in [2], [11], [12], [14], [16].

4 A CUBIC SYSTEM WITH TWO ALGEBRAIC SOLUTIONS

We consider the cubic system of differential equations  $\{(3), (n = 3)\}$  with a singular point  $O(0, 0)$  of a center or a focus type, written in the form

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x, y), \end{aligned} \tag{9}$$

in which variables and coefficients are assumed to be real. For system (9) we study the following problems:

(i) Find the subclass of systems (9) which has an invariant straight line  $l_1 = 0$  and an invariant cubic  $\Phi = 0$ , without intersections points, i.e.  $l_1 \cap \Phi = \emptyset$ .

(ii) For this subclass find the integrability conditions such that the singular point  $O(0, 0)$  is a center.

In this section we give necessary and sufficient conditions for the existence of one invariant straight line and one invariant cubic in a cubic differential system (9), such that  $l_1 \cap \Phi = \emptyset$ . Suppose system (9) has a real invariant straight line  $l_1 \equiv a_1x + b_1y + 1 = 0$ ,  $(a_1, b_1) \neq 0$ . Then by rotating the system of coordinates  $(x \rightarrow x \cos \varphi - y \sin \varphi, y \rightarrow x \sin \varphi + y \cos \varphi)$  and rescaling the axes of coordinates  $(x \rightarrow \alpha x, y \rightarrow \alpha y)$ , we can make the line to be  $1 - x = 0$ .

In [7] it was proved the following Lemma

**Lemma 1.** *The cubic differential system (9) has an invariant straight line  $1 - x = 0$  if and only if the following set of conditions holds*

$$k = -a, m = -c - 1, p = -f, r = 0. \tag{10}$$

When conditions (10) hold, the cubic system (9) can be written as follows

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - x)(y + xy + ax^2 + cxy + fy^2) \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

We shall find the conditions on the coefficients of cubic system (11) under which the system has one real irreducible invariant cubic of the form

$$\Phi(x, y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0, \tag{12}$$

where  $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03} \in \mathbb{R}$  and  $(a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}) \neq 0$ , such that these curves have not intersection points, i.e.  $\Phi(1, y) \neq 0$ .

The equation

$$\Phi(1, y) \equiv a_{03}y^3 + (a_{12} + 1)y^2 + a_{21}y + a_{30} + 1 = 0 \tag{13}$$

has not real solutions in the following cases:

- (A)  $a_{03} = 0, a_{12} = -1, a_{21} = 0, a_{30} \neq -1$ ;
- (B)  $a_{03} = 0, a_{12} \neq -1, a_{21}^2 - 4(a_{30} + 1)(a_{12} + 1) < 0$ .

**Theorem 3.** *The cubic differential system (11) has an invariant straight line  $1 - x = 0$  and an invariant cubic (12) without intersection points if and only if one the following sets of conditions  $(c_1)$ – $(c_7)$  holds:*

- (c<sub>1</sub>)  $f = a + d$ ,  $g = (2b + 2c + 3)/2$ ,  $k = -a$ ,  $l = (-a - d)/2$ ,  $m = -c - 1$ ,  $n = (-2b - c - 2)/2$ ,  
 $p = (-a - d)$ ,  $q = a/2$ ,  $r = s = 0$ ;
- (c<sub>2</sub>)  $a = k = r = 0$ ,  $d = -2l$ ,  $f = -2l$ ,  $m = -c - 1$ ,  $p = 2l$ ,  $q = l(2b + 2c - 2g + 3)$ ,  
 $n = (-2b - c - 2)/2$ ,  $s = (8g - 4b^2 - 10bc + 4bg - 14b - 6c^2 + 6cg - 17c - 12)/6$ ;
- (c<sub>3</sub>)  $a = k = r = 0$ ,  $d = f$ ,  $l = (3f)/2$ ,  $m = -c - 1$ ,  $n = [3(c + 1)]/2$ ,  $p = -f$ ,  $q =$   
 $[f(2g - 2b - 2c + 1)]/2$ ,  $s = (4bg - 4b^2 - 10bc - 6c^2 + 6cg + 3c + 3)/6$ ;
- (c<sub>4</sub>)  $c = (fa_{30} - f - a)/(a + f)$ ,  $d = 2(a + 2f)$ ,  $g = (3aa_{30} + 2ab - 2a + 5fa_{30} + 2bf - 2f)/[2(a +$   
 $f)]$ ,  $k = -a$ ,  $l = 2f$ ,  $m = (-fa_{30})/(a + f)$ ,  $n = [f(8a^2 + 16af + 3a_{30} + 8f^2)]/[2(a + f)]$ ,  
 $p = -f$ ,  $q = 2ab - 2a + 5fa_{30} + 2bf - 2f$ ,  $r = 0$ ,  $s = [a_{30}(2ab - 3a + 3fa_{30} + 2bf - 2f)]/[2(a + f)]$ ;
- (c<sub>5</sub>)  $a = (-2l)/(c + 2)$ ,  $d = -a$ ,  $f = p = r = s = 0$ ,  $g = (2b - c - 3)/2$ ,  $k = -a$ ,  $m = -c - 1$ ,  
 $n = (2bc + 2b - c^2 - 3c - 2)/2$ ,  $q = (-l)/(c + 2)$ ;
- (c<sub>6</sub>)  $d = 2a$ ,  $f = l = p = r = 0$ ,  $k = -a$ ,  $m = -c - 1$ ,  $n = [(2b - c - 2)(c + 1)]/2$ ,  $q =$   
 $a(2b - c - 3)$ ,  $s = [(2b - c - 2g - 3)(c - 2b + 4)]/6$ ;
- (c<sub>7</sub>)  $p = r = 0$ ,  $a = (4a_{12}^2 - 4ca_{12} - 4a_{12} + a_{21}^2)/(2a_{21})$ ,  $d = (a_{21}^2 - 2a_{12}^2 + 2ca_{12} + 2a_{12})/a_{21}$ ,  
 $g = (3a_{21}^2 - 12a_{12}^2 + 8ba_{12} + 8ca_{12})/(8a_{12})$ ,  $k = -a$ ,  $l = [a_{12}(1 - a_{12}^2 + ca_{12} + c)]/a_{21}$ ,  
 $m = -c - 1$ ,  $n = (3 - 6a_{12}^2 + 2ba_{12} + 5ca_{12} + a_{12} + 3c)/2$ ,  $q = (4a_{12}^2 - 9a_{12}a_{21}^2 - 4ca_{12} - 4a_{12} +$   
 $4ba_{21}^2 + 7ca_{21}^2 + 3a_{21}^2)/(4a_{21})$ ,  $s = (4a_{12} - 4a_{12}^2 - 4a_{12}a_{21}^2 + 4ca_{12} + 2ba_{21}^2 + 3ca_{21}^2)/(8a_{12})$ .

*Proof.* We consider the cubic curve (12). By Definition 1, the curve (12) is invariant for (11) if there exist numbers  $c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01} \in \mathbb{R}$  such that

$$P(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \equiv \Phi(x, y)(c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{10}x + c_{01}y). \quad (14)$$

Identifying the coefficients of the monomials  $x^i y^j$  in (14), we reduce this identity to a system of fifteen equations

$$\{U_{ij} = 0, \quad i + j = 3, 4, 5\} \quad (15)$$

for the unknowns  $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01}$  and the coefficient of system (11).

To prove the theorem we solve the algebraic system of equations (15) in Cases (A) and (B).

1) In Case (A), we suppose that

$$a_{03} = 0, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = 0, \quad a_{30} \neq -1$$

and the cubic curve (12) has the form  $\Phi(x, y) \equiv x^2 + y^2 - xy^2 + a_{30}x^3 = 0$ .

When  $i + j = 3$ , from (15), we find that  $c_{01} = -2b - 1$ ,  $c_{10} = 2a$ ,  $a_{30} = (2g - 2b - 2c - 3)/3$ ,  $f = a + d$ , and when  $i + j = 4$ , we obtain that  $c_{20} = [a(2g - 2b - 2c - 9)]/3$ ,  $c_{11} = -c - 2n - 1$ ,  $c_{02} = -a - d - 2l$ ,  $s = (3n - 2b^2 - 5bc + 2bg - 4b - 3c^2 + 3cg - 7c + 4g - 3)/3$ ,  $q = (3l - 2ab - 2ac + 2ag - 3bd - 3cd + 3dg - 3d)/3$ .

In this case, the equation  $U_{50} = 0$  of (15) looks as  $U_{50} \equiv af_1 f_2 = 0$ , where

$$f_1 = b + c - g, \quad f_2 = 2b + 2c - 2g + 3.$$

Assume that  $f_1 = 0$ , then  $g = b + c$ . In this case the cubic curve (14) is reducible.

Assume that  $f_1 \neq 0$  and let  $f_2 = 0$ . Then the equations of (15) yield

$$l = (-a - d)/2, \quad n = (-c - 2 - 2b)/2, \quad g = (2b + 2c + 3)/2.$$

In this case we obtain the set of conditions (c<sub>1</sub>) and the invariant cubic is

$$x^2 + y^2 - xy^2 = 0.$$

Assume that  $f_1 f_2 \neq 0$  and let  $a = 0$ . Then the equations of (15) yield

$$n = (-c - 2 - 2b)/2, \quad d = -2l.$$

In this case we obtain the set of conditions ( $c_2$ ) and the invariant cubic looks

$$3x^2 + 3y^2 - 3xy^2 + (2g - 2b - 2c - 3)x^3 = 0, \quad g - b - c \neq 0.$$

2) In Case (B), we suppose that

$$a_{03} = 0, \quad a_{12} \neq -1, \quad \Delta = a_{21}^2 - 4(a_{30} + 1)(a_{12} + 1) < 0$$

and the cubic curve (12) has the form  $\Phi(x, y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 = 0$ .

When  $i + j = 3$ , from (15), we find that  $c_{01} = a_{12} - 2b$ ,  $c_{10} = 2a - a_{21}$ ,  $d = (3a_{21} - 2a + 2f)/2$ ,  $g = (3a_{30} - 3a_{12} + 2b + 2c)/2$ , and when  $i + j = 4$ , we obtain that  $c_{02} = fa_{12} - 2l$ ,  $c_{11} = (c + 2 - a_{12})a_{12} - 2n$ ,  $c_{20} = aa_{12} - 3a_{12}a_{21} - 3fa_{12} + ba_{21} + 2ca_{21} + 3fa_{30} - 2f + 2l - 2q$ ,  $s = (2aa_{21} + 8a_{12}^2 - 8a_{12}a_{30} - 4ba_{12} - 6ca_{12} - a_{21}^2 - 6fa_{21} + 4ba_{30} + 6ca_{30} - 4c + 4n - 4)/4$ ,  $q = (2aa_{12} - 2aa_{30} + 4a - 9a_{12}a_{21} - 6fa_{12} + a_{21}a_{30} + 4ba_{21} + 6ca_{21} + 6fa_{30} - 4f + 4l)/4$ .

In this case, the equation  $U_{05} = 0$  of (15) looks  $U_{05} \equiv fa_{12}(a_{12} + 1) = 0$ , where  $a_{12} + 1 \neq 0$ .

Assume that  $a_{12} = 0$ , then  $F_{23} \equiv (l - 2f)a_{21} = 0$ . If  $a_{21} = 0$ , then  $a_{30}(a_{30} + 1) \neq 0$  and  $a = 0$ ,  $n = (3(c + 1))/2$ ,  $l = (3f)/2$ . We obtain the set of conditions ( $c_3$ ) for the existence of the invariant cubic

$$3x^2 + 3y^2 + 2(g - b - c)x^3 = 0, \quad 2(g - b - c) + 3 > 0.$$

Assume that  $a_{21} \neq 0$  and let  $l = 2f$ . In this case we express  $n$  from the equation  $U_{32} = 0$  and calculate the resultant of the polynomials  $U_{50}$  and  $U_{41}$  with respect to  $c$ . We obtain that

$$Res(U_{50}, U_{41}, c) = 2a_{21}g_1g_2\Delta,$$

where  $g_1 = a_{21} - 2f - 2a$ ,  $g_2 = a_{21}^2 + a_{30}^2 \neq 0$ ,  $\Delta = a_{21}^2 - 4a_{30} - 4$ .

If  $a_{21} = 2(a + f)$ , then  $g_1 = 0$ . We get the set of conditions ( $c_4$ ) and the invariant cubic

$$x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + 2(a + f)x^2y = 0, \quad (a + f)^2 - a_{30} - 1 < 0.$$

Assume now that  $a_{12} \neq 0$  and let  $f = 0$ . If  $a_{21} = 0$ , then  $a \neq 0$  and the equations of (15) yields  $a_{12} = c + 1$ ,  $a_{30} = 0$ ,  $a = (-2l)/(c + 2)$ ,  $n = [(2b - c - 2)(c + 1)]/2$ . In this case we find the set of conditions ( $c_5$ ) for the existence of the invariant cubic

$$x^2 + y^2 + (c + 1)xy^2 = 0, \quad c + 2 > 0.$$

Suppose that  $a_{21} \neq 0$ . In this case we express  $l$  from  $U_{23} = 0$ ,  $n$  from  $U_{32} = 0$  and calculate the resultant of the polynomials  $U_{50}$  and  $U_{41}$  with respect to  $c$ . We obtain that

$$Res(U_{50}, U_{41}, c) = 4a_{21}h_1h_2h_3\Delta,$$

where  $h_1 = a_{12} - c - 1$ ,  $h_2 = 4a_{12}a_{30} - a_{21}^2$ ,  $h_3 = (a_{12} - a_{30})^2 + a_{21}^2 \neq 0$ ,  $\Delta = a_{21}^2 - 4a_{12}a_{30} - 4a_{12} - 4a_{30} - 4$ .

If  $h_1 = 0$ , then  $a_{12} = c + 1$  and the equations  $U_{50} = 0$ ,  $U_{41} = 0$  yield  $a_{21} = 2a$ . We obtain the set of conditions ( $c_6$ ) for the existence of the invariant cubic

$$3(x^2 + y^2) + (c - 2b + 2g + 3)x^3 + 6ax^2y + 3(c + 1)xy^2 = 0,$$

where  $3a^2 + 2bc + 4b - c^2 - 2cg - 8c - 4g - 12 < 0$ .

If  $h_1 \neq 0$  and  $h_2 = 0$ , then  $a_{30} = a_{21}^2/(4a_{12})$  and the equations  $U_{50} = 0$ ,  $U_{41} = 0$  of (15) yield  $a = (4a_{12}^2 - 4ca_{12} - 4a_{12} + a_{21}^2)/(2a_{21})$ . We obtain the set of conditions ( $c_7$ ) for the existence of the invariant cubic

$$4a_{12}(x^2 + y^2) + a_{21}^2x^3 + 4a_{12}a_{21}x^2y + 4a_{12}^2xy^2 = 0, \quad a_{12}(4a_{12}^2 + 4a_{12} + a_{21}^2) > 0.$$

□

## 5 THE CENTER-FOCUS PROBLEM FOR A CUBIC SYSTEM WITH TWO ALGEBRAIC SOLUTIONS

In this section we solve the center-focus problem for a cubic differential system (11) with one invariant straight line and one invariant cubic, in the case when these invariant algebraic curves have not real intersection points.

**Lemma 2.** *The following sets of conditions are sufficient conditions for the origin to be a center of system (11):*

- (i)  $c = 1 - 2b$ ,  $d = 2(a + 2f)$ ,  $g = (3a - 3ab - 4bf + 4f)/f$ ,  $k = -a$ ,  $l = 2f$ ,  $m = 2(b - 1)$ ,  
 $n = 4af - 3b + 4f^2 + 3$ ,  $p = -f$ ,  $q = 8(a - ab - bf + f)$ ,  $r = 0$ ,  $s = (4ab^2 - 7ab + 3a + 4b^2f - 8bf + 4f)/f$ ;
- (ii)  $c = 2(b - 1)$ ,  $d = -a$ ,  $f = n = p = r = s = 0$ ,  $l = -ab$ ,  $g = (-1)/2$ ,  $k = -a$ ,  
 $m = 1 - 2b$ ,  $q = a/2$ ;
- (iii)  $d = 2a$ ,  $f = l = p = r = 0$ ,  $k = -a$ ,  $m = -c - 1$ ,  $n = [(2b - c - 2)(c + 1)]/2$ ,  $q =$   
 $a(2b - c - 3)$ ,  $s = [(2b - c - 2g - 3)(c - 2b + 4)]/6$ ;
- (iv)  $a = [2(2b + 2c + 1)(2b - c + 2g - 1)]/(9a_{21})$ ,  $d = [2(2b + 2c + 1)(c - 2b + 4g + 4)]/(9a_{21})$ ,  
 $k = -a$ ,  $f = p = r = 0$ ,  $l = [2(2b + 2c + 1)(c - 2b + 2)(b + c + 2)]/(27a_{21})$ ,  $m = -c - 1$ ,  
 $n = [(c - 2b + 2)(b + c + 2)]/3$ ,  $q = [2(cg - 2bg - 1)(2b + 2c + 1)]/(9a_{21})$ ,  $s = [(c - 2b)(g + 2) + 4g - 1]/9$ ,  $9a_{21}^2 - 4(2b + 2c + 1)(2g + 1) = 0$ .

*Proof.* In the case (i), the cubic system (11) has the algebraic curves

$$1 - x = 0, f(x^2 + y^2) + 2f(a + f)x^2y + 2(a - ab + f - bf)x^3 = 0$$

and the integrating factor

$$\mu = (1 - x)(f(x^2 + y^2) + 2f(a + f)x^2y + 2(a - ab + f - bf)x^3)^2.$$

In the case (ii), the cubic system (11) has the algebraic curves

$$1 - x = 0, x^2 + y^2 + 2bxy^2 - xy^2 = 0$$

and the integrating factor

$$\mu = \frac{1}{(1 - x)^{1/2}(x^2 + y^2 + 2bxy^2 - xy^2)^{3/2}}.$$

In the case (iii), the cubic system (11) has the algebraic curves

$$1 - x = 0, 3(x^2 + y^2) + (c - 2b + 2g + 3)x^3 + 6ax^2y + 3(c + 1)xy^2 = 0$$

and the first integral

$$(1 - x)^{c-2b+1}(3x^2 + 3y^2 + (c - 2b + 2g + 3)x^3 + 6ax^2y + 3(c + 1)xy^2) = C.$$

In the case (iv), the cubic system (11) has the algebraic curves

$$1 - x = 0, 12(2b + 2c + 1)(x^2 + y^2) + 9a_{21}^2x^3 + 12(2b + 2c + 1)a_{21}x^2y + 4(2b + 2c + 1)^2xy^2 = 0$$

and the integrating factor

$$\mu = \frac{(1 - x)^{-1/2}}{(12(2b + 2c + 1)(x^2 + y^2) + 9a_{21}^2x^3 + 12(2b + 2c + 1)a_{21}x^2y + 4(2b + 2c + 1)^2xy^2)^{3/2}}.$$

□

**Theorem 4.** *Let the cubic differential system (11) have one invariant straight line  $1 - x = 0$  and one invariant cubic (12) without intersection points. Then the singular point  $O(0, 0)$  is a center if and only if the first five Lyapunov quantities vanish.*

*Proof.* To prove the theorem, we compute the first five Lyapunov quantities  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, 5$  in each set of conditions  $(c_1)$ – $(c_7)$  obtained in Section 4 by using the algorithm described in [6]. In the expressions for  $L_j$  we will neglect the denominators and non-zero factors.

In Case  $(c_1)$  the first Lyapunov quantity looks  $L_1 = 2ac + 3a - 2bd - d$ . Assume that  $a \neq 0$ , then  $L_1 = 0$  yields  $c = (d - 3a + 2bd + d)/(2a)$ . The second Lyapunov quantity is  $L_2 = 32a^4 + 48a^3d - 32a^2b^2 - 12ba^2 + 16a^2d^2 - a^2 - 32ab^2d - 22abd - 3ad - 8b^2d^2 - 8bd^2 - 2d^2$ .

Suppose that  $L_2 = 0$ . This equation admits the following parametrization

$$\begin{aligned} a &= (128u^2 - v^2 + 1)/(128u), \quad d = (v^2 - 64u^2 - 1)/(64u), \\ b &= (128u^2v + 128u^2 - v^3 - 5v^2 + v + 5)/(1024u^2). \end{aligned}$$

The third Lyapunov quantity is  $L_3 = e_1e_2$ , where  $e_1 = v + 1$ ,  $e_2 = 1684(3v - 1)(v - 5)u^4 + 192(3v^2 + 16v - 3)(v^2 - 1)u^2 - 3(v + 5)(v + 1)^3(v - 1)^2$ ,  $e_3 = 128u^2 - v^2 + 1 \neq 0$ .

If  $e_1 = 0$ , then  $v = -1$ . In this case the cubic system (11) has two invariant straight lines  $1 - x = 0$ ,  $1 - ay = 0$  and one invariant cubic  $x^2 + y^2 - xy^2 = 0$ . For this case the center-focus problem was solved in [15].

Assume that  $e_1 \neq 0$  and let  $e_2 = 0$ . We calculate the Lyapunov quantities  $L_4$ ,  $L_5$  and the resultant of the polynomials  $e_2$  and  $L_4$  with respect to  $u$ . We obtain that

$$Res(L_4, e_2, u) = (v - 5)^2(v + 5)^6(3v - 1)^2(v - 1)^{16}(5v - 11)^2e_1^{22}j_1^2,$$

where  $j_1 = 6615v^6 + 20055v^5 - 14584v^4 + 487314v^3 - 672085v^2 + 42135v + 188150$ .

If  $v = 5$ , then  $e_2 = 0$  yields  $u^2 = 45/304$  and  $L_4 \neq 0$ . If  $v = -5$ , then  $e_2 = 0$  implies  $u^2 = 9/640$  and  $L_4 \neq 0$ . If  $v = 1/3$  or  $v = 1$ , then  $e_2 = 0$  has not real solutions.

If  $v = 11/5$ , then  $e_2 = r_1r_2r_3$ , where  $r_1 = 1225u^2 - 54$ ,  $r_2 = 10u - 3$ ,  $r_3 = 10u + 3$ .

When  $r_1 = 0$  we obtain that  $L_4 \neq 0$ . If  $r_2 = 0$ , then the cubic system (11) has two invariant straight lines  $1 - x = 0$ ,  $2 - y = 0$  and one invariant cubic  $x^2 + y^2 - xy^2 = 0$ . If  $r_3 = 0$ , then (11) has two invariant straight lines  $1 - x = 0$ ,  $2 + y = 0$ . The center-focus problem was solved in [15].

Assume that  $j_1 = 0$ . The equations  $j_1 = 0$  and  $e_2 = 0$  have real solutions, but  $L_5 \neq 0$ . In this case the origin is a focus.

In Case  $(c_2)$  the first Lyapunov quantity looks  $L_1 = l(2b + 1)$ . If  $l = 0$ , then the cubic system (11) has two parallel invariant straight lines  $1 - x = 0$ ,  $1 + (1 + c)x = 0$  and one invariant cubic  $3(x^2 + y^2) - 3xy^2 + (2g - 2b - 2c - 3)x^3 = 0$ . For this case the center-focus problem was solved in [8]. If  $l \neq 0$  and  $b = (-1)/2$ , then  $L_1 = L_2 = \dots = L_5 = 0$ . In this case the right hand sides of (11) have a common factor  $1 + (c + 1)x - 2ly$ , in contradiction with assumption that  $P(x, y)$  and  $Q(x, y)$  are coprime polynomials.

In Case  $(c_3)$  the first Lyapunov quantity looks  $L_1 = f(2b - 3)$ . If  $f = 0$ , then the cubic (11) has two parallel invariant straight lines  $1 - x = 0$ ,  $1 + (1 + c)x = 0$  and one invariant cubic. The center-focus problem was solved in [8]. If  $f \neq 0$  and  $b = 3/2$ , then  $L_1 = L_2 = 0$ . In this case the right hand sides of (11) have a common factor  $1 + (c + 1)x + fy$ , in contradiction with assumption that  $P(x, y)$  and  $Q(x, y)$  are coprime polynomials.

In Case  $(c_4)$  the first Lyapunov quantity looks  $L_1 = f(2f - 2ab + 2a - fa_{30} - 2bf)$ . If  $f = 0$ , then we are in conditions (iii) of Lemma 2 ( $c = -1$ ). If  $f \neq 0$  and  $a_{30} = [2(a - ab - bf + f)]/f$ , then  $L_1 = L_2 = \dots = L_5 = 0$ . In this case we have the set of conditions (i) from Lemma 2.

In Case  $(c_5)$  the first Lyapunov quantity looks  $L_1 = 4l(c - 2b + 2)$ . If  $l = 0$ , then the cubic system (11) has two parallel invariant straight lines  $x = 1$ , and one invariant cubic. If  $l \neq 0$  and

$c = 2(b - 1)$ , then have the conditions (ii) from Lemma 2.

In Case ( $c_6$ ) we obtain that  $L_1 = L_2 = \cdots = L_5 = 0$ . In this case we get the set of conditions (iii) from Lemma 2.

In Case ( $c_7$ ) the first Lyapunov quantity looks  $L_1 = (3a_{12} - 2b - 2c - 1)(a_{12} - c - 1)$ . If  $a_{12} = c + 1$ , then we have the set of conditions (iii) from Lemma 2. Assume that  $a_{12} \neq c + 1$  and let  $a_{12} = (2b + 2c + 1)/3$ . We are in conditions (iv) of Lemma 2.  $\square$

Taking into account Lemma 2 and Theorem 4, and excluding the cases when the cubic system (11) has two invariant straight lines and one invariant cubic, we give the necessary and sufficient conditions for the origin to be a center in the following Theorem.

**Theorem 5.** *The singular point  $O(0,0)$  is a center for a cubic differential system (11), with one invariant straight line and one invariant cubic without intersection points, if and only if one of the sets of conditions (i)-(iv) holds.*

#### REFERENCES

- [1] Amel'kin V. V., Lukashevich N. A., Sadovskii A. P. *Non-linear oscillations in the systems of second order*. Belarusian University Press, Belarus, 1982.
- [2] Chavarriga J., Giné J. *Integrability of cubic systems with degenerate infinity*. *Differential Equations Dynamical Systems*, 1988, **6**, 425–438.
- [3] Cozma D. *The problem of the center for cubic systems with two parallel invariant straight lines and one invariant conic*. *Nonlinear Differ. Equ. and Appl.*, 2009, **16**, 213–234.
- [4] Cozma D. *The problem of the centre for cubic differential systems with two homogeneous invariant straight lines and one invariant conic*. *Annals of Differential Equations*, 2010, **26** (4), 385–399.
- [5] Cozma D. *Center problem for a class of cubic systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant conic*. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, 2010, **64** (3), 51–66.
- [6] Cozma D. *Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics*. Ştiinţa, Chişinău, 2013.
- [7] Cozma D. *Centers in a cubic differential system with one invariant straight line*. *ROMAI Journal*, 2011, **7** (2), 53–62.
- [8] Cozma D. *The problem of the center for cubic systems with two parallel invariant straight lines and one invariant cubic*. *ROMAI Journal*, 2015, **11** (2), 63–75.
- [9] Cozma D., Dascalescu A. *Center conditions for a cubic system with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic*. *ROMAI Journal*, 2017, **13** (2), 39–54.
- [10] Cozma D., Dascalescu A. *Integrability conditions for a class of cubic differential systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic*. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, 2018, **86** (1), 120–138.
- [11] Cozma D., Matei A. *Center conditions for a cubic differential system having an integrating factor*. *Bukovinian Math. Journal*, 2020, **8** (2), 6–13.

- [12] Cozma D., Matei A. *Integrating factors for a cubic differential system with two algebraic solutions*. ROMAI Journal, 2021, **17** (1), 65–86.
- [13] Cozma D. *Darboux integrability of a cubic differential system with two parallel invariant straight lines*. Carpathian J. Math., 2022, **38** (1), 129–137.
- [14] Cozma D. *First integrals in a cubic differential system with one invariant straight line and one invariant cubic*. Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences, 2023, **16** (2), 97–105.
- [15] Dascalescu A. *Center conditions for a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant cubic*. Bukovinian Math. Journal, 2018, **6** (3-4), 53–62. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2018.03.053>
- [16] Dukarić M. *On integrability and cyclicity of cubic systems*. Electr. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2020, **55**, 1–19.
- [17] Llibre J. *On the centers of cubic polynomial differential systems with four invariant straight lines*. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2020, **55** (2), 387–402.
- [18] Lyapunov A.M. *The general problem of stability of motion*. Gostekhizdat, Moscow, 1950.
- [19] Romanovski V.G., Shafer D.S. *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach*, Birkhäuser, Boston, Basel, 2009.
- [20] Sadovskii A.P., Shcheglova T.V. *Solution of the center-focus problem for a nine-parameter cubic system*. Differential Equations, 2011, **47** (2), 208–223.
- [21] Schlomiuk D. *Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields*, in Bifurcations and periodic orbits of vector fields (D. Schlomiuk, Ed.), Kluwer Academic Publishes, 1993, pp. 429-467.
- [22] Şubă A., Cozma D. *Solution of the problem of center for cubic differential systems with three invariant straight lines in generic position*. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2005, **6**, 45–58.
- [23] Xiang Zhang. *Integrability of Dynamical Systems: Algebra and Analysis*. Singapore: Springer Nature Singapore, 2017.

*Received 26.11.2025*

---

Козма Д. *Center conditions for a cubic differential system with one invariant straight line and one invariant cubic* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №2. — С. 47–57.

In this paper the conditions for the existence of one invariant straight line and one invariant cubic in a cubic differential system with a singular point of a center or a focus type, when these curves have not intersecting points, are found. It is proved that the singular point is a center if and only if the first five Lyapunov quantities vanish. The center conditions were determined by using the method of Darboux integrability.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.07>

GUTIK O., POZDNIAKOVA I.

ON INJECTIVE ENDOMORPHISMS OF THE SEMIGROUP  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  WITH THE TWO-ELEMENT FAMILY  $\mathcal{F}^2$  OF INDUCTIVE NONEMPTY SUBSETS OF  $\omega$ 

We describe injective endomorphisms of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  with the two-element family  $\mathcal{F}^2$  of inductive nonempty subsets of  $\omega$ . In particular we show that every injective endomorphism  $\epsilon$  of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  is presented in the form  $\epsilon = \epsilon_0 \mathfrak{a}$ , where  $\epsilon_0$  is an injective  $(0, 0, [0])$ -endomorphism of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  and  $\mathfrak{a}$  is an automorphism  $\mathfrak{a}$  of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ . Also we describe all injective  $(0, 0, [0])$ -endomorphisms  $\epsilon_0$  of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ , i.e., such that  $(0, 0, [0])\epsilon_0 = (0, 0, [0])$ .

*Key words and phrases:* bicyclic monoid, extended bicyclic semigroup, inverse semigroup, bicyclic extension, endomorphism, injective.

---

Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, 79000, Ukraine  
e-mail: [oleg.gutik@lnu.edu.ua](mailto:oleg.gutik@lnu.edu.ua), [inna.pozdniakova@lnu.edu.ua](mailto:inna.pozdniakova@lnu.edu.ua)

## 1 INTRODUCTION, MOTIVATION AND MAIN DEFINITIONS

We shall follow the terminology of [1, 2, 13]. By  $\omega$  we denote the set of all non-negative integers and by  $\mathbb{Z}$  the set of all integers.

A subset  $A$  of  $\omega$  is said to be *inductive*, if  $i \in A$  implies  $i + 1 \in A$ . Obvious, that  $\emptyset$  is an inductive subset of  $\omega$ .

**Remark 1** ([6]). 1. By Lemma 6 from [5] a nonempty subset  $F \subseteq \omega$  is inductive in  $\omega$  if and only  $(-1 + F) \cap F = F$ .

2. Since the set  $\omega$  with the usual order is well-ordered, for any nonempty inductive subset  $F$  in  $\omega$  there exists nonnegative integer  $n_F \in \omega$  such that  $[n_F] = F$ .

3. Statement (2) implies that the intersection of an arbitrary finite family of nonempty inductive subsets in  $\omega$  is a nonempty inductive subset of  $\omega$ .

Let  $\mathcal{P}(\omega)$  be the family of all subsets of  $\omega$ . For any  $F \in \mathcal{P}(\omega)$  and  $n, m \in \omega$  we put  $n - m + F = \{n - m + k : k \in F\}$  if  $F \neq \emptyset$  and  $n - m + \emptyset = \emptyset$ . A subfamily  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  is called  $\omega$ -closed if  $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathcal{F}$  for all  $n \in \omega$  and  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ . For any  $a \in \omega$  we denote  $[a] = \{x \in \omega : x \geq a\}$ .

A semigroup  $S$  is called *inverse* if for any element  $x \in S$  there exists a unique  $x^{-1} \in S$  such that  $xx^{-1}x = x$  and  $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ . The element  $x^{-1}$  is called the *inverse* of  $x \in S$ . If  $S$  is an

---

УДК 512.534

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20M18, 20F29, 20M10.

inverse semigroup, then the function  $\text{inv}: S \rightarrow S$  which assigns to every element  $x$  of  $S$  its inverse element  $x^{-1}$  is called the *inversion*.

If  $S$  is a semigroup, then we shall denote the subset of all idempotents in  $S$  by  $E(S)$ . If  $S$  is an inverse semigroup, then  $E(S)$  is closed under multiplication and we shall refer to  $E(S)$  as a *band* (or the *band of  $S$* ). Then the semigroup operation on  $S$  determines the following partial order  $\preceq$  on  $E(S)$ :  $e \preceq f$  if and only if  $ef = fe = e$ . This order is called the *natural partial order* on  $E(S)$ . A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents.

If  $S$  is an inverse semigroup then the semigroup operation on  $S$  determines the following partial order  $\preceq$  on  $S$ :  $s \preceq t$  if and only if there exists  $e \in E(S)$  such that  $s = te$ . This order is called the *natural partial order* on  $S$  [16].

The *bicyclic monoid* or the *bicyclic semigroup*  $\mathcal{C}(p, q)$  is the semigroup with the identity 1 generated by two elements  $p$  and  $q$  subjected only to the condition  $pq = 1$ . The semigroup operation on  $\mathcal{C}(p, q)$  is determined as follows:

$$q^k p^l \cdot q^m p^n = q^{k+m-\min\{l,m\}} p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

It is well known that the bicyclic monoid  $\mathcal{C}(p, q)$  is a bisimple (and hence simple) combinatorial  $E$ -unitary inverse semigroup and every non-trivial congruence on  $\mathcal{C}(p, q)$  is a group congruence [1].

On the set  $B_{\omega} = \omega \times \omega$  we define the semigroup operation “ $\cdot$ ” in the following way

$$(i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2), & \text{if } j_1 \leq i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2), & \text{if } j_1 \geq i_2. \end{cases} \quad (1)$$

It is well known that the bicyclic monoid  $\mathcal{C}(p, q)$  to the semigroup  $B_{\omega}$  is isomorphic by the mapping  $\mathfrak{h}: \mathcal{C}(p, q) \rightarrow B_{\omega}$ ,  $q^k p^l \mapsto (k, l)$  (see: [1, Section 1.12] or [15, Exercise IV.1.11(ii)]).

Next we shall describe the construction which is introduced in [5].

Let  $B_{\omega}$  be the bicyclic monoid and  $\mathcal{F}$  be an  $\omega$ -closed subfamily of  $\mathcal{P}(\omega)$ . On the set  $B_{\omega} \times \mathcal{F}$  we define the semigroup operation “ $\cdot$ ” in the following way

$$(i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{if } j_1 \leq i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{if } j_1 \geq i_2. \end{cases} \quad (2)$$

In [5] is proved that if the family  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  is  $\omega$ -closed then  $(B_{\omega} \times \mathcal{F}, \cdot)$  is a semigroup. Moreover, if an  $\omega$ -closed family  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  contains the empty set  $\emptyset$  then the set  $I = \{(i, j, \emptyset) : i, j \in \omega\}$  is an ideal of the semigroup  $(B_{\omega} \times \mathcal{F}, \cdot)$ . For any  $\omega$ -closed family  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  the following semigroup

$$B_{\omega}^{\mathcal{F}} = \begin{cases} (B_{\omega} \times \mathcal{F}, \cdot) / I, & \text{if } \emptyset \in \mathcal{F}; \\ (B_{\omega} \times \mathcal{F}, \cdot), & \text{if } \emptyset \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

is defined in [5]. The semigroup  $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$  generalizes the bicyclic monoid and the countable semigroup of matrix units. It is proven in [5] that  $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$  is a combinatorial inverse semigroup and Green’s relations, the natural partial order on  $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$  and its set of idempotents are described. Here, the criteria when the semigroup  $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$  is simple, 0-simple, bisimple, 0-bisimple, or it has the identity, are given. In particular in [5] it is proved that the semigroup  $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$  is isomorphic to the semigroup of  $\omega \times \omega$ -matrix units if and only if  $\mathcal{F}$  consists of a singleton set and the empty set, and  $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$  is isomorphic to the bicyclic monoid if and only if  $\mathcal{F}$  consists of a non-empty inductive subset of  $\omega$ .

Group congruences on the semigroup  $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$  and its homomorphic retracts in the case when an  $\omega$ -closed family  $\mathcal{F}$  consists of inductive non-empty subsets of  $\omega$  are studied in [6]. It is proven that

a congruence  $\mathfrak{C}$  on  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  is a group congruence if and only if its restriction on a subsemigroup of  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ , which is isomorphic to the bicyclic semigroup, is not the identity relation. Also in [6], all non-trivial homomorphic retracts and isomorphisms of the semigroup  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  are described.

In [3, 14] the algebraic structure of the semigroup  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  is established in the case when  $\omega$ -closed family  $\mathcal{F}$  consists of atomic subsets of  $\omega$ .

The set  $\mathbf{B}_\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  with the semigroup operation defined by formula (1) is called the *extended bicyclic semigroup* [17]. On the set  $\mathbf{B}_\mathbb{Z} \times \mathcal{F}$ , where  $\mathcal{F}$  is an  $\omega$ -closed subfamily of  $\mathcal{P}(\omega)$ , we define the semigroup operation “ $\cdot$ ” by formula (2). In [7] it is proved that  $(\mathbf{B}_\mathbb{Z} \times \mathcal{F}, \cdot)$  is a semigroup. Moreover, if an  $\omega$ -closed family  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  contains the empty set  $\emptyset$  then the set  $\mathbf{I} = \{(i, j, \emptyset) : i, j \in \mathbb{Z}\}$  is an ideal of the semigroup  $(\mathbf{B}_\mathbb{Z} \times \mathcal{F}, \cdot)$ . For any  $\omega$ -closed family  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  the following semigroup

$$\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}} = \begin{cases} (\mathbf{B}_\mathbb{Z} \times \mathcal{F}, \cdot) / \mathbf{I}, & \text{if } \emptyset \in \mathcal{F}; \\ (\mathbf{B}_\mathbb{Z} \times \mathcal{F}, \cdot), & \text{if } \emptyset \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

is defined in [7] similarly as in [5]. In [7] it is proven that  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}}$  is a combinatorial inverse semigroup. Green’s relations, the natural partial order on the semigroup  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}}$  and its set of idempotents are described. Here, the criteria when the semigroup  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}}$  is simple, 0-simple, bisimple, 0-bisimple, is isomorphic to the extended bicyclic semigroup, are derived. In particular in [7] it is proved that the semigroup  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}}$  is isomorphic to the semigroup of  $\omega \times \omega$ -matrix units if and only if  $\mathcal{F}$  consists of a singleton set and the empty set, and  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}}$  is isomorphic to the extended bicyclic semigroup if and only if  $\mathcal{F}$  consists of a non-empty inductive subset of  $\omega$ . Also, in [7] it is proved that in the case when the family  $\mathcal{F}$  consists of all singletons of  $\omega$  and the empty set, the semigroup  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}}$  is isomorphic to the Brandt  $\lambda$ -extension of the semilattice  $(\omega, \min)$ , where  $(\omega, \min)$  is the set  $\omega$  with the semilattice operation  $x \cdot y = \min\{x, y\}$ .

It is well-known that every automorphism of the bicyclic monoid  $\mathbf{B}_\omega$  is the identity self-map of  $\mathbf{B}_\omega$  [1], and hence the group  $\mathbf{Aut}(\mathbf{B}_\omega)$  of automorphisms of  $\mathbf{B}_\omega$  is trivial. The group  $\mathbf{Aut}(\mathbf{B}_\mathbb{Z})$  of automorphisms of the extended bicyclic semigroup  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}$  is established in [4] and there it is proved that  $\mathbf{Aut}(\mathbf{B}_\mathbb{Z})$  is isomorphic to the additive group of integers  $\mathbb{Z}(+)$ . In the paper [9] we prove that for any family  $\mathcal{F}$  of nonempty inductive subsets of  $\omega$  the group  $\mathbf{Aut}(\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}})$  of automorphisms of the semigroup  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}}$  is isomorphic to the additive group of integers.

In [12] the semigroups of endomorphisms of the bicyclic semigroup and the extended bicyclic semigroup are described. All types of monoid endomorphisms of the monoid  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^2}$  for two-element family  $\mathcal{F}^2$  of nonempty inductive subsets of  $\omega$  are described in [8, 10, 11].

This paper is a continuation of [7, 9]. We describe injective endomorphisms of the semigroup  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}^2}$  with the two-element family  $\mathcal{F}^2$  of inductive nonempty subsets of  $\omega$ . In particular we show that every injective endomorphism  $\mathfrak{e}$  of  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}^2}$  is presented in the form  $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0 \mathfrak{a}$ , where  $\mathfrak{e}_0$  is an injective  $(0, 0, [0])$ -endomorphism of  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}^2}$  and  $\mathfrak{a}$  is an automorphism  $\mathfrak{a}$  of  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}^2}$ . Also we describe all injective  $(0, 0, [0])$ -endomorphisms  $\mathfrak{e}_0$  of  $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}^2}$ , i.e., such that  $(0, 0, [0])\mathfrak{e}_0 = (0, 0, [0])$ .

Later we assume that an  $\omega$ -closed family  $\mathcal{F}^2$  consists of two inductive nonempty subsets of  $\omega$ .

## 2 ENDOMORPHISMS OF THE SEMIGROUP $\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\mathcal{F}^2}$ WITH THE FIXED POINT $(0, 0, [0])$

If  $\mathcal{F}$  is an arbitrary  $\omega$ -closed family of inductive subsets in  $\mathcal{P}(\omega)$  and  $[s] \in \mathcal{F}$  for some  $s \in \mathbb{Z}$  then

$$\mathbf{B}_\mathbb{Z}^{\{[s]\}} = \{(i, j, [s]) : i, j \in \mathbb{Z}\}$$

is a subsemigroup of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$  and by Proposition 5 of [7] the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\{\{s\}\}}$  is isomorphic to the extended bicyclic semigroup.

**Remark 2.** By Proposition 1 of [9] for any  $\omega$ -closed family  $\mathcal{F}$  of inductive subsets in  $\mathcal{P}(\omega)$  there exists an  $\omega$ -closed family  $\mathcal{F}^*$  of inductive subsets in  $\mathcal{P}(\omega)$  such that  $[0] \in \mathcal{F}^*$  and the semigroups  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$  and  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^*}$  are isomorphic. Hence without loss of generality we may assume that the family  $\mathcal{F}^2$  contains the set  $[0]$ .

An endomorphism  $\epsilon$  of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  is called a  $(0, 0, [0])$ -endomorphism if  $(0, 0, [0])\epsilon = (0, 0, [0])$ .

**Remark 3.** Theorem 1 of [8] state that for every injective monoid endomorphism  $\epsilon$  of the monoid  $B_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$  only one of the following conditions holds:

- (1) there exist a positive integer  $k$  and  $p \in \{0, \dots, k-1\}$  such that  $\epsilon = \alpha_{k,p}$ , where the mapping  $\alpha_{k,p}$  defined by the formula

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\alpha_{k,p} &= (ki, kj, [0]), \\ (i, j, [1])\alpha_{k,p} &= (p + ki, p + kj, [1]), \end{aligned}$$

$$i, j \in \omega;$$

- (2) there exist a positive integer  $k \geq 2$  and  $p \in \{1, \dots, k-1\}$  such that  $\epsilon = \beta_{k,p}$ , where the mapping  $\beta_{k,p}$  defined by the formula

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\beta_{k,p} &= (ki, kj, [0]), \\ (i, j, [1])\beta_{k,p} &= (p + ki, p + kj, [0]), \end{aligned}$$

$$i, j \in \omega.$$

For any integer  $k$  we define

$$B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(k, k, 0) = (k, k, [0]) \cdot B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2} \cdot (k, k, [0]).$$

By Proposition 2 [9],  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(k, k, 0)$  is a subsemigroup of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  which is isomorphic to  $B_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$ .

Fix an arbitrary positive integer  $k$  and any  $p \in \{0, \dots, k-1\}$ . For all  $i, j \in \mathbb{Z}$  we denote the transformation  $\alpha_{k,p}$  of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  in the following way

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\alpha_{k,p} &= (ki, kj, [0]), \\ (i, j, [1])\alpha_{k,p} &= (p + ki, p + kj, [1]), \end{aligned}$$

**Lemma 1.** For an arbitrary positive integer  $k$  and any  $p \in \{0, \dots, k-1\}$  the map  $\alpha_{k,p}$  is an injective endomorphism of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ .

*Proof.* By Proposition 5 of [7] the subsemigroups  $B_{\mathbb{Z}}^{\{\{0\}\}}$  and  $B_{\mathbb{Z}}^{\{\{1\}\}}$  are isomorphic to the extended bicyclic semigroup. By Proposition of [12] we have that the restrictions of  $\alpha_{k,p}$  onto the subsemigroups  $B_{\mathbb{Z}}^{\{\{0\}\}}$  and  $B_{\mathbb{Z}}^{\{\{1\}\}}$  are endomorphisms of  $B_{\mathbb{Z}}^{\{\{0\}\}}$  and  $B_{\mathbb{Z}}^{\{\{1\}\}}$ , respectively. This implies that for all  $i, j, s, t \in \mathbb{Z}$  the following equalities hold

$$\begin{aligned} ((i, j, [0]) \cdot (s, t, [0]))\alpha_{k,p} &= (i, j, [0])\alpha_{k,p} \cdot (s, t, [0])\alpha_{k,p}, \\ ((i, j, [1]) \cdot (s, t, [1]))\alpha_{k,p} &= (i, j, [1])\alpha_{k,p} \cdot (s, t, [1])\alpha_{k,p}. \end{aligned}$$

For any  $i, j, p, q \in \mathbb{Z}$  we have that

$$\begin{aligned}
((i, j, [0]) \cdot (s, t, [1]))\alpha_{k,p} &= \begin{cases} (i + s - j, t, (j - s + [0]) \cap [1])\alpha_{k,p}, & \text{if } j < s; \\ (i, t, [0] \cap [1])\alpha_{k,p}, & \text{if } j = s; \\ (i, j + t - s, [0] \cap (s - j + [1]))\alpha_{k,p}, & \text{if } j > s \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i + s - j, t, [1])\alpha_{k,p}, & \text{if } j < s; \\ (i, t, [1])\alpha_{k,p}, & \text{if } j = s; \\ (i, j + t - s, [0])\alpha_{k,p}, & \text{if } j > s \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (p + k(i + s - j), p + kt, [1]), & \text{if } j < s; \\ (p + ki, p + kt, [1]), & \text{if } j = s; \\ (ki, k(j + t - s), [0]), & \text{if } j > s, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i, j, [0])\alpha_{k,p} \cdot (s, t, [1])\alpha_{k,p} &= (ki, kj, [0]) \cdot (p + ks, p + kt, [1]) = \\
&= \begin{cases} (ki + p + ks - kj, p + kt, (kj - p - ks + [0]) \cap [1]), & \text{if } kj < p + ks; \\ (ki, p + kt, [0] \cap [1]), & \text{if } kj = p + ks; \\ (ki, kj + p + kt - p - ks, [0] \cap (p + ks - kj + [1])), & \text{if } kj > p + ks \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (p + k(i + s - j), p + kt, [1]), & \text{if } kj < p + ks; \\ (ki, p + kt, [1]), & \text{if } kj = p + ks; \\ (ki, k(j + t - s), [0]), & \text{if } kj > p + ks \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} (p + k(i + s - j), p + kt, [1]), & \text{if } kj < ks; \\ (p + ki, p + kt, [1]), & \text{if } kj = ks; \\ (ki, kt, [1]), & \text{if } kj = p + ks \text{ and } p = 0; \\ \text{vagueness}, & \text{if } kj = p + ks \text{ and } p \neq 0; \\ (ki, k(j + t - s), [0]), & \text{if } kj > ks \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (p + k(i + s - j), p + kt, [1]), & \text{if } j < s; \\ (p + ki, p + kt, [1]), & \text{if } j = s; \\ (ki, k(j + t - s), [0]), & \text{if } j > s, \end{cases}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
((i, j, [1]) \cdot (s, t, [0]))\alpha_{k,p} &= \begin{cases} (i + s - j, t, (j - s + [1]) \cap [0])\alpha_{k,p}, & \text{if } j < s; \\ (i, t, [1] \cap [0])\alpha_{k,p}, & \text{if } j = s; \\ (i, j + t - s, [1] \cap (s - j + [0]))\alpha_{k,p}, & \text{if } j > s \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i + s - j, t, [0])\alpha_{k,p}, & \text{if } j < s; \\ (i, t, [1])\alpha_{k,p}, & \text{if } j = s; \\ (i, j + t - s, [1])\alpha_{k,p}, & \text{if } j > s \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (k(i + s - j), kt, [0]), & \text{if } j < s; \\ (p + ki, p + kt, [1]), & \text{if } j = s; \\ (p + ki, p + k(j + t - s), [1]), & \text{if } j > s, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (i, j, [1])\alpha_{k,p} \cdot (s, t, [0])\alpha_{k,p} = (p + ki, p + kj, [1]) \cdot (ks, kt, [0]) = \\
& = \begin{cases} (p + ki + ks - p - kj, kt, (p + kj - ks + [1]) \cap [0]), & \text{if } p + kj < ks; \\ (p + ki, kt, [1] \cap [0]), & \text{if } p + kj = ks; \\ (p + ki, p + kj + kt - ks, [1] \cap (ks - p - kj + [0])), & \text{if } p + kj > ks \end{cases} = \\
& = \begin{cases} (k(i + s - j), kt, [0]), & \text{if } p + kj < ks; \\ (p + ki, kt, [1]), & \text{if } p + kj = ks; \\ (p + ki, p + k(j + t - s), [1]), & \text{if } p + kj > ks \end{cases} = \\
& = \begin{cases} (k(i + s - j), kt, [0]), & \text{if } kj < ks; \\ (ki, kt, [1]), & \text{if } p + kj = ks \text{ and } p = 0; \\ \text{vagueness,} & \text{if } p + kj = ks \text{ and } p \neq 0; \\ (p + ki, p + kt, [1]), & \text{if } kj = ks; \\ (p + ki, p + k(j + t - s), [1]), & \text{if } kj > ks \end{cases} = \\
& = \begin{cases} (k(i + s - j), kt, [0]), & \text{if } j < s; \\ (p + ki, p + kt, [1]), & \text{if } j = s; \\ (p + ki, p + k(j + t - s), [1]), & \text{if } j > s, \end{cases}
\end{aligned}$$

because  $p \in \{0, \dots, k-1\}$ . Thus,  $\alpha_{k,p}$  is an endomorphism of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ .  $\square$

Fix an arbitrary positive integer  $k \geq 2$  and any  $p \in \{1, \dots, k-1\}$ . For all  $i, j \in \mathbb{Z}$  we define the transformation  $\beta_{k,p}$  of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  in the following way

$$\begin{aligned}
& (i, j, [0])\beta_{k,p} = (ki, kj, [0]), \\
& (i, j, [1])\beta_{k,p} = (p + ki, p + kj, [0]).
\end{aligned}$$

It is obvious that  $\beta_{k,p}$  is an injective transformation of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ .

**Lemma 2.** *For an arbitrary positive integer  $k \geq 2$  and any  $p \in \{1, \dots, k-1\}$  the map  $\beta_{k,p}$  is an injective endomorphism of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ .*

*Proof.* By Proposition 5 of [7] the subsemigroups  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[0]\}}$  and  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[1]\}}$  are isomorphic to the extended bicyclic semigroup. By Lemma 3 of [12], the restriction of  $\beta_{k,p}$  onto the subsemigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[0]\}}$  is an endomorphism of  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[0]\}}$ , and the restriction of  $\beta_{k,p}$  onto the subsemigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[1]\}}$  is a homomorphism of  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[1]\}}$  into  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[0]\}}$ . This implies that for all  $i, j, s, t \in \mathbb{Z}$  the following equalities hold

$$\begin{aligned}
& ((i, j, [0]) \cdot (s, t, [0]))\beta_{k,p} = (i, j, [0])\beta_{k,p} \cdot (s, t, [0])\beta_{k,p}, \\
& ((i, j, [1]) \cdot (s, t, [1]))\beta_{k,p} = (i, j, [1])\beta_{k,p} \cdot (s, t, [1])\beta_{k,p}.
\end{aligned}$$

For any  $i, j, p, q \in \mathbb{Z}$  we have that

$$\begin{aligned}
((i, j, [0]) \cdot (s, t, [1]))\beta_{k,p} &= \begin{cases} (i + s - j, t, (j - s + [0]) \cap [1])\beta_{k,p}, & \text{if } j < s; \\ (i, t, [0] \cap [1])\beta_{k,p}, & \text{if } j = s; \\ (i, j + t - s, [0] \cap (s - j + [1]))\beta_{k,p}, & \text{if } j > s \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i + s - j, t, [1])\beta_{k,p}, & \text{if } j < s; \\ (i, t, [1])\beta_{k,p}, & \text{if } j = s; \\ (i, j + t - s, [0])\beta_{k,p}, & \text{if } j > s \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (p + k(i + s - j), p + kt, [0]), & \text{if } j < s; \\ (p + ki, p + kt, [0]), & \text{if } j = s; \\ (ki, k(j + t - s), [0]), & \text{if } j > s, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i, j, [0])\beta_{k,p} \cdot (s, t, [1])\beta_{k,p} &= (ki, kj, [0]) \cdot (p + ks, p + kt, [0]) = \\
&= \begin{cases} (ki + p + ks - kj, p + kt, (kj - p - ks + [0]) \cap [0]), & \text{if } kj < p + ks; \\ (ki, p + kt, [0] \cap [0]), & \text{if } kj = p + ks; \\ (ki, kj + p + kt - p - ks, [0] \cap (p + ks - kj + [0])), & \text{if } kj > p + ks \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (p + k(i + s - j), p + kt, [0]), & \text{if } kj < p + ks; \\ (ki, p + kt, [0]), & \text{if } kj = p + ks; \\ (ki, k(j + t - s), [0]), & \text{if } kj > p + ks \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (p + k(i + s - j), p + kt, [0]), & \text{if } kj < ks; \\ (p + ki, p + kt, [0]), & \text{if } kj = ks; \\ (ki, kt, [0]), & \text{if } kj = p + ks \text{ and } p = 0; \\ \text{vagueness,} & \text{if } kj = p + ks \text{ and } p \neq 0; \\ (ki, k(j + t - s), [0]), & \text{if } kj > ks \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (p + k(i + s - j), p + kt, [0]), & \text{if } j < s; \\ (p + ki, p + kt, [0]), & \text{if } j = s; \\ (ki, k(j + t - s), [0]), & \text{if } j > s, \end{cases}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
((i, j, [1]) \cdot (s, t, [0]))\beta_{k,p} &= \begin{cases} (i + s - j, t, (j - s + [1]) \cap [0])\beta_{k,p}, & \text{if } j < s; \\ (i, t, [1] \cap [0])\beta_{k,p}, & \text{if } j = s; \\ (i, j + t - s, [1] \cap (s - j + [0]))\beta_{k,p}, & \text{if } j > s \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i + s - j, t, [0])\beta_{k,p}, & \text{if } j < s; \\ (i, t, [1])\beta_{k,p}, & \text{if } j = s; \\ (i, j + t - s, [1])\beta_{k,p}, & \text{if } j > s \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (k(i + s - j), kt, [0]), & \text{if } j < s; \\ (p + ki, p + kt, [0]), & \text{if } j = s; \\ (p + ki, p + k(j + t - s), [0]), & \text{if } j > s, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i, j, [1])\beta_{k,p} \cdot (s, t, [0])\beta_{k,p} &= (p + ki, p + kj, [0]) \cdot (ks, kt, [0]) = \\
&= \begin{cases} (p + ki + ks - p - kj, kt, (p + kj - ks + [0]) \cap [0]), & \text{if } p + kj < ks; \\ (p + ki, kt, [0] \cap [0]), & \text{if } p + kj = ks; \\ (p + ki, p + kj + kt - ks, [0] \cap (ks - p - kj + [0])), & \text{if } p + kj > ks \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (k(i + s - j), kt, [0]), & \text{if } p + kj < ks; \\ (p + ki, kt, [0]), & \text{if } p + kj = ks; \\ (p + ki, p + k(j + t - s), [0]), & \text{if } p + kj > ks \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (k(i + s - j), kt, [0]), & \text{if } kj < ks; \\ (ki, kt, [0]), & \text{if } p + kj = ks \text{ and } p = 0; \\ \text{vagueness,} & \text{if } p + kj = ks \text{ and } p \neq 0; \\ (p + ki, p + kt, [0]), & \text{if } kj = ks; \\ (p + ki, p + k(j + t - s), [0]), & \text{if } kj > ks \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (k(i + s - j), kt, [0]), & \text{if } j < s; \\ (p + ki, p + kt, [0]), & \text{if } j = s; \\ (p + ki, p + k(j + t - s), [0]), & \text{if } j > s, \end{cases}
\end{aligned}$$

because  $p \in \{1, \dots, k-1\}$ . Thus,  $\beta_{k,p}$  is an endomorphism of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ .  $\square$

**Lemma 3.** *Let  $\epsilon$  be a  $(0, 0, [0])$ -endomorphism of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ . Then there exists a non-negative integer  $n$  such that  $(i, j, [0])\epsilon = (ni, nj, [0])$  for all  $i, j \in \mathbb{Z}$ .*

*Proof.* By Proposition 5 of [7] the subsemigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[0]\}}$  is isomorphic to the extended bicyclic semigroup. By Lemma 3 of [12], the restriction of the transformation  $\epsilon$  onto the subsemigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[0]\}}$  is an endomorphism of  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\{[0]\}}$ . Then Lemma 5 of [12] implies the statement of the lemma.  $\square$

**Theorem 1.** *Let  $\epsilon$  be an injective  $(0, 0, [0])$ -endomorphism of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ . Then one of the following conditions holds:*

- (1) *there exist a positive integer  $k$  and  $p \in \{0, \dots, k-1\}$  such that  $\epsilon = \alpha_{k,p}$ ;*
- (2) *there exist a positive integer  $k \geq 2$  and  $p \in \{1, \dots, k-1\}$  such that  $\epsilon = \beta_{k,p}$ .*

*Proof.* It is obvious that for any  $(i, j, [l]) \in \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ ,  $l = 0, 1$ , there exists a non-negative integer  $n$  such that  $(i, j, [l]) \in \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0)$ . This implies the equality

$$\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2} = \bigcup_{n \in \omega} \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0).$$

Also by the semigroup operation of  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  for  $m, n \in \omega$  we have that  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0) \subseteq \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-m, -m, 0)$  if and only if  $m \geq n$ .  $\blacksquare$

Since  $\epsilon$  is an injective  $(0, 0, [0])$ -endomorphism of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ , Lemma 3 implies that there exists a positive integer  $k$  such that  $(i, j, [0])\epsilon = (ki, kj, [0])$  for all  $i, j \in \mathbb{Z}$ .

Fix an arbitrary positive integer  $n$ . By Proposition 2 [9],  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0)$  is a subsemigroup of  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  which is isomorphic to  $\mathbf{B}_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$ . This implies that the semigroups  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0)$  and  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(0, 0, 0)$  are isomorphic. By Corollary 2 from [6] every automorphism of the semigroup  $\mathbf{B}_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$  is the identity map, and hence every automorphism of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(0, 0, 0)$  is the identity map, too.

We define the isomorphism  $\mathfrak{I}_0^{-n}: \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0) \rightarrow \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(0, 0, 0)$  by the formula

$$(i - n, j - n, [s])\mathfrak{I}_0^{-n} = (i, j, [s]),$$

for any positive integers  $i, j$  and  $s \in \{0, 1\}$ . The above arguments imply that so defined isomorphism is unique. Hence we have that for any injective endomorphism  $\mathbf{e}_{-n}$  of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0)$  there exists an injective endomorphism  $\mathbf{e}_0$  of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(0, 0, 0)$  such that the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0) & \xrightarrow{\mathbf{e}_{-n}} & \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0) \\ \mathfrak{I}_0^{-n} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{I}_0^{-n} \\ \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(0, 0, 0) & \xrightarrow{\mathbf{e}_0} & \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(0, 0, 0) \end{array}$$

is commutative. Hence, by Remark 3 we have that for any injective endomorphism  $\mathbf{e}_{-n}$  of the semigroup  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}(-n, -n, 0)$  one of the following conditions holds:

- (1) there exist a positive integer  $k$  and  $p \in \{0, \dots, k-1\}$  such that  $\mathbf{e}_0 = \alpha_{k,p}$ ;
- (2) there exist a positive integer  $k \geq 2$  and  $p \in \{1, \dots, k-1\}$  such that  $\mathbf{e}_0 = \beta_{k,p}$ .

If  $\mathbf{e}_0 = \alpha_{k,p}$  then

$$\begin{aligned} (i - n, j - n, [0])\mathbf{e}_{-n} &= (((i - n, j - n, [0])\mathfrak{I}_0^{-n})\alpha_{k,p})(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= ((i, j, [0])\alpha_{k,p})(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= (ki, kj, [0])(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= (ki - n, kj - n, [0]) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (i - n, j - n, [1])\mathbf{e}_{-n} &= (((i - n, j - n, [1])\mathfrak{I}_0^{-n})\alpha_{k,p})(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= ((i, j, [0])\alpha_{k,p})(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= (p + ki, p + kj, [1])(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= (p + ki - n, p + kj - n, [1]), \end{aligned}$$

for any positive integers  $i, j$ .

If  $\mathbf{e}_0 = \beta_{k,p}$  then

$$\begin{aligned} (i - n, j - n, [0])\mathbf{e}_{-n} &= (((i - n, j - n, [0])\mathfrak{I}_0^{-n})\beta_{k,p})(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= ((i, j, [0])\beta_{k,p})(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= (ki, kj, [0])(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= (ki - n, kj - n, [0]) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (i - n, j - n, [1])\mathbf{e}_{-n} &= (((i - n, j - n, [1])\mathfrak{I}_0^{-n})\beta_{k,p})(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= ((i, j, [0])\beta_{k,p})(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= (p + ki, p + kj, [0])(\mathfrak{I}_0^{-n})^{-1} = \\ &= (p + ki - n, p + kj - n, [0]), \end{aligned}$$

for any positive integers  $i, j$ .

This completes the proof of the theorem.  $\square$

### 3 ON INJECTIVE ENDOMORPHISMS OF THE SEMIGROUP $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$

**Remark 4.** 1. By Theorem 1 of [9] every  $(0, 0, [0])$ -automorphism of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  is the identity map.

2. For every integer  $s$  the map  $\mathfrak{h}_s: B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ ,  $(i, j, [p]) \mapsto (i+s, j+s, [q])$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \{0, 1\}$ , is an automorphism of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  (Proposition 6 of [9]).

3. The map  $\tilde{\mathfrak{a}}: B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ ,  $(i, j, [p]) \mapsto (i+q, j+q, [1-q])$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \{0, 1\}$ , is an automorphism of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  (Lemma 2 of [9]), and moreover  $\tilde{\mathfrak{a}}^2 = \mathfrak{h}_1$ .

**Lemma 4.** For any endomorphism  $\epsilon$  of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  there exists an automorphism  $\mathfrak{a}$  of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  such that  $(0, 0, [0])\epsilon = (0, 0, [0])\mathfrak{a}$ . Moreover,  $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}}^{2s} = \mathfrak{h}_s$  in the case when  $(0, 0, [0])\epsilon = (s, s, [0])$ , and  $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}}^{2s+1} = \mathfrak{h}_s\tilde{\mathfrak{a}}$  in the case when  $(0, 0, [0])\epsilon = (s, s, [1])$  for some integer  $s$ .

*Proof.* Since any homomorphic image of an idempotent is again an idempotent, by Lemma 1 of [7] there exist an integer  $s$  and  $q \in \{0, 1\}$  such that  $(0, 0, [0])\epsilon = (s, s, [q])$ . Simple verifications and Remark 4 imply that  $(0, 0, [0])\tilde{\mathfrak{a}}^{2s} = (0, 0, [0]) = (s, s, [0])$  and  $(0, 0, [0])\tilde{\mathfrak{a}}^{2s+1} = (0, 0, [0])\mathfrak{h}_s\tilde{\mathfrak{a}} = (s, s, [1])$ .  $\square$

**Theorem 2.** For any endomorphism  $\epsilon$  of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  there exist a  $(0, 0, [0])$ -endomorphism  $\epsilon_0$  of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  and an automorphism  $\mathfrak{a}$  of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  such that  $\epsilon = \epsilon_0\mathfrak{a}$ . Moreover,  $\epsilon = \epsilon_0\tilde{\mathfrak{a}}^{2s} = \epsilon_0\mathfrak{h}_s$  in the case when  $(0, 0, [0])\epsilon = (s, s, [0])$ , and  $\epsilon = \epsilon_0\tilde{\mathfrak{a}}^{2s+1} = \epsilon_0\mathfrak{h}_s\tilde{\mathfrak{a}}$  in the case when  $(0, 0, [0])\epsilon = (s, s, [1])$  for some integer  $s$ .

*Proof.* By Lemma 4 there exists an automorphism  $\mathfrak{a}$  of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  such that  $(0, 0, [0])\epsilon = (0, 0, [0])\mathfrak{a}$ . Then the product  $\epsilon\mathfrak{a}^{-1}$  is a  $(0, 0, [0])$ -endomorphism of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ . Let be  $\epsilon_0 = \epsilon\mathfrak{a}^{-1}$ . Since for an arbitrary monoid  $S$  every right translation  $\rho_u: S \rightarrow S$ ,  $s \mapsto su$  on an element of the group of units of  $S$  is a bijective map, we conclude that the equality  $\epsilon_0 = \epsilon\mathfrak{a}^{-1}$  implies that  $\epsilon = \epsilon_0\mathfrak{a}$ . The last statement follows from the second statement of Lemma 4.  $\square$

Since the composition of two injective maps is an injective map, Theorems 1 and 2 imply the following theorem, which describes the structure of all injective endomorphisms of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ .

**Theorem 3.** For any injective endomorphism  $\epsilon$  of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  there exist an injective  $(0, 0, [0])$ -endomorphism  $\epsilon_0$  of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  and an automorphism  $\mathfrak{a}$  of  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  such that  $\epsilon = \epsilon_0\mathfrak{a}$ . Moreover,  $\epsilon = \epsilon_0\tilde{\mathfrak{a}}^{2s} = \epsilon_0\mathfrak{h}_s$  in the case when  $(0, 0, [0])\epsilon = (s, s, [0])$ ,  $\epsilon = \epsilon_0\tilde{\mathfrak{a}}^{2s+1} = \epsilon_0\mathfrak{h}_s\tilde{\mathfrak{a}}$  in the case when  $(0, 0, [0])\epsilon = (s, s, [1])$  for some integer  $s$ , and one of the following conditions holds:

- (1) there exist a positive integer  $k$  and  $p \in \{0, \dots, k-1\}$  such that  $\epsilon_0 = \alpha_{k,p}$ ;
- (2) there exist a positive integer  $k \geq 2$  and  $p \in \{1, \dots, k-1\}$  such that  $\epsilon_0 = \beta_{k,p}$ .

## REFERENCES

- [1] Clifford A.H., Preston G.B. The algebraic theory of semigroups, Vol. **I**, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
- [2] Clifford A.H., Preston G.B. The algebraic theory of semigroups, Vol. **II**, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
- [3] Gutik O., Lysetska O. *On the semigroup  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  which is generated by the family  $\mathcal{F}$  of atomic subsets of  $\omega$* , Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2021, **92**, 34–50. doi: 10.30970/vmm.2021.92.034-050.
- [4] Gutik O., Maksymyk K. *On variants of the bicyclic extended semigroup*, Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Mat. 2017, **84**, 22–37.
- [5] Gutik O., Mykhalenych M. *On some generalization of the bicyclic monoid*, Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Mat. 2020, **90**, 5–19 (in Ukrainian). doi: 10.30970/vmm.2020.90.005-019
- [6] Gutik O., Mykhalenych M. *On group congruences on the semigroup  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  and its homomorphic retracts in the case when the family  $\mathcal{F}$  consists of inductive non-empty subsets of  $\omega$* , Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Mat. 2021, **91**, 5–27 (in Ukrainian). doi: 10.30970/vmm.2021.91.005-027
- [7] Gutik O.V., Pozdniakova I.V. *On the semigroup generating by extended bicyclic semigroup and an  $\omega$ -closed family*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya. 2021, **64** (1), 21–34 (in Ukrainian); English version: J. Math. Sci. 2023, **274** (5), 602–617. doi: 10.1007/s10958-023-06626-4
- [8] Gutik O., Pozdniakova I. *On the semigroup of injective monoid endomorphisms of the monoid  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  with the two-elements family  $\mathcal{F}$  of inductive nonempty subsets of  $\omega$* , Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2022, **94**, 32–55. doi: 10.30970/vmm.2022.94.032-055
- [9] Gutik O., Pozdniakova I. *On the group of automorphisms of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$  with the family  $\mathcal{F}$  of inductive nonempty subsets of  $\omega$* , Algebra Discrete Math. 2023, **35** (1), 42–61. doi: 10.12958/adm2010
- [10] Gutik O., Pozdniakova I. *On the semigroup of non-injective monoid endomorphisms of the semigroup  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  with the two-elements family  $\mathcal{F}$  of inductive nonempty subsets of  $\omega$* , Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2023, **95**, 14–27. doi: 10.30970/vmm.2023.95.014-027
- [11] Gutik O., Pozdniakova I. *On the semigroup of all monoid endomorphisms of the semigroup  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  with the two-elements family  $\mathcal{F}$  of inductive nonempty subsets of  $\omega$* , Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2024, **96**, 5–24. doi: 10.30970/vmm.2024.96.005-024
- [12] Gutik O., Prokhorenkova O., Sekh D. *On endomorphisms of the bicyclic semigroup and the extended bicyclic semigroup*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2021, **92**, 5–16 (in Ukrainian). doi: 10.30970/vmm.2021.92.005-016
- [13] Lawson M. Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. World Scientific, Singapore, 1998.
- [14] Lysetska O. *On feebly compact topologies on the semigroup  $B_\omega^{\mathcal{F}^1}$* , Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Mat. 2020, **90**, 48–56. doi: 10.30970/vmm.2020.90.048-056
- [15] Petrich M. Inverse semigroups. John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [16] Wagner V.V. *Generalized groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1952, **84**, 1119–1122 (in Russian).
- [17] Warne R.J. *I-bisimple semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 1968 **130** (3), 367–386. doi: 10.1090/S0002-9947-1968-0223476-8

Received 03.09.2025

---

Гутік О., Позднякова І. *Про ін'єктивні ендоморфізми напівгрупи  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  з двоелементною сім'єю  $\mathcal{F}^2$  індуктивних непорожніх підмножин у  $\omega$*  // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №2. — С. 58–69.

Ми описуємо ін'єктивні ендоморфізми напівгрупи  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  з двоелементною сім'єю  $\mathcal{F}^2$  індуктивних непорожніх підмножин у  $\omega$ . Зокрема, доводимо, що кожний ін'єктивний ендоморфізм  $\epsilon$  напівгрупи  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$  зображається у вигляді  $\epsilon = \epsilon_0 \mathbf{a}$ , де  $\epsilon_0$  – ін'єктивний  $(0, 0, [0])$ -ендоморфізм і  $\mathbf{a}$  – автоморфізм  $\mathbf{a}$  напівгрупи  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ . Також ми описуємо усі ін'єктивні  $(0, 0, [0])$ -ендоморфізми  $\epsilon_0$  напівгрупи  $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}^2}$ , тобто такі, що  $(0, 0, [0])\epsilon_0 = (0, 0, [0])$ .

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.08>

Малик І.В., Івасюк Р.В.

## ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ НЕОДНОРІДНИХ ПРИХОВАНИХ НАПІВМАРКІВСЬКИХ МОДЕЛЕЙ

Стаття присвячена дослідженню неоднорідних прихованих напівмарковських моделей, запропоновано методику оцінювання параметрів у випадку, коли зміна розподілів часу перебування у станах та матриць ймовірностей переходів є обмеженою за часом.

Отримані результати дозволяють застосовувати модель для опису систем зі змінною структурою. Запропонована методика може бути використаною в задачах аналізу часових рядів зі структурними змінами, а також для задач оптимального керування стохастичних систем, де важливим є врахування змін у поведінці процесу впродовж часу.

*Ключові слова і фрази:* неоднорідні приховані напівмарковські моделі, стохастичне моделювання.

---

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна  
e-mail: [i.malyk@chnu.edu.ua](mailto:i.malyk@chnu.edu.ua) (Малик І.В.), [ivasiuk.roman@chnu.edu.ua](mailto:ivasiuk.roman@chnu.edu.ua) (Івасюк Р.В.)

### ВСТУП

У роботі Yu S.-Z. [1] розглянуто приховані напівмарковські моделі як розширення класичних прихованих марковських моделей шляхом введення явного розподілу тривалості станів. Це дозволяє моделювати неоднорідні процеси, де часові інтервали між подіями не є експоненційно розподіленими. Автор систематизував різні підходи до побудови таких моделей та модифікував алгоритм forward–backward для їхньої реалізації. У роботі [1] розширено класичну приховану марковську модель, вводячи змінну  $\theta_t$  — тривалість перебування системи у прихованому стані  $Y_t$ . Нехай  $X_t$  позначає спостереження в момент часу  $t$ , тоді повна ймовірність моделі задається як

$$P(X_t, Y_t, \theta_t) = P(Y_t | Y_{t-1}) P(\theta_t | Y_t) P(X_t | Y_t, \theta_t),$$

де  $P(\theta_t | Y_t)$  описує довільний невід’ємний розподіл тривалості часу перебування в станах. Це усуває експоненційне припущення класичної моделі.

Dong і He [2] запропонували сегментальну модифікацію HSMM (Segmental HSMM), орієнтовану на аналіз часових процесів у технічних системах. Модель дозволяє одночасно враховувати

---

УДК 517.956

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.

Information on some grant ...

час перебування в станах і характеристику кожного сегмента, що забезпечує кращу точність діагностики та прогнозування деградаційних процесів. Оцінка параметрів виконувалася за допомогою EM-алгоритму. В даній роботі послідовність замірів процесу поділяється на сегменти  $X_{t_s:t_{s+1}}$ , що відповідають одному стану  $Y_s$  із тривалістю  $\theta_s$ . Ймовірність спостережень для кожного сегмента подається у вигляді функції правдоподібності

$$L = \prod_{s=1}^S P(X_{t_s:t_{s+1}} | Y_s, d\theta_s),$$

що забезпечує гнучке моделювання перехідних процесів у часі.

У роботі [3] застосовано HSMM для статистичного синтезу мовлення, де модель забезпечує керування тривалістю фонем і плавність зміни акустичних параметрів. На відміну від HMM, HSMM дозволяє явно враховувати часову структуру сигналу, що підвищує природність синтезованого мовлення. Оптимізація здійснювалась через модифікований EM-процес. Автори застосували HSMM у задачі синтезу мовлення, де  $X_t$  — вектор спектральних коефіцієнтів звуку, що моделюється гаусівським розподілом

$$P(X_t | Y_t) \sim \mathcal{N}(X_t; \mu_t, \Sigma_t),$$

а параметри  $\mu_t$  та  $\Sigma_t$  відповідають середнім та коваріаційним матрицям для кожного стану  $Y_t$ . Такий підхід дозволяє точно відтворювати динаміку мовного сигналу.

Guedon [4] розробив метод оцінювання параметрів HSMM для дискретних послідовностей спостережень. Його підхід дозволяє працювати з довільними, у тому числі непараметричними, розподілами тривалості станів. Це забезпечує можливість моделювання складних або нерегулярних процесів, де стандартні HMM неефективні. Тут розглянуто оцінку прихованих напівмарковських процесів, у яких розподіл тривалості  $f_\theta(\theta_t)$  визначається непараметрично. Функція правдоподібності моделі записується наступним чином

$$P(X | \theta) = \sum_Z \prod_t f_\theta(\theta_t) P(X_t | Y_t),$$

що робить оцінку часу перебування в станах гнучкішою порівняно з фіксованими розподілами.

Автори роботи [5] використали HSMM для опису фінансових часових рядів, особливо для моделювання змін між режимами високої та низької волатильності. Завдяки урахуванню тривалості ринкових фаз HSMM краще відтворюють статистичні властивості даних, ніж HMM. Параметри моделі оцінювалися методом максимальної правдоподібності. В роботі досліджено застосування HSMM до фінансових часових рядів, моделюючи тривалості  $\theta_t$  гамма-розподілом:

$$P(\theta_t | Y_t) \sim \text{Gamma}(\alpha_{Y_t}, \beta_{Y_t}),$$

де параметри  $(\alpha_{Y_t}, \beta_{Y_t})$  визначають форму та масштаб розподілу для кожного стану. Це дозволяє відтворювати довгі або короткі фази волатильності на ринку.

У роботі [6] здійснено систематичний огляд досліджень, присвячених HMM і HSMM, зосереджуючись на їхніх модифікаціях та практичних застосуваннях. Автори підкреслюють, що неоднорідні та узагальнені версії HSMM активно використовуються у різних галузях — від біоінформатики до фінансового аналізу — завдяки їхній здатності відображати складну часову структуру даних. Повна ймовірність моделі має вигляд

$$P(X, Z, \theta) = \prod_t \theta_t P(Y_t | Y_{t-1}) P(\theta_t | Y_t, X_t) P(X_t | Y_t),$$

що описує неоднорідні та контекстно залежні процеси.

У роботі [7] представлено узагальнений огляд прихованих марковських моделей (НММ) та байєсівських мереж, показавши, як обидва підходи можна інтерпретувати через структуру графових залежностей. Автор розглянув методи оцінювання параметрів, зокрема алгоритм максимальної правдоподібності на основі ЕМ-процедури, та продемонстрував застосування НММ у задачах розпізнавання мовлення, біоінформатики та часових рядів. Ця робота стала фундаментальною для розвитку ідей застосування НММ для більш складних байєсівських моделей. На відміну від інших робіт, у даній роботі представлено класичну НММ як окремий випадок байєсівської мережі, у якій спостереження  $X_t$  генеруються з прихованих станів  $Y_t$  за ймовірністю

$$P(X_t, Y_t) = P(Y_t | Y_{t-1}) P(X_t | Y_t).$$

Така структура закладає основу для побудови складніших моделей, зокрема HSMM та їхніх байєсівських версій.

Scott [8] запропонував байєсівські методи для оцінювання прихованих марковських моделей, у яких усі параметри, включно з кількістю станів, розглядаються як випадкові змінні. Автор використовує алгоритми симпліфікації за Гіббсом та методи Монте-Карло марковських ланцюгів для отримання апостеріорних розподілів. Такий підхід дозволяє оцінити апріорну інформацію та уникнути проблеми переобчислення при різних розмірах моделі. Параметри  $\lambda = (A, B, \pi)$  оцінюються не через ММП, а через апостеріорний розподіл

$$P(\lambda | X) \propto P(X | \lambda)P(\lambda),$$

який апроксимується методами зазначеними вище, що відрізняє цей підхід від частотного аналізу Ghahramani.

Ryden і Titterton [9] розвинули ідею байєсівського оцінювання НММ, застосувавши стрибкові методи Монте-Карло марковських ланцюгів (Jump Markov Chain Monte Carlo, JMCMC). Їхній підхід забезпечує оцінку структури моделі (кількості станів) та параметрів переходів у рамках єдиного алгоритму. Це дослідження стало ключовим кроком до інтеграції байєсівських методів у динамічне моделювання прихованих процесів. Автори застосували JMCMC, де стан моделі може змінюватися разом із кількістю прихованих станів  $K$ , тобто при переході між моделями використовується крок

$$P(K' | K) P(\theta_{K'} | K'),$$

що забезпечує байєсівське порівняння моделей різної розмірності.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Як було зазначено у вступі, основні роботи в напрямку прихованих моделей ґрунтуються на припущенні однорідності в часі, тобто незмінності ймовірнісних характеристик розглянутих систем. Дане припущення являється корисним із декількох причин: по-перше, з точки зору оцінки параметрів, дане припущення являється ефективним, оскільки при оцінці параметрів використовуються асимптотичні методи оцінки, тобто при збільшенні розміру вибірки точність оцінок лише зростає; по-друге дане припущення спрощує оцінку параметрів, оскільки непотрібно оцінювати точки зміни (у випадку кусково-сталих параметрів) або визначення правила зміни для параметрів у випадку неперервної зміни.

Розглянемо випадковий процес  $(\tau_t, X_t, Y_t)$ ,  $t \geq 0$ , де  $\tau_t$  — моменти зміни випадкових процесів  $(X_t, Y_t)$ ,  $t \geq 0$ , причому надалі будемо вважати, що справедливе наступне представлення для моментів зміни  $\tau_t$ :

$$\tau_0 = 0, \tau_t = \tau_{t-1} + \theta_t,$$

де  $\theta_t$  — час перебування у станах для  $t$ -ї зміни процесу  $(X_t, Y_t)$ , причому  $\theta_t$  має розподіл  $F^{(t)}$ ;  $X_t \in \mathbf{X} = \{s_1, \dots, s_n\}$  — прихований дискретний ланцюг Маркова, що описує динаміку прихованого процесу та визначається матрицею перехідних ймовірностей

$$A^{(t)} = (a_{ij}^{(t)})_{i,j \in \mathbf{X}'},$$

$$a_{ij}^{(t)} = P(X_t = j | X_{t-1} = i), t \geq 1, \quad (1)$$

де  $Y_t \in \mathbf{Y} = \{o_1, \dots, o_M\}$  — видимий процес, умовні розподіли якого визначаються на основі процесу  $X_t$  згідно співвідношення

$$B^{(t)} = (b_{ij}^{(t)})_{i \in \mathbf{X}, j \in \mathbf{Y}'},$$

$$b_{ij}^{(t)} = P(Y_t = j | X_t = i), t \geq 1. \quad (2)$$

Таким чином, розглянутий вище неоднорідний прихований напівмарковський процес описується набором параметрів

$$\lambda = \{F^{(t)}, \pi, A^{(t)}, B^{(t)}\}, t \geq 1, \quad (3)$$

де  $\pi$  — початковий розподіл процесу  $X_t$ , тобто

$$\pi_i = P(X_0 = i), i \in \mathbf{X}.$$

Зрозумілим є той факт, що відсутність однорідності по часу параметрів  $(F^{(t)}, A^{(t)}, B^{(t)})$  для (4) ускладнює саму задачу оцінки параметрів із наступних причин:

- За умови відсутності однорідності параметрів потрібно робити додаткові припущення щодо природи змін  $(F^{(t)}, A^{(t)}, B^{(t)})$ .
- Алгоритми оцінки параметрів [10] та алгоритми оцінки оптимальної динаміки прихованого ланцюга [11] розраховані на однорідний випадок. Тому для оцінки параметрів неоднорідної моделі слід розбивати вибірку на підвибірки за часом та проводити наближення неперервних параметрів більш простими характеристиками, наприклад, кусково-сталими функціями. В результаті такого припущення знижується точність оцінки параметрів моделі  $\lambda$  (3).

У даній роботі розглянемо оцінку параметрів неоднорідного прихованого напівмарковського процесу із обмеженнями на швидкість зміни параметрів моделі (3). Умову обмеженості зміни параметрів  $\lambda$  (3) моделі будемо визначати у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \max_{0 \leq t < s \leq T} d_D(F^{(t)}, F^{(s)}) \leq \varepsilon, \\ \max_{0 \leq t < s \leq T} [d_M(A^{(t)}, A^{(s)}) + d_M(B^{(t)}, B^{(s)})] \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

де метрики в просторі функцій розподілу та просторі матриць будемо визначати наступним чином:

$$d_D(F, G) = \sup_{x \in R_+} |F(x) - G(x)|,$$

$$d_M(K, L) = \|K - L\|_{L_\infty} = \max_{i,j} |K_{ij} - L_{ij}|.$$

У цьому випадку, оптимізаційна задача оцінки параметрів неоднорідної прихованої напівмарковської моделі визначається наступним чином:

$$L(\lambda; y_{1:T}) \rightarrow \text{MAX}, \quad (5)$$

де  $L(\lambda; y_{1:T})$  — функція правдоподібності для процесу  $(\tau_t, X_t, Y_t)$ , тобто

$$\begin{aligned} L(\lambda; y_{1:T}) = \\ P(X_0 = x_0) \prod_{t=1}^{T-1} P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t) P(Y_{t+1} = y_{t+1} | X_{t+1} = x_{t+1}) = \\ \pi_0 \prod_{t=1}^{T-1} a_{x_t, x_{t+1}}^t b_{x_{t+1}, y_{t+1}}^t. \end{aligned} \quad (6)$$

Як можна бачити з рівняння (6), процес знаходження розв'язку цілком аналогічний класичному пошуку оптимальних параметрів. Проте в даному випадку, процес являється неоднорідним, отже для розв'язання задачі необхідно розбивати вихідний інтервал  $[0, T]$  на підінтервали, використовуючи моменти розбиття  $\tau_n$ .

## 2 АЛГОРИТМ ОЦІНКИ

У загальному випадку, задачу, описану вище, складно розв'язати, оскільки оптимізаційна задача (5) для оцінки параметрів  $\lambda$  (3) не являється задачею опуклого програмування. Для спрощення самої задачі пошуку оптимальних параметрів (5) за умов (4) зробимо ще два додаткові припущення:

- час перебування в стані дозволяє в середньому отримати достатню велику вибірку для оцінки параметрів моделі, тобто

$$E\theta_n \geq N, \quad (7)$$

де через  $N$  будемо визначати необхідну кількість замірів на одному інтервалі неперервності параметрів  $(A^{(t)}, B^{(t)})$ ;

- Зміна параметрів відбувається поступово, тобто перевіряються лише параметри на сусідніх інтервалах. Дану умову можна записати у наступному вигляді

$$\begin{cases} \max_{0 \leq t < T} d_D(F^{(t)}, F^{(t+1)}) \leq \varepsilon, \\ \max_{0 \leq t < T} [d_M(A^{(t)}, A^{(t+1)}) + d_M(B^{(t)}, B^{(t+1)})] \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (8)$$

Умови, визначені вище не лише забезпечують кускову сталість розглянутого процесу  $(\tau_t, X_t, Y_t)$ , а і дозволяють розглядати більш ширший діапазон параметрів. Основною проблемою при аналізі проблеми оптимізації (5) за умов (7), (8) являється проблематика визначення моментів переключення системи  $\tau_n$ , оскільки значення прихованого процесу  $X_t$  — невідомі та оцінюються на основі оптимізації.

Розглянемо для оцінки параметрів  $\lambda$  наступний алгоритм.

- 1 Оцінка параметрів  $\lambda$  для однорідного процесу  $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$ , що визначається параметрами  $(\pi, \hat{A}, \hat{B})$ .
- 2 Оцінка моментів переключення  $\tau_n$  на основі оцінених значень прихованого ланцюга Маркова  $X_t = \hat{x}_t$  з попереднього пункту.
- 3 Перевірка виконання умови (7). Якщо умова (7) виконується, то переходимо пункту 5, в іншому випадку – до п. 4.
- 4 Нехай  $i_1, \dots, i_k$  – індекси інтервалів, для яких не виконується умова (7) або (8). Для цих інтервалів визначимо сусідній інтервал, який містить мінімальне значення замірів, тобто

$$i_j^u = \operatorname{argmin}\{|\tau_{i_j-1} - \tau_{i_j-2}|, |\tau_{i_j+1} - \tau_{i_j}|\}.$$

Після переобчислення інтервалів, повертаємося до кроку 3.

- 5 Оцінюємо параметри  $\lambda$  на основі оптимізаційної задачі (5), використовуючи байєсівський метод або алгоритм Вітербі. Перевіряємо умови (7) або (8). Якщо умови виконані, то виходимо з алгоритму, в іншому випадку – переходимо до кроку 4.

#### ПРИКЛАД МОДЕЛЮВАННЯ НЕОДНОРІДНОГО НАПІВМАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

У якості ілюстрації роботи запропонованої методики проведено моделювання неоднорідного прихованого напівмарковського процесу з дискретним простором станів  $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$  та алфавітом емісій розміру  $M = 4$ . Горизонт моделювання становить  $T = 600$  дискретних кроків, істинні моменти зміни параметрів задано наступними точками змін

$$\mathbf{T} = [0, 200, 380, T],$$

що відповідає трьом кусково-сталим інтервалам на часовій осі. Таким чином, моменти перебування однорідності системи мають наступні часові інтервали

$$[0, 200), [200, 380), [380, 600].$$

Для моделювання матриці переходів  $A^{(t)}$  та матриці емісій  $B^{(t)}$  використаємо підхід, реалізований у роботі [10]. Визначимо основні параметри на інтервалах сталості: для сегменту  $t \in [1, 200]$ :

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.20 & 0.15 & 0.05 \\ 0.10 & 0.70 & 0.10 & 0.10 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix},$$

для сегменту  $t \in [201, 380]$ :

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.40 \\ 0.05 & 0.90 & 0.02 & 0.03 \\ 0.40 & 0.20 & 0.20 & 0.20 \end{pmatrix},$$

для сегменту  $t \in [381, 600]$ :

$$B^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.20 & 0.20 \\ 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.40 \\ 0.05 & 0.15 & 0.60 & 0.20 \end{pmatrix}.$$

Для визначення перехідних ймовірностей  $A^{(t)}$ ,  $B^{(t)}$  використовуємо поняття інтенсивностей переходів – Табл. 1, яке часто зустрічається в теорії систем масового обслуговування. Задамо інтенсивності переходів між станами для даного прикладу, що задаються функцією тривалості перебування  $\theta \in \mathbb{N}$  у стані

$$\lambda_{ij}(\theta) = \exp(\alpha_{ij}\theta + \beta_{ij} \ln(d+1) + \gamma_{ij}),$$

де  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij} \in \mathbb{R}$  – параметри для переходу  $i \rightarrow j$ . Процес ініціалізовано у стані  $i_1 = 1$  з початковою тривалістю  $\theta_1 = 1$ . Параметри моделі підбрано так, щоб забезпечити різні режими переходів та чітко виражену неоднорідність у часі, тобто залежність матриць  $A^{(t)}, B^{(t)}$  від часу.

Табл. 1: Істинні параметри інтенсивностей переходів  $\lambda_{ij}(d)$ .

Перехід $i \rightarrow j$	$\alpha_{ij}$	$\beta_{ij}$	$\gamma_{ij}$
1 $\rightarrow$ 1	0.80	1.15	0
1 $\rightarrow$ 2	1.20	1.05	0.01
1 $\rightarrow$ 3	1.00	1.10	0.02
2 $\rightarrow$ 1	0.90	1.25	0.01
2 $\rightarrow$ 2	0.70	1.20	0
2 $\rightarrow$ 3	1.10	1.30	0.015
3 $\rightarrow$ 1	1.00	1.05	0.02
3 $\rightarrow$ 2	0.95	1.10	0.01
3 $\rightarrow$ 3	0.85	1.20	0

Алгоритм генерації траєкторії напівмарковського процесу реалізовано у середовищі Python. Для кожного моменту часу  $t$  виконується така послідовність:

1. Для поточного стану  $i_t$  і тривалості  $\theta_t$  обчислюються інтенсивності переходів  $\lambda_{i_t j}(\theta_t)$  для всіх  $j \neq i_t$  та нормалізуються інтенсивності для всіх інших станів:

$$p_{i_t j}(\theta_t) = \frac{\lambda_{i_t j}(\theta_t)}{\sum_{k \neq i_t} \lambda_{i_t k}(\theta_t)}.$$

2. Наступний стан  $i_{t+1}$  генерується випадково згідно з розподілом  $\{p_{i_t j}\}$ .
3. Тривалість перебування в стані оновлюється згідно наступного правила.

$$\theta_{t+1} = \begin{cases} \theta_t + 1, & i_{t+1} = i_t, \\ 1, & i_{t+1} \neq i_t. \end{cases}$$

Оцінювання виконувалося на змодельованій траєкторії довжиною  $T = 600$ . Отримані оцінки демонструють коректне відтворення кусково-сталих структур параметрів: всередині кожного інтервалу похибки є малими, тоді як у околі точок зміни параметрів спостерігаються характерні транзйентні відхилення.

Розглянемо моделювання даної системи. На Рис. 1 відображено траєкторію процесу  $Y_t, t \in [0, 600]$ . Як ми можемо бачити із даного рисунку, при переході через точки  $\tau_i$  відбувається зміна структури самої системи.

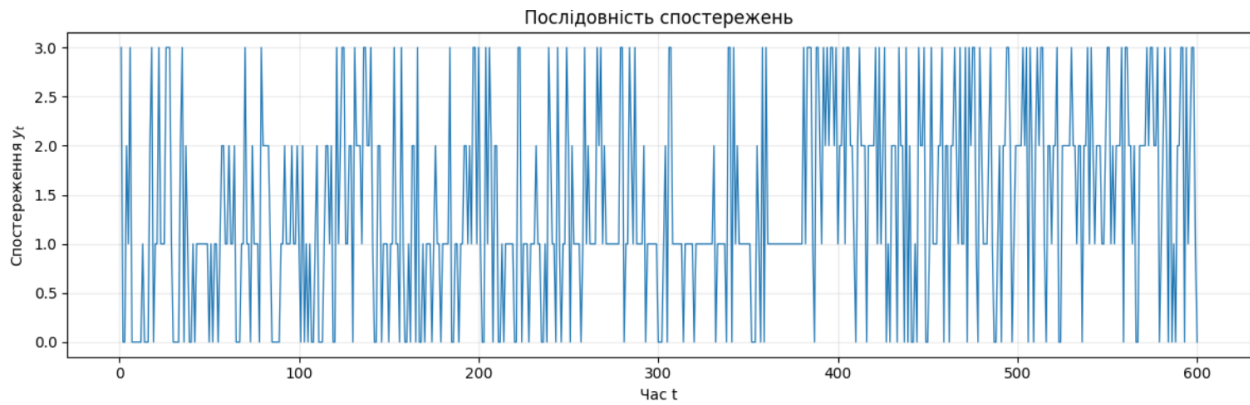
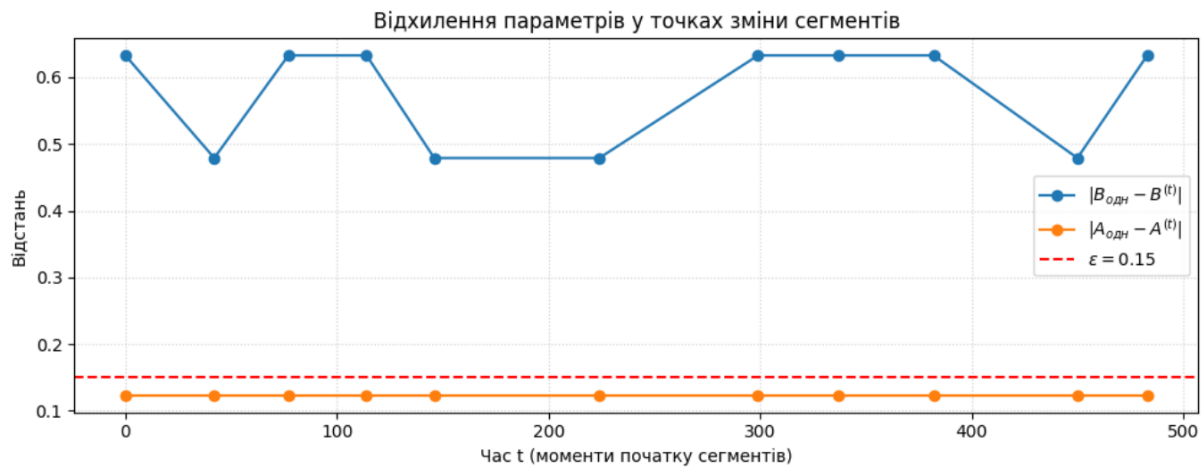


Рис. 1: Послідовність спостережень

Рис. 2: Похибки оцінювання параметрів з наступними довжинами інтервалів  $[42, 35, 37, 32, 78, 75, 38, 45, 68, 33, 117]$  при  $N = 30$ 

На Рис. 2 відображено різницю між параметрами однорідної та неоднорідної системи. З цього рисунку можна зробити висновок, що параметри прихованого ланцюга Маркова  $X_t$  являються більш стійкими при переході від однорідного до неоднорідного випадку, з іншого боку для матриці переходу  $B^{(t)}$  дані відмінності являються більш суттєвими.

У результаті роботи алгоритму сегментації та оцінювання параметрів було отримано такі значення. Моменти розділення, визначені процедурою кластеризації параметрів, становлять 0, 200, 380 та 600, що узгоджується з поведінкою істинної моделі. На кожному з інтервалів оцінені параметри демонструють стабільну збіжність. Оцінена матриця переходів для однорідного випадку має наступний вигляд

$$A_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.15 & 0.15 \\ 0.15 & 0.70 & 0.15 \\ 0.15 & 0.15 & 0.70 \end{pmatrix},$$

тоді як емісійна матриця для цього ж однорідного випадку буде такою

$$B_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} 0.4762 & 0.2381 & 0.0952 & 0.1905 \\ 0.0025 & 0.0025 & 0.0025 & 0.0025 \\ 0.0025 & 0.0025 & 0.0025 & 0.0025 \end{pmatrix}.$$

Порівняння з істинними значеннями  $B$  показує найбільші відхилення у другому та третьому рядках, що відображено у матриці похибок  $B_{\text{seg}} - B$ . Алгоритм сформував 30 початкових локальних сегментів, які після фільтрації та злиття коротких інтервалів були агреговані до 11 фінальних сегментів довжинами [42, 35, 37, 32, 78, 75, 38, 45, 68, 33, 117]. Отримані результати підтверджують коректність виявлення змін параметрів моделі та узгодженість оцінених характеристик із глобальною динамікою процесу.

## ВИСНОВКИ

Основною метою роботи являється створення алгоритму оцінки параметрів неоднорідної прихованої напівмарковської моделі, для якої має місце кусково стала структура параметрів із одночасною зміною трьох основних параметрів системи – часу перебування в станах  $F^{(t)}$ , матриці переходу для прихованого ланцюга Маркова  $X_t$  та ймовірностей переходів для  $Y_t$ . Проведене експериментальне дослідження підтверджує, що реалізований алгоритм адекватно відтворює часову неоднорідність параметрів прихованої напівмарковської моделі та забезпечує стійкі оцінки параметрів  $\lambda$  (3) із заданою точністю  $\varepsilon$ . Методика може бути використана для розробки адаптивних процедур керування та подальшої байєсівської оцінки параметрів напівмарковських процесів.

В наступних роботах в цьому напрямку планується розглянути більш загальний випадок, який характеризується сумісним розподілом режимів для матриці  $A^{(t)}$  та  $B^{(t)}$ . Дані дослідження дозволять більш глибоко розуміти природу неоднорідних прихованих моделей.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Yu S.-Z. *Hidden Semi-Markov Models*. Artificial Intelligence, 2010, **174**, 215–243.
- [2] Dong M., He D. *A Segmental Hidden Semi-Markov Model (HSMM)-Based Diagnostics and Prognostics Framework and Methodology*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, **21**, 2248–2266.
- [3] Zen H., Tokuda K., Masuko T., Kobayashi T., Kitamura T. *A Hidden Semi-Markov Model-Based Speech Synthesis System*. IEICE Transactions on Information and Systems, 2007, **E90-D(5)**, 825–834.
- [4] Gujdon Y. *Estimating Hidden Semi-Markov Chains from Discrete Sequences*. Journal of Computational and Graphical Statistics, 2003, **12(3)**, 604–639.
- [5] Bulla J., Bulla I. *Stylized Facts of Financial Time Series and Hidden Semi-Markov Models*. Computational Statistics & Data Analysis, 2006, **51**, 2192–2209.
- [6] Mor B., Garhwal S., Loura A. *A Systematic Review of Hidden Markov Models and Their Applications*. Archives of Computational Methods in Engineering, 2020, **28**, 4001–4028.
- [7] Ghahramani Z. *An Introduction to Hidden Markov Models and Bayesian Networks*. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2001, **15(1)**, 9–42.
- [8] Scott S.L. *Bayesian Methods for Hidden Markov Models*. Journal of the American Statistical Association, 2002, **97(457)**, 337–351.
- [9] Robert C.P., Ryden T., Titterton D.M. *Bayesian Inference in Hidden Markov Models through Jump Markov Chain Monte Carlo*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2000, **62(1)**, 57–75.
- [10] Rabiner L.R. *A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*. Proceedings of the IEEE, 1989, **77(2)**, 257–286.

- [11] Viterbi A.J. *Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm*. IEEE Transactions on Information Theory, 1967, **13**(2), 260–269.

Надійшло 24.11.2025

---

Malyk I.V., Ivasiuk R.V. *Parameter estimation of nonhomogeneous hidden semi-Markov models*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 70–79.

The article is devoted to the study of nonhomogeneous hidden semi-Markov models, and proposes a methodology for estimating parameters in the case where the change of state sojourn time distributions and transition probability matrices is time-limited.

The obtained results allow the model to be applied to the description of systems with time-varying structure. The proposed methodology can be used in time series analysis tasks with structural changes, as well as in optimal control problems for stochastic systems where it is important to account for changes in the process behavior over time.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.09>

BANDURA A.I., KRYSHTOPA L.I., MAZUR T.M., IVASIV N.V., SKASKIV O.B.

**GROWTH AND EXISTENCE OF ANALYTIC IN A BIDISC FUNCTIONS OF BOUNDED L-INDEX IN JOINT VARIABLES**

We obtained growth estimates for bivariate functions which are analytic in the unit bidisc and have bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables. The positive continuous function  $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(z_2, z_2), l_2(z_1, z_2))$  satisfies additional behavior condition: for every point  $z = (z_1, z_2)$  belonging the unit bidisc  $\mathbb{D}^2$  the appropriate value of the function  $l_j$  at this point is greater than the reciprocal to  $1 - |z_j|$  multiplied by  $\beta$ , i.e.  $l_j(z) > \beta/(1 - |z_j|)$  for each  $j \in \{1, 2\}$  and some constant  $\beta > 1$ . Also we prove that for every analytic functions in the unit bidisc with bounded multiplicities of zero points there exists a positive continuous function  $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(z_2, z_2), l_2(z_1, z_2))$  providing boundedness of the  $\mathbf{L}$ -index in joint variables for primary analytic function.

*Key words and phrases:* growth estimate, analytic function, bidisc, bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables, existence theorem, zero points with bounded multiplicities.

---

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, 76019, 15 Karpatska street, Ivano-Frankivsk, Ukraine (Bandura A.I., Krysh topsa L.I., Mazur T.M.)

7 Boryslav School, 82300, 14 Volodymyr Velykyi Street, Boryslav, Ukraine (Ivasiv N.V.)

Ivan Franko National University of Lviv, 79000, 1 Universytetska Street, Lviv, Ukraine (Skaskiv O.B.)

e-mail: [andriykopanytsia@gmail.com](mailto:andriykopanytsia@gmail.com) (Bandura A.I.), [li.krysh topsa@gmail.com](mailto:li.krysh topsa@gmail.com) (Krysh topsa L.I.), [tetiana.mazur@nung.edu.ua](mailto:tetiana.mazur@nung.edu.ua) (Mazur T.M.), [petrechko.n@gmail.com](mailto:petrechko.n@gmail.com) (Ivasiv (Petrechko) N.V.), [olskask@gmail.com](mailto:olskask@gmail.com) (Skaskiv O.B.)

## 1 INTRODUCTION

Theory of analytic functions in the unit bidisc having bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables was deeply developed by N.V. Petrechko with her co-authors A.I. Bandura and O.B. Skaskiv [2, 3, 6]. Moreover, there was proposed some application [11] of this theory to analytic solutions of linear higher order system of partial differential equations. But there are some early announced results at conferences in Chernivtsi University [9] which were not published with full proofs. This paper fills the indicated gap and presents existence theorem and growth estimates for this class of functions.

We consider two-dimensional complex space  $\mathbb{C}^2$ . Denote  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ ,  $\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $\mathbf{1} = (1, 1) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $\mathbf{1}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{1}_2 = (0, 1)$ ,  $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ . For  $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$  we will use formal notations without violation of the existence of these expressions

$$AB = (a_1 b_1, a_2 b_2), \quad A/B = (a_1/b_1, a_2/b_2), \quad b_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0, \quad A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2}, \quad b \in \mathbb{Z}_+^2,$$

---

УДК 517.55

2010 *Mathematics Subject Classification:* 32A10, 32A17, 32A22.

and the notation  $A < B$  means that  $a_j < b_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ ; the relation  $A \leq B$  is defined similarly. For  $K = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2$  denote  $\|K\| = k_1 + k_2$ ,  $K! = k_1!k_2!$ .

The bidisc  $\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_j - z_j^0| < r_j, j = 1, 2\}$  is denoted by  $\mathbb{D}^2(z^0, R)$  and the closed bidisc  $\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_j - z_j^0| \leq r_j, j = 1, 2\}$  is denoted by  $\mathbb{D}^2[z^0, R]$ , its skeleton is denoted by  $\mathbb{T}^2(z^0, R) = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$ ,  $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D}^2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ ,  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , where  $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$ . For  $p, q \in \mathbb{Z}_+$  and the partial derivative  $\frac{\partial^{p+q} F(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}$  of analytic function  $F(z)$  in  $\mathbb{D}^2$  we will use the notation

$$F^{(p,q)}(z) = F^{(p,q)}(z_1, z_2) := \frac{\partial^{p+q} F(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}.$$

Let  $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), l_2(z))$ , where  $l_j(z) : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  is a continuous function such that

$$(\forall z \in \mathbb{D}^2): l_j(z) > \beta/(1 - |z_j|), j \in \{1, 2\}, \quad (1)$$

and  $\beta > 1$  is some constant. M.M. Sheremeta [14], V.O. Kushnir [10] imposed a similar condition for a function  $l : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$  and  $l : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ , where  $G$  is arbitrary domain in  $\mathbb{C}$ . A.I. Bandura and O.B. Skaskiv [1] used the similar condition to consider analytic functions in the unit ball of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables.

An analytic function  $F : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  [2, 3, 6] is called a function of *bounded  $\mathbf{L}$ -index (in joint variables)*, if there exists  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  such that for all  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$  and for all  $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}_+^2$

$$\frac{1}{p_1!p_2!} \frac{|F^{(p_1,p_2)}(z)|}{l_1^{p_1}(z)l_2^{p_2}(z)} \leq \max \left\{ \frac{1}{k_1!k_2!} \frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z)l_2^{k_2}(z)} : 0 \leq k_1 + k_2 \leq n_0 \right\}. \quad (2)$$

The least such integer  $n_0$  is called the  *$\mathbf{L}$ -index in joint variables of the function  $F(z)$*  and is denoted by  $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{D}^2) = n_0$ .

We need some additional notations from [3]. By  $Q(\mathbb{D}^2)$  we denote the class of functions  $\mathbf{L}$ , which satisfy condition (1) and the following characteristics are finite:

$$(\forall r_j \in [0, \beta], j \in \{1, 2\}): 0 < \lambda_{1,j}(R) \leq \lambda_{2,j}(R) < \infty, \text{ where}$$

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{D}^2} \inf \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^2 [z^0, R/\mathbf{L}(z^0)] \right\}, \lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{D}^2} \sup \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^2 [z^0, R/\mathbf{L}(z^0)] \right\}.$$

For an analytic function  $F$  in the unit bidisc we put  $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2(z^0, R)\}$ . Then  $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)| : z \in \mathbb{D}^2[z^0, R]\}$ , because the maximum modulus for analytic function in a closed polydisc is attained on its skeleton.

We will use the following statement.

**Theorem 1** ([3]). *Let  $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$ . If an analytic function  $F$  in the unit bidisc  $\mathbb{D}^2$  has bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables, then for any  $R', R'' \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $\mathbf{0} < R' < R'' \leq (\beta, \beta)$  there exists  $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$  such that for every point  $z^0 \in \mathbb{D}^2$  one has*

$$M(R''/\mathbf{L}(z^0), z^0, F) \leq p_1 M(R'/\mathbf{L}(z^0), z^0, F). \quad (3)$$

## 2 GROWTH OF ANALYTIC IN A BIDISC FUNCTIONS OF BOUNDED $\mathbf{L}$ -INDEX IN JOINT VARIABLES

At first, we will prove the following lemma.

**Lemma 1.** *If  $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$ , then for every  $j \in \{1, 2\}$  and for any fixed  $z^* \in \mathbb{D}^2$  one has  $|z_j l_j(z^* + z_j \mathbf{1}_j)| \rightarrow \infty$  as  $|z_j^* + z_j| \rightarrow 1 - 0$ .*

*Proof.* Taking into account (1), for  $j \in \{1, 2\}$  we obtain such an estimate

$$l_j(z^* + z_j \mathbf{1}_j) \geq \frac{\beta}{1 - |z_j^* + z_j|} \rightarrow +\infty$$

as  $|z_j^* + z_j| \rightarrow 1 - 0$ . □

For growth estimates of analytic in a bidisc functions of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables we suggest that  $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|, |z_2|), l_2(|z_1|, |z_2|))$  and for all  $z \in \mathbb{D}^2$ ,  $j \in \{1, 2\}$

$$l_j(|z_1|, |z_2|) > \frac{\beta}{1 - |z_j|}, \quad (4)$$

where  $\beta > 1$  is some constant. For simplicity we will denote  $M(F, R) = \max\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R)\}$ , where  $R = (r_1, r_2) < (1, 1)$ . Also the following notation  $\boldsymbol{\beta} = (\beta, \beta)$  will be used. The growth estimates of various classes of holomorphic functions of several complex variables can be found [4, 5]. The following result was presented only in the dissertation of Petrechko N.V. [12].

**Theorem 2.** *Let  $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$  and  $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|, |z_2|), l_2(|z_1|, |z_2|))$  satisfies (4). If an analytic in the bidisc  $\mathbb{D}^2$  function  $F$  has bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables, then*

$$\ln M(F, R) = O\left(\min\left\{\int_0^{r_1} l_1(t, r_2) dt + \int_0^{r_2} l_2(r_1^0, t) dt; \int_0^{r_1} l_1(r_1, t) dt + \int_0^{r_2} l_2(t, r_2^0) dt\right\}\right)$$

as  $r_1 \rightarrow 1 - 0$ ,  $r_2 \rightarrow 1 - 0$ ,  $R^0 = (r_1^0, r_2^0)$  are fixed radii.

*Proof.* Let  $R > \mathbf{0}$ ,  $R < \mathbf{1}$ , and  $z^* \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(R)})$  be a point such that

$$|F(z^*)| = \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2\left(\mathbf{0}, R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(R)}\right)\right\}.$$

Let us denote  $z^0 = \frac{z^* R}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(R)}$ . Then

$$|z_j^0 - z_j^*| = \left|\frac{z_j^* r_j}{r_j + \frac{\beta}{l_j(R)}} - z_j^*\right| = \left|\frac{z_j^* \beta / l_j(R)}{r_j + \frac{\beta}{l_j(R)}}\right| = \frac{\beta}{l_j(R)} \text{ and}$$

$$\mathbf{L}(z^0) = \mathbf{L}\left(\frac{z^* R}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(R)}\right) = \mathbf{L}\left(\frac{(R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(R))R}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(R)}\right) = \mathbf{L}(R).$$

We consider two skeletons  $\mathbb{T}^2(z^0, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$  and  $\mathbb{T}^2(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)})$ . By Theorem 1 there exists  $p_1 = p_1(\mathbf{1}, \boldsymbol{\beta}) \geq 1$  such that (3) is valid for  $R' = \mathbf{1}$ ,  $R'' = \boldsymbol{\beta}$ , i.e.

$$\begin{aligned} \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2\left(\mathbf{0}, R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(R)}\right)\right\} &= |F(z^*)| \leq \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2\left(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(R)}\right)\right\} = \\ &= \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2\left(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_1 \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2\left(z^0, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq \\ &\leq p_1 \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2\left(\mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(R)}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

The function  $\ln^+ \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R)\}$  is a convex function in the variables  $\ln r_1, \ln r_2$  (see [13, p. 84]). Then the function admits the representation

$$\ln^+ \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R)\} - \ln^+ \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R + (r_1^0 - r_1)\mathbf{1}_1)\} = \int_{r_1^0}^{r_1} \frac{A_1(t, r_2)}{t} dt, \quad (6)$$

$$\ln^+ \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R)\} - \ln^+ \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R + (r_2^0 - r_2)\mathbf{1}_2)\} = \int_{r_2^0}^{r_2} \frac{A_2(r_1, t)}{t} dt \quad (7)$$

for any  $0 < r_j^0 \leq r_j, j \in \{1, 2\}$ , where the functions  $A_1(t, r_2), A_2(r_1, t)$  are positive non-decreasing functions in the variable  $t$ .

Using (5), we establish

$$\begin{aligned} \ln p_1 &\geq \ln \max \left\{ |F(z)|: z \in \mathbb{T}^2 \left( \mathbf{0}, R + \frac{\beta}{\mathbf{L}(R)} \right) \right\} - \ln \max \left\{ |F(z)|: z \in \mathbb{T}^2 \left( \mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(R)} \right) \right\} = \\ &= \ln \max \left\{ |F(z)|: z \in \mathbb{T}^2 \left( \mathbf{0}, R + \frac{\beta}{\mathbf{L}(R)} \right) \right\} - \ln \max \left\{ |F(z)|: z \in \mathbb{T}^2 \left( \mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{1} + (\beta - 1)\mathbf{1}_2}{\mathbf{L}(R)} \right) \right\} + \\ &\ln \max \left\{ |F(z)|: z \in \mathbb{T}^2 \left( \mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{1} + (\beta - 1)\mathbf{1}_2}{\mathbf{L}(R)} \right) \right\} - \ln \max \left\{ |F(z)|: z \in \mathbb{T}^2 \left( \mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(R)} \right) \right\} = \\ &= \int_{r_1+1/l_1(R)}^{r_1+\beta/l_1(R)} \frac{1}{t} A_1 \left( t, r_2 + \frac{\beta}{l_2(R)} \right) dt + \int_{r_2+1/l_2(R)}^{r_2+\beta/l_2(R)} \frac{1}{t} A_2 \left( r_1 + \frac{1}{l_1(R)}, t \right) dt \geq \\ &\geq \ln \left( 1 + \frac{\beta - 1}{r_1 l_1(R) + 1} \right) A_1 \left( r_1, r_2 + \frac{\beta}{l_2(R)} \right) + \ln \left( 1 + \frac{\beta - 1}{r_2 l_2(R) + 1} \right) A_2 \left( r_1 + \frac{1}{l_1(R)}, r_2 \right) \quad (8) \end{aligned}$$

By Lemma 1 one has  $r_1 l_1(R) \rightarrow +\infty$  as  $r_1 \rightarrow 1 - 0, r_2 \rightarrow 1 - 0$ . Hence, for  $j \in \{1, 2\}$  and  $r_i \geq r_i^0$  we deduce

$$\ln \left( 1 + \frac{\beta - 1}{r_j l_j(R) + 1} \right) \sim \frac{\beta - 1}{r_j l_j(R) + 1} \geq \frac{\beta - 1}{2r_j l_j(R)}.$$

Thus, for every  $j \in \{1, 2\}$  from inequality (8) it follows that

$$\begin{aligned} A_1 \left( r_1, r_2 + \frac{\beta}{l_2(R)} \right) &\leq \frac{2 \ln p_1}{\beta - 1} r_1 l_1(R), \\ A_2 \left( r_1 + \frac{1}{l_1(R)}, r_2 \right) &\leq \frac{2 \ln p_1}{\beta - 1} r_2 l_2(R). \end{aligned}$$

Let  $R^0 = (r_1^0, r_2^0)$ , where every  $r_j^0$  is chosen above. Applying consequently equalities (6) and (7), we obtain

$$\begin{aligned} &\ln \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R)\} = \\ &= \ln \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R + (r_1^0 - r_1)\mathbf{1}_1)\} + \int_{r_1^0}^{r_1} \frac{A_1(t, r_2)}{t} dt = \\ &= \ln \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R + (r_1^0 - r_1)\mathbf{1}_1 + (r_2^0 - r_2)\mathbf{1}_2)\} + \int_{r_1^0}^{r_1} \frac{A_1(t, r_2)}{t} dt + \int_{r_2^0}^{r_2} \frac{A_2(r_1^0, t)}{t} dt = \\ &= \ln \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R^0)\} + \int_{r_1^0}^{r_1} \frac{A_1(t, r_2)}{t} dt + \int_{r_2^0}^{r_2} \frac{A_2(r_1^0, t)}{t} dt \leq \\ &\leq \ln \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R^0)\} + \frac{2 \ln p_1}{\beta - 1} \left( \int_{r_1^0}^{r_1} l_1(t, r_2) dt + \int_{r_2^0}^{r_2} l_2(r_1^0, t) dt \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \ln \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R^0)\} + \frac{2 \ln p_1}{\beta - 1} \left( \int_0^{r_1} l_1(t, r_2) dt + \int_0^{r_2} l_2(r_1^0, t) dt \right) \leq \\ &\leq (1 + o(1)) \frac{2 \ln p_1}{\beta - 1} \left( \int_0^{r_1} l_1(t, r_2) dt + \int_0^{r_2} l_2(r_1^0, t) dt \right). \end{aligned}$$

Hence, the following asymptotic equality holds

$$\ln \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R)\} = O\left(\int_0^{r_1} l_1(t, r_2) dt + \int_0^{r_2} l_2(r_1^0, t) dt\right)$$

as  $r_1 \rightarrow 1 - 0$ ,  $r_2 \rightarrow 1 - 0$ , Clearly, the similar equality can be proved for other permutation  $\sigma_2$  of the set  $\{1, 2\}$ , particularly,

$$\ln \max\{|F(z)|: z \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R)\} = O\left(\int_0^{r_2} l_1(r_1, t) dt + \int_0^{r_1} l_2(t, r_2^0) dt\right)$$

Hence, Equation (2) is true. Theorem 2 is proved.  $\square$

### 3 EXISTENCE THEOREM FOR ANALYTIC FUNCTIONS IN THE UNIT BIDISC WITH BOUNDED MULTIPLICITIES OF ZERO POINTS

Let  $Z_F$  be a zero set of the analytic function  $F: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . If  $z^0 \in Z_F$ , then by  $p_F(z_1^0, z_2^0)$  we will denote the multiplicity of zero point  $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$  of the function  $F(z_1, z_2)$ , i.e. for all  $J = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}_+^2$  with  $j_1 + j_2 < p_F(z^0)$  one has  $F^{(j_1, j_2)}(z_1^0, z_2^0) = 0$ , but at least for one  $J = (j_1, j_2)$  with  $j_1 + j_2 = p_F(z_1^0, z_2^0)$  the following equality holds  $F^{(j_1, j_2)}(z^0) \neq 0$ .

The following theorem was obtained for entire functions of several complex variables in [8] and for functions analytic in the unit ball in [7]. For polydisc it was announced in [9].

**Theorem 3.** *In order that for an analytic function  $F: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  there exist a positive continuous function  $\mathbf{L}(z) = (l_1(z_1, z_2), l_2(z_1, z_2))$  satisfying (1) such that  $F$  is a function of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables it is necessary and sufficient that there exists  $p \in \mathbb{Z}_+$  such that  $p_F(z^0) \leq p$  for all  $z^0 \in Z_F$ .*

*Proof.* The proof is similar to the proof of Theorem 4 in [7] for analytic functions in the unit ball.

*Necessity.* To simplify the notation we consider everywhere in the proof  $p_0 := p_F(z_1^0, z_2^0)$ . Necessity follows from the definition of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables. Indeed, assume on the contrary that

$$(\forall p \in \mathbb{Z}_+)(\exists (z_1^0, z_2^0) \in Z_F): \quad p_0 > p.$$

This means that for some  $(j_1^0, j_2^0) \in \mathbb{Z}_+^2$  with  $j_1^0 + j_2^0 = p_0$  one has  $F^{(j_1^0, j_2^0)}(z_1^0, z_2^0) \neq 0$  and  $F^{(j_1, j_2)}(z_1^0, z_2^0) = 0$  for all  $(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}_+^2$  with  $j_1 + j_2 \leq p_0 - 1$  and  $(z_1^0, z_2^0) \in Z_F$ . Therefore, the  $\mathbf{L}$ -index in joint variables at the point  $z^0$  is not less than  $p_0 > p$ , i.e.

$$N(F, \mathbf{L}, z^0) \geq p_0 > p.$$

If  $p \rightarrow +\infty$ , then we obtain that  $N(F, \mathbf{L}, z^0) \rightarrow +\infty$ . This contradicts the boundedness of  $\mathbf{L}$ -index in joint variables of the function  $F$ .

*Sufficiency.* Let  $p$  be the least integer such that  $\forall (z_1^0, z_2^0) \in Z_F$  one has  $p_0 \leq p$ . Let  $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$  with  $r_j \in [0, 1)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . We define  $R^0 = (r_1^0, r_2^0) = \frac{1}{2}(\min\{1 - r_1, r_1\}, \min\{1 - r_2, r_2\})$ ,

$K_R = \{z \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{D}^2[\mathbf{0}, R + R^0] \setminus \mathbb{D}^2(\mathbf{0}, R - R^0)\}$  for all  $R = (r_1, r_2) \in [0, 1) \times [0, 1)$ . Also we denote

$$m_1(r_1, r_2) = \min_{z^0 \in K_R \cap Z_F} \max_{j_1 + j_2 \leq p} \left\{ \frac{|F^{(j_1, j_2)}(z_1^0, z_2^0)|}{j_1! j_2!} : F^{(j_1, j_2)}(z_1^0, z_2^0) \neq 0 \right\}.$$

Since  $F$  is an analytic function in the unit bidisc  $\mathbb{D}^2$ , there exists

$$E = E(r_1, r_2) = (\varepsilon_1(r_1, r_2), \varepsilon_2(r_1, r_2)) > \mathbf{0}$$

such that

$$\frac{|F^{(j_1^0, j_2^0)}(z_1, z_2)|}{j_1^0! j_2^0!} \geq \frac{m_1(r_1, r_2)}{2}$$

for all

$$z \in K_R \cap G_E, \quad G_E = \bigcup_{z^0 \in Z_F} \mathbb{D}^2(z^0, E(r_1, r_2)),$$

and for all  $(j_1^0, j_2^0)$  with  $j_1^0 + j_2^0 \leq p_0$  and  $F^{(j_1^0, j_2^0)}(z_1^0, z_2^0) \neq 0$ .

Let us denote

$$m_2(r_1, r_2) = \min\{|F(z)| : z \in \mathbb{D}^2[\mathbf{0}, R + R^0], z \notin G_E\},$$

$$Q(r_1, r_2) = \min\{m_1(r_1, r_2)/2, m_2(r_1, r_2), 1\}.$$

For every  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$  we put  $R = (|z_1|, |z_2|)$ . Then at least one of the numbers  $|F(z_1, z_2)|$ ,  $\frac{|F^{(j_1, j_2)}(z_1, z_2)|}{j_1! j_2!}$  with  $j_1 + j_2 \leq p$  is not less than  $Q(r_1, r_2)$  (respectively,  $\frac{|F^{(j_1^0, j_2^0)}(z_1, z_2)|}{j_1^0! j_2^0!}$  for  $(z_1, z_2) \in K_R \cap G_E$  and  $|F(z_1, z_2)|$  for  $(z_1, z_2) \in K_R \setminus G_E$ ). This yields

$$\max \left\{ \frac{|F^{(j_1, j_2)}(z_1, z_2)|}{j_1! j_2!} : j_1 + j_2 \leq p \right\} \geq Q(r_1, r_2). \quad (9)$$

Using Cauchy's formula for bidisc  $\mathbb{D}^2[z, R^0]$  we deduce that for all  $J = (j_1, j_2)$  with  $j_1 + j_2 \geq p + 1$  one has

$$\frac{|F^{(j_1, j_2)}(z_1, z_2)|}{j_1! j_2!} = \left| \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2(z, R^0)} \frac{F(\tau)}{(\tau - z)^{J+1}} d\tau \right| \leq \frac{1}{(r_1^0)^{j_1} (r_2^0)^{j_2}} \max\{|F(\tau)| : \tau \in \mathbb{D}^2[\mathbf{0}, R + R^0]\}. \quad (10)$$

A positive continuous function  $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(z_1, z_2), l_2(z_1, z_2))$  can be chosen such that

$$l_1(z_1, z_2) = l_2(z_1, z_2) := \max \left\{ \frac{\max\{1, \max\{|F(\tau)| : \tau \in \mathbb{D}^2[\mathbf{0}, R + R^0]\}\}}{Q(r_1, r_2)(r_1^0 r_2^0)^{1+\alpha}}, \frac{\beta}{1 - r_1}, \frac{\beta}{1 - r_2} \right\},$$

where  $\beta > 1$  is some constant,  $R = (r_1, r_2) = (|z_1|, |z_2|)$  and  $R^0 = (r_1^0, r_2^0) = \frac{1}{2}(\min\{1 - |z_1|, |z_1|\}, \min\{1 - |z_2|, |z_2|\})$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  is fixed.

From (9) and (10) it follows that for all  $j_1 + j_2 \geq \frac{p(1+\alpha)}{\alpha}$

$$\frac{|F^{(j_1, j_2)}(z_1, z_2)| / (j_1! j_2! l_1^{j_1}(z_1, z_2) l_2^{j_2}(z_1, z_2))}{\max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)|}{k_1! k_2! l_1^{k_1}(z_1, z_2) l_2^{k_2}(z_1, z_2)} : k_1 + k_2 \leq p \right\}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\max\{|F(\tau)|: \tau \in \mathbb{D}^2[\mathbf{0}, R + R_0]\}}{Q(r_1, r_2)(r_1^0)^{j_1}(r_2^0)^{j_2}} \frac{1}{\max\{l_1^{j_1-k_1}(z_1, z_2)l_2^{j_2-k_2}(z_1, z_2) : k_1 + k_2 \leq p\}} \leq \\
&\leq \frac{\max\{|F(\tau)|: \tau \in \mathbb{D}^2[\mathbf{0}, R + R_0]\}}{Q(r_1, r_2)((r_1^0 r_2^0)^{1+\alpha})^{(j_1+j_2)/(1+\alpha)}} \min\{l_1^{k_1+k_2-j_1-j_2}(z_1, z_2) : k_1 + k_2 \leq p\} \leq \\
&\leq l_1^{p-j_1-j_2}(z) \left( \frac{\max\{1, \max\{|F(\tau)|: \tau \in \mathbb{D}^2[\mathbf{0}, R + R_0]\}\}}{Q(R)(r_1^0 r_2^0)^{1+\alpha}} \right)^{(j_1+j_2)/(1+\alpha)} = \\
&= l_1^{p-(j_1+j_2)\alpha/(1+\alpha)}(z) \leq 1,
\end{aligned}$$

because  $p - (j_1 + j_2)\alpha/(1 + \alpha) \leq 0$ ,  $(j_1 + j_2)/(1 + \alpha) \geq \frac{p}{\alpha} \geq 1$  and  $l_1(z_1, z_2) \geq 1$ . Hence, we have that for all  $j_1 + j_2 \geq \frac{p(1+\alpha)}{\alpha}$

$$\frac{|F^{(j_1, j_2)}(z_1, z_2)|}{j_1! j_2! l_1^{j_1}(z_1, z_2) l_2^{j_2}(z_1, z_2)} \leq \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)|}{k_1! k_2! l_1^{k_1}(z_1, z_2) l_2^{k_2}(z_1, z_2)} : k_1 + k_2 \leq p \right\}.$$

In view of arbitrariness of  $z$ , the analytic function  $F$  has bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables and its  $\mathbf{L}$ -index in joint variables does not exceed  $2p$ , because  $\frac{p(1+\alpha)}{\alpha} \rightarrow 2p$  as  $\alpha \rightarrow 1$ .  $\square$

#### REFERENCES

- [1] Bandura A., Skaskiv O. *Functions analytic in a unit ball of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables*. J. Math. Sci. 2017, **227** (1), 1–12. doi:10.1007/s10958-017-3570-6
- [2] Bandura A.I., Petrechko N.V., Skaskiv O.B. *Analytic functions in a polydisc of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables*. Mat. Stud. 2016, **46** (1), 72–80. doi:10.15330/ms.46.1.72-80
- [3] Bandura A., Petrechko N., Skaskiv O. *Maximum modulus in a bidisc of analytic functions of bounded  $\mathbf{L}$ -index and an analogue of Hayman's theorem*. Mat. Bohemica 2018, **143** (4), 339–354. doi:10.21136/MB.2017.0110-16
- [4] Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Analytic functions in the unit ball of bounded  $L$ -index: asymptotic and local properties*. Mat. Stud. 2017, **48** (1), 37–73. doi:10.15330/ms.48.1.37-73
- [5] Bandura A., Skaskiv O. *Asymptotic estimates of entire functions of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables*. Novi Sad J. Math. 2018, **48** (1), 103–116. doi: 10.30755/NSJOM.06997
- [6] Bandura A.I., Petrechko N.V. *Properties of power series of analytic in a bidisc functions of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables*. Carpathian Math. Publ. 2017, **9** (1), 6–12. doi:10.15330/cmp.9.1.6-12
- [7] Bandura A., Skaskiv O. *Analytic functions in the unit ball of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables and of bounded  $L$ -index in direction: a connection between these classes*. Demonstr. Math. 2019, **52** (1), 82–87. doi: 10.1515/dema-2019-0008
- [8] Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Iyer's metric space, existence theorem and entire functions of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables*. Bukovin. Mat. J. 2017, **5** (3-4), 8–14. (in Ukrainian)
- [9] Bandura A., Petrechko N. *Existence theorem for analytic in the polydisc function of bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables*. In: Conference materials "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies", dedicated

- to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics at Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University. September 17-19, 2018, Chernivtsi, Ukraine. 164–165. (in Ukrainian) <http://fmi50.pp.ua/files/FMI50-Materials.pdf?i=1>
- [10] Kushnir V.O., Sheremeta M.M. *Analytic functions of bounded  $l$ -index*, Mat. Stud. 1999, **12** (1), 59–66.
- [11] Petrechko N. *Bounded  $\mathbf{L}$ -index in joint variables and analytic solutions of some systems of PDE's in bidisc*. Visn. Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2017, **83**, 100–108.
- [12] Petrechko N.V. *Properties of functions of bounded index in the unit bidisc*. Diss. Cand. Phys.-Math. Sci. Lviv, 2019. (in Ukrainian) [https://lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2019/04/dys\\_petrechko.pdf](https://lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2019/04/dys_petrechko.pdf)
- [13] Ronkin L.I. *Introduction to the theory of entire functions of several variables*, 1 edn. AMS, Providence (1974)
- [14] Sheremeta M., *Analytic functions of bounded index*. VNTL Publishers, Lviv (1999).

Received 16.10.2025

---

Бандура А.І., Криштопа Л.І., Мазур Т.М., Івасів Н.В., Скасків О.Б. Зростання та існування аналітичних у бікрузі функцій обмеженого  $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №2. — С. 80–87.

Отримано оцінки зростання для аналітичних в одиничному бікрузі функцій обмеженого  $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних. Відповідна додатна неперервна функція  $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(z_2, z_2), l_2(z_1, z_2))$  задовольняє додаткову умову на поведження в бікрузі: для кожної точки  $z = (z_1, z_2)$  з одиничного бікруга  $\mathbb{D}^2$  відповідне значення функції  $l_j$  у цій точці більше за величину, обернену до  $1 - |z_j|$ , помножену на  $\beta$ , тобто,  $l_j(z) > \beta/(1 - |z_j|)$  для кожного  $j \in \{1, 2\}$  та деякої сталої  $\beta > 1$ . Також ми доводимо, що для кожної аналітичної в одиничному бікрузі функції з обмеженою кратністю нульових точок існує додатна неперервна функція  $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(z_2, z_2), l_2(z_1, z_2))$ , для якої така аналітична функція матиме обмежений  $\mathbf{L}$ -індекс за сукупністю змінних.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.10>

Працьовитий М.В., Назарчук В.В., Василенко Н.А.

## ОДНОПАРАМЕТРИЧНА СІМ'Я ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНИХ З $Q_s$ -ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ

У статті досліджується один континуальний клас функцій, означених у термінах  $Q_s$ -зображення чисел відрізка  $[0; 1]$ , що є узагальненням класичного  $s$ -кового зображення. Залежність  $n$ -ої цифри  $Q_s$ -зображення значення функції визначається фінітною функцією  $\varphi_n(a_n, \alpha_n)$  двох змінних, аргументами якої є відповідні  $Q_s$ -цифри  $\alpha_n(x)$  і  $a_n(a)$  аргумента  $x$  та параметра  $a$ .

Доведено неперервність кожної з функцій цього класу по множині  $Q_s$ -унарних чисел (чисел, що мають єдине  $Q_s$ -зображення). Знайдено необхідні і достатні умови неперервності функції по всій області визначення. Вказано умови, визначені цифрами параметра  $a$  та послідовності функцій  $(\varphi_n)$ , за яких функція  $f_a$  матиме скінченні та континуальні множини рівні. Для часткових випадків ( $s = 2$ ) вивчено інтегральні, диференціальні властивості функцій та фрактальні властивості їх множин значень; на основі автономних властивостей графіка функції і встановленого взаємозв'язку між розглядуваною функцією та інверсором цифр  $Q_2$ -зображення чисел, обчислено значення інтеграл Лебега; виділено підклас функцій, що є кусково-сингулярними або сингулярними на проміжках (тобто неперервними на проміжках функціями, відміними від константи, похідна яких рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

*Ключові слова і фрази:*  $Q_s$ -зображення чисел,  $Q_s$ -бінарне число,  $Q_s$ -унарне число, циліндр, множина канторівського типу, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, фрактальна функція, сингулярна функція, інверсор  $Q_2$ -зображення чисел.

---

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

e-mail: [prats4444@gmail.com](mailto:prats4444@gmail.com), [nazarchukvalentyana@imath.kiev.ua](mailto:nazarchukvalentyana@imath.kiev.ua), [vasylenkonnn@gmail.com](mailto:vasylenkonnn@gmail.com)

### ВСТУП

Функції з фрактальними властивостями – популярний об'єкт сучасних наукових досліджень [1, 2, 6, 7, 4, 3]. Вони проявляють себе у різних галузях математики [1]. Існує методологічна проблема наявності ефективного інструментарію задання та аналітичного вивчення фрактальних функцій. Одним з засобів розвитку теорії таких функцій є різні системи зображення дійсних чисел, що ґрунтуються на розвиненні числа в ряд спеціального виду [11]. Різні

---

УДК 511.7+517.5

2010 *Mathematics Subject Classification*: 26A21, 26A30.

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, P.M., N.V.)

системи зображення чисел для задання та дослідження структурних, тополого-метричних, диференціальних та фрактальних властивостей функцій були використанні у роботах [5, 8, 9, 10].

Нехай  $2 \leq s$  – фіксоване натуральне число,  $A_s = \{0, 1, \dots, s - 1\}$  –  $s$ -символьний алфавіт. Ми цікавимося одним континуальним класом функцій, визначених в термінах  $Q_s$ -зображення дійсних чисел, що є узагальненням класичного  $s$ -кового зображення. При цьому цифри  $Q_s$ -зображення значення функції залежать від відповідних цифр  $Q_s$ -зображення аргумента та параметра. Кожна з функцій визначається наперед заданою послідовністю фінітних функцій  $\varphi : A_s \times A_s \rightarrow A_s$ . Більшість функцій мають фрактальні властивості, принаймні фрактальними є або множина значень, або множина рівня, або графік.

Інтерес до класу таких функцій пов'язаний зі спробою його структуризації за принципом наявності фрактальних властивостей у множин різного роду особливостей функції, а також з тим, що теоретичний аналіз властивостей функцій, залежних від параметра, є пропедевтикою до вивчення фрактальних функцій двох змінних.

## 1 Об'єкт дослідження

Нехай  $L_s = A_s \times A_s \times \dots$  – простір послідовностей елементів алфавіту;  $\Phi$  – сім'я фінітних функцій  $\varphi(u, v)$  двох змінних, визначених на множині всеможливих пар елементів алфавіту, яка набуває значень з множини  $A_s$ , тобто  $\varphi_n : A_s \times A_s \rightarrow A_s$ . Очевидно, що клас функцій  $\Phi$  містить  $s^3$  різних функцій  $\varphi$ . Серед них  $s^2$  пар двоїстих функцій  $\varphi_n$  і  $\tilde{\varphi}_n$ , тобто таких, що  $\varphi_n(u, v) = s - 1 - \tilde{\varphi}_n(u, v)$ .

Нехай  $(q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$  – стохастичний вектор, такий що  $0 < q_i < 1$ ,  $i \in A_s$ . Відомо [11], що для довільного  $x \in [0; 1]$  існує послідовність  $(\alpha_n) \in L_s$  така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}, \quad (1)$$

де  $\beta_{\alpha_n} = \sum_{i=0}^{\alpha_n-1} q_i$  (тобто  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = q_0$ ,  $\beta_2 = q_0 + q_1$ , ...,  $\beta_{s-1} = 1 - q_{s-1}$ ). Розклад числа  $x$  в ряд (1) називається  $Q_s$ -представленням цього числа, а скорочений запис  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}$  – його  $Q_s$ -зображенням.

Якщо  $q_i = \frac{1}{s}$  для будь-якого  $i \in A_s$ , то  $Q_s$ -зображення є класичним  $s$ -ковим зображенням.

Існують числа, що мають два  $Q_s$ -зображення. Це числа, які мають зображення

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m(0)}^{Q_s} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} [\alpha_m-1](s-1)}^{Q_s}. \quad (2)$$

Вони називаються  $Q_s$ -бінарними. Множина таких чисел є зліченною. Решта чисел одиничного відрізка мають єдине зображення. Вони називаються  $Q_s$ -унарними.

**Означення 1.** Циліндром рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$  називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \{x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \alpha_1 \alpha_2 \dots}^{Q_s}, (\alpha_n) \in L_s\}.$$

$\forall (c_1, \dots, c_m)$  і  $\forall m \in \mathbb{N}$  циліндри  $Q_s$ -зображення мають властивості:

$$1) \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \bigcup_{i=0}^{s-1} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^{Q_s};$$

$$2) \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \left[ \sum_{i=1}^m \beta_{c_i} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}; \sum_{i=1}^m \beta_{c_i} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j} + \prod_{i=1}^m q_{c_i} \right];$$

$$3) |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s}| = \prod_{i=1}^m q_{c_i} = q_{c_m} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}}^{Q_s}|;$$

$$4) \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{Q_s} = x.$$

Нехай  $a = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{Q_s}$  – параметр (фіксоване число). Розглядається функція  $f_a$ , означена рівністю

$$f_a(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}) = \Delta_{\varphi_1(a_1, \alpha_1) \varphi_2(a_2, \alpha_2) \dots \varphi_n(a_n, \alpha_n) \dots}^{Q_s}. \quad (3)$$

Означення функції  $f_a$ , взагалі кажучи, є некоректним, оскільки для різних зображень  $Q_s$ -бінарного числа має місце нерівність  $f_a(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n(0)}^{Q_2}) \neq f_a(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n-1] (s-1)}^{Q_2})$ . Тому домовимось використовувати лише одне із зображень, а саме те, що містить період (0), за виключенням деяких випадків.

Розглянемо приклади функцій, породжених сталими послідовностями  $(\varphi_n)$ .

Якщо  $\varphi_n(u, v) = v$ , то  $f_1 \equiv f_a(x) = x$ ; якщо  $\varphi_n(u, v) = u$ , то  $f_2 \equiv f_a(x) = a$ ; якщо  $a = \Delta_{(0)}^{Q_s}$ ,  $\varphi_n(u, v) = s - 1 - u$ , то  $f_3 \equiv f_a(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}) = \Delta_{|s-1-\alpha_1| |s-1-\alpha_2| \dots |s-1-\alpha_n| \dots}^{Q_s}$  – інверсор цифр  $Q_s$ -зображення чисел. Функції  $\varphi_n$  функцій  $f_1$  і  $f_2$  є двоїстими, тому множини значень, множин рівнів, їхні графіки мають деякі властивості “симетрії”, але диференціальні властивості функцій  $f_1$  і  $f_2$  принципово різні. Окрема увага подібним класам функцій присвячена в роботах [6, 7]. Якщо  $\varphi_n(u, v) = |u - v|$  для будь-якого  $n \in N$ , то ми отримуємо клас функцій, що вивчався в роботі [4].

## 2 ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ $f_a$

**Теорема 1.** Для будь-якої послідовності функцій  $(\varphi_n)$  і будь-якого значення параметра  $a$  функція  $f_a$  є неперервною по всій множині  $Q_s$ -унарних чисел, і неперервною по всій області визначення тоді і лише тоді, коли для будь-якого  $n \in N$ ,  $i \in A_s$  виконується одна з рівностей

$$\varphi_n(a_n, i) = \varphi_n(a_n, s - 1 - i) \text{ або } \varphi_n(a_n, i) = s - 1 - \varphi_n(a_n, s - 1 - i). \quad (4)$$

*Доведення.* Нехай  $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}$  – довільна  $Q_s$ -унарна точка і  $f_a(x_0) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n \dots}^{Q_s}$ , де  $b_n = \varphi_n(a_n, \alpha_n)$ . Розглянемо точку  $x \neq x_0$ , тоді існує такий номер  $n$ , що  $\alpha_n(x) \neq \alpha_n(x_0)$ , але  $\alpha_j(x) = \alpha_j(x_0)$  для усіх  $j < n$ . Умова  $n \rightarrow \infty$  рівносильна  $x \rightarrow x_0$ . Для обґрунтування неперервності функції  $f_a$  в точці  $x_0$  покажемо, що

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| = 0.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_{b_1 b_2 \dots b_{n-1} b'_n \dots}^{Q_s} - \Delta_{b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n \dots}^{Q_s}| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=1}^{n-1} q_{b_i} \right) |\Delta_{b'_n b'_{n+1} \dots}^{Q_s} - \Delta_{b_n b_{n+1} \dots}^{Q_s}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} q_{b_i} \cdot 1 = 0, \end{aligned}$$

то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_a(x) = f_a(x_0)$ , а отже, функція  $f_a$  неперервна по множині  $Q_s$ -унарних чисел.

Нехай  $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^{Q_s} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1]^{(s-1)}}^{Q_s}$  –  $Q_s$ -бінарне число.

Доведення необхідної і достатньої умови другої частини теореми проведемо окремо.

*Необхідність.* Якщо функція  $f_a$  неперервна в точці  $x_0$ , тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_a(x) = f_a(x_0)$ , то вона неперервна зліва і справа в цій точці. Розглянемо послідовність  $(x_k)$ , де

$$x_k = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n \underbrace{[s-1] \dots [s-1]}_k}^{Q_s}.$$

Очевидно, що  $x_k \rightarrow x_0 - 0$ , коли  $k \rightarrow \infty$ . Тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_a(x_k) = f_a(x_0) = f_a(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^{Q_s}).$$

Тепер розглянемо послідовність  $(x'_k)$ , де

$$x'_k = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1] \underbrace{0 \dots 0}_k}^{Q_s}.$$

Очевидно, що  $x'_k \rightarrow x_0 + 0$ , коли  $k \rightarrow \infty$ . Тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_a(x'_k) = f_a(x_0) = f_a(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1]^{(0)}}^{Q_s}).$$

Отже, мають місце рівності:

$$f_a(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^{Q_s}) = f_a(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1]^{(0)}}^{Q_s}) \quad \forall n \in N,$$

тобто  $\forall n \in N, i \in N$

$$\Delta_{\varphi_1(a_1, \alpha_1) \dots \varphi_n(a_n, \alpha_n) (\varphi_{n+i}(a_{n+i}, s-1))}^{Q_s} = \Delta_{\varphi_1(a_1, \alpha_1) \dots \varphi_n(a_n, [\alpha_n - 1]) (\varphi_{n+i}(a_{n+i}, 0))}^{Q_s}.$$

В силу довільності  $n$  і  $\alpha_n$  дана рівність виконується лише умови виконання для будь-якого  $n \in N$  однієї з рівностей (4) (тобто відповідні цифри образу  $Q_s$ -бінарних точок збігаються або переходять у “протилежні” в межах алфавіту).

*Достатність.* Якщо виконується для будь-якого  $n \in N$  одна з рівностей умови (4), тоді очевидно, що

$$f_a(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^{Q_s}) = f_a(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1]^{(0)}}^{Q_s}).$$

Розглянемо число  $x < x_0$ , близьке до  $x_0$ , тобто

$$x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \underbrace{s-1 \dots s-1}_k \alpha_{k+n+1} \dots}^{Q_s} \rightarrow x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^{Q_s}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n q_{\alpha_i} |f_a(\Delta_{s-1 \dots s-1 \alpha_{k+n+1} \dots}^{Q_s}) - f_a(\Delta_{(s-1)}^{Q_s})| = 0.$$

Аналогічними міркування можна показати, що правостороння границя існує і збігається з  $f(x_0)$ . Теорему доведено.  $\square$

**Зауваження 1.** Рівності (4) можуть виконуватись як за рахунок функцій  $\varphi_n$ , так і за рахунок цифр параметра  $a_n$ . Наприклад, функція  $\varphi_n(u, v) = |u - v|$  для довільних пар  $(u, v) \in A_s \times A_s$  не задовольняє рівності (4), але якщо  $a_n = s - 1$  для будь-якого  $n \in N$ , в цьому випадку  $f_a$  буде неперервна.

**Наслідок 1.** Для будь-якого значення параметра  $a$  з одиничного відрізка існує послідовність функції  $(\varphi_n)$  така, що  $f_a$  неперервна функція.

**Зауваження 2.** Неперервні функції  $f_a$  утворюють континуальну множину, зокрема для будь-якого  $c \in [0; 1]$  існують такий параметр  $a$  і послідовність функцій  $(\varphi_n)$ , що  $f_a(x) = c = const$ .

**Наслідок 2.** Кожна неперервна функція  $f_a$  є монотонною (лінійною або сингулярною) функції.

Дослідимо властивості множин рівнів. Нагадаємо, що множиною рівня  $y_0 \in D_{f_a}$  називається множина всіх його прообразів, тобто множина виду:

$$f_a^{-1}(y_0) = \{x : f_a(x) = y_0\}.$$

**Теорема 2.** Нехай не існує такого номера  $m$ , що  $\varphi_{m+i}(u, v) = const$  для будь-якого  $i \in N$ . Якщо для нескінченної кількості  $n$  мають місце нерівності

$$\varphi_n(a_n, i) \neq \varphi_n(a_n, s - 1 - i) \quad \text{і} \quad \varphi_n(a_n, i) \neq s - 1 - \varphi_n(a_n, s - 1 - i), \quad (5)$$

то функція  $f_a$  має як скінченні, так і континуальні множини рівнів; якщо нерівності (5) виконуються лише для скінченної кількості  $n$ , то функція  $f_a$  має лише скінченні рівні.

*Доведення.* Нехай умови (5) виконуються на скінченній кількості місць  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , причому  $n_k$  – порядковий номер функції  $\varphi$ , для якої мають місце умови (5), тоді функція  $f_a$  згідно з попередньою теоремою є неперервною на кожному циліндрі  $(n_k + 1)$ -ого рангу. Оскільки не існує такого номера  $m$ , що  $\varphi_{m+i}(u, v) = const$  для будь-якого  $i \in N$ , то на кожному циліндрів  $(n_k + 1)$ -го рангу функція є монотонно спадною або зростаючою. Тому в такому випадку функція  $f_a$  має лише скінченні рівні.

Якщо умови (5) виконуються для нескінченної кількості  $n$ , то встановивши бієкцію між двійковим зображенням числа з одиничного відрізка і фактом виконання або не виконання умов (5), отримуємо континуальну множину точок розриву функції  $f_a$ . А тому множини рівнів функції  $f_a$  можуть бути як континуальні, так і скінченні.  $\square$

**Зауваження 3.** Якщо існує такий номер  $m$ , що  $\varphi_{m+i}(u, v) = const$  для будь-якого  $i \in N$ , то очевидно, що усі множини рівнів є або порожні множини або континуальні.

### 3 ДЕЯКІ ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ

**Зауваження 4.** Якщо  $s = 2$ ,  $\varphi_n(u, v) = 1 - v$  для  $n \in N$ , то функція  $f_a(x)$  є інверсором цифр  $Q_2$ -зображення чисел:

$$f_a(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_2}) = I(x) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{Q_2},$$

яка, як відомо [11], є строго спадною сингулярною функцією (неперервною, відмінною від константи, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

**Лема 1.** Нехай  $s = 2$ . Якщо, починаючи з деякого номера  $t$ , усі функції  $\varphi_{t+n}(u, v) = 1 - v$  для будь-якого  $n \in N$ , то функція  $f_a(x)$  є кусково-сингулярною, а саме сингулярною на кожному циліндрі рангу  $t$ .

*Доведення.* Легко показати, що незалежно від набору  $(a_1, \dots, a_t)$  і функцій  $\varphi_1, \dots, \varphi_t$  функція  $f_a$  буде неперервною на кожному циліндрі рангу  $t$ , оскільки

$$f_a(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_2}) = \beta_{\varphi_1(a_1, \alpha_1)} + \sum_{i=2}^t \beta_{\varphi_i(a_i, \alpha_i)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\varphi_j(a_j, \alpha_j)} + \prod_{i=1}^t q_{\varphi_i(a_i, \alpha_i)} I(\Delta_{\alpha_{t+1} \alpha_{t+2} \dots}^{Q_2}). \quad \square$$

**Зауваження 5.** За виконанні умов теореми графік функції на циліндрі  $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^{Q_2}$  афінно-еквівалентний графіку інверсора цифр, тобто графік інверсора переходить в графік функції  $f_a$  на циліндрі  $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^{Q_2}$  під дією афінного перетворення:

$$\begin{cases} x' = \prod_{i=1}^t q_{\alpha_i} x + \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^{Q_2}, \\ y = (f_a(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^{Q_2}(0)) - f_a(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^{Q_2}(1)))y + 1 - f_a(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^{Q_2}(1)). \end{cases} \quad (6)$$

**Теорема 3.** Нехай  $s = 2$  і  $\varphi_k(u, v) = |u - v| \forall k \in N$ . Якщо починаючи з деякого номера  $t \in N$ , усі цифри  $a_{t+n} = 1, n \in N$ , тобто  $a = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_t}^{Q_2}$ , то має місце рівність:

$$\int_0^1 f_a(x) dx = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in A_2^t} \left[ q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_t} \left( f_a(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^{Q_2}(0)) + 1 - \frac{2q_0^2 + q_1^2}{1 - 2q_0 q_1} f_a(\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}(1)) \right) \right]. \quad (7)$$

*Доведення.* Згідно з адитивної властивості інтеграла запишемо рівність

$$\int_0^1 f_a(x) dx = \sum_{(a_1, \dots, a_t) \in A_2^t} \int_{\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}} f_a(x) dx,$$

тоді враховуючи афінні перетворення (6) маємо:

$$\int_{\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}} f_a(x) dx = q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_t} (f_a(\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}(0)) - f_a(\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}(1))) \int_0^1 I(x) dx + q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_t} (1 - f_a(\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}(1))).$$

Як відомо, [11]

$$\int_0^1 I(x) dx = \frac{q_0^2}{1 - 2q_0 q_1}.$$

Тоді

$$\int_{\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}} f_a(x) dx = q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_t} \left[ (f_a(\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}(0)) - f_a(\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}(1))) \frac{q_0^2}{1 - 2q_0 q_1} + 1 - f_a(\Delta_{a_1 \dots a_t}^{Q_2}(1)) \right].$$

В результаті спрощення отримуємо вираз (7). □

**Теорема 4.** Нехай  $s = 2$  і  $\varphi_n(u, v) = uv \forall n \in N$ , тоді

- 1) якщо в  $Q_2$ -зображенні параметра  $a$  скінченна кількість одиниць, то множина значень функції  $f_a \in$  скінченною;
- 2) якщо кількість нулів серед цифр  $Q_2$ -зображення числа  $a$  скінченна, то множина значень функції  $f_a \in$  об'єднанням відрізків;

- 3) в решті випадків множиною значень функції  $f_a(x)$  є множиною канторівського типу (ніде не щільна множина нульової міри Лебега) з дробовою фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.

Доведення. Нехай  $Q_2$ -зображення числа  $a$  має вигляд  $a = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{Q_2}$  і

$$y = f_a(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^{Q_2}.$$

1) Нехай серед цифр  $a_n$  лише скінченна кількість 1, тобто  $a_{n_1} = a_{n_2} = \dots = a_{n_k} = 1$ . Тоді  $\beta_{n_i} = \varphi_{n_i}(1, \alpha_{n_i}) = \alpha_{n_i}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , а  $\beta_n = 0$  для усіх решта  $n \in N \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ . Тоді очевидно, що множиною значень функції  $f_a$  є множина точок виду

$$\Delta_{0 \dots 0 \alpha_{n_1} 0 \dots 0 \alpha_{n_2} 0 \dots 0 \alpha_{n_k} (0)}^{Q_2} \text{ або } \Delta_{\alpha_{n_1} 0 \dots 0 \alpha_{n_2} 0 \dots 0 \alpha_{n_k} (0)}^{Q_2}.$$

Оскільки номерів  $n_i$  скінченна кількість, то відповідно і множина значень є скінченною.

2) Нехай серед цифр  $a_n$  лише скінченна кількість 0, тобто  $a_{n_1} = a_{n_2} = \dots = a_{n_k} = 0$ . Тоді згідно з попередніми міркуваннями множиною значень функції  $f_a$  буде множина точок виду  $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_1-1} 0 \alpha_{n_1+1} \dots \alpha_{n_2-1} 0 \alpha_{n_2+1} \dots \alpha_{n_k-1} 0 \alpha_{n_k+1} \dots}^{Q_2}$ . Оскільки місць номерів фіксованих цифр скінченна, то множина значень є об'єднанням відрізків.

3) Нехай серед цифр  $a_n$  є нескінченна кількість нулів та одиниць, тобто серед цифр  $\beta_n$  нескінченна кількість одиниць, тоді множиною значень функції є множина

$$C[Q_2, V] = \{x : x = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^{Q_2}, \beta_n = 1, n \in V \subset N\},$$

де  $V$  – множина місць для яких  $\beta_n = 1$ . Як відомо [11], дана множина є досконалою множиною нульової міри Лебега з дробовою розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.  $\square$

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Y. Chen, Fractal Texture and Structure of Central Place Systems, *Fractals* 28(01) (2020) 2050008
- [2] Jarnicki M., Pflug. P. Continuous nowhere differentiable functions. The monsters of analysis. Springer Monographs in Mathematics, 2015, doi:https://doi.org/10.1007/978-3-319-12670-8
- [3] Massopust P. *Fractal Functions, fractal surfaces, and Wavelets*. Academic press, inc. 1994.
- [4] Nazarchuk V.V., Vaskevych S.O., Ratushniak S.P. *One continuum class of fractal functions defined in terms of  $Q_s^*$ -representation*, Bukovinian Math. Journal. 12, 2 (2024), 154–161. doi:https://doi.org/10.31861/bmj2024.02.14
- [5] Panasenko O.B. *Fractal dimension of graphs of continuous cantor projectors*. Nauk. Chas. Nats. Ped. Univ. im. Drahomanova, Ser. Fiz.-Mat. Nauk 2008, 9, 104–111. (in Ukrainian).
- [6] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dmytrenko S.O., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. *About one class of function with fractal properties // Bukovynian Mathematical Journal*. 2021, T. 6 ,№ 1 – P.273–283. https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.23 (in Ukrainian)
- [7] Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S. P. *Structural and self-similar properties of representations of one class of fractal functions and distributions of their values / Voronoi's Impact on Modern Science*. Proceeding of the Sixth Inter. Conf. on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations. 2025. Vol. 2. pp.199-207.
- [8] Pratsiovytyi M., Vasylenko N. *Fractal properties of functions defined in terms of  $Q$ -representation // International Journal of Math. Analysis*, Vol.7, 2013. no. 61-67. – P.3155–3169.
- [9] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliakh N.V., Ratushniak S.P. *Inversor of digits of  $Q_2^*$ -representative*, *Mat. Stud.* 55 (2021), P.37–43. doi: https://doi.org/10.30970/ms.55.1.37-43

- [10] Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P., Klymchuk S.O. *Level sets of asymptotic mean of digits function for 4-adic representation of real numbers*. Methods Funct. Anal. Topology. 2016, **22** (2), 184–196.
- [11] Pratsiovytyi M.V. Two-symbol systems of encoding of real numbers and their applications. Naukova Dumka, Kyiv (2022). (in Ukrainian)

Надійшло 27.11.2025

---

Pratsiovytyi M.V., Nazarchuk V.V., Vasylenko N.A. *A one-parameter family of fractal functions related with the  $Q_s$ -representation of real numbers*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 88–95.

In the paper we consider a continuum class functions defined by terms of the  $Q_s$ -representation of real numbers on the segment  $[0; 1]$ , which generalizes the classical  $s$ -adic representation. The dependence of the  $n$ -th digit of the  $Q_s$ -representation of the function value is specified by a finite function  $\varphi_n(a_n, \alpha_n)$  of two variables, whose arguments are the corresponding  $Q_s$ -digits  $\alpha_n(x)$  and  $a_n(a)$  of the input  $x$  and the parameter  $a$ , respectively.

We prove continuity of each function in this class at every  $Q_s$ -unary number, i.e., at points possessing a unique  $Q_s$ -representation. Necessary and sufficient conditions for continuity on the entire domain are established. Conditions involving the digits of the parameter  $a$  and the sequence of defining functions  $(\varphi_n)$ , under which the function  $f_a$  admits finite or continuum cardinality level sets are obtained.

For particular cases ( $s = 2$ ), we study integral and differential properties, as well as the fractal properties of the sets of values. Using the self-similarity properties of the function graph and the established connection between the functions under consideration and the inversor of digits of the  $Q_2$ -representation of numbers, we compute the Lebesgue integral of these functions. Furthermore, we identify a subclass of functions that are piecewise singular or singular on intervals; that is, continuous non-constant functions whose derivative is zero almost everywhere in the sense of Lebesgue measure.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.11>

ГРУШКА Я.І.

**ПРО ВНУТРІШНІЙ ЧАС НА СИНХРОНІЗОВАНІЙ ОРІЄНТОВАНІЙ  
МНОЖИНІ\***

Орієнтовані множини — це найпростіші математичні структури, які моделюють сукупності еволюціонуючих об'єктів. Дана робота присвячена проблемі існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині. З інтуїтивного погляду внутрішній — це такий час, хід якого можна “спостерігати і фіксувати” “живучи всередині” орієнтованої множини. В роботі доведено, що отримана в попередніх роботах достатня ознака існування і єдиності внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині не є необхідною, а також встановлено одну необхідну ознаку існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині і показано, що ця ознака не є достатньою.

*Ключові слова і фрази:* Орієнтована множина, лінійно впорядкована множина, внутрішній час, теорія мінливих множин.

---

Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine  
e-mail: [grushka@imath.kiev.ua](mailto:grushka@imath.kiev.ua)

\* Ця робота присвячена пам'яті професора Володимира Кириловича Маслюченка.

**1 ВСТУП**

Поняття орієнтованої множини є базовим найелементарнішим поняттям теорії мінливих множин. З інтуїтивної точки зору мінливі множини це — сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій, тобто — змінювати свої властивості, з'являтися чи зникати, розпадатись на декілька частин чи, навпаки, декілька об'єктів можуть зливатися в один. Крім того картина еволюції мінливої множини може залежати від способу спостереження, тобто від системи відліку. Основною мотивацією для створення теорії мінливих множин послужила шоста проблема Гільберта, тобто проблема математично строгого формулювання основ теоретичної фізики. Ця проблема, була поставлена Д. Гільбертом ще в 1900 р. (див. [1]), але, і на сьогодні вона залишається дуже актуальною [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Проблема побудови математичної теорії мінливих

---

УДК 510.22, 512.562

2010 *Mathematics Subject Classification:* 03E75, 06A06.

Робота частково підтримана грантом від Фондації Саймонса (SFI-PD-Ukraine- 00014586, Grushka Ya.I.).

множин, тобто “множин” із переліченими вище властивостями, в різних формах ставилась, зокрема, в роботах [11, 12, 13, 14]. На математично строгому рівні теорія мінливих множин була побудована в роботах [15, 16, 17, 18] та ін. Найбільш повний і систематичний виклад цієї теорії можна знайти в препринті [19] та дисертації [20].

Орієнтовані множини можна трактувати як найпримітивніші абстрактні моделі сукупностей мінливих об’єктів, що еволюціонують в рамках однієї (фіксованої) системи відліку. Також орієнтовані множини є найпростішими математичними структурами, в рамках яких можна ввести поняття часу. Виявляється, що існує нескінченно багато способів побудувати (визначити) час на довільній орієнтованій множині, але особливо цікавим видом часу га орієнтованих множинах є внутрішній час. З інтуїтивної точки зору внутрішній час на орієнтованій множині — це такий час, хід якого можна “спостерігати і фіксувати” “живучи всередині” цієї орієнтованої множини (математично строге означення даного поняття буде дано в наступному розділі статті). В даній роботі обговорюються математичні проблеми, пов’язані з внутрішнім часом на орієнтованих множинах. Зокрема в роботі встановлено певну необхідну ознаку існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині.

## 2 ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ФАКТИ

**Означення 1.** Орієнтованою множиною називається довільна реляційна система з одним рефлексивним бінарним відношенням, тобто упорядкована пара виду  $\mathcal{M} = \left( \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}), \overset{\leftarrow}{\leftarrow}_{\mathcal{M}} \right)$ , де  $\overset{\leftarrow}{\leftarrow}_{\mathcal{M}}$  — рефлексивне бінарне відношення на  $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ .

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину  $\mathcal{M}$  йде мова, в позначенні  $\overset{\leftarrow}{\leftarrow}_{\mathcal{M}}$  символ  $\mathcal{M}$  будемо опускати, вживаючи позначення “ $\leftarrow$ ”. Множину  $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  будемо називати базовою, або множиною всіх елементарних станів орієнтованої множини  $\mathcal{M}$ , а відношення  $\leftarrow$  будемо називати напрямним відношенням змін (трансформацій)  $\mathcal{M}$ .

**Означення 2.** Нехай,  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина і  $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$  — лінійно упорядкована множина. Відображення  $\psi : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  називається **часом** на  $\mathcal{M}$ , якщо виконуються такі умови:

- 1) Для довільного елементарного стану  $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  існує елемент  $t \in \mathbf{T}$  такий, що  $x \in \psi(t)$ .
- 2) Якщо  $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ ,  $x_2 \leftarrow x_1$  і  $x_1 \neq x_2$ , то існують елементи  $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$  такі, що  $x_1 \in \psi(t_1)$ ,  $x_2 \in \psi(t_2)$  і  $t_1 < t_2$  (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).

При цьому елементи  $t \in \mathbf{T}$  будемо називати **моментами часу**, а пару  $\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$  будемо називати **хронологізацією**  $\mathcal{M}$ .

**Означення 3.** Нехай,  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина і  $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ ,  $\psi_2 : \mathbf{T}_2 \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  деякі часи для  $\mathcal{M}$ , визначені на лінійно упорядкованих множинах  $(\mathbf{T}_1, \leq_1)$  і  $(\mathbf{T}_2, \leq_2)$  відповідно. Хронологізації  $\mathcal{H}_1 = ((\mathbf{T}_1, \leq_1), \psi_1)$  та  $\mathcal{H}_2 = ((\mathbf{T}_2, \leq_2), \psi_2)$  будемо називати **еквівалентними** (позначення  $\mathcal{H}_1 \uparrow \mathcal{H}_2$ ), якщо існує взаємно однозначна відповідність  $\xi : \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2$  така, що:

- 1)  $\xi$  є порядковим ізоморфізмом між  $\mathbf{T}_1$  і  $\mathbf{T}_2$ , тобто  $\xi : \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2$  — бієкція між  $\mathbf{T}_1$  та  $\mathbf{T}_2$  і для довільних  $t, \tau \in \mathbf{T}_1$  нерівність  $t \leq_1 \tau$  має місце тоді і тільки тоді, коли  $\xi(t) \leq_2 \xi(\tau)$ .
- 2) Для довільного  $t \in \mathbf{T}_1$  має місце рівність  $\psi_1(t) = \psi_2(\xi(t))$ .

Використовуючи означення 3, нескладно перевірити істинність наступного твердження:

**Твердження 1.** Нехай,  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина і  $\mathcal{W}$  — довільна множина, що складається з хронологізацій  $\mathcal{M}$ . Тоді бінарне відношення  $\uparrow$  є відношенням еквівалентності на  $\mathcal{W}$ .

**Означення 4.** Нехай  $(\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$  — хронологізація орієнтованої множини  $\mathcal{M}$ . Множину

$$Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$$

будемо називати **множиною одночасних станів**, породженою часом  $\psi$ .

Безпосередньо з означення 2 випливає наступне твердження.

**Твердження 2.** Нехай  $(\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$  — хронологізація орієнтованої множини  $\mathcal{M}$ , а  $Y_\psi$  — множина одночасних станів, породжена часом  $\psi$ . Тоді  $\bigcup_{A \in Y_\psi} A = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ .

**Означення 5.** Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина. Довільну сім'ю множин  $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  таку, що  $\bigcup_{A \in \mathbf{Y}} A = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  будемо називати **одночасністю** на  $\mathcal{M}$ .

При цьому пару  $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$  будемо називати **синхронізованою орієнтованою множиною**.

**Теорема 1** ([16], див. також [19], Theorem 1.4.1 або [20], теорема 1.28). Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина і  $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  — одночасність на  $\mathcal{M}$ . Тоді на орієнтованій множині  $\mathcal{M}$  існує час  $\psi$  такий, що  $\mathbf{Y} = Y_\psi$ , де  $Y_\psi$  — множина одночасних станів, породжена часом  $\psi$ .

Наступна мета — дати означення внутрішнього часу на орієнтованій множині, тобто часу, який можна фіксувати “засобами”, що знаходяться “всередині” орієнтованої множини.

**Позначення 1.** На довільній орієнтованій множині  $\mathcal{M}$  введемо додатково наступне бінарне відношення. Для довільних  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  будемо позначати  $y \overset{\pm}{\leftarrow}_{\mathcal{M}} x$  тоді і тільки тоді, коли  $y \overset{\leftarrow}{\mathcal{M}} x$  і  $x \not\overset{\leftarrow}{\mathcal{M}} y$ . У випадках, коли не виникає непорозумінь замість позначення  $y \overset{\pm}{\leftarrow}_{\mathcal{M}} x$  будемо використовувати позначення  $y \overset{\pm}{\leftarrow} x$ .

**Означення 6.** Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина. **1)** Будемо говорити, що множина  $B \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  **монотонно послідовна** множині  $A \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  в орієнтованій множині  $\mathcal{M}$ , якщо існують такі елементи  $x \in A$  і  $y \in B$ , що  $y \overset{\pm}{\leftarrow}_{\mathcal{M}} x$ . В цьому випадку будемо використовувати позначення позначення  $B \overset{\leftarrow}{\mathcal{M}} (+) A$ . **2)** Нехай  $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  — деяка система підмножин множини  $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ . Будемо говорити, що множина  $B \in \mathcal{Q}$  **транзитивно монотонно послідовна** множині  $A \in \mathcal{Q}$  відносно  $\mathcal{Q}$  (використовуючи позначення  $B \overset{\mathcal{Q}}{\leftarrow}{\mathcal{M}} (+) A$ ), якщо існує така послідовність множин  $C_0, C_1, \dots, C_n \in \mathcal{Q}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), що  $C_0 = A$ ,  $C_n = B$  і для довільного  $k \in \overline{1, n}$  має місце співвідношення,  $C_k \overset{\leftarrow}{\mathcal{M}} (+) C_{k-1}$ , де  $\overline{1, n} = \{1, \dots, n\}$ .

У випадку, коли наперед відомо, про яку орієнтовану множину  $\mathcal{M}$  йде мова, в позначеннях  $\overset{\mathcal{Q}}{\leftarrow}{\mathcal{M}} (+)$  і  $\overset{\mathcal{Q}}{\leftarrow}{\mathcal{M}} (+)$  символ  $\mathcal{M}$  будемо опускати, вживаючи, замість них позначення  $\overset{\mathcal{Q}}{\leftarrow} (+)$  і  $\overset{\mathcal{Q}}{\leftarrow} (+)$  відповідно.

Безпосередньо з означення 6 випливає такий наслідок:

**Наслідок 1.** Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина,  $A, B \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  і  $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ . Тоді:

1. Якщо  $B \overset{\leftarrow}{\mathcal{M}} (+) A$ , то  $A, B \neq \emptyset$ .
2. Якщо  $B \overset{\mathcal{Q}}{\leftarrow}{\mathcal{M}} (+) A$ , то існують  $x \in A$  і  $x' \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  такі, що  $x' \overset{\pm}{\leftarrow} x$ , а також існують  $y \in B$  і  $y' \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  такі, що  $y \overset{\pm}{\leftarrow} y'$ .

3. Якщо  $B \overset{\mathcal{Q}}{\leftarrow(+)} A$ , то  $A, B \neq \emptyset$ .

Крім того, використовуючи означення 6 отримуємо наступне твердження:

**Твердження 3.** Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина.

1) Якщо  $A, B \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  і  $B \leftarrow(+)$   $A$ , то для довільних  $A', B' \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  таких, що  $A \subseteq A'$ ,  $B \subseteq B'$  справедливе співвідношення  $B' \leftarrow(+)$   $A'$ .

2) Нехай  $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}' \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  — системи підмножин множини  $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ , причому  $\mathfrak{S} \sqsubseteq \mathfrak{S}'$  (тобто для довільної множини  $A \in \mathfrak{S}$  існує множина  $A' \in \mathfrak{S}'$  така, що  $A \subseteq A'$ ).

Тоді для довільних  $A, B \in \mathfrak{S}$  і  $A', B' \in \mathfrak{S}'$  таких, що  $A \subseteq A'$ ,  $B \subseteq B'$  з умови  $B \overset{\mathfrak{S}}{\leftarrow(+)} A$  випливає, що  $B' \overset{\mathfrak{S}'}{\leftarrow(+)} A'$ .

**Означення 7.** Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина, а  $\psi : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  — час на  $\mathcal{M}$  (заданий на лінійно упорядкованій множині  $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ ).

Відображення  $\mathbf{h} : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  будемо називати **хронометричним процесом** (для часу  $\psi$ ), якщо:

1)  $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$  для довільного  $t \in \mathbf{T}$ .

2) Для довільних  $t, \tau \in \mathbf{T}$  умова  $t < \tau$  має місце тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\leftarrow(+)} \mathbf{h}(t)$  і  $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$ , де  $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{T}\}$ ;

Час  $\psi$  на орієнтованій множині  $\mathcal{M}$  будемо називати **внутрішнім**, якщо для цього часу існує хоч один хронометричний процес.

**Зауваження 1.** З пункту 2) означення 7 та пункту 3 наслідка 1 випливає, що:

Якщо відображення  $\mathbf{h} : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  є хронометричним процесом для деякого часу і при цьому часова шкала  $\mathbf{T}$  містить хоча б два елемента, то для довільного  $t \in \mathbf{T}$  множина  $\mathbf{h}(t)$  — непорожня ( $\mathbf{h}(t) \neq \emptyset$ ).

Інтуїтивний зміст терміну “внутрішній час” полягає в тому, що якщо час на орієнтованій множині є внутрішнім, його можна “поміряти” в межах цієї орієнтованої множини, використовуючи хронометричний процес в якості “годинника”, а стани хронометричного процесу в якості “індикаторів моментів часу”.

### 3 ДОСТАТНЯ ОЗНАКА ІСНУВАННЯ І ЄДИНОСТІ ВНУТРІШНЬОГО ЧАСУ НА СИНХРОНІЗОВАНИЙ ОРІЄНТОВАНИЙ МНОЖИНІ І ПРОБЛЕМИ ПОВ'ЯЗАНІ З НЕЮ

В цьому розділі буде наведено достатню ознаку існування і єдиності внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині і сформульовано деякі проблеми, породжені нею. Перш за все нижче вводяться деякі технічні поняття, необхідні для формулювання зазначеної достатньої ознаки.

**Означення 8.** Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина.

1) Одночасність  $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  будемо називати **чутливою**,<sup>1</sup> якщо для довільних  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  таких, що  $y \leftarrow x$  і  $x \neq y$  існують множини  $A, B \in \mathbf{Y}$  такі, що  $x \in A$ ,  $y \in B$ ,  $A \neq B$  і  $B \overset{\mathbf{Y}}{\leftarrow(+)} A$ .

<sup>1</sup> В більш ранніх роботах див., напр. [16, 20] використовувався термін “чітка одночасність” для назви даного поняття. В даній роботі ми змінили даний термін на термін “чутлива одночасність”, оскільки останній набагато краще характеризує сутність зазначеного поняття.

2) Систему множин  $\mathfrak{S} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$  будемо називати **неповторною**, якщо не існує множин  $A, B \in \mathfrak{S}$  таких, що  $A \leftarrow (+) B$  і  $B \leftarrow (+) A$ . Зокрема, якщо одночасність  $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$  є неповторною системою множин, будемо вживати термін “**неповторна одночасність**”.

3) Одночасність  $\mathbf{Y}$  будемо називати **чутливо-неповторною**, якщо вона є чутливою і неповторною одночасно.

**Означення 9.** Одночасність  $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$  на орієнтованій множині  $\mathcal{M}$  будемо називати **монотонно зв'язною**, якщо для довільних множин  $A, B \in \mathbf{Y}$  таких, що  $A \neq B$  має місце хоч одна з умов  $A \leftarrow (+) B$  або  $B \leftarrow (+) A$ .

В 2012 році було доведено наступну достатню ознаку існування і єдиності такого внутрішнього часу  $\psi$  на синхронізованій орієнтованій множині  $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$ , який породжує одночасність  $\mathbf{Y}$  (тобто такого внутрішнього часу  $\psi$ , що  $\mathbf{Y} = Y_\psi$ ).

**Теорема 2** ([16], див, також, [19], Theorem 1.4.3 або [20], теорема 1.47). Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина. Для довільної чутливо-неповторної і монотонно-зв'язної одночасності  $\mathbf{Y}$  на  $\mathcal{M}$  існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій внутрішній час  $\psi$  такий, що  $\mathbf{Y} = Y_\psi$ .

Зауважимо, що єдиність з точністю до еквівалентності хронологізацій в теоремі 2 слід розуміти наступним чином:

“Якщо на лінійно упорядкованих множинах  $\mathbb{T}_1$  і  $\mathbb{T}_2$  визначені (відповідно) внутрішні часи  $\psi_1$  і  $\psi_2$  такі, що  $\mathbf{Y} = Y_{\psi_1} = Y_{\psi_2}$ , то хронологізації  $\mathcal{H}_1 = (\mathbb{T}_1, \psi_1)$  і  $\mathcal{H}_2 = (\mathbb{T}_2, \psi_2)$  є еквівалентними (тобто  $\mathcal{H}_1 \uparrow \mathcal{H}_2$ )”.

Філософський зміст теореми 2 полягає в тому, що ця теорема дає достатню ознаку існування і єдиності “власного”, “внутрішнього” часу в деякому “абстрактному світі”  $\mathcal{M}$ .

Зазначимо, що теорема 2 носить лише достатній характер. Це буде видно з наступного прикладу.

**Приклад 1.** Нехай  $\mathcal{M}_{\hat{2}} = \mathcal{M}_{\{1,2\}}$  — орієнтована множина така, що:

$$(\mathcal{M}_{\hat{2}}^{\text{def}}:1) \quad \mathfrak{B}s(\mathcal{M}_{\hat{2}}) = \{1, 2\} = \hat{2};$$

$$(\mathcal{M}_{\hat{2}}^{\text{def}}:2) \quad \text{Для } x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M}_{\{1,2\}}) \text{ співвідношення } y \leftarrow x \text{ виконується тоді і тільки тоді, коли } x \leq y, \text{ де } \leq \text{ — стандартне відношення лінійного порядку на множині натуральних чисел.}$$

На орієнтованій множині  $\mathcal{M}_{\hat{2}}$  розглянемо одночасність:

$$\mathbf{Y}_{\hat{2}} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\} = \{\{1\}, \mathfrak{B}s(\mathcal{M}_{\hat{2}}), \{2\}\}. \quad (1)$$

Покладемо

$$\mathbb{T}_{\hat{2}} := \{0, 1, 2\}. \quad (2)$$

Тоді пара  $\mathbb{T}_{\hat{2}} = (\mathbb{T}_{\hat{2}}, \leq)$  є лінійно упорядкованою множиною відносно звуження стандартного відношення лінійного порядку на множині цілих чисел  $\leq$  на множину  $\{0, 1, 2\}$ . Легко бачити, що відображення:

$$\mathbb{T}_{\hat{2}} \ni t \mapsto \psi_{\hat{2}}(t) = \begin{cases} \{1\}, & t = 0 \\ \{1, 2\} = \mathfrak{B}s(\mathcal{M}_{\hat{2}}), & t = 1 \\ \{2\}, & t = 2 \end{cases} \quad (3)$$

є часом на  $\mathcal{M}_2$ . Доведемо, що відображення:

$$\mathbf{h}_2(t) = \psi_2(t) \quad (t \in \mathbf{T}_2) \quad (4)$$

є хронометричним процесом для часу  $\psi_2$ .

По-перше зазначимо, що згідно з (3) і (4) для  $t \in \mathbf{T}_2$  маємо:

$$\mathbf{h}_2(t) = \psi_2(t) \subseteq \psi_2(t).$$

Отже, перша умова означення 7 для відображення  $\mathbf{h}_2$  виконується.

По-друге з визначення  $(\mathcal{M}_2^{\text{def}}:2)$  випливає, що для  $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_2) = \{1, 2\}$  співвідношення  $x_2 \stackrel{+}{\leftarrow} x_1$  виконується тоді і тільки тоді, коли  $x_1 < x_2$ , тобто тоді і тільки тоді, коли  $x_1 = 1, x_2 = 2$ . Тому, за означенням 6, для підмножин  $A, B \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_2)$  має місце наступна рівносильність:

$$\left( B \stackrel{+}{\leftarrow}_{\mathcal{M}_2} A \right) \iff ((1 \in A) \& (2 \in B)), \quad (5)$$

де де  $\&$  — знак логічної кон'юнкції, а  $\iff$  — знак логічної рівносильності. Далі, для довільних  $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_2$  згідно з (3) і (4) маємо:

$$\mathbf{h}_2(t_i) = \psi_2(t_i) = \begin{cases} \{1\}, & t_i = 0 \\ \{1, 2\} = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_2), & t_i = 1 \quad (i \in \{1, 2\}). \\ \{2\}, & t_i = 2 \end{cases}$$

Звідси, враховуючи рівносильність (5), бачимо, що для  $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_2$  співвідношення  $\mathbf{h}_2(t_2) \stackrel{+}{\leftarrow} \mathbf{h}_2(t_1)$  виконується тоді і тільки тоді, коли  $t_1 = 0, t_2 = 1$  або  $t_1 = 0, t_2 = 2$  або  $t_1 = t_2 = 1$  або  $t_1 = 1, t_2 = 2$ . Тобто, іншими словами,

**(1\*)** Для  $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_2$  співвідношення  $\mathbf{h}_2(t_2) \stackrel{+}{\leftarrow} \mathbf{h}_2(t_1)$  виконується тоді і тільки тоді, коли  $t_1 < t_2$  або  $t_1 = t_2 = 1$ .

З результату **(1\*)** випливає наступний результат:

**(2\*)** Для  $t, \tau \in \mathbf{T}_2$  співвідношення  $\mathbf{h}_2(\tau) \stackrel{+}{\leftarrow} \mathbf{h}_2(t)$  виконується тоді і тільки тоді, коли  $t < \tau$  або  $t = \tau = 1$ .

Справді, нехай  $\mathbf{h}_2(\tau) \stackrel{+}{\leftarrow} \mathbf{h}_2(t)$ . Тоді, за означенням 6 (пункт **2**)), існують моменти часу  $t_0, \dots, t_n \in \mathbf{T}_2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), такі, що  $t_0 = t, t_n = \tau$  і для довільного  $k \in \overline{1, n}$  має місце співвідношення,  $\mathbf{h}_2(t_k) \stackrel{+}{\leftarrow} \mathbf{h}_2(t_{k-1})$ . Звідси, на основі результату **(1\*)**, випливає, що виконується хоч одна з умов  $t_0 = \dots = t_n = 1$  або  $t_0 \leq \dots \leq t_n$  і існує  $k \in \overline{1, n}$  таке, що  $t_{k-1} < t_k$ . В першому випадку отримуємо, що  $t_0 = t_n = 1$ , тобто  $t = \tau = 1$ , а в другому випадку отримуємо, що  $t_0 < t_n$ , тобто  $t < \tau$ . Навпаки, якщо  $t < \tau$  або  $t = \tau = 1$ , то, на основі результату **(1\*)**, маємо

$\mathbf{h}_2(t) \stackrel{+}{\leftarrow} \mathbf{h}_2(\tau)$ , тобто, за означенням 6 (пункт **2**)), отримуємо,  $\mathbf{h}_2(\tau) \stackrel{+}{\leftarrow} \mathbf{h}_2(t)$ .

З встановленого вище результату **(2\*)** і формул (4) та (3) випливає, що:

**(3\*)** Для  $t, \tau \in \mathbf{T}_2$  співвідношення  $\mathbf{h}_2(\tau) \stackrel{+}{\leftarrow} \mathbf{h}_2(t)$  і  $\mathbf{h}_2(t) \neq \mathbf{h}_2(\tau)$  виконуються тоді і тільки тоді, коли  $t < \tau$ .

Отже, за означенням 7,  $\mathbf{h}_2$  є хронометричним процесом для часу  $\psi_2$ . Отже, час  $\psi_2$  є внутрішнім. При цьому із співвідношень (1), (3) та означення 4 випливає, що  $Y_{\psi_2} = \{\{1\}, \mathfrak{B}_s(\mathcal{M}_2), \{2\}\} = \mathbf{Y}_2$ . Отже,  $\psi_2$  — внутрішній час, що породжує одночасність  $\mathbf{Y}_2$ .

Доведемо, що внутрішній час  $\psi_2$ , що породжує одночасність  $\mathbf{Y}_2$  є єдиним з точністю до еквівалентності хронологізацій. Нехай  $\psi : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}_s(\mathcal{M}_2)}$  — інший внутрішній час, що породжує одночасність  $\mathbf{Y}_2$  з хронометричним процесом  $\mathbf{h}$ , заданий на лінійно упорядкованій множині  $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \lesssim)$ . Тоді виконуються наступні умови:

$$Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\} = \mathbf{Y}_2 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}; \quad (6)$$

$$\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t) \quad (t \in \mathbf{T}); \quad (7)$$

$$\forall t, \tau \in \mathbf{T} \left( (t \lesssim \tau) \iff \left( \left( \mathbf{h}(\tau) \stackrel{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\leftarrow(+)} \mathbf{h}(t) \right) \& (\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)) \right) \right), \quad (8)$$

де  $\lesssim$  — строгий лінійний порядок, породжений нестрогим порядком  $\tilde{\lesssim}$  (тобто для  $t, \tau \in \mathbf{T}$  співвідношення  $t \lesssim \tau$  виконується тоді і тільки тоді, коли  $t \tilde{\lesssim} \tau$  і  $t \neq \tau$ ).

З умови (6) випливає існування моментів часу  $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}$ , таких, що:

$$\psi(\mathbf{t}_0) = \{1\}; \quad \psi(\mathbf{t}_1) = \{1, 2\}; \quad \psi(\mathbf{t}_2) = \{2\}. \quad (9)$$

З формули (9) випливає, що множини  $\psi(\mathbf{t}_0)$ ,  $\psi(\mathbf{t}_1)$ ,  $\psi(\mathbf{t}_2)$  — попарно різні. Отже моменти часу  $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  — також попарно різні. Із формули (8) випливає, що:

$$\forall t, \tilde{t} \in \mathbf{T} \left( (t \neq \tilde{t}) \implies (\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tilde{t})) \right). \quad (10)$$

Отже, множини  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_0)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_1)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_2)$  — також попарно різні. Крім того з зауваження 1 випливає, що множини  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_0)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_1)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_2)$  — непорожні. Отже із співвідношень (7) і (9) випливає, що

$$\mathbf{h}(\mathbf{t}_0) = \{1\}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{t}_2) = \{2\}. \quad (11)$$

Згідно з доведеним вище  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_0)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_1)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_2)$  — попарно різні і непорожні. Тому враховуючи (7), (9), (11), маємо  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_1) \subseteq \psi(\mathbf{t}_1) = \{1, 2\}$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_1) \neq \mathbf{h}(\mathbf{t}_0) = \{1\}$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_1) \neq \mathbf{h}(\mathbf{t}_2) = \{2\}$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_1) \neq \emptyset$ . Останні співвідношення можливі лише за умови:

$$\mathbf{h}(\mathbf{t}_1) = \{1, 2\}. \quad (12)$$

З формул (11), (12), (9), а також (3), (4) випливає рівність:

$$\mathbf{h}(\mathbf{t}_i) = \psi(\mathbf{t}_i) = \psi_2(i) = \mathbf{h}_2(i) \quad (i \in \overline{0, 2} = \mathbf{T}_2), \quad (13)$$

де  $\overline{0, 2} = \{0, 1, 2\}$ . З останньої рівності, на основі результату (**1\***) випливає співвідношення:

$$\mathbf{h}(\mathbf{t}_2) \leftarrow(+) \mathbf{h}(\mathbf{t}_1) \leftarrow(+) \mathbf{h}(\mathbf{t}_0),$$

з якого, за означенням 6 (пункт **2**)), отримуємо:

$$\mathbf{h}(\mathbf{t}_2) \stackrel{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\leftarrow(+)} \mathbf{h}(\mathbf{t}_1) \stackrel{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\leftarrow(+)} \mathbf{h}(\mathbf{t}_0).$$

З останнього співвідношення, враховуючи, що, за доведеним вище,  $\mathbf{h}(\mathbf{t}_0) \neq \mathbf{h}(\mathbf{t}_1) \neq \mathbf{h}(\mathbf{t}_2)$ , на основі умови (8), отримуємо нерівність:

$$\mathbf{t}_0 \tilde{\lessdot} \mathbf{t}_1 \tilde{\lessdot} \mathbf{t}_2. \quad (14)$$

Доведемо, що

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}. \quad (15)$$

Оскільки, за доведеним вище,  $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}$ , то залишилось довести, що в множині  $\mathbf{T}$  немає інших елементів, крім  $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ . Припустимо, що існує елемент  $\tau \in \mathbf{T}$  такий, що  $\tau \neq \mathbf{t}_j$  ( $\forall j \in \overline{0, 2}$ ). Із співвідношень (6) та (7) випливає, що  $\mathbf{h}(\tau) \subseteq \{1, 2\}$ . При цьому маємо  $\text{card}(\mathbf{T}) \geq 2$  (оскільки, за доведеним вище,  $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}$ ), а отже, згідно з зауваженням 1,  $\mathbf{h}(\tau) \neq \emptyset$ . Таким чином,  $\emptyset \neq \mathbf{h}(\tau) \subseteq \{1, 2\}$ . Тому можливими є лише такі випадки,  $\mathbf{h}(\tau) = \{1\}$ ,  $\mathbf{h}(\tau) = \{2\}$  або  $\mathbf{h}(\tau) = \{1, 2\}$ , тобто, згідно з (11), (12),  $\mathbf{h}(\tau) = \mathbf{h}(\mathbf{t}_0)$ ,  $\mathbf{h}(\tau) = \mathbf{h}(\mathbf{t}_1)$  або  $\mathbf{h}(\tau) = \mathbf{h}(\mathbf{t}_2)$ . Але в усіх перелічених трьох випадках приходимо до суперечності з формулою (10).

Отримана суперечність доводить, що припущення про існування елемента  $\tau \in \mathbf{T}$  такого, що  $\tau \neq \mathbf{t}_j$  ( $\forall j \in \overline{0, 2}$ ) — хибне, що обґрунтовує рівність (15).

Побудуємо відображення  $\nu : \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}$  (нагадаємо, що згідно з (2) і (15),  $\mathbf{T}_2 = \{0, 1, 2\}$ ,  $\mathbf{T} = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$ ). Для  $j \in \mathbf{T}_2 := \{0, 1, 2\}$  покладемо:

$$\nu(j) := \mathbf{t}_j \in \{\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\} = \mathbf{T} \quad (j \in \mathbf{T}_2 = \{0, 1, 2\}). \quad (16)$$

З нерівності (14) випливає, що відображення  $\nu$  є ін'єктивним і монотонним відображенням з  $\mathbf{T}_2$  в  $\mathbf{T}$  (тобто  $\nu(i) \neq \nu(j)$  при  $i \neq j$  і  $\nu(i) \lesssim \nu(j)$  при  $i \leq j$ ). Крім того, згідно з (16), маємо  $\nu(\mathbf{T}_2) = \{\nu(t) | t \in \mathbf{T}_2\} = \mathbf{T}$ . Отже, відображення  $\nu$  є порядковим ізоморфізмом між  $\mathbf{T}_2$  і  $\mathbf{T}$ . При цьому для довільного  $\tau \in \mathbf{T}_2$ , згідно з формулами (13) (див. внутрішню частину рівності (13)) та (16), маємо:

$$\psi_2(\tau) = \psi(\mathbf{t}_\tau) = \psi(\nu(\tau)).$$

Отже, за означенням 3, хронологізації  $\mathcal{H}_2 = ((\mathbf{T}_2, \leq), \psi_2)$  і  $\mathcal{H} = ((\mathbf{T}, \lesssim), \psi)$  — еквівалентні.

Таким чином, вище було доведено, що внутрішній час  $\psi_2$ , що породжує одночасність  $\mathbf{Y}_2$  на  $\mathcal{M}_2$  є єдиним з точністю до еквівалентності відповідних хронологізацій. З іншого боку одночасність  $\mathbf{Y}_2$  не є неповторною в сенсі означення 8, оскільки для множин  $Y_1 = Y_2 = \{1, 2\}$  згідно з формулами (1), (5) отримуємо:

$$Y_1, Y_2 \in \mathbf{Y}_2, \quad Y_2 \leftarrow (+) Y_1, \quad Y_1 \leftarrow (+) Y_2,$$

тобто, означенням 6 (пункт 2)):

$$Y_1, Y_2 \in \mathbf{Y}_2, \quad Y_2 \overset{\mathbf{Y}_2}{\leftarrow (+)} Y_1, \quad Y_1 \overset{\mathbf{Y}_2}{\leftarrow (+)} Y_2.$$

Таким чином, як показує приклад 1, теорема 2 носить лише достатній характер і не дає необхідної і достатньої ознаки існування і єдиності внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині.

Теорема 2 попросуджує, також, і наступну проблему:

**Проблема 1.** Нехай  $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$  — синхронізована орієнтована множина. Чи завжди внутрішній час  $\psi$ , що породжує одночасність  $\mathbf{Y}$  (якщо він існує) є єдиним?

Наступний приклад дає негативне розв'язання проблеми 1.

**Приклад 2.** Розглянемо на орієнтованій множині  $\mathcal{M}_2$ , введеної в прикладі 1 розглянемо одночасність:

$$\mathbf{Y}_2^* = \{\{1, 2\}\} = \{\mathfrak{B}_s(\mathcal{M}_2)\}.$$

Покладемо:

$$\mathbf{T}_2 := \{0, 1\}.$$

Тоді пара  $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq)$  є лінійно упорядкованою множиною відносно звуження стандартного відношення лінійного порядку на множині цілих чисел  $\leq$  на множину  $\{0, 1\}$ . Легко бачити, що відображення

$$\psi_2^*(t) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_{\hat{2}}) = \{1, 2\} \quad (t \in \{0, 1\} = \mathbf{T}_2); \quad (17)$$

$$\psi_2^*(t) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_{\hat{2}}) = \{1, 2\} \quad (t \in \{0, 1, 2\} = \mathbf{T}_{\hat{2}}) \quad (18)$$

є часами на орієнтованій множині  $\mathcal{M}_{\hat{2}}$ , що пророджують одночасність  $\mathbf{Y}_{\hat{2}}^*$ . Відповідні хронологізації  $\mathcal{H}_2^* = ((\mathbf{T}_2, \leq), \psi_2^*)$  і  $\mathcal{H}_{\hat{2}}^* = ((\mathbf{T}_{\hat{2}}, \leq), \psi_2^*)$ , породжені часами  $\psi_2^*$  та  $\psi_{\hat{2}}^*$  не є еквівалентними, оскільки відповідні часові шкали  $\mathbf{T}_2$  і  $\mathbf{T}_{\hat{2}}$  не є рівнопотужними, а отже неможливо встановити порядковий ізоморфізм між ними.

Доведемо, що обидва часи  $\psi_2^*$  і  $\psi_{\hat{2}}^*$  є внутрішніми.

1. Доведемо, що час  $\psi_2^*$  є внутрішнім з хронометричним процесом:

$$\mathbf{h}_2(t) = \{t + 1\} \quad (t \in \mathbf{T}_2 = \{0, 1\}). \quad (19)$$

По-перше з формул (19) і (17) випливає, що:

$$\mathbf{h}_2(t) \subseteq \{1, 2\} = \psi_2^*(t) \quad (t \in \mathbf{T}_2 = \{0, 1\}). \quad (20)$$

По-друге, з рівносильності (5) випливає, що для  $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_2$  умова  $\mathbf{h}_2(t_2) \leftarrow (+) \mathbf{h}_2(t_1)$  має місце тоді і тільки тоді, коли  $1 \in \mathbf{h}_2(t_1)$  і  $2 \in \mathbf{h}_2(t_2)$ , тобто, враховуючи (19), тоді і тільки тоді, коли  $t_1 = 0, t_2 = 1$ . Звідси, враховуючи, що  $\mathbf{T}_2 := \{0, 1\}$ , для  $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_2$  отримуємо рівносильність:

$$(\mathbf{h}_2(t_2) \leftarrow (+) \mathbf{h}_2(t_1)) \iff (t_1 < t_2). \quad (21)$$

Далі, якщо  $\mathbf{h}_2(\tau) \stackrel{\mathbf{h}_2(\mathbf{T}_2)}{\leftarrow (+)} \mathbf{h}_2(t)$ , де  $t, \tau \in \mathbf{T}_2$ , то, за означенням 6 (пункт 2)), існують моменти часу  $t_0, \dots, t_n \in \mathbf{T}_2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), такі, що  $t_0 = t, t_n = \tau$  і для довільного  $k \in \overline{1, n}$  має місце співвідношення,  $\mathbf{h}_2(t_k) \leftarrow (+) \mathbf{h}_2(t_{k-1})$ . Звідси, на основі рівносильності (21), приходимо до висновку, що  $t = t_0 < \dots < t_n = \tau$ , тобто  $t < \tau$ . Навпаки, якщо  $t, \tau \in \mathbf{T}_2$  і  $t < \tau$ , то, на основі рівносильності (21), отримуємо  $\mathbf{h}_2(\tau) \leftarrow (+) \mathbf{h}_2(t)$ , звідки, за означенням 6 (пункт 2)), маємо,  $\mathbf{h}_2(\tau) \stackrel{\mathbf{h}_2(\mathbf{T}_2)}{\leftarrow (+)} \mathbf{h}_2(t)$ . Крім того, оскільки, за формулою (19),  $\mathbf{h}_2(t_1) \neq \mathbf{h}_2(t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$ , то з нерівності  $t < \tau$  випливає, що  $\mathbf{h}_2(\tau) \neq \mathbf{h}_2(t)$ . Таким чином, для довільних  $t, \tau \in \mathbf{T}_2$  справедлива наступна рівносильність:

$$(t < \tau) \iff \left( \mathbf{h}_2(\tau) \stackrel{\mathbf{h}_2(\mathbf{T}_2)}{\leftarrow (+)} \mathbf{h}_2(t) \right) \& (\mathbf{h}_2(\tau) \neq \mathbf{h}_2(t)) \quad (22)$$

З формули (20) і рівносильності (22), на основі означення 7, випливає, що  $\mathbf{h}_2$  є хронометричним процесом для часу  $\psi_2^*$ , тобто цей час є внутрішнім з хронометричним процесом  $\mathbf{h}_2$ . Що й необхідно було довести.

2. Доведемо, що час  $\psi_{\hat{2}}^*$  є внутрішнім з хронометричним процесом  $\mathbf{h}_{\hat{2}} : \mathbf{T}_{\hat{2}} \rightarrow 2^{\{1,2\}} = 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_{\hat{2}})}$  тим самим, що і в прикладі 1, який, згідно з формулами (3) і (4) можна подати у вигляді:

$$\mathbf{h}_{\hat{2}}(t) = \begin{cases} \{1\}, & t = 0 \\ \{1, 2\} = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_{\hat{2}}), & t = 1 \\ \{2\}, & t = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{T}_{\hat{2}}). \quad (23)$$

Згідно з формулами (23) і (18), маємо:

$$\mathbf{h}_2(t) \subseteq \{1, 2\} = \psi_2^*(t) \quad (t \in \mathbf{T}_2). \quad (24)$$

Тому, враховуючи факт (**З\***), встановлений в прикладі 1, приходимо до висновку, що, за означенням 7,  $\mathbf{h}_2$  є хронометричним процесом для часу  $\psi_2^*$ , тобто цей час є внутрішнім з хронометричним процесом  $\mathbf{h}_2$ . Що й необхідно було довести.

Таким чином, ми бачимо, що на синхронізованій орієнтованій множині  $(\mathcal{M}_2, \mathbf{Y}_2^*)$  внутрішній час, що породжує одночасність  $\mathbf{Y}_2^*$  не є єдиним.

Теорема 2 і приклади 1 та 2 породжують наступні проблеми, відповідь на які на даний час невідома:

**Проблема 2.** На синхронізованій орієнтованій множині  $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$  знайти необхідну і достатню ознаку існування внутрішнього часу  $\psi$ , що породжує одночасність  $\mathbf{Y}$ .

**Проблема 3.** На синхронізованій орієнтованій множині  $(\mathcal{M}, \mathbf{Y})$  знайти необхідну і достатню ознаку існування і єдиності внутрішнього часу  $\psi$ , що породжує одночасність  $\mathbf{Y}$ .

#### 4 НЕОБХІДНА ОЗНАКА ІСНУВАННЯ ВНУТРІШНЬОГО ЧАСУ НА СИНХРОНІЗОВАНІЙ ОРІЄНТОВАНІЙ МНОЖИНІ

В цьому розділі буде встановлено одну необхідну ознаку існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині, яку можна вважати певним наближенням до розв'язання проблеми 2.

Для формулювання цієї ознаки необхідно ввести деяке ослаблення поняття чутливої одночасності.

**Означення 10.** Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина. Одночасність  $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  будемо називати **слабко чутливою**, якщо для довільних  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  таких, що  $y \leftarrow x$  і  $x \neq y$  існують множини  $A, B \in \mathbf{Y}$  такі, що  $x \in A, y \in B$  і  $B \leftarrow^{(+)} A$ .

**Зауваження 2.** Безпосередньо з означень 10 та 8 (пункт 1)) випливає, такий висновок:

- Якщо одночасність  $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  є чутливою, то вона є слабко чутливою.

Приклад 2 показує, що обернене твердження, взагалі кажучи, не виконується. Легко довести, що одночасність  $\mathbf{Y}_2^*$  в цьому прикладі є слабко чутливою. Проте, оскільки одночасність  $\mathbf{Y}_2^*$  складається лише з однієї множини  $\{1, 2\} = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_2)$ , то  $\mathbf{Y}_2^*$  не є чутливою (бо якщо для  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_2)$  таких, що  $y \leftarrow x$  і  $x \neq y$  ми маємо множини  $A, B \in \mathbf{Y}_2^*$  такі, що  $x \in A, y \in B$  і  $B \leftarrow^{(+)} A$ , то все одно отримуємо рівність  $A = B$ ).

**Твердження 4.** Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина. Якщо одночасність  $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  є слабко чутливою і неповторною, то вона є чутливою.

*Доведення.* Нехай одночасність  $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  є слабко чутливою і неповторною. Розглянемо довільні  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  такі, що  $y \leftarrow x$  і  $x \neq y$ . Оскільки одночасність  $\mathbf{Y}$  — слабко чутлива, то, за означенням 10, існують множини  $A, B \in \mathbf{Y}$  такі, що  $x \in A, y \in B$  і  $B \leftarrow^{(+)} A$ . Оскільки

$B \leftarrow^{Y(+)} A$  і одночасність  $Y$  — неповторна, то, за означенням 8 (пункт 2)), рівність  $A = B$  — неможлива (бо в протилежному випадку ми отримаємо  $B \leftarrow^{Y(+)} A$  і  $A \leftarrow^{Y(+)} B$ ). Отже, для довільних  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  таких, що  $y \leftarrow x$  і  $x \neq y$  існують  $A, B \in Y$  такі, що  $x \in A$ ,  $y \in B$ ,  $A \neq B$  і  $B \leftarrow^{Y(+)} A$ . Тобто, за означенням 8 (пункт 1)), одночасність  $Y$  є чутливою.  $\square$

Нижче, в прикладі 3 буде показано, що твердження, обернене до твердження 4 — не справдливие. В цьому прикладі буде побудовано чутливу, але не неповторну одночасність.

Зауважимо, що твердження 4 дає змогу дещо послабити засновок теореми 2. В результаті отримуємо наступний дещо посилений варіант цієї теореми:

**Теорема 3.** *Нехай  $\mathcal{M}$  — орієнтована множина. Для довільної слабко чутливої, неповторної і монотонно-зв'язної одночасності  $Y$  на  $\mathcal{M}$  існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій внутрішній час  $\psi$  такий, що  $Y = Y_\psi$ .*

Справедлива наступна необхідна ознака існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині:

**Теорема 4.** *Якщо на синхронізованій орієнтованій множині  $(\mathcal{M}, Y)$  існує внутрішній час  $\psi$ , що породжує одночасність  $Y$ , то одночасність  $Y$  є слабко-чутливою і монотонно-зв'язною.*

*Доведення.* Нехай  $(\mathcal{M}, Y)$  — синхронізована орієнтована множина,  $\psi : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  — внутрішній час на  $\mathcal{M}$ , такий, що  $Y_\psi = Y$ , де  $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$  — лінійно упорядкована множина і  $\mathbf{h} : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$  — хронометричний процес для часу  $\psi$ .

1. Нехай  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  — елементарні стани такі, що  $y \leftarrow x$  і  $x \neq y$ . Тоді, за означенням 2, існують моменти часу  $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$  такі, що  $x \in \psi(t_1)$ ,  $y \in \psi(t_2)$  і  $t_1 < t_2$ . Оскільки  $t_1 < t_2$  і  $\mathbf{h}$  — хронометричний процес, то, за означенням 7 (пункт 2)), маємо  $\mathbf{h}(t_2) \leftarrow^{h(\mathbf{T})(+)} \mathbf{h}(t_1)$ . Далі, за означенням 7 (пункт 1)), для довільного  $t \in \mathbf{T}$  маємо  $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$ , тому  $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(t) \mid t \in \mathbf{T}\} \subseteq \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\} = Y_\psi = Y$ . Отже, за твердженням 3 (пункт 2)), із співвідношення  $\mathbf{h}(t_2) \leftarrow^{h(\mathbf{T})(+)} \mathbf{h}(t_1)$ , враховуючи, що  $\mathbf{h}(t_1) \subseteq \psi(t_1)$ ,  $\mathbf{h}(t_2) \subseteq \psi(t_2)$ , отримуємо  $\psi(t_2) \leftarrow^{Y(+)} \psi(t_1)$ . Якщо покласти  $A := \psi(t_1)$ ,  $B := \psi(t_2)$ , то отримаємо,  $A, B \in \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\} = Y_\psi = Y$ ,  $x \in \psi(t_1) = A$ ,  $y \in \psi(t_2) = B$  і  $B \leftarrow^{Y(+)} A$ . Отже, для  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$  таких, що  $y \leftarrow x$  і  $x \neq y$  існують множини  $A, B \in Y$  такі, що  $x \in A$ ,  $y \in B$  і  $B \leftarrow^{Y(+)} A$ . Тому, за означенням 10, одночасність  $Y$  є слабко чутливою.

2. Розглянемо довільні  $A, B \in Y$  такі, що  $A \neq B$ . Оскільки, за умовою,  $Y = Y_\psi$ , то існують  $t, \tau \in \mathbf{T}$  такі, що  $A = \psi(t)$ ,  $B = \psi(\tau)$ . Оскільки, за умовою,  $A \neq B$ , то з останніх рівностей випливає, що  $t \neq \tau$ . Тому, оскільки  $\mathbb{T}$  — лінійно упорядкована множина, можливі лише два випадки:  $t < \tau$  або  $\tau < t$ . Звідси, оскільки  $\mathbf{h}$  — хронометричний процес, за означенням 7 (пункт 2)), у випадку  $t < \tau$  отримуємо  $\mathbf{h}(\tau) \leftarrow^{h(\mathbf{T})(+)} \mathbf{h}(t)$ , а у випадку  $\tau < t$  отримуємо  $\mathbf{h}(t) \leftarrow^{h(\mathbf{T})(+)} \mathbf{h}(\tau)$ . Отже, виконується хоча б одна з умов

$$\mathbf{h}(\tau) \leftarrow^{h(\mathbf{T})(+)} \mathbf{h}(t) \quad \text{або} \quad \mathbf{h}(t) \leftarrow^{h(\mathbf{T})(+)} \mathbf{h}(\tau). \quad (25)$$

Оскільки  $\mathbf{h}$  — хронометричний процес для часу  $\psi$ , за означенням 7 (пункт 1)), маємо:

$$\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t) = A; \quad \mathbf{h}(\tau) \subseteq \psi(\tau) = B.$$

Далі, враховуючи, що, за доведеним вище,  $\mathbf{h}(\mathbf{T}) \sqsubseteq \mathbf{Y}$ , використовуючи співвідношення (25) та твердження 3 (пункт 2)), отримуємо, що для множин  $A$  і  $B$  справедливе хоча б одне із співвідношень:

$$A \stackrel{\mathbf{Y}}{\leftarrow (+)} B \quad \text{або} \quad B \stackrel{\mathbf{Y}}{\leftarrow (+)} A. \quad (26)$$

Таким чином, ми довели, що для довільних  $A, B \in \mathbf{Y}$  таких, що  $A \neq B$  справедливе хоча б одне із співвідношень (26). А це, за означенням 9 означає, що одночасність  $\mathbf{Y}$  є монотонно зв'язною.

Теорему повністю доведено.  $\square$

Наступний приклад покаже, що теорема 4 не має “зворотньої сили”. В цьому прикладі доводиться існування чутливої і монотонно-зв'язної одночасності, яка не породжує жодного внутрішнього часу.

**Приклад 3.** Нехай  $n$  — натуральне число таке що  $n \geq 3$ . Розглянемо орієнтовану множину  $\mathcal{M}_n^\circ$ , що задовольняє такі умови:

$$(\mathcal{M}_n^\circ \text{ def:1}) \quad \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ) = \{1, 2, \dots, n\} = \widehat{n};$$

$$(\mathcal{M}_n^\circ \text{ def:2}) \quad \text{Для } x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ) \text{ співвідношення } y \leftarrow x \text{ виконується тоді і тільки тоді, коли } y = x \text{ або } y \equiv x + 1 \pmod{n}.$$

Розглянемо довільні елементи  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ) = \{1, 2, \dots, n\}$  такі, що  $y \stackrel{\pm}{\leftarrow} x$ . Оскільки, за позначенням 1, із останнього співвідношення випливає, що  $y \leftarrow x$ , то, згідно з умовою  $(\mathcal{M}_n^\circ \text{ def:2})$ , має місце хоч одне із співвідношень  $y = x$  або  $y \equiv x + 1 \pmod{n}$ . Але, випадку  $x = y$ , за умовою  $(\mathcal{M}_n^\circ \text{ def:2})$ , отримуємо  $y \leftarrow x$  і  $x \leftarrow y$ . Отже в цьому випадку, за позначенням 1, умова  $y \stackrel{\pm}{\leftarrow} x$  виконуватись не може. Тому єдиноможливим залишається випадок  $y \equiv x + 1 \pmod{n}$ .

Таким чином для довільних  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ)$  справедлива наступна логічна імплікація:

$$(y \stackrel{\pm}{\leftarrow} x) \implies (y \equiv x + 1 \pmod{n}). \quad (27)$$

Навпаки, нехай

$$y \equiv x + 1 \pmod{n}. \quad (28)$$

Тоді, згідно з умовою  $(\mathcal{M}_n^\circ \text{ def:2})$ , отримуємо  $y \leftarrow x$ . Припустимо, що умова  $x \leftarrow y$  також виконується. Тоді, за умовою  $(\mathcal{M}_n^\circ \text{ def:2})$ , має місце хоча б один з випадків  $x = y$  або  $x = y + 1 \pmod{n}$ . Але випадок  $x = y$  неможливий, оскільки у цьому випадку, згідно з (28), маємо  $x \equiv x + 1 \pmod{n}$ , тобто  $0 \equiv 1 \pmod{n}$ , що неможливо, бо  $n \geq 3$  (за умовою). Випадок  $x = y + 1 \pmod{n}$  також неможливий, оскільки у цьому випадку, враховуючи (28), отримуємо,  $y \equiv x + 1 \equiv (y + 1) + 1 \equiv y + 2 \pmod{n}$ , тобто  $0 \equiv 2 \pmod{n}$ , що неможливо, бо  $n \geq 3$  (за умовою). Таким чином, якщо  $y \equiv x + 1 \pmod{n}$  то  $y \leftarrow x$  і  $x \not\leftarrow y$ , тобто  $y \stackrel{\pm}{\leftarrow} x$ . Отже, враховуючи імплікацію (27) для довільних  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ)$  отримуємо логічну рівносильність:

$$(y \stackrel{\pm}{\leftarrow} x) \iff (y \equiv x + 1 \pmod{n}). \quad (29)$$

На орієнтованій множині  $\mathcal{M}_n^\circ$  введемо наступну одночасність:

$$\mathbf{Y}_n^\circ := \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}. \quad (30)$$

Оскільки одночасність  $\mathbf{Y}_n^\circ$  складається лише з одноеlementних множин, то для довільних  $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ)$  і  $A \in \mathbf{Y}_n^\circ$  виконується рівносильність:

$$(x \in A) \iff (A = \{x\}).$$

Тому, згідно з означенням 6 і рівносильністю (29), для довільних множин  $A, B \in \mathbf{Y}_n^\circ$  отримуємо таку рівносильність:

$$(B \leftarrow (+) A) \iff \exists x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ) \left( (A = \{x\}) \& (B = \{y\}) \& (y \equiv x + 1 \pmod{n}) \right). \quad (31)$$

Доведемо, що для довільних  $A, B \in \mathbf{Y}_n^\circ$  мають місце обидва співвідношення:

$$B \leftarrow^{+\circ} A \quad \text{і} \quad A \leftarrow^{+\circ} B. \quad (32)$$

Для цього достатньо показати, що для довільних  $A, B \in \mathbf{Y}_n^\circ$  виконується перше із наведених співвідношень (бо друге отримується з першого перестановкою змінних  $A$  і  $B$ ). Отже, нехай,  $A, B \in \mathbf{Y}_n^\circ$ . Тоді, згідно з (30), існують  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ)$  такі, що  $A = \{x\}$ ,  $B = \{y\}$ . Тому, у випадку  $x < y$ , згідно з (31), отримуємо:

$$B = \{y\} \leftarrow^+ \{y-1\} \leftarrow^+ \dots \leftarrow^+ \{x\} = A,$$

де  $\{y\}, \{y-1\}, \dots, \{x\} \in \mathbf{Y}_n^\circ$ . Звідси, за означенням 6, маємо,  $B \leftarrow^{+\circ} A$ . А у випадку  $y \leq x$ , згідно з (31), отримуємо:

$$B = \{y\} \leftarrow^+ \{y-1\} \leftarrow^+ \dots \leftarrow^+ \{1\} \leftarrow^+ \{n\} \leftarrow^+ \{n-1\} \leftarrow^+ \dots \leftarrow^+ \{x\} = A$$

(де  $< i \leq -$  стандартні відношення лінійного порядку на множині натуральних чисел). Звідси, за означенням 6, знову отримуємо,  $B \leftarrow^{+\circ} A$ .

Із співвідношень (32) (які виконуються для довільних  $A, B \in \mathbf{Y}_n^\circ$ ), за означенням 9, випливає, наступний висновок:

**(Conc1)** Одночасність  $\mathbf{Y}_n^\circ$  є монотонно зв'язною.

Розглянемо довільні  $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ)$  такі, що  $y \leftarrow x$  і  $x \neq y$ . Покладемо:

$$A := \{x\}, \quad B := \{y\}.$$

Тоді очевидно, що  $x \in A$ ,  $y \in B$  і  $A \neq B$ . Крім того, згідно з (32), маємо  $B \leftarrow^{+\circ} A$ . Отже, за означенням 8 (пункт 1)), отримуємо такий висновок:

**(Conc2)** Одночасність  $\mathbf{Y}_n^\circ$  є чутливою.

Доведемо, що на орієнтованій множини  $\mathcal{M}_n^\circ$  не існує внутрішнього часу, що породжує одночасність  $\mathbf{Y}_n^\circ$  (тобто такого внутрішнього часу  $\psi_0$ , що  $\mathbf{Y}_n^\circ = Y_{\psi_0}$ ). Справді, припустимо, що  $\psi_0 : \mathbf{T}_0 \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ)}$  — внутрішній час на  $\mathcal{M}_n^\circ$  такий, що  $\mathbf{Y}_n^\circ = Y_{\psi_0}$  з хронометричним процесом  $\mathbf{h}_0 : \mathbf{T}_0 \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}_n^\circ)}$ , де  $\mathbb{T}_0 = (\mathbf{T}_0, \leq_0)$  — лінійно упорядкована множина. З рівності

$\mathbf{Y}_n^\circ = Y_{\psi_0} = \{\psi_0(t) \mid t \in \mathbf{T}_0\}$ , (оскільки всі елементи одночасності  $\mathbf{Y}_n^\circ$ , згідно (30), — одноелементні множини) впливає, що:

$$\text{Для довільного } t \in \mathbf{T}_0 \text{ множина } \psi_0(t) \text{ є одноелементною.} \quad (33)$$

Також з рівності  $\mathbf{Y}_n^\circ = Y_{\psi_0} = \{\psi_0(t) \mid t \in \mathbf{T}_0\}$ , враховуючи рівність (30), в якій, за умовою,  $n \geq 3$  впливає, що множина  $\mathbf{T}_0$  містить більше двох елементів.

Оскільки  $\mathbf{h}_0$  — хронометричний процес для часу  $\psi_0$ , то за означенням 7, для довільного  $t \in \mathbf{T}_0$  маємо  $\mathbf{h}_0(t) \subseteq \psi_0(t)$ , але з врахуванням висновку (33) і зауваження 1 з останнього включення отримуємо рівність,  $\mathbf{h}_0(t) = \psi_0(t)$  ( $t \in \mathbf{T}_0$ ), з якої впливає, що  $\mathbf{h}_0(\mathbf{T}_0) = \{\mathbf{h}_0(t) \mid t \in \mathbf{T}_0\} = \{\psi_0(t) \mid t \in \mathbf{T}_0\} = Y_{\psi_0} = \mathbf{Y}_n^\circ$ . Тому, враховуючи (32), для довільних  $t, \tau \in \mathbf{T}_0$  отримуємо:

$$\mathbf{h}_0(\tau) = \psi_0(\tau) \stackrel{\mathbf{h}_0(\mathbf{T}_0)}{\leftarrow(+)} \psi_0(t) = \mathbf{h}_0(t) \quad \text{і} \quad \mathbf{h}_0(t) \stackrel{\mathbf{h}_0(\mathbf{T}_0)}{\leftarrow(+)} \mathbf{h}_0(\tau).$$

Оскільки  $\mathbf{h}_0$  — хронометричний процес, то з останніх співвідношень, за означенням 7 (пункт 2)) при  $t \neq \tau$  отримуємо, що одночасно справедливі обидві нерівності  $t <_0 \tau$  і  $\tau <_0 t$  (де  $<_0$  — відношення строгого порядку, породжене нестрогим порядком  $\leq_0$ ), що неможливо. Остання суперечність доводить, що внутрішнього часу, що породжує одночасність  $\mathbf{Y}_n^\circ$  не існує.

Таким чином, згідно з висновками (Conc1) і (Conc2), одночасність  $\mathbf{Y}_n^\circ$  є чутливою і монотонно зв'язною. Але при цьому на орієнтованій множини  $\mathcal{M}_n^\circ$  не існує внутрішнього часу, що породжує одночасність  $\mathbf{Y}_n^\circ$ .

## 5 ВИСНОВКИ.

Основні нові результати роботи можна сформулювати наступним чином:

1. Показано, що отримана в попередніх роботах достатня ознака існування і єдиності внутрішнього часу не є необхідною. Наведено приклад синхронізованої орієнтованої множини, для якої існує і єдиний (з точністю до еквівалентності хронологізацій) внутрішній породжуючий час, але при цьому відповідна одночасність не є неповторною.
2. Наведено приклад синхронізованої орієнтованої множини, для якої існують два внутрішні часи з не еквівалентними хронологізаціями, що її породжують.
3. Встановлено одну необхідну ознаку існування внутрішнього часу на синхронізованій орієнтованій множині і показано, що ця необхідна ознака не є достатньою.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] David Hilbert. Mathematical problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 8:437–479, 1902. URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1902-00923-3>.
- [2] Yu.I. Petunin and D.A. Klyushin. A structural approach to solving the 6th Hilbert problem. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 71(71):165–179, 2005. doi:10.1090/S0094-9000-05-00656-3.
- [3] A.N. Gorban. Hilbert's sixth problem: the endless road to rigour. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 376(2118):20170238, 2018. URL: <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2017.0238>.

- [4] L. Corry. Hilbert's sixth problem: between the foundations of geometry and the axiomatization of physics. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0221.
- [5] L. Accardi. Quantum probability and Hilbert's sixth problem. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2018.0030.
- [6] S. Majid. On the emergence of the structure of physics. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0231.
- [7] M. Slemrod. Hilbert's sixth problem and the failure of the Boltzmann to Euler limit. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0222.
- [8] G. M. D'Ariano. The solution of the sixth Hilbert problem: the ultimate Galilean revolution. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0224.
- [9] Adonai S. Sant'Anna. The definability of physical concepts. *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3), 23(1-2):163–175, 2005. URL: <http://dx.doi.org/10.5269/bspm.v23i1-2.7471>, doi:10.5269/bspm.v23i1-2.7471.
- [10] Newton C. A. da Costa and F. Antonio Doria. Janus-Faced Physics: On Hilbert's 6th Problem. In *Randomness and Complexity, From Leibniz to Chaitin*, page 25–68. World Scientific, 2007. doi:10.1142/9789812770837\_0003.
- [11] A.P. Levich. Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows. In *On the Way to Understanding the Time Phenomenon: the Constructions of Time in Natural Science (Part 1)*, chapter 5, page 149–192. World Scientific, 1995. URL: <http://www.chronos.msu.ru/old/EREPORTS/levich1.pdf>, doi:10.1142/9789812832092\_0010.
- [12] Michael Barr, Colin McLarty, and Charles Wells. Variable Set Theory. page 1–12. 1986. URL: <http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf>.
- [13] John L. Bell. *Abstract and Variable Sets in Category Theory*, page 9–16. Polimetrica International Scientific Publisher, 2006. URL: <http://publish.uwo.ca/~jbell/Bell12.pdf>.
- [14] F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press, 2003.
- [15] Я.І. Грушка. Мінливі множини та їх властивості. *Доповіді Національної академії наук України*, (5):12–18, 2012. URL: <https://www.researchgate.net/publication/236120448>.
- [16] Я.І. Грушка. Примітивні мінливі множини та їх властивості. *Математичний вісник НТШ*, 9:52–80, 2012. URL: <https://www.researchgate.net/publication/236120647>.

- [17] Я.І. Грушка. Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем. *Укр. мат. журн.*, 65(9):1198–1218, 2013. URL: <http://umj.imath.kiev.ua/article/?lang=ua&article=8385>, doi:10.1007/s11253-014-0862-6.
- [18] Я.І. Грушка. Видимість у мінливих множинах. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 9(2):122–145, 2012. URL: <https://www.researchgate.net/publication/236217050>.
- [19] Ya.I. Grushka. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). page 1–208. Preprint: ResearchGate, 2017. URL: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521>.
- [20] Я.І. Грушка. *Теоретико-множинні методи в релятивістській кінематиці*. Інститут математики НАН України (Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук), Київ, 2023. URL: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.18858.12481>.

## REFERENCES

- [1] David Hilbert. Mathematical problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 8:437–479, 1902. URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1902-00923-3>.
- [2] Yu.I. Petunin and D.A. Klyushin. A structural approach to solving the 6th Hilbert problem. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 71(71):165–179, 2005. doi:10.1090/S0094-9000-05-00656-3.
- [3] A.N. Gorban. Hilbert’s sixth problem: the endless road to rigour. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 376(2118):20170238, 2018. URL: <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2017.0238>.
- [4] L. Corry. Hilbert’s sixth problem: between the foundations of geometry and the axiomatization of physics. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0221.
- [5] L. Accardi. Quantum probability and Hilbert’s sixth problem. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2018.0030.
- [6] S. Majid. On the emergence of the structure of physics. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0231.
- [7] M. Slemrod. Hilbert’s sixth problem and the failure of the Boltzmann to Euler limit. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0222.
- [8] G. M. D’Ariano. The solution of the sixth Hilbert problem: the ultimate Galilean revolution. *Phil Trans R Soc A*, 376(2118), 2018. doi:10.1098/rsta.2017.0224.
- [9] Adonai S. Sant’Anna. The definability of physical concepts. *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3), 23(1-2):163–175, 2005. URL: <http://dx.doi.org/10.5269/bspm.v23i1-2.7471>, doi:10.5269/bspm.v23i1-2.7471.

- [10] Newton C. A. da Costa and F. Antonio Doria. Janus-Faced Physics: On Hilbert's 6th Problem. In *Randomness and Complexity, From Leibniz to Chaitin*, page 25–68. World Scientific, 2007. doi:10.1142/9789812770837\_0003.
- [11] A.P. Levich. Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows. In *On the Way to Understanding the Time Phenomenon: the Constructions of Time in Natural Science (Part 1)*, chapter 5, page 149–192. World Scientific, 1995. URL: <http://www.chronos.msu.ru/old/EREPORTS/levich1.pdf>, doi:10.1142/9789812832092\_0010.
- [12] Michael Barr, Colin McLarty, and Charles Wells. Variable Set Theory. page 1–12. 1986. URL: <http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf>.
- [13] John L. Bell. *Abstract and Variable Sets in Category Theory*, page 9–16. Polimetrica International Scientific Publisher, 2006. URL: <http://publish.uwo.ca/~jbell/Bell2.pdf>.
- [14] F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press, 2003.
- [15] Ya.I. Grushka. Changeable sets and their properties. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (5):12–18, 2012. URL: <https://www.researchgate.net/publication/236120448>.
- [16] Ya.I. Grushka. Primitive changeable sets and their properties. *Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society*, 9:52–80, 2012. URL: <https://www.researchgate.net/publication/236120647>.
- [17] Ya.I. Grushka. Base Changeable Sets and Mathematical Simulation of the Evolution of Systems. *Ukr Math J*, 65(9):1332–1353, 2014. doi:10.1007/s11253-014-0862-6.
- [18] Ya.I. Grushka. Visibility in changeable sets. *Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 9(2):122–145, 2012. URL: <https://www.researchgate.net/publication/236217050>.
- [19] Ya.I. Grushka. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). page 1–208. Preprint: ResearchGate, 2017. URL: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521>.
- [20] Ya.I. Grushka. *Set-theoretic methods in relativistic kinematics*. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine (Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences), Kyiv, 2023. URL: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.18858.12481>.

Grushka Ya.I. *On internal time on a synchronized oriented set*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 96–113.

Oriented sets are the simplest mathematical structures that model collections of evolving objects. This work is devoted to the problem of the existence of internal time on a synchronized oriented set. From an intuitive point of view, internal time is the time whose flow can be "observed and recorded" while "living inside" the oriented set. In the paper we prove that the sufficient condition for the existence and uniqueness of internal time on a synchronized oriented set, obtained in previous works, is not a necessary one. Also we establish some necessary condition for the existence of internal time on a synchronized oriented set and show that this condition is not sufficient.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.12>

Бігун Я.Й., Українець О.З.

**Математична модель впливу забруднення зовнішнього середовища на імунну відповідь організму людини**

Запропоновано математичну модель імунної відповіді на інфекційне захворювання з урахуванням впливу забруднення довкілля. Фактор забруднення описується узагальненим рівнянням Гатчінсона і впливає на формування каскаду плазмоклітин і ураження органу-мішені. Встановлено умови існування єдиного розв'язку математичної моделі та його невід'ємність на півосі для  $t > 0$ .

Знайдено стаціонарні розв'язки моделі та умови їх існування. Досліджено стійкість стаціонарного розв'язку, який характеризує стан відсутності інфекційного захворювання. Отримана оцінка величини інфікування у початковий момент часу, при якій не відбувається гострої чи хронічної форми інфекційного захворювання.

*Ключові слова і фрази:* математична модель, стаціонарний розв'язок, дискретна модель, біфуркація, динамічні системи, стійкість, імунна відповідь, популяція, запізнення, антигени, плазмоклітини.

---

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна  
e-mail: [y.bihun@chnu.edu.ua](mailto:y.bihun@chnu.edu.ua) (Бігун Я.Й.), [o.ukrainets@chnu.edu.ua](mailto:o.ukrainets@chnu.edu.ua) (Українець О.З.)

**Вступ**

У медичній практиці спостерігається вплив екологічних факторів на перебіг різного роду захворювань, зокрема при імунній відповіді організму людини на інфекційні захворювання [1], [2]. Такий фактор може складатись із багатьох чинників, зокрема забруднень повітря, води, харчових продуктів тощо. Можуть додаватися також впливи соціального характеру, викликані поширенням інформаційних фейків, інформацією про катастрофи або дії воєнного характеру. Епідемії і пандемії супроводжуються інфекційними захворюваннями, механізмом захисту від яких є імунна система людини, яка забезпечує захист організму від чужорідних антигенів.

Один із напрямків досліджень у математичній імунології ґрунтується на базовій моделі імунної відповіді на інфекційні захворювання, запропонованої Г.І. Марчуком [3], і розвинутий

---

УДК 517.9+612.017

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.

Information on some grant ...

у багатьох працях, наприклад в [4], [5], [6], [7], [8], зокрема для конкретних інфекційних захворювань [9] та ін. Математична модель у роботі [3] описується системою диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і набуває вигляду:

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F)V, \quad (1)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha \xi(m) V_\tau F_\tau - \mu_c(C - C^*), \quad (2)$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta \gamma FV - \mu_f F, \quad (3)$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m, \quad (4)$$

де змінні представляють основні фактори інфекційного процесу. Імунна відповідь включає вироблення специфічних об'єктів (антитіл  $F(t)$ ), які генеруються каскадом плазматичних клітин  $C(t)$ . Антитіла здатні нейтралізувати або знищувати чужорідні матеріали (антигени), кількість або концентрація яких  $V(t)$  змінюється з часом  $t \geq t_0 = 0$ . Модель також включає відносну міру  $m(t)$  ураження органу-мішені, яка служить узагальненою мірою пошкодження органу, спричиненого антигенами;  $\xi(m) = 1$  для  $m \in [0, m^*]$  і  $\xi(m) = (m - 1)/(m^* - 1)$  для  $m^* < m \leq 1$ ;  $m^* \in (0, 1)$ . Якщо  $m \in [0, m^*]$ , то ураження органу не впливає на функціонування імунної системи. Фактор запізнення  $\tau > 0$  відіграє важливу роль у моделі, оскільки він задає час від моменту інфікування до активації механізмів імунної відповіді,  $V_\tau(t) = V(t - \tau)$ ,  $F_\tau(t) = F(t - \tau)$ .

У даній статті модель (1)-(4) імунної відповіді досліджується із врахуванням екологічного фактору на перебіг інфекційного захворювання, зокрема, встановлено умови існування і невід'ємності розв'язку, знайдено стани рівноваги та досліджено їх стійкість і проведено комп'ютерне моделювання динаміки моделі.

## 1 ЕКОЛОГІЧНИЙ ФАКТОР

Припустимо, що величина забруднення  $E(t)$  оцінюється у відносних одиницях,  $0 \leq E(t) \leq 1$ , змінюється з часом і є сумою компонент  $E_v(t)$ :

$$E(t) = a_1 E_1(t) + \dots + a_m E_m(t),$$

де вагові коефіцієнти  $a_v \geq 0$ ,  $a_1 + \dots + a_m = 1$ . Функція  $E(t)$  за відсутності значних збурень має коливний характер і стабілізується з часом відносно деякого значення  $K$ ,  $0 < K < 1$ , яке відповідає нормативному рівню забруднення довкілля. Тому вважатимемо, що функція  $E(t)$  є розв'язком узагальненого рівняння Гатчінсона:

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left( 1 - \left( \frac{E(t - \Delta)}{K} \right)^n \right) E(t), t > 0. \quad (5)$$

Тут  $0 < r$  – коефіцієнт лінійного росту,  $\Delta$  – усереднений час відновлення екологічної рівноваги відносно  $E = K$ . Параметр  $n \in \mathbb{N}$  дозволяє адекватніше моделювати динаміку забруднення.

Початкова умова для розв'язку рівняння (5) набуває вигляду:

$$E(t) = E_0(t), \quad 0 \leq E_0(t) \leq 1, \quad t \in [-\Delta, 0]. \quad (6)$$

Розв'язок задачі (5), (6) невід'ємний й обмежений при  $t > 0$  [10]. Надалі вважатимемо, що  $E(t) \leq 1$  при  $t \in [-\Delta, \infty)$ . Замінами  $E(t) = K(1 + x(t)), t = \Delta s$ , рівняння (5) зводиться до вигляду:

$$\frac{dx(s)}{ds} = -rn\Delta x(s-1) + f(x(s), x(s-1)),$$

де  $f$  – нелінійна функція аргументів  $x(s)$  і  $x(s-1)$ ,  $f(0,0) = 0$ . Тому асимптотична стійкість стаціонарної точки  $E = K$  досягається при виконанні умови [8]:

$$0 < rn\Delta < \pi/2. \quad (7)$$

При переході через точку біфуркації  $r\Delta = \pi/2n$  виникає періодичний розв'язок. Стаціонарний розв'язок  $E = 0$  – нестійкий.

## 2 МОДЕЛЬ ІМУННОЇ ВІДПОВІДІ

У моделі імунної відповіді (1)-(4) запропоновано наступні зміни. Припустимо, що взаємодія антиген-антитіло набуває вигляду  $F^k V$ ,  $k \in N$ , і характеризує сильну імунну відповідь. Вплив екологічного фактору  $E(t)$  у моделі (1)-(4) врахуємо, припустивши, що ріст величини забруднення  $E(t)$  сповільнює швидкість утворення каскаду плазмоклітин  $C(t)$  і погіршення екологічного стану веде до зменшення швидкості відновлення органу-мішені  $m(t)$ .

У підсумку динамічна система імунної відповіді набуває вигляду:

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F^k(t))V(t), \quad (8)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha \xi(m(t))V(t-\tau)F(t-\tau) - \mu_c(C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t), \quad (9)$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C(t) - \mu_f F(t) - \eta \gamma V(t)F^k(t), \quad (10)$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V(t) - \mu_m m(t) + \varepsilon_m E(t), \quad (11)$$

де параметри набувають невід'ємних значень. Початкові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} V(t) &= 0, t \in [-\tau, 0], V_0 = V_0 \geq 0; F(t) = F_0(t) \geq 0, F_0 \in C[-\tau, 0]; \\ C(0) &= C_0 \geq 0; m(0) = m_0 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (12)$$

## 3 НЕВІД'ЄМНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ МОДЕЛІ

**Теорема 1.** Нехай коефіцієнти системи рівнянь (5), (8)–(11) і початкові значення розв'язку при  $t = 0$  невід'ємні, існує неперервний розв'язок системи з початковими умовами (12) при  $t > 0$  і виконуються нерівності:

$$C_0 \geq C^*, \varepsilon_c < \mu_c C^*. \quad (13)$$

Тоді розв'язок початкової задачі (8)–(12) невід'ємний при  $t > 0$ .

*Доведення.* Невід'ємність розв'язку  $V(t)$  при  $t > 0$ , випливає із зображення

$$V(t) = V_0 \exp\left(\int_0^t (\beta - \gamma F^k(s)) ds\right) \geq 0,$$

яке одержується з рівняння (8). Аналогічно доводиться невід'ємність розв'язку задачі (5), (6).

Оскільки  $V(t) \geq 0$  і  $E(t) > 0$ , коли  $t > 0$ , то

$$m(t) = m_0 e^{-\mu_m t} + \int_0^t e^{-\mu_m(t-s)} (\sigma V(s) + \varepsilon_m E(s)) ds \geq 0, \quad t > 0. \quad (14)$$

На відрізку  $[0, \tau]$ , враховуючи умову (13), маємо:

$$C(t) = C^* + (C_0 - C^*) e^{-\mu_c t} - \varepsilon_c \int_0^t e^{-\mu_c(t-s)} E(s) ds \geq C^* - \frac{\varepsilon_c}{\mu_c} > 0.$$

Якщо  $F(0) > 0$ , то  $F(t) > 0$  на інтервалі  $(0, t_1)$ ,  $t_1 \leq \tau$ . Нехай  $F(t_1) = 0$ , тоді  $dF(t_1)/dt \leq 0$ , але

$$\frac{dF(t_1)}{dt} = \rho C(t_1) - \eta \gamma F^k(t_1) V(t_1) - \mu_c F(t_1) = \rho C(t_1) > 0,$$

що суперечить припущенню.

Отже,  $F(t) > 0$  при  $t \in [0, \tau]$ . Оскільки  $\xi(m) \geq 0$ , то для  $t \in (\tau, 2\tau]$ :

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha \xi(m(t)) V(t - \tau) F(t - \tau) - \mu_c C^* - \varepsilon_c E(t) \geq \mu_c (C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t).$$

Якщо  $C(t_2) = 0$ ,  $\tau < t_2 < 2\tau$ , то

$$\frac{dC(t_2)}{dt} \geq \mu_c C^* - \varepsilon_c C > 0,$$

що суперечить припущенню, оскільки  $dC(t_2)/dt \leq 0$ . Аналогічно доводиться, що  $F(t) > 0$  при  $t \in [2\tau, 3\tau]$  і відповідно  $V(t) > 0$ , і далі на відрізок  $[\nu\tau, (\nu + 1)\tau]$ ,  $\nu \geq 3$ .

Отже, розв'язок моделі невід'ємний при зроблених припущеннях.  $\square$

#### 4 ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ

Розглянемо питання існування і єдиності розв'язку задачі (8)-(11).

**Теорема 2.** *Нехай коефіцієнти системи рівнянь (5), (8)-(11) і початкові умови невід'ємні, виконуються умови (13). Тоді при  $t > 0$  існує єдиний розв'язок задачі (6), (8)-(11), диференційований при  $t > \tau$ .*

*Доведення.* Неперервний розв'язок задачі (5), (6) існує і єдиний при  $t > 0$  [10], [11]. На інтервалі  $(0, \tau)$  розв'язок лінійного рівняння

$$\frac{dC(t)}{d\tau} = -\mu_c (C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t) \quad (15)$$

існує і єдиний. На деякому інтервалі  $(0, t)$  існування розв'язку із початковими умовами  $V(0) > 0$ ,  $F(0) > 0$  на підставі теореми 1 одержимо

$$\frac{dF}{dt} \leq \rho C, \quad \frac{dV}{dt} \leq \beta V.$$

Розв'язок мажорантої лінійної системи із початковими умовами  $V(0)$  і  $F(0)$  існує при  $t > 0$ . Отже, розв'язок рівнянь (8) і (10) можна продовжити на інтервал  $(0, \tau)$  на підставі теореми Уїтнера [12, с. 42-43]. Існування і єдиність розв'язку  $m(t)$  впливає із зображення (14). На наступному кроці  $(\tau, 2\tau)$  повторивши аналогічні міркування встановлюється існування єдиного розв'язку із невід'ємними початковими  $V(t)$  і  $F(t)$  при  $t \in [0, \tau]$ ,  $C(\tau) > 0$  і  $m(\tau) > 0$ . Методом кроків [10] отримується існування розв'язку для  $t > 0$ .

Оскільки початкова функція для розв'язку  $V(t)$  розривна при  $t = 0$ , то розв'язок задачі (5)-(6), (8)-(11) неперервний для  $t \in [0, \tau]$  і диференційований при  $t > \tau$  внаслідок гладкості правих частин системи. Єдиність розв'язку впливає із гладкості правих частин системи рівнянь.  $\square$

## 5 СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТА ЇХ СТІЙКІСТЬ

Стаціонарний розв'язок  $E = K$  асимптотично стійкий при виконанні умови (7). Для системи рівнянь (8)–(11), за медично прийнятної умови  $\xi(m) = 1$ , стаціонарні розв'язки знаходяться із нелінійної системи рівнянь:

$$\begin{aligned}(\beta - \gamma F^k)V &= 0, \\ \alpha VF - \mu_c(C - C^*) - \varepsilon_c K &= 0, \\ \rho C - \mu_f F - \eta\gamma VF^k &= 0, \\ \sigma V - \mu_m m + \varepsilon_m E &= 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Стаціонарний розв'язок, що відповідає стану здорового організму з незначним ураженням органу-мішені  $m$ , що не перевищує  $m^*$ , набуває вигляду:

$$V_1 = 0, C_1 = C^* - \frac{\varepsilon_c K}{\mu_c}, F_1 = \frac{\rho C_1}{\mu_f}, m_1 = \frac{\varepsilon_m K}{\mu_m}.\tag{17}$$

Такий розв'язок існує, якщо виконуються умови:

$$\varepsilon_c \leq \frac{\mu_c C^*}{K}, \quad \varepsilon_m \leq \frac{\mu_m m^*}{K}.\tag{18}$$

Якщо  $V \neq 0$ , то

$$F_2 = \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}}, m_2 = \frac{\sigma_2 V_2 + \varepsilon_m K}{\mu_m},\tag{19}$$

а значення  $C_2$  і  $V_2$  є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \mu_c C - \alpha F_2 V = \mu_c C^* - \varepsilon_c K, \\ \rho C - \eta\gamma F_2^k V = \mu_f F_2. \end{cases}$$

Звідси одержимо:

$$C_2 = \frac{\alpha\mu_c + \eta\gamma(\varepsilon_c K - \mu_c C^*)F_2^{k-1}}{\alpha\rho - \eta\gamma\mu_c F_2^{k-1}}, V_2 = \frac{\rho(\varepsilon_c K - \mu_c C^*) + \mu_c\mu_f F_2}{\alpha\rho F_2 - \eta\gamma\mu_c F_2^k}.\tag{20}$$

Стаціонарний розв'язок (19), (20) відповідає стану хронічного захворювання при допустимому рівню забруднення  $E = K$ . Отриманий розв'язок має зміст, якщо  $V_2 > 0$ , оскільки тоді

$$\rho C_2 = \mu_f F_2 + \mu\gamma V_2 F_2^k > 0.$$

Додатність  $V_2$  забезпечується виконанням однієї із систем нерівностей:

$$\begin{aligned}\rho(\mu_c C^* - \varepsilon_c K) &< \mu_c\mu_f F_2, \\ \alpha\rho &> \eta\gamma\mu_c F_2^{k-1},\end{aligned}\tag{21}$$

або

$$\begin{aligned}\rho(\mu_c C^* - \varepsilon_c K) &> \mu_c\mu_f F_2, \\ \alpha\rho &< \eta\gamma\mu_c F_2^{k-1},\end{aligned}\tag{22}$$

Умови (21) відповідає стану сильної імунної відповіді, умови (22) - стану імунодефіциту [3].

## 6 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ СТАНУ ЗДОРОВОГО ОРГАНІЗМУ

Характеристичне рівняння, відповідне лінеаризованій системі (8) – (11) на розв'язку (17), набуває вигляду:

$$\begin{vmatrix} \beta - \gamma F_1^k - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \alpha F_1 e^{-\lambda \tau} & -\mu_c - \lambda & 0 & 0 \\ -\eta \gamma F_1^k & \rho & -\mu_f - \lambda & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -\mu_m - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Власні значення

$$\lambda_1 = \beta - \gamma F_1^k < 0, \lambda_2 = -\mu_c < 0, \lambda_3 = -\mu_f < 0, \lambda_4 = -\mu_m < 0,$$

якщо виконується умова

$$\beta - \gamma F_1^k < 0. \quad (23)$$

Отже, при виконанні умови  $0 < rn\Delta < \pi/2$  й умови (23) стаціонарні розв'язки  $E_1 = K$  і (17) локально асимптотично стійкі.

Як і в праці [3], для запропонованої моделі (8)-(11) вкажемо верхню оцінку  $V^*$  – імунологічний бар'єр, що для початкового значення інфікування  $V_0 > 0$ , такого, що  $V_0 < V^*$ , інфекційне захворювання матиме субклінічну форму.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умова (23) й оцінки*

$$\varepsilon_c \leq \frac{\mu_c C^*}{K}, \quad \varepsilon_m \leq \frac{\mu_m m^*}{K}, \quad 2 \exp(-\mu_c \tau) < 1. \quad (24)$$

Тоді для початкового значення  $V_0$ , такого, що  $0 < V_0 < V^*$ , де

$$V^* = \frac{1}{\eta \beta} \left( \rho C^* - \mu_f \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}} \right) + \frac{\varepsilon_c \rho}{\eta \beta \mu_c} (2e^{-\mu_c \tau} - 1), \quad (25)$$

розвитку інфекційного захворювання у гострій чи хронічній формі не відбувається і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0.$$

*Доведення.* Із умови (23) випливає, що розв'язок  $V(t)$  монотонно спадає на деякому інтервалі  $(0, t_1)$ . У точці  $t = t_1$  функція  $V(t)$  досягає мінімуму і тоді  $\beta - \gamma F^k(t_1) = 0$ . Розглянемо спочатку випадок, коли  $t_1 < \tau$ . Існує інтервал  $(t_1, t_2)$ ,  $t_2 \leq \tau$ , на якому функція  $V(t)$  зростає, тому  $F^k(t) < \beta/\gamma$ . Оскільки  $0 < E(t) \leq 1$ , то згідно з доведенням теореми 1, і враховуючи оцінку (24) одержимо, що на цьому інтервалі одержимо:

$$C(t) \geq \frac{\varepsilon_c}{\mu_c} e^{-\mu_c \tau} + \frac{\varepsilon_c}{\mu_c} (e^{-\mu_c t} - 1) \geq \frac{\varepsilon_c}{\mu_c} (2e^{-\mu_c \tau} - 1) > 0. \quad (26)$$

Із рівняння (10) і оцінок (26) випливає:

$$\begin{aligned} \frac{dF(t_1)}{dt} &= \rho C(t_1) - \eta \gamma V(t_1) F^k(t_1) - \mu_f F(t_1) \geq \\ &\rho \left( C_0 + \frac{\varepsilon_c}{\mu_c} (2e^{-\mu_c \tau} - 1) \right) - \eta \gamma V_0 \frac{\beta}{\gamma} - \mu_c \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Якщо  $V_0 < V^*$ , то з нерівності (27) матимемо:

$$(\rho C^* - \mu_f \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}}) + \frac{\rho \varepsilon_c}{\mu_c} (2e^{-\mu_c \tau} - 1) - \eta \beta V_0 > 0.$$

Отримана оцінка суперечить припущенню, тому функція  $V(t)$  спадає на інтервалі  $(0, \tau)$ .

Нехай тепер  $\tau < t_1 < t_2 \leq 2\tau$ . Тоді для  $t \in (t_1, t_2]$  одержимо

$$\frac{dC(t)}{dt} \geq \alpha V(t - \tau) F(t - \tau) - \mu_c (C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t) \geq \mu_c (C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t),$$

оскільки функції  $V(t)$  і  $F(t)$  набувають додатних значень. Отже, на інтервалі  $(t_1, t_2)$  виконується оцінка вигляду (26), тому  $F(t_2) > 0$ , що підтверджує спадання функції  $V(t)$  на інтервалі  $(\tau, 2\tau)$ . Аналогічні оцінки отримується також і на інтервалах  $(k\tau, (k+1)\tau)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , що підтверджує висновок щодо імунологічного бар'єру  $V^*$ , непроходження якого не приводить до гострої чи хронічної форми інфекційного захворювання.

□

**Наслідок 1.** Враховуючи значення стаціонарного розв'язку (17) запишемо умову (23) у вигляді

$$\beta < \gamma \frac{\rho^k}{\mu_f^k} \left( C^* - \frac{\varepsilon_c K}{\mu_c} \right)^k.$$

Звідси випливає, що при невеликій швидкості розмноження антигена  $\beta$  або достатній концентрації імунокомпетентних плазмоклітин  $C^*$ , що відбувається, зокрема, при вакцинації, розвитку захворювання не відбудеться.

## 7 ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ

На підставі відповідної дискретної моделі за допомогою набору інструментів для аналітичного й чисельного розв'язання систем диференціальних рівнянь у програмному пакеті Wolfram Mathematica проілюструємо поведінку розв'язків моделі імунної відповіді (8)–(11) за наявності і відсутності впливу екологічного фактору  $E(t)$ .

Якщо фактор  $E(t)$  не впливає на перебіг інфекційного захворювання ( $\varepsilon_c = \varepsilon_m = 0$ ), то спостерігається гостра форма захворювання з досягненням пікових значень концентрації антигена  $V_{max}^1$  і плазмоклітин  $C_{max}^1$  (рис.1, а-б), причому  $C(t) \rightarrow 1.4$  із ростом  $t$  і перевищує  $C^*$ .

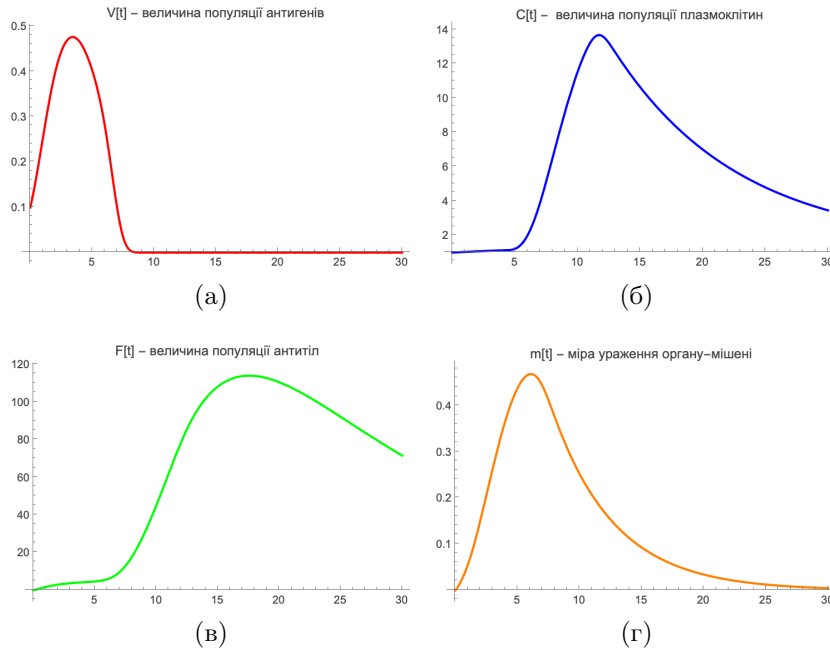


Рис. 1: Динаміка імунної відповіді. Параметри:  $\beta = 1.2, \gamma = 0.3, \alpha = 1.7, \mu_c = 0.1, \rho = 2.0, C^* = 1.4, \mu_f = 0.15, \eta = 2.0, \sigma = 0.35, \mu_m = 0.2, \tau = 4.5, m^* = 0.15, \varepsilon_c = \varepsilon_m = 0$ . Початкові умови:  $V_0 = 0.1, C_0 = 1.0, F_0 = 0.0001, m_0 = 0$

Якщо у рівнянні (5) параметри набувають значень:  $r = 0.5, K = 0.2, n = 2, k = \Delta = 1$ , а початкова умова  $E_0(t) = 0.15, t \in [-\Delta, 0]$ , то стаціонарний розв'язок задачі  $E(t) = K$  асимптотично стійкий (рис. 2 (а)), оскільки  $rn\Delta = 1 < \pi/2$ .

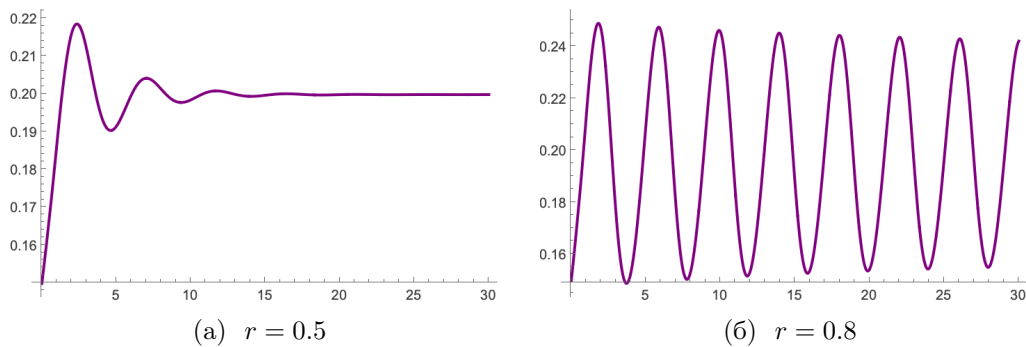


Рис. 2: Динаміка фактору забруднення зовнішнього середовища  $E(t)$ . Параметри:  $K = 0.2, n = 2, k = \Delta = 1$ .

Припустимо, що фактор  $E(t)$  впливає на динаміку імунної відповіді ( $\varepsilon_c \varepsilon_m \neq 0$ ). У цьому випадку  $V_{max}^2 > V_{max}^1$ , значення  $C(t)$  і  $F(t)$  наближаються до стаціонарних значень  $C_1$  і  $F_1$  при  $t \rightarrow \infty$ , які менше значень без впливу фактору забруднення зовнішнього середовища (рис.3 (а,б)). При цьому залишається незначне ураження  $m(t) < m^*$  органу-мішені (рис. 3 (г)).

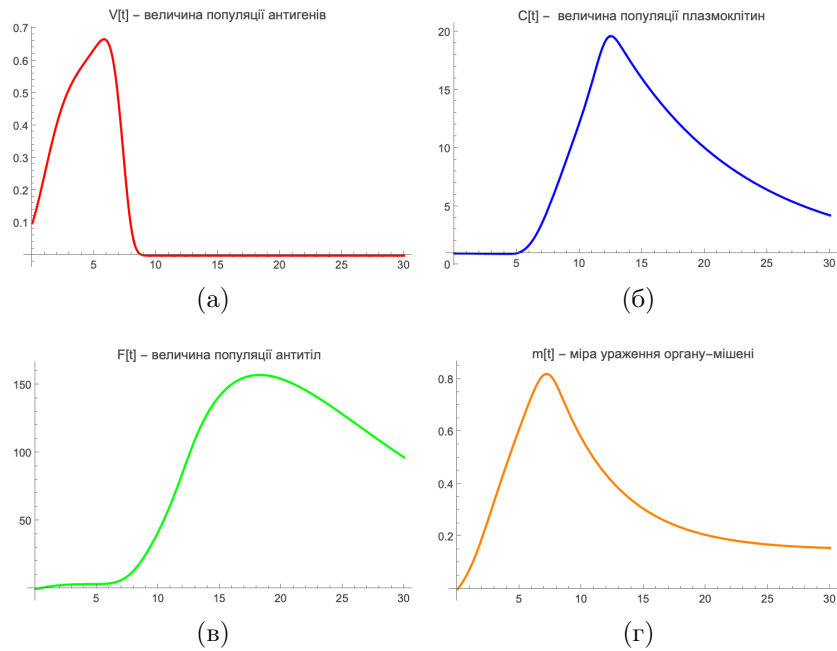


Рис. 3: Динаміка імунної відповіді із впливом фактору забруднення зовнішнього середовища ( $\varepsilon_c = 0.25, \varepsilon_m = 0.15$ ).

Якщо стан рівноваги  $E = K$  порушується, наприклад, при  $r = 1.3$ , то спостерігається осциляційна поведінка розв'язків (8)–(11). При цьому  $m(t) \rightarrow m_2 > 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , тобто ураження органу-мішені повністю не зникає. Також, максимальні значення концентрації антигена  $V_{max}^3$  і плазмоклітин  $C_{max}^3$  перевищують відповідні значення, які набуваються без впливу фактору забруднення зовнішнього середовища (рис. 4 (а,б)).

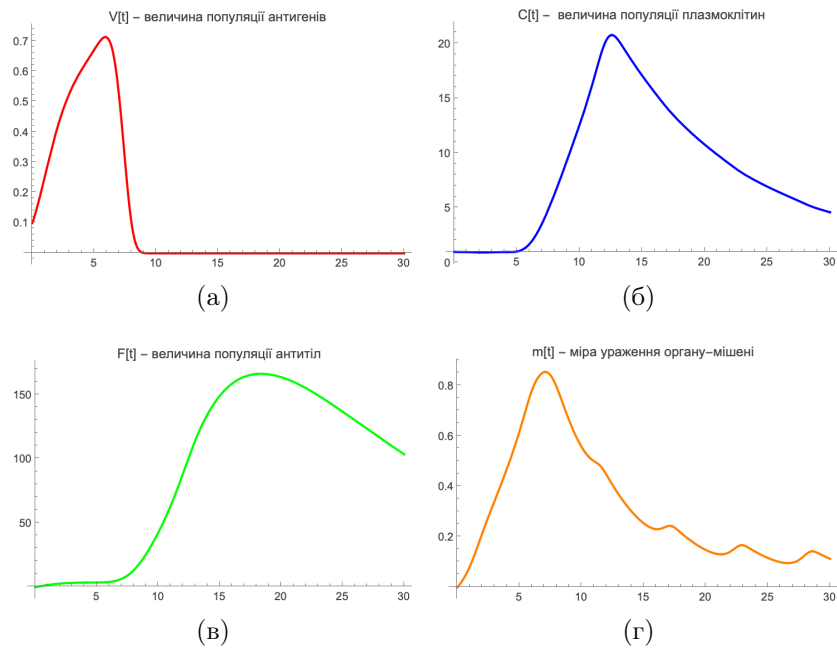


Рис. 4: Динаміка імунної відповіді із впливом фактору забруднення зовнішнього середовища при  $r = 1.3$ .

Отже, за результатами розглянутих прикладів можна прослідкувати вплив екологічного фактору на перебіг інфекційного захворювання, пов'язаного із забрудненням зовнішнього середовища. Спостерігається ріст максимального значення антигена, осциляційна поведінка міри ураження органу-мішені, запізнення в досягненні максимальних значень формування каскаду плазмоклітин і популяції антитіл.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Stiefs D., Venturino E., Feude U. Evidence of chaos in eco-epidemic models. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2009. Vol. 6, no. 4. P. 855–871.
- [2] Galvani A. P. Epidemiology meets evolutionary ecology. *Trends in Ecology and Evolution*. 2003. Vol. 18, no. 3. P. 132–139.
- [3] Marchuk G.I. *Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases*. Springer-Science+Business Media. 1997. P. 350.
- [4] Bodnar M., Foryś U. A model of immune system where time-dependent immune reactivity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2009. Vol. 70, no. 2. P. 1049–1058.
- [5] Foryś U. Hopf bifurcations in Marchuk's model of immune reactions. *Math. Comput. Modelling*. 2001. Vol. 34. P. 725–735.
- [6] Baranovsky S. V., Bomba A. Y. Modification of the Model of Mixed Infection Dynamics with Regard for the Diffusion Perturbations and Interactions Between Antigens. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024. Vol. 282, no. 5. P. 870–884.
- [7] Skvortsova M. Asymptotic properties of solutions in Marchuk's basic model of disease. *Func. Dif. Eq.* 2017. No 3-4. P. 127–135.
- [8] Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. *Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences*. 2024. Vol. 18, no. 2. P. 7–17.
- [9] Foryś U. Marchuk's model of immune system dynamics with application to tumour growth. *J. Theor. Med.* 2002. Vol. 4, no. 1. P. 85–93.
- [10] Smith H. *An Introduction to Delay Differential Equations where Applications to the Life Sciences*. Springer Science+Business Media. 2011. P. 172.
- [11] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press. 1993. P. 397.
- [12] Hartman Ph. *Ordinary Differential Equations*. New York, London, Sydney, John Wiley Sons. 1964. P. 612.

*Надійшло 24.11.2025*

---

Bihun Y.Y., Ukrainets O.Z. *Mathematical Model of the Impact of Environmental Pollution on the Human Immune Response*, *Bukovinian Math. Journal*. **13**, 2 (2025), 114–124.

A mathematical model of the immune response to an infectious disease is proposed, taking into account the impact of environmental pollution. The pollution factor is described by a generalized Hutchinson equation and influences the formation of the plasma cell cascade and

the damage to the target organ. The conditions for the existence of a unique solution to the mathematical model and its non-negativity on the semi-axis  $[0, \infty)$  are established.

The stationary solutions of the model and the conditions for their existence are obtained. The stability of the stationary solution, which characterizes the state of absence of the infectious disease, is investigated. An estimate of the initial infection level is derived, under which the infectious disease does not occur.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.13>

BANAKH T., MAKAROVA K., MAZURENKO O.

**MONOTHETICITY IN ONE-PARAMETRIC TOPOLOGICAL GROUPS**

We characterize monothetic topological groups among one-parametric topological groups. In particular, we prove that a topological group of weight  $< \text{cov}(\mathcal{M})$  is monothetic if and only if it is not isomorphic to the real line. This implies that the real line is a unique non-monothetic metrizable one-parametric topological group. Also we prove that the real line with the Bohr topology as a unique non-monothetic totally bounded  $\mathbb{N}$ -scaled topological group.

*Key words and phrases:* Monothetic topological group, one-parametric topological group, Bohr topology, Borel-Bohr topology,  $\mathbb{N}$ -scaling.

---

Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, Ukraine

e-mail: [t.o.banakh@gmail.com](mailto:t.o.banakh@gmail.com), [kateryna.makarova@lnu.edu.ua](mailto:kateryna.makarova@lnu.edu.ua), [oles.mazurenko@lnu.edu.ua](mailto:oles.mazurenko@lnu.edu.ua)

**1 INTRODUCTION**

The real line plays a fundamental role in mathematics. It serves as a cornerstone in numerous areas of scientific research. The main reason for that is the ability to endow the real line with various mathematical structures. Hence, researching the properties of  $\mathbb{R}$  inside a particular category of such mathematical structures could be helpful for more advanced studies. In particular, characterizing the real line as an object of some category is a common way to conduct such research. One can find helpful characterizations in the categories of ordered fields, topological spaces, groups etc. In this paper, we obtain a characterization of the real line in the category of topological groups, which turned out to be helpful in the other research [2] to prove that one-parametric subgroups in any strictly convex metric group are isomorphic copies of the additive group of reals.

We prove that the real line is the unique non-monothetic metrizable one-parametric topological group. Also we detect monothetic groups among one-parametric topological group, and characterize the real line endowed with the Bohr topology and a unique non-monothetic totally bounded  $\mathbb{N}$ -scaled topological group.

**2 PRELIMINARIES**

Our study mainly considers the structure of a topological group. Let us recall its definition together with the definitions of several related fundamental properties.

---

УДК 515.12

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20K45, 22B05, 22D35.

**Definition 1.** A *group* is an algebraic structure  $(G, +, 0)$ , consisting of a set  $G$ , a binary operation  $+$  :  $G \times G \rightarrow G$  and an identity element  $0$ , satisfying the following axioms:

- $\forall x, y, z \in G \quad (x + y) + z = x + (y + z),$  (associativity)
- $\forall x \in G \quad x + 0 = x = 0 + x,$  (identity)
- $\forall x \in G \exists y \in G \quad x + y = 0 = y + x.$  (inverse)

We will also use the operation  $\cdot : \mathbb{Z} \times G \rightarrow G, \cdot : (n, x) \mapsto nx$ , which is naturally defined on the additive group  $(G, +, 0)$  by the following recursive formulas:  $0 \cdot x = 0$ ,  $(n + 1) \cdot x = n \cdot x + x$ , and  $-(n + 1) \cdot x = -n \cdot x - x$  for all  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . If the group  $G$  is abelian, the defined operation  $\cdot$  turns it into a  $\mathbb{Z}$ -module.

**Definition 2.** A *topological group* is a group  $(G, +, 0)$  equipped with a topology  $\mathcal{T}$  such that the following maps are continuous:

- the addition (group operation)  $+$  :  $G \times G \rightarrow G, \quad + : (x, y) \mapsto x + y,$
- the inversion  $i : G \rightarrow G, \quad i : x \mapsto -x.$

Unless stated otherwise, all topological groups are assumed to be Hausdorff. For a topological group  $(G, \mathcal{T})$ , we denote by  $\mathcal{T}_0 := \{U \in \mathcal{T} : 0 \in U\}$  the family of open neighborhoods of the identity element  $0$  of the topological group. By  $\mathbb{R}$  we denote the additive group of reals equipped with the Euclidean topology  $\mathcal{T}_\varepsilon$ .

**Definition 3.** A map  $\varphi : S \rightarrow G$  between topological groups is called a *topological group isomorphism* if it is simultaneously a group homomorphism and a homeomorphism.

If there exists a topological group isomorphism between topological groups  $G$  and  $H$ , we will say that  $G$  is *isomorphic* to  $H$  and write  $G \cong H$ .

**Definition 4.** A topological group  $G$  is called *one-parametric* if there exists a surjective continuous group homomorphism  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  (called a *parametrization*).

**Definition 5.** A topological group  $(G, +, 0, \mathcal{T})$  is called *monothetic* if it contains a dense cyclic subgroup; that is, there exists an element  $g \in G$  (called a *topological generator*) of  $G$  such that  $\overline{\langle g \rangle} = \overline{\{ng : n \in \mathbb{Z}\}} = G$ .

**Definition 6.** A topological group  $(G, +, 0, \mathcal{T})$  is called *totally bounded* if for every open neighborhood  $U \in \mathcal{T}_0$  of the identity  $0 \in G$ , there exists a finite subset  $F \subseteq G$  such that  $G = \bigcup_{x \in F} (x + U)$ .

For ease of notation, we occasionally use property names to refer to the group topology rather than the topological group (for example, "monothetic group topology"). We will use these expressions interchangeably when no confusion can arise.

## 3 UNIQUENESS OF PARAMETRIZATION

Let  $(G, +, 0, \mathcal{T})$  be a one-parametric topological group. The following proposition shows that the parametrization  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  of  $G$  is unique in a certain sense, which justifies why the term “one-parametric group” is applied to  $G$  itself rather than to a specific parametrization.

**Proposition 1.** *If  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  and  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow G$  are two parametrizations of a (non-trivial) one-parametric topological group  $G$ , then there exists a (unique) topological group isomorphism  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\varphi \circ h = \psi$ .*

*Proof.* Observe that  $\ker \varphi = \{a \in \mathbb{R} : \varphi(a) = 0\}$  is a closed subgroup of  $\mathbb{R}$ , which are known to be either  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R}$ , or  $a\mathbb{Z}$  for some  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  (see, e.g., [6], p. 27).

If  $\ker \varphi = \mathbb{R}$ , then the surjective homomorphism  $\varphi$  is trivial, and thus  $G = \{0\}$ . Hence, any topological group isomorphism  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is as required.

If  $\ker \varphi = a\mathbb{Z}$ , then the topological group  $G$  can be identified with the circle group  $\mathbb{R}/a\mathbb{Z} \cong \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Hence both  $\varphi$  and  $\psi$  are continuous characters of  $\mathbb{R}$ . Thus  $\varphi(x) = e^{2\pi i \frac{x}{a}}$  and  $\psi(x) = e^{2\pi i \frac{x}{b}}$ , where  $\ker \psi = b\mathbb{Z}$ . For the identity  $\varphi \circ h = \psi$  to hold, the map  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  must satisfy  $e^{2\pi i \frac{x}{b}} = e^{2\pi i \frac{h(x)}{a}}$  for all  $x \in \mathbb{R}$ . This is equivalent to  $h(x) = \frac{a}{b}x + na$  for  $n \in \mathbb{Z}$ . Such map is a topological group isomorphism if and only if  $n = 0$ . Hence  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : x \mapsto \frac{a}{b}x$  is a required unique topological group isomorphism.

If  $\ker \varphi = \{0\}$ , then  $G$  is not isomorphic to  $\mathbb{T}$ , and therefore  $\ker \psi = \{0\}$  as well. We claim that the map  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h = \varphi^{-1} \circ \psi$ , is the required unique topological group isomorphism. Observe that  $h$  is already a group isomorphism; it remains to show that  $h$  is a homeomorphism.

Write  $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$  as the union of closed intervals  $I_i$ . Set  $J_i := \varphi[I_i]$  and  $K_i := \psi[I_i]$ . For each  $i \in \mathbb{N}$ , the sets  $J_i, K_i$  are compact subsets of  $G$  and  $G = \bigcup_{j, k \in \mathbb{N}} J_j \cap K_k$ . Since  $\psi \upharpoonright_{I_k}$  is a homeomorphism, we obtain  $\mathbb{R} = \bigcup_{j, k \in \mathbb{N}} \psi^{-1}[J_j \cap K_k]$  and each  $\psi^{-1}[J_j \cap K_k]$  is compact. By the Baire Category Theorem there exist indices  $j, k \in \mathbb{N}$  such that  $D := \psi^{-1}[J_j \cap K_k] \subseteq I_k$  has non-empty interior. Since  $\varphi \upharpoonright_{I_j}$  and  $\psi \upharpoonright_{I_k}$  are homeomorphisms, the map  $h$  is a homeomorphism on the non-empty open set  $\text{Int}(D)$ . Since  $h$  is a group isomorphism, being homeomorphic on a non-empty open set implies that it is a homeomorphism on all of  $\mathbb{R}$ . Thus  $h$  is indeed a topological group isomorphism. Finally, uniqueness follows immediately from the fact that  $\psi$  and  $\varphi$  are bijective.  $\square$

## 4 CHARACTERIZING THE REAL LINE AMONG ONE-PARAMETRIC TOPOLOGICAL GROUPS

In this section we prove two characterizations of the real line in the class of all one-parametric topological groups.

**Proposition 2.** *Let  $G$  be a one-parametric topological group and  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  be its parametrization. The map  $\varphi$  is a topological isomorphism if and only if for some nonempty open set  $U \subseteq G$  the preimage  $\varphi^{-1}[U]$  is bounded in the real line  $\mathbb{R}$ .*

*Proof.* The “only if” part is trivial. To prove the “if” part, assume that for some nonempty set  $U \subseteq G$ , the preimage  $\varphi^{-1}[U]$  is bounded in the real line. Replacing the set  $U$  by its shift  $U - u$ , where  $u \in U$  is any point, we lose no generality assuming that the identity element  $0$  of the group  $U$  belongs to the open set  $U$ . Since all nontrivial subgroups of the real line are unbounded, the surjective homomorphism  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  is injective and hence is bijective.

We will show that  $\varphi$  is open, that is for all  $\varepsilon > 0$  the image  $\varphi[(-\varepsilon, \varepsilon)]$  is open in  $G$ . Replacing  $\varepsilon$  by a smaller positive number, we can assume that  $\varphi[(-\varepsilon, \varepsilon)] \subseteq U$ , by the continuity of  $\varphi$ . Choose

any positive real number  $a$  such that the bounded set  $\varphi^{-1}[U]$  is contained in the closed interval  $K := [-a, a] \subset \mathbb{R}$ . The compactness of  $K$  ensures that the restriction  $\varphi \upharpoonright_K : K \rightarrow \varphi[K] \subseteq G$  is a homeomorphism. Hence,  $\varphi[(-\varepsilon; \varepsilon)]$  is open in the subspace  $\varphi[K] \subseteq G$ . Consequently, there exists an open set  $W \subseteq G$  such that  $\varphi[(-\varepsilon; \varepsilon)] = \varphi[K] \cap W$ . Since  $\varphi[(-\varepsilon; \varepsilon)] \cap U = \varphi[(-\varepsilon; \varepsilon)]$  and  $U \subseteq \varphi[K]$ , we have  $\varphi[(-\varepsilon; \varepsilon)] = \varphi[K] \cap W \cap U = W \cap U$ . The subsets  $W$  and  $U$  are open in  $G$ , hence  $\varphi[(-\varepsilon; \varepsilon)]$  is also open in  $G$ . Therefore, the bijective continuous homomorphism  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  is open and hence is a topological isomorphism of the topological groups  $\mathbb{R}$  and  $G$ .  $\square$

The following characterization of the real line is the main result of this section.

**Theorem 1.** *A topological group  $G$  is isomorphic to  $\mathbb{R}$  if and only if  $G$  is one-parametric, metrizable, and not monothetic.*

*Proof.* The necessity follows directly from the fact that the real line  $\mathbb{R}$  is metrizable, one-parametric, and not monothetic, since for all  $x \in \mathbb{R}$  the subgroup  $\langle x \rangle = \mathbb{Z}x \neq \mathbb{R}$  is closed. Now we prove the sufficiency.

Assume that a one-parametric topological group  $G$  is metrizable and not monothetic, and let  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  be its parametrization.

**Lemma 1.** *There exists a non-empty open set  $U \subseteq G$  with bounded preimage  $\varphi^{-1}[U] \subseteq \mathbb{R}$ .*

*Proof.* To derive a contradiction, assume that every nonempty open set  $U \subseteq G$  has unbounded preimage  $\varphi^{-1}[U]$  in the real line  $\mathbb{R}$ . Observe that the topological group  $G$  is separable, being a continuous image of the separable space  $\mathbb{R}$ . Being separable and metrizable, the topology of  $G$  has a countable base  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  consisting of nonempty open sets.

For each  $n \in \mathbb{N}$ , consider a subset  $A_n = \{a \in \mathbb{R} : \varphi[\mathbb{Z} \cdot a] \cap B_n \neq \emptyset\}$  of  $\mathbb{R}$ . We claim that the set  $A_n$  is open in the real line  $\mathbb{R}$ .

Let  $a \in A_n$ . We must prove that there exists a real  $\varepsilon > 0$  such that the interval  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A_n$ . Since  $a \in A_n$ , there exists  $m \in \mathbb{Z}$  such that  $\varphi(ma) \in B_n$  and hence,  $ma \in \varphi^{-1}[B_n]$ . Since the set  $\varphi^{-1}[B_n]$  is open in  $\mathbb{R}$ , there exists a real  $\delta > 0$  such that the interval  $(ma - \delta, ma + \delta) \subseteq \varphi^{-1}[B_n]$ . Consider the positive real number  $\varepsilon := |\frac{\delta}{m}|$  and the interval

$$m \cdot (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = m \cdot (a - |\frac{\delta}{m}|, a + |\frac{\delta}{m}|) = \{mx : x \in (a - |\frac{\delta}{m}|, a + |\frac{\delta}{m}|)\} = (ma - \delta, ma + \delta) \subseteq \varphi^{-1}(B_n).$$

Hence for all  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  we have  $m\varphi(x) = \varphi(mx) \in B_n$ . Therefore,  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A_n$  and  $A_n$  is open in  $\mathbb{R}$ .

Now we prove that  $A_n$  is dense in  $\mathbb{R}$ . Given any  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  and positive  $\varepsilon < |x|$ , it suffices to check that  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ . Consider the intervals  $m \cdot (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (mx - |m|\varepsilon, mx + |m|\varepsilon)$  and observe that for  $m \in \mathbb{Z}$  with  $|m| > |x|/\varepsilon$  the inequalities  $mx + |m|\varepsilon > (m + 1)x - |m + 1|\varepsilon$  and  $(m - 1)x + |m - 1|\varepsilon > mx - |m|\varepsilon$  holds, which means that consecutive intervals  $m \cdot (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  and  $(m \pm 1) \cdot (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  overlap, covering all points  $y \in E := \mathbb{R} \setminus (|x|/\varepsilon) \cdot [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ . Since  $\varphi^{-1}[B_n]$  is unbounded in  $\mathbb{R}$ , we can find  $y \in E \cap \varphi^{-1}[B_n]$ . Hence  $y \in (kx - |k|\varepsilon, kx + |k|\varepsilon) \cap \varphi^{-1}[B_n]$  for some  $k \in \mathbb{Z}$ . Therefore,  $y = kb$  for some  $b \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  and  $kb \in \varphi^{-1}[B_n]$ . This implies  $k\varphi(b) = \varphi(kb) \in B_n$ . Hence,  $b \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A_n$ , proving  $A_n$  is dense in  $\mathbb{R}$ .

Finally, the intersection  $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  of countably many dense open sets  $A_n \subseteq \mathbb{R}$  is non-empty and, in fact, dense in  $\mathbb{R}$  by Baire Category Theorem. Observe that for all  $x \in A$  we have  $\varphi[\mathbb{Z} \cdot x] \cap B_n \neq \emptyset$  for all  $n \in \mathbb{N}$ , which implies  $\overline{\varphi[\mathbb{Z} \cdot x]} = G$ . Therefore,  $G$  is monothetic. This is a contradiction, completing the proof of Lemma 1.  $\square$

By Lemma 1, some nonempty open set  $U \subseteq G$  has bounded preimage  $\varphi^{-1}[U]$  in  $\mathbb{R}$ . By Proposition 2, the parametrization  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  is a topological isomorphism, witnessing that the one-parametric group  $G$  is isomorphic to the real line.  $\square$

The proof of Theorem 1 yields a bit more, namely:

**Proposition 3.** *If a one-parametric metrizable topological group  $G$  is not isomorphic to  $\mathbb{R}$ , then  $G$  has dense set of topological generators.*

Theorem 1 can be rewritten as a characterization of monotheticity in topological groups in the following way.

**Corollary 1.** *A metrizable one-parametric topological group  $G$  is monothetic if and only if  $G$  is not isomorphic to  $\mathbb{R}$ .*

Metrizability is an essential condition in Theorem 1. If it is removed, one obtains the following example of a non-monothetic one-parametric topological group, which is not isomorphic to  $\mathbb{R}$ .

**Definition 7.** For a topological abelian group  $(G, \mathcal{T})$ , let  $\widehat{G}$  be the group of all continuous homomorphisms  $G \rightarrow \mathbb{T}$  to the circle group  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Elements of the set  $\widehat{G}$  are called *characters* on  $G$ , see [6]. The *Bohr topology* on a topological abelian group  $(G, \mathcal{T})$  is the smallest topology on  $G$  in which all characters  $\chi \in \widehat{G}$  remain continuous. This topology is generated by the subbase consisting of the preimages  $\chi^{-1}[U]$  of open sets  $U \subseteq \mathbb{T}$  under characters  $\chi \in \widehat{G}$ . By  $G^b$  we denote the group  $G$  equipped with the Bohr topology  $\mathcal{T}^b$ .

**Example 1.** In particular, the Bohr topology  $\mathcal{T}_\varepsilon^b$  of the real line  $\mathbb{R}$  is the smallest topology in which every character

$$\chi_t(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}, \quad \chi_t : x \mapsto e^{2\pi itx}$$

remains continuous. It is known that the topological group  $\mathbb{R}^b := (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\varepsilon^b)$  is not metrizable, and therefore is not topologically isomorphic to the real line  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\varepsilon)$ . Moreover,  $\mathbb{R}^b$  is not monothetic. Indeed, for every  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , the continuous character  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $\chi : x \mapsto e^{2\pi ix/a}$ , maps the cyclic subgroup  $\mathbb{Z}a$  onto the singleton  $\{1\}$ , which implies that  $\mathbb{Z}a$  is not dense in  $\mathbb{R}^b$  for all  $a \in \mathbb{R}^b$ .

This example motivates the following problems.

**Problem 1.** *Find a characterization of the topological group  $\mathbb{R}^b$  (among one-parametric topological groups).*

**Problem 2.** *Find a characterization of monothetic topological groups among non-metrizable one-parametric topological groups.*

We recall that the *weight*  $w(X)$  of a topological space  $X$  is the smallest cardinality of a base of the topology of the space  $X$ . It can be shown that a one-parametric (more generally, separable) topological group is metrizable if and only if it has countable weight. It is known (and easy to see) that the Bohr topology  $\mathcal{T}_\varepsilon^b$  on the real line  $\mathbb{R}$  has weight  $\mathfrak{c}$ .

**Problem 3.** *Is every non-metrizable one-parametric topological group  $G$  of weight  $w(G) < \mathfrak{c}$  monothetic?*

We shall give a partial answer to Problem 3 in Section 5. Problems 1 and 2 will be answered in Section 7, following some preliminary work developed in the Section 6.

## 5 THE MONOTHEMICITY OF ONE-PARAMETRIC TOPOLOGICAL GROUPS OF SMALL WEIGHT

In this section we shall provide a partial answer to Problem 3. We recall that a subset  $A$  of a topological space  $X$  is *meager* if  $A$  is the countable union of nowhere dense sets in  $X$ . Let  $\mathcal{M}$  be the family of all meager subsets of the real line. The Baire Theorem ensures that  $\mathbb{R} \notin \mathcal{M}$ . Let  $\text{cov}(\mathcal{M})$  be the smallest cardinality of a subfamily  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$  such that  $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}$ . The Baire Theorem ensures that  $\text{cov}(\mathcal{M}) \geq \omega_1$ , where  $\omega_1$  is the smallest uncountable cardinal. Since  $\mathbb{R}$  is the union of continuum many singletons,  $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{c}$ . The exact position of the cardinal  $\text{cov}(\mathcal{M})$  in the interval  $[\omega_1, \mathfrak{c}]$  is not determined by the ZFC axioms. Martin's Axiom implies  $\text{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ , but the strict inequality  $\text{cov}(\mathcal{M}) < \mathfrak{c}$  is also consistent, see [3], [4], [7].

**Theorem 2.** *Every non-metrizable one-parametric topological group  $G$  of weight  $w(G) < \text{cov}(\mathcal{M})$  is monothetic.*

*Proof.* Let  $G$  be a non-metrizable one-parametric topological group of weight  $w(G) < \text{cov}(\mathcal{M})$  and  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  be its parametrization. By the definition of the cardinal  $\kappa := w(G)$ , there exists a base  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$  of the topology of the group  $G$ , consisting of nonempty open sets in  $G$ . Since the topological group  $G$  is not metrizable, the homomorphism  $\varphi$  is not a topological isomorphism. Applying Proposition 2, we conclude that for every  $\alpha \in \kappa$ , the set  $\varphi^{-1}[B_\alpha]$  is unbounded in the real line. Repeating the argument of the proof of Lemma 1, we can prove that for every  $\alpha \in \kappa$ , the set  $D_\alpha := \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{Z} \cdot x \cap \varphi^{-1}[B_\alpha] \neq \emptyset\}$  is open and dense in  $\mathbb{R}$ . Then its complement  $\mathbb{R} \setminus D_\alpha$  is closed and nowhere dense in  $\mathbb{R}$ . Since  $\kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$ , the family  $\{\mathbb{R} \setminus D_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$  does not cover the real line. Then there exists a real number  $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha \in \kappa} (\mathbb{R} \setminus D_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \kappa} D_\alpha$ . For this real number  $x$  and its image  $y := \varphi(x) \in G$ , we obtain that  $\mathbb{Z} \cdot x \cap \varphi^{-1}[B_\alpha] \neq \emptyset$  and hence  $\mathbb{Z} \cdot y \cap B_\alpha$  for all  $\alpha$ . Since  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$  is a base of the topology of the group  $G$ , the cyclic subgroup  $\mathbb{Z} \cdot y$  is dense in the topological group  $G$ , witnessing that  $G$  is monothetic.  $\square$

Theorems 1 and 2 imply another characterization of the real line in the class of one-parametric topological groups.

**Theorem 3.** *A topological group  $G$  is topologically isomorphic to the real line if and only if  $G$  is a non-monothetic one-parametric topological group of weight  $w(G) < \text{cov}(\mathcal{M})$ .*

**Problem 4.** *Can the cardinal  $\text{cov}(\mathcal{M})$  in Theorems 2 and 3 be replaced by the cardinal  $\mathfrak{c}$ ?*

6 THE  $\mathbb{N}$ -SCALED TOPOLOGICAL GROUPS

In this section we define and study  $\mathbb{N}$ -scaled topological groups.

**Definition 8.** A topological group  $(G, +, \mathcal{T})$  is called  *$\mathbb{N}$ -scaled* if for every  $n \in \mathbb{N}$ , the map  $G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto n \cdot x$ , is open.

**Example 2.** *The topological groups  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^b, \mathbb{T}$  are  $\mathbb{N}$ -scaled.*

There exists a simple construction (called  $\mathbb{N}$ -scaling) transforming any abelian topological group into an  $\mathbb{N}$ -scaled topological group. To describe this construction, we will use the following characterization of an open base at identity, which can be found in [1, 1.3.12].

**Theorem 4.** *Let  $G$  be a topological group. A family  $\mathcal{U}$  of open subsets of  $G$  is a base of the topology of  $G$  at the identity  $0 \in G$  if and only if the following conditions hold:*

- (1) for every  $U \in \mathcal{U}$ , there exists  $V \in \mathcal{U}$  such that  $V + V \subseteq U$ ;
- (2) for every  $U \in \mathcal{U}$ , there exists  $V \in \mathcal{U}$  such that  $-V \subseteq U$ ;
- (3) for every  $U \in \mathcal{U}$  and  $x \in U$ , there exists  $V \in \mathcal{U}$  such that  $V + x \subseteq U$ ;
- (4) for every  $U \in \mathcal{U}$  and  $x \in G$ , there exists  $V \in \mathcal{U}$  such that  $x + V - x \subseteq U$ ;
- (5) for every  $U, V \in \mathcal{U}$ , there exists  $W \in \mathcal{U}$  such that  $W \subseteq U \cap V$ ;
- (6)  $\{0\} = \bigcap \mathcal{U}$ .

Moreover, if  $\mathcal{U}$  is a family of subsets of a group  $G$  that satisfies the conditions (1)–(6), then the family  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{g + U : g \in G, U \in \mathcal{U}\}$  is a base for a  $T_1$  group topology on  $G$ .

We recall that for a topological group  $(G, +, 0, \mathcal{T})$ , we denote by  $\mathcal{T}_0$  the family of all open neighborhoods of the identity element 0 of the group  $G$ .

**Proposition 4.** *Let  $(G, +, 0, \mathcal{T})$  be a topological abelian group. The family  $\{g + nU : g \in G, n \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{T}_0\}$  is a base for a Hausdorff group topology on  $G$ .*

*Proof.* It suffices to prove that the family  $\mathcal{U} = \{nU : n \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{T}_0\}$  satisfies the conditions from Theorem 4, given that  $\mathcal{T}_0$  already satisfies them by the same theorem. We verify the conditions in order:

- (1) Take arbitrary  $nU \in \mathcal{U}$ . Since  $U \in \mathcal{T}_0$ , there exists  $V \in \mathcal{T}_0$  with  $V + V \subseteq U$ . Hence for  $nV \in \mathcal{U}$  we have  $nV + nV \subseteq nU$  (by the commutativity of the group operation);
- (2) Take arbitrary  $nU \in \mathcal{U}$ . Since  $U \in \mathcal{T}_0$ , there exists  $V \in \mathcal{T}_0$  with  $-V \subseteq U$ . Hence for  $nV \in \mathcal{U}$  we have  $-nV \subseteq nU$ .
- (3) Take arbitrary  $nU \in \mathcal{U}$  and  $x \in nU$ . Then there exists  $y \in U$  such that  $ny = x$ . Since  $U \in \mathcal{T}_0$  and  $y \in U$ , there exists  $V \in \mathcal{T}_0$  with  $V + y \subseteq U$ . Hence for  $nV \in \mathcal{U}$  we have  $nV + ny = nV + x \subseteq nU$ .
- (4) Take arbitrary  $nU \in \mathcal{U}$  and  $x \in G$ . Since  $G$  is abelian we get  $x + nU - x = nU \subseteq nU$ .
- (5) Take arbitrary  $nU, mV \in \mathcal{U}$ . Since  $U, V \in \mathcal{T}_0$  and the map  $\mu_n : G \rightarrow G, \mu_n : x \mapsto nx$ , is continuous for all  $n \in \mathbb{N}$ , we can find  $W_1, W_2 \in \mathcal{T}_0$  such that  $mW_1 \subseteq U$  and  $nW_2 \subseteq V$ . Put  $W := W_1 \cap W_2$ . Then  $nmW \subseteq nU$  and  $nmW \subseteq mV$ . Hence for  $nmW \in \mathcal{U}$  we have  $nmW \subseteq nU \cap mV$ .
- (6)  $\{0\} \subseteq \bigcap \mathcal{U} \subseteq \bigcap \mathcal{T}_0 = \{0\}$ .

□

**Definition 9.** Let  $(G, +, 0, \mathcal{T})$  be a topological abelian group. The group topology  $\mathcal{T}'$  generated by the base  $\{g + nU : g \in G, n \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{T}_0\}$  is called the  $\mathbb{N}$ -scaling of the topology  $\mathcal{T}$ . By  $G_s$  we denote the group  $G$  equipped with the topology  $\mathcal{T}'$ .

The definition of the  $\mathbb{N}$ -scaling topology  $\mathcal{T}'$  implies the following useful fact.

**Proposition 5.** *Let  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  be two group topologies on an abelian group  $G$ . If  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ , then  $\mathcal{T}'_1 \subseteq \mathcal{T}'_2$ .*

The associativity of the group operation implies that  $n(mx) = (nm)x$  for all  $n, m \in \mathbb{Z}$  and all elements  $x$  of a group. This fact implies that the operation of  $\mathbb{Z}$ -scaling is idempotent and produces an  $\mathbb{N}$ -scaled group topology.

**Proposition 6.** *For every abelian topological group  $(G, \mathcal{T})$ , its  $\mathbb{N}$ -scaling  $G_s := (G, \mathcal{T}')$  is an  $\mathbb{N}$ -scaled topological group.*

The following proposition shows that certain properties of divisible topological groups are preserved by  $\mathbb{N}$ -scaling. Recall that a group  $G$  is *divisible* if for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $g \in G$  there exists an element  $x \in G$  such that  $n \cdot x = g$ .

**Proposition 7.** *If a divisible topological abelian group  $G$  is monothetic (or totally bounded), then so is its  $\mathbb{N}$ -scaling  $G_s$ .*

*Proof.* Let  $(G, +, 0, \mathcal{T})$  be a divisible topological abelian group and let  $G_s := (G, +, 0, \mathcal{T}')$  be its  $\mathbb{N}$ -scaling.

1. Assuming that  $(G, \mathcal{T})$  is monothetic, fix any topological generator  $a$  of  $G$ . We claim that  $a \in G$  remains a topological generator for the topological group  $G_s$ . It suffices to show that  $\mathbb{Z} \cdot a \cap (g + nU) \neq \emptyset$  for all  $g \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$  and  $U \in \mathcal{T}_0$ . Since  $G$  is divisible, there exists  $g' \in G$  such that  $g = ng'$ . Then  $g + nU = n(g' + U)$ , since  $G$  is abelian. As  $g' + U \in \mathcal{T}$ , there exists  $m \in \mathbb{N}$  such that  $ma \in g' + U$ . Hence,  $nma \in \mathbb{Z} \cdot a \cap (g + nU)$ , which shows that  $a$  is indeed a topological generator of the topological group  $G_s$ .

2. Assume that  $G$  is totally bounded. Given any nonempty open set  $W \in \mathcal{T}'$ , we need to find a finite set  $F \subseteq G$  such that  $F + W = G$ . By the definition of the  $\mathbb{N}$ -scaled topology  $\mathcal{T}'$ , there exist  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in G$  and  $U \in \mathcal{T}_0$  such that  $x + nU \subseteq W$ . Since the group  $G$  is divisible, there exists an element  $x' \in G$  such that  $x = nx'$ . Since the topological group  $(G, \mathcal{T})$  is totally bounded, there exists a finite set  $F' \subseteq G$  such that  $G = F' + (x' + U)$ . Consider the finite set  $F := nF'$  in  $G$ . The divisibility and commutativity of the group  $G$  ensure that

$$G = nG = n(F' + x' + U) = nF' + nx' + nU = F + x + nU \subseteq F + W.$$

Hence,  $F = nF'$  is a required finite subset of  $G$ , witnessing that the topological group  $G_s$  is totally bounded.  $\square$

## 7 A CHARACTERIZATION OF MONOTHETIC ONE-PARAMETRIC TOPOLOGICAL GROUPS

By Theorem 1, a metrizable one-parametric group is monothetic if and only if it is not isomorphic to the real line. In this section we characterize non-metrizable monothetic one-parametric groups. First we shall characterize monothetic group topologies on the real line. The standard Euclidean topology on the real line is denoted by  $\mathcal{T}_\varepsilon$ ; by  $\mathcal{T}_\varepsilon^b$  we denote the Bohr topology on  $\mathbb{R}$ .

**Theorem 5.** *A group topology  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon$  on  $\mathbb{R}$  is monothetic if and only if its  $\mathbb{N}$ -scaling  $\mathcal{T}'$  does not contain the Bohr topology  $\mathcal{T}_\varepsilon^b$  of  $\mathbb{R}$ .*

*Proof.* We start by proving the necessity. Suppose  $\mathcal{T}$  is monothetic. Then  $\mathcal{T}'$  is also monothetic by Proposition 7. By Example 1, the Bohr topology  $\mathcal{T}_\varepsilon^b$  on  $\mathbb{R}$  is not monothetic, which implies  $\mathcal{T}_\varepsilon^b \not\subseteq \mathcal{T}'$ .

Now we prove the sufficiency. Suppose  $\mathcal{T}_\varepsilon^b \not\subseteq \mathcal{T}'$ . By the definition of the Bohr topology, this means there exists  $a \in \mathbb{R}$  such that the character  $\chi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $\chi_a : x \mapsto e^{2\pi i ax}$ , is not continuous

with respect to  $\mathcal{T}'$ . Clearly,  $a \neq 0$  since the trivial character is continuous for any topology on  $\mathbb{R}$ . We claim that  $1/a$  is a topological generator of the topological group  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ , meaning that the cyclic subgroup  $\mathbb{Z}/a := \{n/a : n \in \mathbb{Z}\}$  is  $\mathcal{T}$ -dense in  $\mathbb{R}$ . In the opposite case, the closure  $H := \overline{\mathbb{Z}/a}$  of  $\mathbb{Z}/a$  in  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  is a  $\mathcal{T}$ -closed proper subgroup of the real line. It follows from  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}'_\varepsilon = \mathcal{T}_\varepsilon$  that  $H$  is a closed proper subgroup in the topological groups  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$  and  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\varepsilon)$ , which implies that the group  $H$  is cyclic. Then the quotient group  $\mathbb{R}/H$  is isomorphic to the circle group  $\mathbb{T}$  via some topological group isomorphism  $h : \mathbb{R}/H \rightarrow \mathbb{T}$ . Consider the composition  $p = h \circ q$  of  $h$  with the quotient homomorphism  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/H$ . The compactness of the group  $\mathbb{R}/H$  implies that the quotient topologies on the group  $\mathbb{R}/H$ , generated by the topologies  $\mathcal{T}'$  and  $\mathcal{T}_\varepsilon$  coincide. Then  $p = h \circ q$  is a  $\mathcal{T}'$ -continuous character on  $\mathbb{R}$ . Since  $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon$ , the character  $p$  is  $\mathcal{T}_\varepsilon$ -continuous and hence there exists  $b \in \mathbb{R}$  such that  $p(x) = \chi_b(x) = e^{2\pi i b x}$  for all  $x \in \mathbb{R}$ . Observe that  $p[H] = \{1\}$ , which implies  $e^{2\pi i \frac{b}{a}} = 1$ . Hence  $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$ , and therefore  $b = na$  for some  $n \in \mathbb{Z}$ . Then  $p(x) = e^{2\pi i n a x}$ . Since the topological group  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$  is  $\mathbb{N}$ -scaled, the map  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto n x$ , is open in the topology  $\mathcal{T}'$  in  $\mathbb{R}$ , and hence the map  $d_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d_n : x \mapsto x/n$ , is continuous with respect to  $\mathcal{T}'$ . But then the character  $\chi_a = p \circ d_n$  is  $\mathcal{T}'$ -continuous, which contradicts the choice of  $a$ . This contradiction shows that the cyclic group  $\mathbb{Z}/a$  is  $\mathcal{T}$ -dense in  $\mathbb{R}$ , witnessing that topological group  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  is monothetic.  $\square$

In the following part we aim to reformulate Theorem 5 for one-parametric topological groups, without referring to the real line. This will be done with the help of the Borel-Bohr topology.

**Definition 10.** A function  $f : X \rightarrow Y$  between topological spaces is called

- Borel if for every open set  $U \subseteq Y$  its preimage  $f^{-1}[U]$  is a Borel subset of  $X$ ;
- $F_\sigma$ -measurable if for every open set  $U \subseteq Y$  its preimage  $f^{-1}[U]$  is a set of type  $F_\sigma$  in  $X$ .

We recall that a subset  $A$  of a topological space  $X$  is of type  $F_\sigma$  if  $A$  is the countable union of closed sets in  $X$ . A subset  $B$  of a topological space  $X$  is Borel if it belongs to the smallest  $\sigma$ -algebra that contains all open subsets of  $X$ .

**Proposition 8.** Let  $G$  be a one-parametric topological group and  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  be a parametrization of  $G$ . For a homomorphism  $\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$ , the following conditions are equivalent:

- (1) the homomorphism  $\chi \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  is continuous;
- (2) the homomorphism  $\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$  is  $F_\sigma$ -measurable;
- (3) the homomorphism  $\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$  is Borel;
- (4) the homomorphism  $\chi \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  is Borel.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Assume that the homomorphism  $h := \chi \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  is continuous. Then for every open set  $U \subseteq \mathbb{T}$ , the preimage  $h^{-1}[U]$  is open and hence  $\sigma$ -compact in the real line. Since continuous maps preserve  $\sigma$ -compact sets, the image  $\varphi[h^{-1}[U]] = \chi^{-1}[U]$  is a  $\sigma$ -compact subset of the topological group  $G$ . Since  $G$  is Hausdorff, the  $\sigma$ -compact set  $\chi^{-1}[U]$  is of type  $F_\sigma$  in  $G$ , witnessing that the homomorphism  $\chi$  is  $F_\sigma$ -measurable.

The implication (2)  $\Rightarrow$  (3) is trivial (because  $F_\sigma$ -subsets of topological spaces are Borel); the implication (3)  $\Rightarrow$  (4) follows immediately from the well-known fact that the composition of two Borel maps is Borel; and the implication (4)  $\Rightarrow$  (1) follows from the continuity of Borel homomorphisms between Polish groups, see [5, 9.10+11.5].  $\square$

**Definition 11.** The *Borel-Bohr topology* on a topological abelian group  $(G, \mathcal{T})$  is the smallest topology  $\mathcal{T}^{\natural}$  on  $G$  in which all Borel homomorphisms from  $(G, \mathcal{T})$  to the circle group  $\mathbb{T}$  are continuous. The group  $G$  endowed with the Borel-Bohr topology  $\mathcal{T}^{\natural}$  will be denoted by  $G^{\natural}$ .

Since every continuous homomorphism is Borel, the Borel-Bohr topology of a topological abelian group contains the Bohr topology of the group. The converse is true for the real line (because every Borel homomorphism to the circle group on the real line is continuous). This implies that the Bohr-Borel topology  $\mathcal{T}_{\varepsilon}^{\natural}$  on the real line coincides with the Bohr topology  $\mathcal{T}_{\varepsilon}^{\flat}$  on  $\mathbb{R}$ .

Proposition 8 implies the following corollary which shows that the Bohr topology on the real line can be recovered from the Borel-Bohr topology of any one-parametric topological group with injective parametrization.

**Corollary 2.** *Let  $G$  be a one-parametric topological group with an injective parametrization  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ . Then  $\varphi : \mathbb{R}^{\flat} \rightarrow G^{\natural}$  is a topological group isomorphism.*

The following theorem provides the promised characterization of monothetic topological groups in the class of non-metrizable one-parametric topological groups.

**Theorem 6.** *A non-metrizable one-parametric topological group  $(G, \mathcal{T})$  is monothetic if and only if the  $\mathbb{N}$ -scaling of its topology does not contain the Borel-Bohr topology  $\mathcal{T}^{\natural}$  of  $(G, \mathcal{T})$ .*

*Proof.* Let  $(G, +, 0, \mathcal{T})$  be a non-metrizable one-parametric topological group and let  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  be its parametrization. Assuming that  $\varphi$  is not injective, we conclude that its kernel  $\ker \varphi = \varphi^{-1}(1)$  is a non-trivial closed subgroup of the real line, which implies that the quotient group  $\mathbb{R}/\ker \varphi$  is compact and metrizable and so is the group  $G$ , which contradicts our assumption. This contradiction shows that the homomorphism  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  is injective. Consider the group topology  $\mathcal{T}_G := \{\varphi^{-1}[U] : U \in \mathcal{T}\}$  on  $\mathbb{R}$  induced by the continuous bijective homomorphism  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  and observe that  $\varphi$  is a topological isomorphism of the topological groups  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_G)$  and  $(G, \mathcal{T})$ . By Proposition 8, a homomorphism  $\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$  is Borel if and only if the composition  $\chi \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  is continuous. This implies that a homomorphism  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  is  $\mathcal{T}_G$ -Borel if and only if it is  $\mathcal{T}_{\varepsilon}$ -continuous. Now the definitions of the Bohr and Borel-Bohr topologies ensure that the Bohr topology  $\mathcal{T}_{\varepsilon}^{\flat}$  on the real line  $\mathbb{R}$  coincides with the Borel-Bohr topology  $\mathcal{T}_G^{\natural}$  on  $\mathbb{R}$ .

Now we are ready to prove the equivalence of the conditions in Theorem 6. If the topological group  $(G, \mathcal{T})$  is monothetic, then so is its isomorphic copy  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_G)$ . By Theorem 5, the  $\mathbb{N}$ -scaling  $\mathcal{T}'_G$  of the topology  $\mathcal{T}_G$  does not contain the Bohr topology  $\mathcal{T}_{\varepsilon}^{\flat}$ . Since  $\mathcal{T}_{\varepsilon}^{\flat} = \mathcal{T}_G^{\natural}$ , the topology  $\mathcal{T}'_G$  does not contain the Borel-Bohr topology  $\mathcal{T}_G^{\natural}$  of the topological group  $(G, \mathcal{T})$ . Since the topological groups  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_G)$  and  $(G, \mathcal{T})$  are isomorphic, the  $\mathbb{N}$ -scaling  $\mathcal{T}'$  of the topology  $\mathcal{T}$  does not contain the Borel-Bohr topology  $\mathcal{T}^{\natural}$  of the topological group  $(G, \mathcal{T})$ .

Now assume conversely that the  $\mathbb{N}$ -scaling  $\mathcal{T}'$  of the topology  $\mathcal{T}$  does not contain the Borel-Bohr topology  $\mathcal{T}^{\natural}$  of the abelian topological group  $(G, \mathcal{T})$ . Since the topological groups  $(G, \mathcal{T})$  and  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_G)$  are isomorphic, the  $\mathbb{N}$ -scaling  $\mathcal{T}'_G$  of the topology  $\mathcal{T}_G$  does not contain the Borel-Bohr topology  $\mathcal{T}_G^{\natural}$  of the topological group  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_G)$ . Taking into account that  $\mathcal{T}_G^{\natural} = \mathcal{T}_{\varepsilon}^{\flat}$ , we conclude that the topology  $\mathcal{T}'_G$  does not contain the Bohr topology  $\mathcal{T}_{\varepsilon}^{\flat}$  on the real line  $\mathbb{R}$ . Applying Theorem 5, we conclude that the topological group  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_G)$  is monothetic and so is its isomorphic copy  $(G, \mathcal{T})$ .  $\square$

Theorem 6 answers Problem 2. Now we provide an answer to Problem 1, presenting a characterization of the topological group  $\mathbb{R}^{\flat}$ .

**Theorem 7.** *A topological group is isomorphic to the real line endowed with the Bohr topology if and only if it is one-parametric, totally bounded,  $\mathbb{N}$ -scaled and not monothetic.*

*Proof.* The “only if” part follows from the known properties of the Bohr topology on the real line: it is totally bounded,  $\mathbb{N}$ -scaled and not monothetic.

To prove the “if” part, assume that a topological group  $(G, +, 0, \mathcal{T})$  is one-parametric, totally bounded,  $\mathbb{N}$ -scaled, and not monothetic. Let  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  be a parametrization of  $G$ . Consider the closed subgroup  $\ker \varphi$  of  $\mathbb{R}$ . Since closed subgroups of  $\mathbb{R}$  are exactly  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R}$ , and  $a\mathbb{Z}$  for  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ , we examine these three cases.

If  $\ker \varphi = a\mathbb{Z}$ , then  $G \cong \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$ , and therefore  $G$  is monothetic, a contradiction. If  $\ker \varphi = \mathbb{R}$ , then  $G = \{0\}$ , and therefore  $0 \in G$  is a topological generator of  $G$ , again contradicting the assumption on  $G$ . Thus we conclude that  $\varphi$  is injective.

The topological group  $(G, \mathcal{T})$  is totally bounded and hence it is not isomorphic to the real line. Taking into account that  $(G, \mathcal{T})$  is not monothetic, we can apply Theorem 1 and conclude that the one-parametric group  $(G, \mathcal{T})$  is not metrizable. Taking into account that  $(G, \mathcal{T})$  is not monothetic, we can apply Theorem 6 and conclude that the  $\mathbb{N}$ -scaling  $\mathcal{T}'$  of the topology  $\mathcal{T}$  contains the Borel-Bohr topology  $\mathcal{T}^\natural$  of  $(G, \mathcal{T})$ . Since the topological group  $(G, \mathcal{T}')$  is  $\mathbb{N}$ -scaled,  $\mathcal{T}^\natural \subseteq \mathcal{T}' = \mathcal{T}$ . Consider the topology  $\mathcal{T}_G := \{\varphi^{-1}[U] : U \in \mathcal{T}\}$  on the real line and observe that  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  is a topological isomorphism of the topological groups  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_G)$  and  $(G, \mathcal{T})$ . The total boundedness of the topology  $\mathcal{T}$  implies the total boundedness of the topology  $\mathcal{T}_G$ . The continuity of the homomorphism  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  implies  $\mathcal{T}_G \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon$ . By [1, p. 634], the totally bounded topology  $\mathcal{T}_G$  is contained in the Bohr topology  $\mathcal{T}_\varepsilon^\flat$ . This means that the map  $\varphi : \mathbb{R}^\flat \rightarrow G$  is continuous. On the other hand, Corollary 2 ensures that  $\varphi : \mathbb{R}^\flat \rightarrow G^\natural$  is a topological isomorphism, which implies that the identity map  $G^\natural \rightarrow G$  is continuous and hence  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^\natural$ . Taking into account that  $\mathcal{T}^\natural \subseteq \mathcal{T}$ , we conclude that  $\mathcal{T}^\natural = \mathcal{T}$ . Then  $\varphi : \mathbb{R}^\flat \rightarrow G$  is a topological isomorphism of the topological groups  $\mathbb{R}^\flat = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\varepsilon^\flat)$  and  $(G, \mathcal{T})$ .  $\square$

#### REFERENCES

- [1] Arhangel'skii A., Tkachenko M., *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press, Paris, 2008.
- [2] Banach T., Mazurenko O., *Every locally compact strictly convex metric group is abelian*, 2025, preprint (<https://arxiv.org/abs/2510.10755>).
- [3] Bartoszyński T., Judah H., *Set Theory: On the Structure of the Real Line*, A.K. Peters, 1995.
- [4] Blass A., *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, Handbook of set theory. 2010, **1**, **2**, **3**, 395–489, Springer, Dordrecht.
- [5] Kechris A., *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, 1995.
- [6] Morris S., *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*, Cambridge University Press, New York, 1977.
- [7] Vaughan J., *Small uncountable cardinals and topology*, Open problems in topology, 195–218, North-Holland, Amsterdam, 1990.

*Received 27.11.2025*

---

Банакх Т., Макарова К., Мазуренко О. *Монотетичність в однопараметричних топологічних групах* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №2. — С. 125–136.

Охарактеризовано монотетичні топологічні групи в класі однопараметричних топологічних груп. Зокрема, доведено, що топологічна група ваги  $< \text{cov}(\mathcal{M})$  є монотетичною тоді і лише тоді, коли вона ізоморфна дійсній прямій. Звідси випливає, що дійсна пряма є єдиною немонотетичною метризовною однопараметричною топологічною групою. Також доведено, що дійсна пряма з топологією Бора є єдиною немонотетичною цілком обмеженою  $\mathbb{N}$ -масштабованою топологічною групою.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.14>

TARAS ANDRYTSULIAK, SERGIY MARTYNIUK

## GENERALIZATION OF THE ELO SYSTEM FOR INTERACTIONS BETWEEN MANY AGENTS

The paper proposes a generalization of the classical Elo rating system for multi-player environments and employs optimization techniques to identify the model's optimal configuration. The proposed approach represents multi-agent interactions as a set of pairwise comparisons and formulates the rating estimation problem as the minimization of a logistic loss function. This formulation enables the derivation of analytical expressions for rating updates based on gradients used to search for optimal hyperparameters, resulting in smoother and more stable learning dynamics compared to the classical Elo system.

An additional adaptive update coefficient is introduced, which depends on the number of interactions and the number of agents involved in each event. Such normalization helps prevent excessive rating drift in large datasets and mitigates overly dampened updates when the amount of data or the number of agents is small. The paper also examines principles for initializing the ratings of new agents and for dynamically adjusting the learning rate based on the accumulated information for each agent, allowing the system to converge more rapidly to accurate rating levels and improving overall stability and interpretability.

Gradient descent is employed to search for the optimal hyperparameter values by minimizing the loss function and automatically selecting appropriate parameter settings. This enables the system to produce more accurate rating estimates and, consequently, achieve better predictions of future interactions.

The proposed system easily adapts to environments with multi-party interactions while remaining fully compatible with binary-comparison scenarios. When necessary, it can be extended with additional hyperparameters to account for the specifics of a given domain.

The model illustrates the advantages of combining classical rating methodology with modern optimization techniques and is applicable to sports, gaming, and educational systems where accuracy, adaptability, and interpretability are essential.

*Key words and phrases:* gradient descent, hyperparameter, elo ratings, probabilistic forecasting, statistical modelling, time series, machine learning.

---

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine  
e-mail: [s.martyniuk@chnu.edu.ua](mailto:s.martyniuk@chnu.edu.ua) (*Sergiy Martyniuk*), [andrytsuliak.taras@chnu.edu.ua](mailto:andrytsuliak.taras@chnu.edu.ua) (*Taras Andrytsuliak*)

## INTRODUCTION

In modern gaming, sports, and educational environments, there is a growing need for fair, adaptive, and interpretable methods of ranking and evaluating interactions between agents (players) within a closed environment. One of the most popular models, known for its simplicity, transparency, and high effectiveness, is the Elo system, proposed by Arpad Elo in the mid-20th century[4]. Although its original application was related to chess, today the Elo system is successfully used in a wide variety of fields, from other sports (tennis[2], football[1, 7], board games) to online games, machine learning and even the evaluation of text or translation quality.

The essence of the classical Elo system approach lies in assigning each agent a numerical value as a rating that reflects their probability of defeating an opponent. After each interaction, the rating is adjusted based on the actual and expected outcomes of the interaction:

$$r_{i(k+1)} = r_{ik} + K(S_{ik} - P_{ik})$$

where  $r_{i(k+1)}$  is the agent rating  $i$  after the  $k$ -th interaction,  $r_{ik}$  is the agent rating  $i$  before the  $k$ -th interaction,  $S_{ik}$  is the actual outcome of the interaction (for example, 1 for a win, 0 for a loss, 0.5 for a draw),  $P_{ik}$  is the expected outcome of the interaction, and  $K$  is the adjustment coefficient that determines the speed of rating updates.

At the same time, the expected outcome of the  $k$ -th interaction between agents  $i$  and  $j$ , with corresponding pre-interaction ratings  $r_{ik}$  and  $r_{jk}$ , is calculated as:

$$P_{ik} = \frac{1}{1 + 10^{\left(\frac{r_{jk} - r_{ik}}{400}\right)}}$$

Consequently, if a higher-rated agent defeats a lower-rated one, their rating increases only slightly, while in the case of a loss, it decreases significantly. This approach allows the ratings to quickly adapt to the underlying skill level of the agents and is also intuitive for the users.

Among the key advantages of the classical Elo system are its computational simplicity, the absence of complex hyperparameters, and the lack of a need for historical data for each agent (the rating is formed solely based on the previous value and the most recent interaction outcome). However, the vast majority of specific applications of the Elo system require introducing additional parameters and modifying the classical version. These modifications include:

- Multifactor models that account for additional interaction characteristics such as home advantage in football or court surface type in tennis.
- Models with sub-environments that make it possible to capture relationships between different environments with identical or distinct hierarchies, such as different leagues.
- Elo-based models for simultaneous interaction among many agents. For example, in multi-player online games, dozens of participants may be involved, and it is necessary to determine rating changes for each of them based on the collective outcome.
- Bayesian approaches, which treat the rating not as a point estimate but as a probability distribution, allowing uncertainty to be taken into account.

Related systems inspired by Elo are also widely used, such as Glicko[6], which additionally incorporates the variance (volatility) of a agent's skill, allowing faster adaptation to changes in

performance. A Bradley-Terry model[3], which originated earlier, has a similar logic to estimate the “probability of victory”, but formally expresses it through logistic or normal distributions and is typically used in the context of statistical analysis of pairwise comparisons, as Weng and Lin did[11].

At the same time, there exist variations of the Elo system designed for comparisons among many agents. In particular, Powell[9] considers the interaction of  $N$  agents as a set of  $N - 1$  separate sub-interactions, where after each sub-interaction the agent with the worst result is eliminated (endurance model). An alternative variant is one in which the strongest agent is eliminated after sub-interaction, and the next sub-interaction is then considered without them (speed model). The probability of obtaining the worst result in the first sub-interaction is therefore:

$$P_{ik1 \text{ eliminated}} = \frac{e^{-r_{ik}}}{\sum_{x \in N} e^{-r_{xk}}}$$

Let agent  $j$  take the last place and be eliminated. Then the probability of being the worst in the next interaction among the remaining agents is:

$$P_{ik2 \text{ eliminated}} = \frac{e^{-r_{ik}}}{\sum_{x \in N \setminus \{j\}} e^{-r_{xk}}}$$

And so on for each subsequent sub-interaction until only the winner remains. The rating after the interaction is updated as follows:

$$r_{i(k+1)} = r_{ik} + \sum_{t=1}^{N-1} K B_{ikt} (S_{ikt} - P_{ikt})$$

where  $B_{ikt}$  is a boolean indicator showing whether agent  $i$  participated in the sub-interaction  $t$  of the interaction  $k$ .

This approach works well for modeling interaction outcomes, as shown by Powell, but it may slightly overestimate ratings for stronger agents, since agents who rank lower will participate in fewer sub-interactions than those who rank higher.

The Elo system was originally constructed to model and forecast outcomes of strictly pairwise comparisons, but subsequent research has explored ways to generalize it to multi-agent interactions such as group competitions and races. For example, an approach proposed by Moore et al.[8], treats an interaction with  $n$  agents as an equivalent collection of  $\frac{n(n-1)}{2}$  independent binary duels, where each duel is awarded to the competitor who finishes ahead of the other. Powell [9] argues that this formulation introduces a systematic upward bias in the resulting rating estimates, particularly in scenarios involving a large number of interactions or a high density of agents per interaction. Although Powell’s observation is well-founded, the underlying issue can be mitigated through appropriate methodological adjustments, and addressing this limitation constitutes one of the objectives of this study.

Almost all of the methods mentioned rely on certain fixed hyperparameters (for example, the learning coefficient in the classical Elo system), which are often chosen manually or based on empirical considerations. This creates a problem as an incorrect choice of hyperparameters may lead to an overly inert or an overly unstable rating system, distorting the underlying skill levels of the agents. This problem becomes especially acute in complex scenarios with many agents, where interactions are significantly more complex than in ordinary pairwise matches.

To address this issue in machine learning problems, scientific and practical studies propose various approaches to the automatic tuning of hyperparameters. Among these methods are optimization-based techniques, including gradient descent[5]. As shown for football games [1], gradient-based optimization can effectively tune the hyperparameters of an Elo-style rating system, allowing one to find the most suitable hyperparameter configuration by optimizing the logistic loss function[10].

In the context of the Elo system, gradient descent allows not only the automatic selection of an optimal update coefficient  $K$ , but also the calibration of other hyperparameters such as the shape of the win-probability function, or even the initial agent ratings if sufficient historical data are available. Applying gradient descent to optimize Elo parameters on historical data makes it possible to create a more accurate and stable rating system adapted to a specific game or league.

Thus, combining the Elo system with modern optimization techniques, such as gradient descent, creates an opportunity to develop a generalized rating framework that preserves the conceptual clarity and efficiency of classical pairwise Elo while extending it to settings involving multi-agent interactions. The goal of this study is to construct such a system: one that not only supports pairwise comparisons but also correctly models outcomes of interactions among multiple agents, addresses structural biases that arise when pairwise simplifications are applied to multi-agent scenarios, and leverages gradient-based optimization to identify an appropriate set of hyperparameters from historical interactions data.

This work aims to provide a principled, scalable, and data-driven generalization of Elo suitable for high-dimensional competitive environments.

## 1 METHODOLOGY

### 1.1 General principles

In our approach for evaluating agents in multi-agent interactions, each interaction is decomposed into a set of pairwise sub-interactions. Each pair represents a separate evaluation unit in which one agent ranks higher or lower relative to the other. To train the rating system based on these sub-interactions, we formulate the problem as an optimization problem.

Specifically, we aim to find agent ratings that maximize the agreement between the expected and actual outcomes of the sub-interactions. For this purpose, the logistic loss function (log-loss) was used as the loss function, which is a standard choice for binary classification problems, where the outcome variable takes values 0, 0.5, or 1 (win, draw, or loss in the pair).

For each sub-interaction between agents  $i$  and  $j$  in interaction  $k$  defined:

$S_{ijk} \in \{0, 0.5, 1\}$  - actual outcome of the sub-interaction: 1 if agent  $i$  ranks higher than agent  $j$ , 0 if lower, and 0.5 if equal;

$P_{ijk} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{r_{jk} - r_{ik}}{400}}}$  - expected probability of agent  $i$  winning over agent  $j$ ,  
computed from the current ratings.

Then, the logistic loss function for a single pair is given by:

$$l_{ijk} = -(S_{ijk} \cdot \ln P_{ijk} + (1 - S_{ijk}) \cdot \ln(1 - P_{ijk}))$$

This function penalizes large deviations between the prediction  $P_{ijk}$  and the actual outcome  $S_{ijk}$ : it is minimal when the prediction is close to the true value and grows rapidly for large errors. This property makes the log-loss function convenient for training a rating model on historical data.

To minimize the loss function, gradient descent was applied. It is an iterative optimization procedure that updates the model parameters (in our case, agent ratings) in the direction opposite to the gradient of the loss function. Intuitively, the gradient indicates how the loss would change if the rating is adjusted, and thus shows how to correct the rating to reduce the error.

Since  $l_{ijk}$  is a complex function through  $P_{ijk}$ , the chain rule was applied:

$$\frac{\partial l_{ijk}}{\partial r_{ik}} = \frac{\partial l_{ijk}}{\partial P_{ijk}} \cdot \frac{\partial P_{ijk}}{\partial r_{ik}} \quad (1)$$

First, the derivative with respect to  $P_{ijk}$  is computed:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{ijk}}{\partial P_{ijk}} &= -S_{ijk} \cdot (\ln P_{ijk})' - (1 - S_{ijk}) \cdot (\ln(1 - P_{ijk}))' \\ &= -\frac{S_{ijk}}{P_{ijk}} + \frac{1 - S_{ijk}}{1 - P_{ijk}} = \frac{P_{ijk} - S_{ijk}}{P_{ijk} \cdot (1 - P_{ijk})} \end{aligned} \quad (2)$$

Next, compute the derivative of  $P_{ijk}$  with respect to  $r_{ik}$  is computed:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ijk}}{\partial r_{ik}} &= \frac{\partial}{\partial r_{ik}} \left( \frac{1}{1 + 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})}} \right) \\ &= -\frac{1}{(1 + 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})})^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r_{ik}} \left( 1 + 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})} \right) \end{aligned}$$

where  $\beta = \frac{\ln(10)}{400}$ . Noting that

$$\frac{\partial}{\partial r_{ik}} \left( 1 + 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})} \right) = -\beta 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})},$$

it follows that

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ijk}}{\partial r_{ik}} &= \frac{\beta 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})}}{(1 + 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})})^2} \\ &= \beta \cdot \frac{1}{1 + 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})}} \cdot \frac{(1 + 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})}) - 1}{1 + 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})}} \end{aligned}$$

Substituting  $P_{ijk}$  in place of  $1/(1 + 10^{\beta(r_{jk} - r_{ik})})$  yields:

$$\frac{\partial P_{ijk}}{\partial r_{ik}} = \beta P_{ijk} (1 - P_{ijk}) \quad (3)$$

Finally, substituting (2) and (3) into (1) yields:

$$\frac{\partial l_{ijk}}{\partial r_{ik}} = \frac{P_{ijk} - S_{ijk}}{P_{ijk} \cdot (1 - P_{ijk})} \cdot \beta P_{ijk} (1 - P_{ijk}) = \beta (P_{ijk} - S_{ijk}) \quad (4)$$

According to the gradient descent method, the rating update for a single sub-interaction is:

$$r_{ijk} = r_{ik} - \eta \frac{\partial l_{ijk}}{\partial r_{ik}}$$

Taking all sub-interactions into account yields:

$$r_{ik} = r_{ik} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \eta \frac{\partial l_{ijk}}{\partial r_{ik}} \quad (5)$$

Substituting the derivative in (4) by (5) the multi-agent update formula becomes:

$$r_{i(k+1)} = r_{ik} - \eta \beta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (P_{ijk} - S_{ijk}) = r_{ik} - K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (P_{ijk} - S_{ijk}) \quad (6)$$

This provides a smooth and consistent rating update that combines signals from all pairwise comparisons. The formula generalizes the classical Elo update to the multi-agent case, based on a rigorous mathematical derivation via the loss gradient.

Let  $G_k$  denote the set of agents participating in the interaction  $k$ , and let there be  $K$  interactions in total. The total loss function is the sum of all logistic losses for pairs  $(i, j)$  arising from the pairwise decomposition of each interaction:

$$L = \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{i, j \in G_k \\ i < j}} l_{ijk} \quad (7)$$

## 1.2 Additional factors in the Elo rating model

In general, the outcome of interactions between agents may depend not only on their ratings but also on additional factors. These factors should be taken into account when calculating the expected outcome of the sub-interaction of agent  $i$  with agent  $j$  within the interaction  $k$ . Therefore, this value is given by:

$$P_{ijk} = \frac{1}{1 + 10^{f'(r_{jk}, r_{ik}, g_1, g_2, \dots, g_L)/400}} = f(r_{jk}, r_{ik}, g_1, g_2, \dots, g_L) \quad (8)$$

where  $f(r_{jk}, r_{ik}, g_1, g_2, \dots, g_L)$  is a function representing the mathematical expectation of the outcome of the sub-interaction between agent  $i$  and agent  $j$ . The importance of a particular interaction or sub-interaction may differ from others; therefore, the rating update function in the general case is given by:

$$r_{i(k+1)} = r_{ik} + f(h_1, h_2, \dots, h_L) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (S_{ijk} - P_{ijk}) \quad (9)$$

where  $f(h_1, h_2, \dots, h_L)$  is a function that characterizes the influence of additional factors on the importance of the event.

Thus, substituting (8) into (9) and generalizing yields:

$$r_{i(k+1)} = f(r_{1k}, \dots, r_{ik}, \dots, r_{Nk}, S_{i1k}, \dots, S_{iNk}, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L)$$

Taking into account that  $R_k = (r_{1k}, \dots, r_{ik}, \dots, r_{jk}, \dots, r_{Nk})$  represents the ratings of all agents before interaction  $k$ , and  $(S_{i1k}, \dots, S_{iNk}) = S_k \in S$  denotes the outcome of interaction  $k$ , the rating of agent  $i$  after interaction  $k$  is a function of the following parameters:

$$r_{i(k+1)} = f(R_k, S, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L)$$

Accordingly:

$$r_{j(k+1)} = f(R_k, S, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L)$$

Thus, the state vector of all agents' ratings after interaction  $k$  depends on the same parameters as in [1], which yields:

$$R_{k+1} = f(R_k, S, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L) \quad (10)$$

The state vector of agent ratings after interaction  $k + 1$  is given by:

$$R_{k+2} = f(R_{k+1}, S, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L) \quad (11)$$

Substituting (10) into ((11) yields:

$$R_{k+2} = f(R_k, S, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L)$$

Thus, the ratings of the agents at any moment in time can be expressed through the initial agent ratings, the interaction vector, and the parameters of the Elo system:

$$R_k = f(R_1, S, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L)$$

The rating matrix of the agents  $R = \{R_1, \dots, R_k, \dots, R_{m+1}\}$ , which contains the ratings of all agents at all time moments, can be expressed as follows:

$$R = f(R_1, S, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L) \quad (12)$$

If the initial ratings of all agents are the same and equal to a fixed value  $r_0$ , then the expression simplifies to:

$$R = f(r_0, S, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L)$$

Let  $P$  be the set of all win probabilities in all pairwise interactions. Then, from (7), it follows that:

$$L = f(P, S) \quad (13)$$

From (8), it follows that:

$$P = f(R, g_1, g_2, \dots, g_L) \quad (14)$$

Substituting (12) into (14), and then substituting the resulting expression into (13), yields:

$$L = f(R_1, S, g_1, g_2, \dots, g_L, h_1, h_2, \dots, h_L) \quad (15)$$

Thus, as in the basic case for pairwise interactions[1], the value of the logistic loss function is determined by the initial ratings of the agents, the outcomes of their interactions, and the factors that influence both the probability of the expected outcome and the weight of each event.

### 1.3 Adjustment of correction coefficient $K$

As shown in (6), the rating update in a single sub-interaction is given by:

$$\Delta r \approx K \cdot (S - P)$$

In a multi-agent interaction, agent  $i$  participates in  $N - 1$  pairwise sub-interactions (with each opponent), and over the course of a year, there are  $M$  such interactions. Therefore, the total annual drift scales as:

$$\text{drift}_i \approx K \cdot \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (S_{ijk} - P_{ijk}) \approx K \cdot M \cdot (N - 1) \cdot \overline{\varepsilon(S - P)}$$

where  $\overline{\varepsilon(S - P)}$  is the average prediction error defined as the difference between the actual and expected outcome.

If a constant  $K = K_0$  is used, then  $\text{drift}_i$  grows linearly with  $M$  and  $N - 1$ . For large values of  $M$  and  $N$ , the rating may change excessively leading to overfitting, while for small values it barely changes (underfitting).

If the drift is fully normalized by dividing by  $M$  and  $N - 1$ , the ‘data-scale’ effect is completely compensated for, but another problem arises. For  $N = 2$  and  $M = 1$ , it follows that  $K = K_0$ , and the one-time increase after a win is:

$$\Delta r_{\text{low interaction}} = K_0 \cdot (1 - P)$$

For the case with many agents and interactions (wins in each sub-interaction), with

$$K = \frac{K_0}{M \cdot (N - 1)},$$

the total annual change is:

$$\begin{aligned} \Delta r_{\text{high interaction}} &= \frac{K_0}{M \cdot (N - 1)} \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - P_{ijk}) \\ &= \frac{K_0}{M} \sum_{k=1}^M \left[ \frac{1}{N - 1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - P_{ijk}) \right] \\ &= \frac{K_0}{M} \sum_{k=1}^M \overline{\varepsilon(1 - P_k)} \\ &= \frac{K_0}{M} \cdot M \cdot \overline{\varepsilon(1 - P)} \\ &= K_0 \cdot \overline{\varepsilon(1 - P)} \end{aligned}$$

Since under constant wins the probability  $P$  increases with each interaction, the average value  $\overline{\varepsilon(1 - P)}$  in many-interaction scenarios will be smaller than  $(1 - P)$  in a single interaction, assuming initially equal ratings. Therefore,

$$\Delta r_{\text{low interaction}} \geq \Delta r_{\text{high interaction}},$$

which indicates excessive smoothing.

Hence, complete lack of normalization ( $M^0$  and  $(N - 1)^0$ ) leads to excessive drift for large  $M$  and  $N$ , while full normalization ( $M^1$  and  $(N - 1)^1$ ) results in over-smoothing at large scales and volatility in ‘small’ scenarios (because there  $K \approx K_0$ ). Balance is achieved through partial normalization, where the exponents for  $M$  (degree<sub>interactions</sub>) and for  $N - 1$  (degree<sub>agents</sub>) lie in the

interval  $(0, 1)$ . This partially compensates for the scale of  $M$  and  $N$  but does not “stifle” learning as the data grows.

Thus, the adaptive update coefficient is:

$$K(M, N) = \frac{K_0}{M^{\text{degree}_{\text{interactions}}} \cdot (N - 1)^{\text{degree}_{\text{agents}}}} \quad (16)$$

It makes the expected annual drift approximately proportional to:

$$\Delta r \approx K_0 \cdot M^{1-\text{degree}_{\text{interactions}}} \cdot (N - 1)^{1-\text{degree}_{\text{agents}}} \cdot \overline{\varepsilon(1 - P)},$$

and due to the exponents in  $(0, 1)$ , this allows the model to retain adaptability for a large number of interactions while reducing volatility in cases with few data points.

## 1.4 New agents initial rating

In systems with a dynamic environment, new agents continuously enter the system and initially have no interaction history. The choice of its initial rating is crucial:

- a rating that is too high creates inflated expectations, and the agent’s rating will drop sharply after the first losses;
- a rating that is too low leads to underestimated expectations and excessively fast growth in the case of a few victories;
- in the long run, both distortions skew the dynamics of the overall system and complicate interpretation.

The basic and simplest approach is to assign newcomers a fixed initial rating  $r_0$ . A more sophisticated option is to use an adaptive value  $r_{0k}$ , which is determined based on the current distribution of ratings at the moment the agent appears. This approach is meaningful when the environment consists of several isolated subsystems with different average rating levels. However, such scenarios are rather exceptional for multi-agent interaction. Therefore, it is more reasonable to use the simpler variant with a fixed  $r_0$ .

Moreover, as will be shown below, it is possible to periodically normalize agents’ ratings to improve system stability, and thus in such a case the basic approach effectively yields the same result as the adaptive one.

## 1.5 Impact of interaction number on correction coefficient

New agents entering the system initially have no interactions, so their rating is estimated with high uncertainty. With each subsequent interaction, this uncertainty decreases. The amount of Fisher information after one sub-interaction is proportional to:

$$I(r) = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \log L(r) \right)^2 \right]$$

Given that, as shown in (4),

$$\frac{\partial}{\partial r} \log L(r) = \beta \cdot (P - S),$$

it follows that:

$$I(r) = \mathbb{E}[(\beta \cdot (P - S))^2] \approx \beta^2 \cdot \mathbb{E}[P(P - 1)^2 + (1 - P)P^2] = \beta^2 \cdot P(1 - P)$$

After  $T$  interactions, the cumulative information grows proportionally to  $T$ , and the uncertainty decreases approximately as  $\sigma_T^2 \propto 1/T$ . Thus, it is natural to connect the optimal step-size multiplier of the update coefficient with this uncertainty so that the multiplier decreases with each new interaction. To prevent an excessively rapid slowdown, a saturation mechanism is introduced: after  $T \geq T_{\text{sat}}$ , the update coefficient becomes constant.

As shown in (16), the correction coefficient is:

$$K(M, N) = K_0 \cdot M^{-\text{degree}_{\text{interactions}}} \cdot (N - 1)^{-\text{degree}_{\text{agents}}},$$

so after saturation it must take this value. Before saturation, the coefficient gradually decreases, approaching a plateau that reflects the diminishing uncertainty.

Taking this into account, the following multiplier depending on the number of interactions is defined:

$$g(T) = 1 + \alpha \left( 1 - \min \left\{ 1, \frac{T}{T_{\text{sat}}} \right\} \right)^2$$

where  $\alpha > 0$  amplifies the initial update and the exponent 2 enforces a quadratic decay. Thus:

$$T = 0 \Rightarrow g(T) = 1 + \alpha,$$

$$0 < T < T_{\text{sat}} \Rightarrow 1 < g(T) < 1 + \alpha,$$

$$T \geq T_{\text{sat}} \Rightarrow g(T) = 1.$$

Therefore, the overall update coefficient is:

$$K(M, N, T) = K(M, N) \cdot g(T)$$

The resulting rating update formula becomes:

$$r_{ijk} = r_{ik} + K(M, N, T) \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^N (S_{ijk} - P_{ijk})$$

$$K(M, N, T) = \frac{K_0 \cdot \left( 1 + \alpha \left( 1 - \min \left\{ 1, \frac{T}{T_{\text{sat}}} \right\} \right)^2 \right)}{M^{\text{degree}_{\text{interactions}}} \cdot (N - 1)^{\text{degree}_{\text{agents}}}}$$

Thus, introducing the dependence of the update coefficient on the interaction count ensures rapid adaptation for new agents during the initial stages and gradual stabilization as more observations accumulate.

## 1.6 Gradient descent hyperparameter optimization

The search for optimal Elo system parameters is performed by minimizing the logistic loss function, which reflects the discrepancy between the expected and actual outcomes of agent interactions. In this way, the model adapts its parameters to reduce the prediction error.

As shown in (15), the value of the logistic loss function depends on the agents' initial ratings, the outcomes of their interactions, the factors affecting the expected outcome probabilities, and the

factors determining the importance of each event. In the general implementation of the Elo rating, such factors include the initial agent ratings  $R_1$ , the base correction coefficient  $K_0$ , the exponent accounting for the number of interactions in a period  $\text{degree}_{\text{interactions}}$ , the exponent accounting for the total number of agents in an interaction  $\text{degree}_{\text{agents}}$ , the regulator of maximum early-stage rating growth  $\alpha$ , and the saturation threshold  $T_{\text{sat}}$ . Thus:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{i,j \in G_k \\ i < j}} l_{ijk} = \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{i,j \in G_k \\ i < j}} (S_{ijk} \ln P_{ijk} + (1 - S_{ijk}) \ln(1 - P_{ijk})) \\ &= f(S, R_1, K_0, \text{degree}_{\text{interactions}}, \text{degree}_{\text{agents}}, \alpha, T_{\text{sat}}) \end{aligned}$$

It follows that the optimal hyperparameter values, corresponding to the minimum of the loss function, can be found using gradient descent. In the classical formulation, the parameters are updated after each gradient descent iteration using a fixed step size:

$$\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)} - \eta \nabla f(\theta^{(t)})$$

where  $\eta$  is the learning rate that controls the speed of parameter updates, and  $\theta^{(t)}$  is the set of parameters. However, since different parameters have different orders of magnitude (for example,  $\text{degree}_{\text{interactions}}$  and  $\text{degree}_{\text{agents}}$  are expected to lie between 0 and 1, while  $R_1$  and  $K_0$  may be in the hundreds or thousands), the classical approach leads to slow updates of large-scale parameters. To improve convergence for parameters with small values, a modified approach is more appropriate:

$$\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)} - \eta \theta^{(t)} \nabla f(\theta^{(t)})$$

This modification implements proportional parameter updates relative to their current values, helping to avoid convergence imbalance between parameters of different scales.

In the subsequent section of this work, this approach is applied to optimize the Elo system parameters on historical data, which improves model accuracy and the stability of algorithm convergence.

## 2 APPLICATION

### 2.1 Multi-agent interaction based on Formula One races

To illustrate the practical application of the proposed model, data from the Formula 1 World Championship were used. For modeling purposes, the dataset is divided into initialization, training, and validation subsets. For each individual interaction (Grand Prix), only drivers who completed the race are considered. This restriction is necessary because the Elo rating system is designed to quantify the inherent skill or strength of an agent, whereas the probability of finishing a race is influenced predominantly by exogenous factors, such as vehicle reliability, stochastic events, and interactions with competitors that may result in retirements. Consequently, modeling the probability of finishing requires a distinct algorithmic approach, which lies beyond the scope of the present study.

At the end of each season, the ratings are normalized to maintain a stable mean value. This normalization preserves the relative differences between agents while facilitating the initialization of new agents and stabilizing the overall scale of the rating system.

Since the Formula 1 interaction outcome is not binary but rather an ordered ranking of all race drivers, the interaction outcome were transformed. To adapt the task to an Elo-like format,

each race is treated as a set of pairwise interactions: if driver  $i$  finishes ahead of driver  $j$ , this is interpreted as a victory of  $i$  over  $j$ . Thus, the race outcome can be represented as  $\frac{N(N-1)}{2}$  pairwise interactions among all drivers.

For pairwise interactions in Formula 1, no additional parameters were introduced for computing the win probability beyond the agents' ratings. Before qualifying, all drivers are in equal conditions (although their cars differ, such effects cannot be explicitly modeled). Therefore, the probability that agent  $i$  beats agent  $j$  is simplified to the classical Elo form:

$$P_{ik} = \frac{1}{1 + 10^{(r_{jk} - r_{ik})/400}}.$$

Regarding the update coefficient, all parameters introduced in Methodology section are incorporated. Since this environment has no distinct sub-environments and ratings are normalized after each season, it is reasonable to apply a simplified approach for computing new-agent ratings by introducing a single parameter  $r_0$  instead of the vector  $R_1$ . Considering that the update-enhancement parameter  $\alpha$  and the saturation threshold  $T_{\text{sat}}$  have an inverse dependence (the fewer interactions required for saturation, the stronger the early-stage enhancement must be), there is no need to optimize both. Thus, saturation level was fixed  $T_{\text{sat}} = 10$ , and the optimal value of  $\alpha$  for this saturation level is determined using gradient descent. The same applies to the parameters  $r_0$ ,  $K_0$ ,  $\text{degree}_{\text{interactions}}$ , and  $\text{degree}_{\text{agents}}$ . Interaction outcomes  $S$  are fixed values and, like  $T_{\text{sat}}$ , are excluded from optimization.

Therefore, the loss function for optimization depends on the following parameters:

$$L = f(r_0, K_0, \text{degree}_{\text{interactions}}, \text{degree}_{\text{agents}}, \alpha).$$

The initial parameter values are chosen randomly:  $r_0$  in the range 1500–2000,  $K_0$  in the range 10–500,  $\text{degree}_{\text{interactions}}$  and  $\text{degree}_{\text{agents}}$  between 0.1 and 1, and  $\alpha$  between 0.1 and 10.

## 2.2 Data

The input data for the proposed model is derived from the comprehensive dataset of Formula 1 World Championship race results spanning the years 1950 to 2024, available on Kaggle: <https://www.kaggle.com/datasets/rohanrao/formula-1-world-championship-1950-2020>. This dataset provides detailed information on individual race outcomes, which serves as the empirical basis for the estimation and validation of the generalized Elo rating system. To calculate ratings which are close to real ones the initial ratings for 1955 were computed using the results of all Grands Prix from 1950 to 1954 (inclusive). Data from 1955 to 1999 is reserved for model training, while the 2000 season is used as a validation set.

Also, drivers who completed only one race during a season were excluded from dataset. This serves two purposes. First, it prevents the formation of isolated subgroups of drivers who participated exclusively in a single Grand Prix (for example, the Indy 500) during the early years of Formula 1. Second, it avoids including test drivers who competed in the only one event, for whom there is insufficient data to reliably estimate a meaningful rating.

Finally, a total of 1,114 Grands Prix are considered across 75 seasons, with each season comprising between 6 and 24 events. For each Grand Prix, the number of drivers who completed the race and were included in the analysis ranges from 2 to 24.

## 2.3 Results and analysis

To prevent overfitting, an early stopping criterion was applied during gradient descent optimization. Specifically, training was terminated if the logistic loss on the validation set did not improve for 20 consecutive epochs. In our simulation, the procedure converged after 247 epochs, at which point early stopping was triggered. This indicates that the minimum validation loss was reached at epoch 227, after which further training produced no measurable improvement.

Optimal parameters are the ones which were calculated by Gradient Descent Optimizer after 227 epochs. Here the set of optimal parameters calculated:

Parameter	Optimal value
$r_0$	1834.6477
$K_0$	102.0843
degree <sub>interactions</sub>	0.172968
degree <sub>agents</sub>	0.624026
$\alpha$	0.724035

Table 1: Optimal hyperparameter values.

The implementation of the model is available in the multi\_elo repository on GitHub: [https://github.com/andritar/multi\\_elo](https://github.com/andritar/multi_elo).

The developed approach (multi-agent Elo) was compared with endurance model, speed model, and pairwise comparison Elo model without number of agents and number of interactions normalization and initial interactions boost (multi-agent Elo default). The performance of all methods was assessed on the full set of evaluation-eligible interactions. The corresponding logistic loss values for each approach are reported in Table 2.

Approach	Logistic loss
Endurance Model	0.482522
Speed Model	0.502683
multi-agent Elo (default)	0.482469
multi-agent Elo (optimized)	0.481111

Table 2: Comparison of logistic loss values across different modeling approaches.

Among the considered approaches, the Speed Model exhibits the poorest predictive performance. The remaining three methods demonstrate substantially lower logistic loss values, indicating better predictive accuracy. As anticipated, incorporating normalization with respect to the number of agents and interactions significantly improves the model’s performance, highlighting the benefit of these adjustments in the multi-agent Elo framework.

## CONCLUSIONS

In this work, a generalization of the classical Elo system for multi-agent interactions is proposed, incorporating gradient descent for parameter optimization. The proposed approach provides:

- a formalization of multi-agent interactions as a collection of pairwise sub-interactions, followed by minimization of the discrepancy between expected and actual outcomes using a logistic loss function;
- analytical expressions for rating updates, derived from the computation of derivatives of the loss function, which ensure smoother and more stable learning dynamics;
- the introduction of an adaptive update coefficient dependent on the number of interactions and the number of agents, allowing the model to avoid excessive drift or excessive smoothing;
- justification of the principles for initializing the initial ratings of new agents and of the dependence of the correction coefficient on the number of interactions, increasing the flexibility and robustness of the model.

The combination of the Elo system with gradient descent creates the prerequisites for developing next-generation rating systems that preserve the intuitiveness and simplicity of classical approaches, while acquiring self-adjusting properties. This is particularly important in high-dimensional scenarios with a large number of agents and interactions, where traditional methods lose accuracy or stability.

The obtained results confirm the promise of integrating classical rating models with modern optimization techniques. The proposed model may serve as a basis for further research and practical applications in sports analytics, multiplayer gaming environments, and educational assessment systems.

This model operates at the level of individual agents but does not support situations in which agents form a team and compete against an opposing team. Extending the model to such cases is the objective of future research.

#### REFERENCES

- [1] Andrytsuliak T. L., Martyniuk S. V. *Elo system parameters optimization using gradient descent*. World of scientific research 2025, **40**, 55–63. (in Ukrainian)
- [2] Angelini G., Candila V., De Angelis L. *Weighted Elo rating for tennis match predictions*. European Journal of Operational Research 2022, **297** (1), 120–132. doi:10.1016/j.ejor.2021.04.011
- [3] Bradley, R. A., Terry, M. E. *Rank analysis of incomplete block designs: I. the method of paired comparisons*. Biometrika 1952, **39** (3/4), 324–345. doi:10.1093/biomet/39.3-4.324
- [4] Elo A. E. *The Rating of Chess Players, Past and Present*. Arco Publishing, New York, 1978.
- [5] Franceschi L., Donini M., Frasconi P., Pontil M. Forward and reverse gradient-based hyperparameter optimization. In: International conference on machine learning. PMLR, 2017. p. 1165-1173.
- [6] Glickman, M. E. *Parameter estimation in large dynamic paired comparison experiments*. Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics) 1999, **48** (3), 377–394. doi:10.1111/1467-9876.00159
- [7] Hvattum L. M., Arntzen H. *Using ELO ratings for match result prediction in association football*. International Journal of Forecasting 2010, **26** (3), 460–470. doi:10.1016/j.ijforecast.2009.10.002
- [8] Moore, J., Dottle, R., and Paine, N. Who’s the best formula one driver of all time? 2018, <https://fivethirtyeight.com/features/formula-one-racing/>.

- [9] Powell B. *Generalizing the Elo rating system for multiplayer games and races: why endurance is better than speed*. Journal of Quantitative Analysis in Sports 2023, **19** (3), 223–243. doi:10.1515/jqas-2023-0004
- [10] Vovk V. *The fundamental nature of the log loss function*. Fields of Logic and Computation II: Essays dedicated to Yuri Gurevich on the Occasion of His 75th Birthday, 2015, 307–318.
- [11] Weng, R. C., Lin, C.-J. *A Bayesian approximation method for online ranking*. Journal of Machine Learning Research 2011, **15** (2), 109–144. doi:10.1093/biomet/39.3-4.324

Received 20.11.2025

---

Тарас Андришуляк, Сергій Мартинюк *Узагальнення системи Ело для взаємодій між багатьма агентами* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №2. — С. 137–151.

Стаття пропонує узагальнення класичної рейтингової системи Ело для багатокористувачьких середовищ і застосовує методи оптимізації для визначення оптимальної конфігурації моделі. Запропонований підхід представляє взаємодії між багатьма агентами як набір попарних порівнянь і формулює задачу оцінювання рейтингів як мінімізацію логістичної функції втрат. Така формулювання дає змогу отримати аналітичні вирази для оновлення рейтингів на основі градієнтів, що використовуються для пошуку оптимальних гіперпараметрів, забезпечуючи плавнішу та стабільнішу динаміку навчання порівняно з класичною системою Ело.

Вводиться додатковий адаптивний коефіцієнт оновлення, який залежить від кількості взаємодій і кількості агентів, задіяних у кожній події. Така нормалізація допомагає запобігти надмірному зсуву рейтингів у великих наборах даних і пом'якшує надмірне згладжування, коли обсяг даних або кількість агентів є невеликими. У статті також розглядаються принципи ініціалізації рейтингів нових агентів і динамічного коригування швидкості навчання на основі накопиченої інформації для кожного агента, що дає змогу системі швидше зближуватися до точних рейтингових значень і покращує загальну стабільність та інтерпретованість.

Градієнтний спуск використовується для пошуку оптимальних значень гіперпараметрів шляхом мінімізації функції втрат і автоматичного вибору відповідних параметрів. Це дає змогу системі формувати точніші рейтингові оцінки й, відповідно, забезпечувати кращі прогнози майбутніх взаємодій.

Запропонована система легко адаптується до середовищ із багатосторонніми взаємодіями, зберігаючи повну сумісність зі сценаріями бінарних порівнянь. За потреби її можна розширити додатковими гіперпараметрами для врахування специфіки конкретної доменної області.

Модель демонструє переваги поєднання класичної рейтингової методології з сучасними методами оптимізації й може ефективно застосовуватися у спортивних, ігрових та освітніх системах, де важливими є точність, адаптивність до складних сценаріїв та інтерпретованість.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.15>

ВАСЬКЕВИЧ С.О., ВОВК Ю.Ю., ПРАЦЬОВИТИЙ О.М.

## СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ З НЕНУЛЬОВОЮ НАДЛИШКОВІСТЮ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ТЕОРІЇ ЛОКАЛЬНО СКЛАДНИХ ФУНКЦІЙ

У роботі розглядається зображення чисел у системі з основою  $a > 1$  і алфавітом (набором цифр)  $A \equiv \{0, 1, \dots, r\}$ ,  $a - 1 < r \in \mathbb{N}$ :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{a^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}, \alpha_n \in A.$$

За рахунок надлишкового алфавіту числа відрізка  $[0; \frac{r}{a-1}]$  мають, взагалі кажучи, не єдине зображення і навіть можуть мати континуальну множину різних зображень.

Геометрію (тополого-метричні властивості) такого зображення ( $r_a$ -зображення) розкривають циліндри:

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r_a} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{r_a}, a_n \in A\},$$

властивості яких, включаючи специфіку перекриттів, детально висвітлено.

В роботі представлено результати дослідження структурних, варіаційних, тополого-метричних і частково фрактальних властивостей функції, означеної рівністю:

$$f(x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(r+1)^n}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}, \alpha_n \in A.$$

Доведено її неперервність в точках відрізка  $[0; 1]$ , які в традиційній системі числення з основою  $(r+1)$  мають єдине зображення, і розривність у точках зліченої всюди щільної в  $[0; 1]$  множини, а також ніде не монотонність та необмеженість варіації функції.

Для випадку  $r = 1$ ,  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  вказані фрактальні множини рівнів з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича не меншою  $-\log_a 2$ .

*Ключові слова і фрази:* системи числення з ненульовою надлишковістю, циліндр, класична  $s$ -символьна система, множина рівня функції, функція необмеженої варіації.

Institution of Mathematics of NAS Ukraine,  
K. D. Ushynskiy Chernihiv Regional Institute of Postgraduate Pedagogical Education, Chernihiv, Ukraine  
Ukrainian State Dragomanov University, Kyiv, Ukraine

e-mail: [svetaklymchuk@gmail.com](mailto:svetaklymchuk@gmail.com), [freeeidea@ukr.net](mailto:freeeidea@ukr.net), [o.m.pratsovytyi@udu.edu.ua](mailto:o.m.pratsovytyi@udu.edu.ua)

УДК 511.7+517.5

2010 *Mathematics Subject Classification*: 28A80, 11K50, 26A27, 26A30.

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586 V.S.)

## ВСТУП

Більшість функцій, визначених на відрізку, мають локально складну структуру у контексті монотонності, варіаційних, диференціальних, тополого-метричних та фрактальних властивостей.

Крім неперервних ніде не монотонних, недиференційовних та сингулярних до локально складних ми відносимо функції, які мають зліченну всюди щільну у відрізку (області визначення) множину точок розриву. Одному з класів таких функцій присвячена дана робота.

Для задання функції ми використовуємо “нестандартний” інструмент – систему зображення чисел з надлишковим алфавітом і, взагалі кажучи, нецілою основою. Таким системам присвячено сотні статей [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], в яких розв’язуються різнопланові задачі (в основному метричної, включаючи фрактальну, та ймовірнісної теорії чисел). Їх застосування до потреб теорії функцій в цих роботах не прослідковується.

Нехай  $1 < a$  – фіксоване дійсне число;  $a - 1 \leq r$  – натуральне число;  $A = \{0, 1, \dots, r\}$  – алфавіт;  $L = A \times A \times \dots$  – множина послідовностей з елементів алфавіту.

Розглядається відображення  $\gamma : L \rightarrow [0; \frac{r}{a-1}]$ , а саме

$$\gamma((\alpha_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{a^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a} = x \in \left[0; \frac{r}{a-1}\right], (\alpha_n) \in L.$$

Символічний запис  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}$  ми називаємо  $r_a$ -зображенням числа  $x$ , при цьому  $\alpha_n$  називаємо  $n$ -ою цифрою даного зображення. Випадок  $r = 1$  заслуговує окремої уваги в силу мінімальності алфавіту  $A$ .

Якщо  $a = r + 1$ , то  $r_a$ -зображення є класичним зображенням чисел у системі з натуральною основою  $a$ , яке має нульову надлишковість (кожне число має не більше двох зображень, причому тих, що їх мають два лише зліченна множина).

**Означення 1.** При раціональному  $a$  число  $x$ , яке має  $r_a$ -зображення з періодом  $(0)$ , називатимемо  $r_a$ -раціональним.

Очевидно, що коли число  $a$  – раціональне, то  $r_a$ -зображення також раціональне.

Зрозуміло, що  $r_a$ -раціональне число є числом раціональним. Але не кожне раціональне число є  $r_a$ -раціональним. Наприклад, число  $x$  з чисто періодичним  $r_a$ -зображенням  $\Delta_{(c_1 \dots c_p)}^{r_a}$  період якого складається принаймні з двох різних цифр є раціональним, але не є  $r_a$ -раціональним. Справді, число  $x$  як значення виразу

$$x = \Delta_{(c_1 \dots c_p)}^{r_a} = \left(\frac{c_1}{a} + \dots + \frac{c_p}{a^p}\right) + \frac{1}{a^p} \left(\frac{c_1}{a} + \dots + \frac{c_p}{a^p}\right) + \frac{1}{a^{2p}} \left(\frac{c_1}{a} + \dots + \frac{c_p}{a^p}\right) + \dots = \frac{c}{1 - \frac{1}{a^p}},$$

де  $c = \frac{c_1}{a} + \dots + \frac{c_p}{a^p}$  є раціональним числом, але не є  $r_a$ -раціональним (взагалі кажучи).

Умова  $r \geq a$  гарантує існування чисел, які мають більше двох зображень, і навіть континуальну їх множину, що породжує ненульову надлишковість даного  $(r + 1)$ -символьного кодування чисел. Такі системи вивчаються з 1957 року, першими в цьому напрямі були роботи [1, 2]. Сьогодні системи кодування дійсних чисел з ненульовою надлишковістю інтенсивно вивчаються, існують сотні робіт їм присвячених [3, 4, 5]. В основному це системи, в яких основа  $a$  не є цілою. При цьому розглядаються різні об’єкти і розв’язуються різні задачі. Існує кілька відносно повних оглядів результатів цих досліджень [6], що стосуються теорії чисел і фрактального аналізу множин.

Дана теоретико-числова тематика тісно пов'язана з іншими напрямками сучасних досліджень: геометрією числових рядів, теорією нескінченних згорток Бернуллі, теорією динамічних систем та теорією функцій зі складною локальною будовою.

У системах з ненульовою надлишковістю вбачаємо потужний засіб для конструювання та дослідження математичних об'єктів з локально складною тополого-метричною структурою, зокрема функцій. Дана робота має за мету продемонструвати такі можливості.

## 1 ГЕОМЕТРІЯ $r_a$ -ЗОБРАЖЕННЯ

Кожна пара параметрів  $a, r$  породжує свою унікальну геометрію і специфіку перекриттів. Її частково висвітлюють властивості циліндричних множин. Особливої уваги заслуговують випадки:  $a$  — число натуральне;  $a$  — раціональне;  $a$  — ірраціональне.

**Означення 2.** Нехай  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  — фіксований впорядкований набір елементів алфавіту. Циліндром ( $r_a$ -циліндром) рангу  $k$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_k$  називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{r_a} = \{x : x = \Delta_{c_1 \dots c_k \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r_a}, (\alpha_n) \in L\}.$$

Циліндри  $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} j}^{r_a}$  і  $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} [j+1]}^{r_a}$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$  називаються сусідніми, вони належать одному і тому ж циліндру попереднього рангу  $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1}}^{r_a}$ .

Циліндри мають властивості:

- 1)  $\Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_k 0}^{r_a} \cup \Delta_{c_1 \dots c_k 1}^{r_a} \cup \dots \cup \Delta_{c_1 \dots c_k r}^{r_a}$ ;
- 2)  $\Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a} = [u; u + d]$ , де  $u = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{a^i}$ ,  $d = \frac{r}{a^k \cdot (a-1)}$ ;
- 3) довжина циліндра:  $|\Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a}| = d = \frac{r}{a^k \cdot (a-1)} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ );
- 4)  $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k \dots}^{r_a} = x$  для будь-якої послідовності  $(c_k) \in L$ ;
- 5)  $\min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k c} < \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k [c+1]}$ ,  $0 \leq c \leq r-1$ ;
- 6)  $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{r_a} = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{r_a} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k a^{-i} (\alpha_i - \beta_i) = 0$ ;
- 7)  $\Delta_{c_1 \dots c_k c}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_k [c+1]}^{r_a} = [\Delta_{c_1 \dots c_k [c+1]}^{r_a}(0); \Delta_{c_1 \dots c_k c(r)}^{r_a}] \neq \emptyset$ ;
- 8) довжина перекриття:

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1]}^{r_a}| = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c(r)}^{r_a} - \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1]}^{r_a}(0) = \frac{r-a+1}{a^k(a-1)};$$

- 9) умова  $\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1]}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} cr}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1] 0}^{r_a}$  рівносильна

$$\frac{c}{a^k} + \frac{r}{a^{k+1}} = \frac{c+1}{a^k}, \text{ тобто } r = a,$$

що може виконуватись лише при цілих  $a$ ;

- 10) рівність  $|\Delta_{c_1 \dots c_k c_{k+1}}^{r_a}| = \frac{1}{2} |\Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a}|$  виконується лише за умови  $a = 2$ ;

- 11) умова  $\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1]}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c \underbrace{r \dots r}_m}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1] \underbrace{0 \dots 0}_m}^{r_a}$  рівносильна

$$\frac{c}{a^k} + \frac{r}{a^{k+1}} + \dots + \frac{r}{a^{k+m}} = \frac{c+1}{a^k}, \text{ тобто } r = \frac{a^m(a-1)}{a^m-1}.$$

**Зауваження 1.** Властивості 8)–11) виражають специфіку перекриттів  $r_a$ -циліндрів.

## 2 ОДИН ОСОБЛИВИЙ ВИПАДОК

Розглянемо випадок  $r = 2$ . Тоді  $1 < a < 3$ .

**Теорема 1.** Якщо  $r = 2$ , то множина

$$C \equiv C[r_a; \{0, 2\}] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r_a}, \alpha_n \in \{0, 2\} n \in N\}$$

є досконалою ніде не щільною самоподібною множиною канторівського типу, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої рівна  $-\log_a 2$ .

*Доведення.* Використовуючи циліндри  $r_a$ -зображення, легко описати структуру множини  $C$ , а саме:

$$1. C \subset [\Delta_0^{r_a} \cup \Delta_2^{r_a}], \text{ причому } \Delta_0^{r_a} \cap \Delta_2^{r_a} = \emptyset,$$

$$\max\{\Delta_0^{r_a}\} = \Delta_{0(2)}^{r_a} \in C, \quad \min\{\Delta_2^{r_a}\} = \Delta_{2(0)}^{r_a} \in C.$$

$$2. \Delta_{c_1 \dots c_m}^{r_a} \supset (\Delta_{c_1 \dots c_m 0}^{r_a} \cup \Delta_{c_1 \dots c_m 2}^{r_a}), \quad \Delta_{c_1 \dots c_m 0}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_m 2}^{r_a} = \emptyset.$$

$$3. C \subset C_n, C_n = \bigcup_{\alpha_1 \in V} \dots \bigcup_{\alpha_n \in V} \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{r_a}, V = \{0, 2\} \forall n \in N.$$

$$4. C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Згідно з відомою теоремою про структуру досконалих множин робимо висновок, що множина  $C$  є досконалою і ніде не щільною (не містить жодного як завгодно малого інтервалу).

Множина  $C$  є самоподібною, оскільки

$$C = [\Delta_0^{r_a} \cap C] \cup [\Delta_1^{r_a} \cap C],$$

де  $C \stackrel{k}{\sim} (\Delta_0^{r_a} \cap C) \cong (\Delta_2^{r_a} \cap C)$ ,  $k = \frac{r}{a-1} : |\Delta_0^{r_a}| = \frac{1}{(a-1)} : \frac{1}{a(a-1)} = a$ .

Її самоподібна розмірність є розв'язком рівняння  $2 \cdot a^x = 1$ , тобто  $x = -\log_a 2$ . Вона рівна розмірності Гусдорфа-Безиковича, оскільки множина  $C$  задовольняє умову відкритої множини. Теорему доведено.  $\square$

## 3 ФУНКЦІЯ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ МНОЖИН РІВНІВ

Розглядається функція  $f$ , означена рівністю  $f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r+1}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r_a}$ , де

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(r+1)^n}, (\alpha_n) \in L.$$

Оскільки числа зліченної множини у системі з основою  $r+1$  мають два формально різні зображення:  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r+1} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_n]_{(r)}}^{r+1}$  (їх ми називаємо  $(r+1)$ -бінарними), то за для коректності означення функції  $f$  домовимось використовувати лише перше з вказаних зображень  $(r+1)$ -бінарного числа.

**Теорема 2.** Функція  $f$  є неперервною у кожній  $(r+1)$ -унарній точці і неперервною в  $(r+1)$ -бінарній точці тоді і лише тоді, коли  $a = r+1$ .

*Доведення.* Якщо функція  $f$  неперервна на відрізку, то вона неперервна в кожній точці цього відрізка. Нехай  $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r+1}$  —  $(r+1)$ -унарна точка. Нехай  $f(x_0) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^r$ . Розглянемо точку  $x$ , що не рівна  $x_0$ , тоді з  $x \neq x_0$  слідує, що існує такий номер  $k$ , що  $\alpha_k(x) \neq \alpha_k(x_0)$ , але  $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$  для усіх  $i < k$ , причому умова  $k \rightarrow \infty$  рівносильна  $x \rightarrow x_0$ . Для обґрунтування неперервності функції  $f_a$  в точці  $x_0$  покажемо, що

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

Згідно з означенням функції  $f$  маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| &= \lim_{x \rightarrow x_0} |f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha'_k \alpha'_{k+1} \dots}^{r_a}) - f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{r_a})| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha'_k \alpha'_{k+1} \dots}^{r_a} - \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{r_a}| \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{k-1}} |\Delta_{\alpha'_k \alpha'_{k+1} \dots}^{r_a} - \Delta_{\alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{r_a}| = 0. \end{aligned}$$

Отже, функція  $f$  неперервна в  $(r+1)$ -унарній точці.

Неперервність функції в кожній  $(r+1)$ -бінарній точці рівносильна виконанню рівності для будь-якого  $k \in N$

$$f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k}^{r+1}) = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} [\alpha_k - 1]^{(r)}}^{r+1}), \text{ для будь-якого } k \in N.$$

Останню рівність можна переписати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{a^i} + \frac{\alpha_k}{a^k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{a^i} + \frac{\alpha_k - 1}{a^k} + \frac{r}{a^2 - a},$$

звідки

$$\frac{\alpha_k}{a^k} = \frac{\alpha_k - 1}{a^k} + \frac{r}{a^2 - a},$$

що можливо лише за умови  $a = r + 1$ . Тобто функція  $f$  неперервна в кожній  $(r+1)$ -бінарній точці тоді і лише тоді, коли  $a = r + 1$ .  $\square$

**Зауваження 2.** Зазначимо, що коли  $a = r + 1$ , тобто  $r_a$ -зображення співпадає з  $(r+1)$ -зображенням, то  $f(x) = x$ .

**Теорема 3.** Якщо  $a < r + 1$ , то функція  $f$  є ніде не монотонною.

*Доведення.* Можливі випадки: 1)  $1 < a \leq r$ ; 2)  $a \in (r; r + 1)$ . Для доведення ніде не монотонності функції досить довести її немонотонність на довільному циліндрі  $m$ -го рангу. Для конкретності розглянемо циліндр  $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{r+1} = [\Delta_{c_1 \dots c_m}^{r+1}(0); \Delta_{c_1 \dots c_m}^{r+1}(r)]$ .

1) Нехай  $1 < a \leq r$ , тоді  $r+1-a \geq 1$ . Розглянемо на циліндрі  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r+1}$  точки  $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m}^{r+1}(0)$ ,  $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m r 0 r(r-1)}^{r+1}$ ,  $x_3 = \Delta_{c_1 \dots c_m r 1(0)}^{r+1}$ . Очевидно, що  $x_1 < x_2 < x_3$ . Розглянемо різниці

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= f(x_2) > 0, \\ f(x_2) - f(x_3) &= \frac{r}{a^{m+1}} + \frac{r}{a^{m+3}} + \frac{r-1}{a^{m+3}(a-1)} - \frac{r}{a^{m+1}} - \frac{1}{a^{m+2}} = \\ &= \frac{r(a-1) + r-1 - a(a-1)}{a^{m+3}(a-1)} = \frac{ra - r + r - 1 - a^2 + a}{a^{m+3}(a-1)} = \\ &= \frac{a(r+1-a) - 1}{a^{m+3}(a-1)} \geq \frac{a-1}{a^{m+3}(a-1)} > 0. \end{aligned}$$

Оскільки  $(f(x_2) - f(x_1))(f(x_2) - f(x_3)) > 0$ , то функція  $f$  немонотонна на циліндрі  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r+1}$ , а в силу довільності вибору  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r+1}$  ніде не монотонна на усій області визначення.

2) Нехай  $a \in (r; r+1)$ , тоді  $r+1-a > 0$ .

$\Delta_{c_1 \dots c_m}^{r+1} = [\Delta_{c_1 \dots c_m(0)}^{r+1}; \Delta_{c_1 \dots c_m(r)}^{r+1}]$ . Розглянемо точки  $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m(0)}^{r+1}$ ,  $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m 0 \underbrace{r \dots r}_n(0)}^{r+1}$ ,  
 $x_3 = \Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{r+1}$ . Очевидно, що  $x_1 < x_2 < x_3$ . Розглянемо різниці

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{a^m} \left( \frac{r}{a} + \dots + \frac{r}{a^n} \right) > 0,$$

$$\begin{aligned} f(x_3) - f(x_2) &= \frac{1}{a^m} \left( \frac{1}{a} - \frac{r}{a^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \left( 1 - \frac{1}{a^n} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{a^m} \left( \frac{1}{a} - \frac{r}{a(a-1)} \left( 1 - \frac{1}{a^n} \right) \right) = \frac{1}{a^m} \left( \frac{a-1-r}{a(a-1)} + \frac{r}{a^{n+1}}(a-1) \right). \end{aligned}$$

Нехай  $\frac{r-(a-1)}{a(a-1)} = c > 0$ . Тоді

$$a^m(f(x_3) - f(x_2)) = \frac{a-1-r}{a(a-1)} + \frac{r}{a^{n+1}(a-1)} = \frac{r}{a^{n+1}(a-1)} - c.$$

Оскільки  $\frac{r}{a^{n+1}(a-1)}$  монотонно прямує до 0, то існує  $n_0$  таке, що для всіх  $n > n_0$  виконуватиметься нерівність  $\frac{r}{a^{n+1}(a-1)} < c$ . Для таких  $f(x_3) - f(x_2) < 0$ . Оскільки

$$(f(x_2) - f(x_1))(f(x_3) - f(x_2)) < 0,$$

то на циліндрі  $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{r_a}$  функція  $f(x)$  не є монотонною. Отже, вона ніде не монотонна.  $\square$

**Теорема 4.** Якщо  $a < r+1$ , то функція  $f$  має необмежену варіацію.

*Доведення.* Нехай  $\Delta \equiv [0; \frac{r}{a-1}]$ . Коливання функції  $f$  на циліндрі  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r+1}$  дорівнює довжині циліндра  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r_a}$ , що є образом циліндра  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r+1}$ . Тому варіація функції  $f$  перевищує сумарну довжину циліндрів образів, тобто

$$V(f) > V_k = \sum_{\alpha_1=0}^r \sum_{\alpha_2=0}^r \dots \sum_{\alpha_n=0}^r |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r_a}|.$$

Оскільки

$$V_1 \equiv \sum_{\alpha_1=0}^r |\Delta_{\alpha_1}^{r_a}| = (r+1) \frac{r}{a(a-1)} > \frac{ar}{a(a-1)} = \frac{r}{a-1} = |\Delta| > 1.$$

Тоді

$$k \equiv \frac{V_1}{|\Delta|} > 1 \text{ і } V_1 = k|\Delta|.$$

Аналогічно,

$$\sum_{\alpha_2=0}^r |\Delta_{c_1 \alpha_2}^{r_a}| = |\Delta_{c_1}^{r_a}| \sum_{\alpha_2=0}^r |\Delta_{\alpha_2}^{r_a}| > |\Delta_{c_1}^{r_a}|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} V_2 \equiv \sum_{\alpha_1=0}^r \sum_{\alpha_2=0}^r |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{r_a}| &= \sum_{\alpha_1=0}^r |\Delta_{\alpha_1}^{r_a}| \sum_{\alpha_2=0}^r |\Delta_{\alpha_2}^{r_a}| > k^2 |\Delta|, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$V_n = \sum_{\alpha_1=0}^r \sum_{\alpha_2=0}^r \cdots \sum_{\alpha_n=0}^r |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{r_a}| > k^n |\Delta|,$$

то

$$V(f) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} V_n > \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |\Delta| = \infty.$$

Отже, функція  $f$  має необмежену варіацію.  $\square$

#### 4 ДВОСИМВОЛЬНІ СИСТЕМИ

Випадок  $r = 1$  в силу мінімальності алфавіту заслуговує на окрему увагу. Зосередимо інтерес на цьому випадку. Тому далі  $1 < a < 2$ . У цьому випадку маємо

$$|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r_a}| = \frac{1}{a^m (a-1)};$$

$$|\Delta_0^{r_a} \cap \Delta_1^{r_a}| = |[\Delta_{1(0)}^{r_a}; \Delta_{0(1)}^{r_a}]| = \Delta_{0(1)}^{r_a} - \Delta_{1(0)}^{r_a} = \frac{2-a}{a(a-1)};$$

$$\begin{aligned} |\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1}^{r_a}| &= |[\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}^{r_a}; \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0(1)}^{r_a}]| = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0(1)}^{r_a} - \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}^{r_a} = \\ &= \frac{2-a}{a^m (a-1)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що існують окремі цікаві випадки. Наприклад, рівність

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1}^{r_a}| = \frac{1}{2} |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{r_a}|$$

виконується лише за умови  $a = \frac{3}{2}$ .

Справді, у цьому випадку виконується рівність  $\frac{2-a}{a^m(a-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^m(a-1)}$ , що рівносильно умові  $a = \frac{3}{2}$ . За цієї умови  $[0; \frac{r}{a-1}] = [0; 2]$ . Цей випадок заслуговує окремого розгляду.

**Інший унікальний випадок:**  $r = 1$ ,  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . З'ясуємо, за яких умов два сусідні циліндри  $m$ -го рангу перетинаються по циліндру  $(m+2)$ -го рангу, тобто коли

$$\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 011}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 100}^{r_a}. \quad (1)$$

Ранги циліндрів  $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 011}^{r_a}$  і  $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 100}^{r_a}$  рівні, тому для рівності циліндрів досить, щоб збігалися їхні початки, тобто щоб

$$\min \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 011}^{r_a} - \min \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 100}^{r_a} = 0.$$

А це рівносильно рівності

$$\frac{1}{a^{m-1}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a} \right) = 0,$$

тобто  $a + 1 - a^2 = 0$ , яка виконується лише при одному додатному  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Оскільки

$$\max \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0}^{r_a} = \max \Delta_{011}^{r_a}, \min \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1}^{r_a} = \min \Delta_{100}^{r_a},$$

то необхідною і достатньою умовою для виконання (1) є  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**Зауваження 3.** Впорядковані трійки чисел  $(1, 0, 0)$  і  $(0, 1, 1)$  у  $r_a$ -зображенні числа при  $r = 1$ ,  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , в якості послідовних цифр зображення є взаємозамінними.

**Теорема 5.** Якщо  $r = 1$ ,  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , то множина  $f^{-1}(y_0)$  рівня  $y_0 = \Delta_{(100)}^{r_a}$  є континуальною і має фрактальну розмірність не меншу числа  $\frac{1}{3}$ .

*Доведення.* Згідно останнього зауваження число  $\Delta_{(100)}^{r_a}$ , зображення якого має період (100), має континуальну множину різних  $r_a$ -зображень, оскільки кожна трійка (1, 0, 0) послідовних цифр без втрати значення може бути замінена альтернативною (0, 1, 1). Тому множина прообразів  $y_0 = \Delta_{(100)}^{r_a}$  при відображенні  $y = f(x)$  містить підмножину чисел відрізка [0; 1], класичне вісімкове зображення яких використовує лише дві цифри 4 і 5.

Справді,

$$x = \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3}\right) + \left(\frac{\alpha_4}{2^4} + \frac{\alpha_5}{2^5} + \frac{\alpha_6}{2^6}\right) + \left(\frac{\alpha_7}{2^7} + \frac{\alpha_8}{2^8} + \frac{\alpha_9}{2^9}\right) + \dots = \\ = \frac{4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{2^3} + \frac{4\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6}{2^6} + \frac{4\alpha_7 + 2\alpha_8 + \alpha_9}{2^9} + \dots$$

Оскільки

$$\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} = \frac{4}{2^3}, \quad \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{5}{2^3},$$

то одним з прообразів числа  $y_0 = \Delta_{(100)}^{r_a}$  є  $x_0 = \Delta_{(4)}^8$ , іншим  $\Delta_{(5)}^8$  і  $\Delta_{(45)}^{r_a}$  і т.д. Отже, вся множина канторівського типу

$$C[8; \{4, 5\}] = \{x : x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^8, \text{ де } a_n \in \{4, 5\}\}$$

належить множині рівня. Її самоподібна розмірність та розмірність Гаусдорфа-Безиковича збігаються і рівні  $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ .  $\square$

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] A. Renyi Representations for real numbers and their ergodic properties, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 8 (1957), 477-493.
- [2] W. Parry On the  $\beta$ -expansions of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 11 (1960), 401-416.
- [3] Pratsiovytyi M.V. Two symbol encodign of real numbres and its aplications. Nauk. Dumka, Kyiv 2022, 316 p.
- [4] Goncharenko Ya.V., Mykytiuk I.O Representations of real numbers in numeral systems with redundant set of digits and their applications. Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser 1. Fiz.-Mat. Nauky, 2004, 5, 255-275. (in Ukrainian).
- [5] Derong Kong, Wenxia Li, Fan Lu, Zhiqiang Wang, Jiayi Xu Univoque bases of real numbers: Local dimension, Devil's staircase and isolated points, Advances in Applied Mathematics, Volume 121, 2020,
- [6] Zou Y., Lu J., Komornik V. Hausdorff dimension of multiple expansions. Journal of Number Theory, 2022, 233, pp.198-227. ff10.1016/j.jnt.2021.06.009
- [7] Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. Singular distributions of random variables with independent digits of representation in numeral system with natural base and redundant alphabet. Matematychni Studii 2025, 63 (2), 199-209. doi:http://doi.org/10.30970/ms.63.2.199-209
- [8] Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P. Distribution of random variable represented by a binary fraction with three identically distributed redundant digits, Ukrainian Mathematical Journal 2022, 66 (1), 79-88
- [9] Mykytyuk I.O, Pratsiovytyi M.V. The binary numeral system with two redundant digits and its corresponding metric theory of numbers, Scientific Notes of M.P. Dragomanov National Pedagogical University. Series: Physical and Mathematical Sciences, 2003, vol. 4, 270-290.

- [10] *Pratsiovytyi M. V.* Convolutions of singular distributions, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1996, vol. 5 (5), 36–42.

Надійшло 11.11.2025

Vaskevych S.O., Vovk Yu.Yu., Pratsiovytyi O.M. *Numeral systems with non-zero redundancy and their applications in the theory of locally complex functions*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 152–160.

In this paper we study representations of real numbers in a numeral system with the base  $a > 1$  and alphabet (digits set)  $A \equiv \{0, 1, \dots, r\}$ ,  $a - 1 < r \in \mathbb{N}$  given by

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{a^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}, \alpha_n \in A.$$

Since the alphabet is redundant the numbers from the interval  $[0; \frac{r}{a-1}]$  have not a single representation and can even have a continuous set of different representations.

We describe the geometry (topological and metric properties) of such representations (the  $r_a$ -representations) in terms of cylinders defined by

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r_a} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{r_a}, a_n \in A\},$$

We analyze their properties in detail, including the specific nature of overlaps.

We present results on the structural, variational, topological, metric and partially fractal properties of the function defined by

$$f \left( x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(r+1)^n} \right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}, \alpha_n \in A.$$

We prove the function is continuous at all points of the interval  $[0, 1]$  that have a unique representation in the classical numeral system on the base  $r + 1$  and prove the function is discontinuous at points of a countable everywhere dense set in  $[0, 1]$ . Furthermore, we show that the function is nowhere monotonic and has unlimited variation.

In the particular case  $r = 1$  and  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , we specify fractal level sets with Hausdorff–Besicovitch dimension not less than  $-\log_a 2$ .

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.16>

РАЄВСЬКА І., РАЄВСЬКА М.

**ПРО ЕНДОЦИКЛІЧНІ 2-ПОРОДЖЕНІ ГРУПИ ПОРЯДКУ 256 ТА  
ЕКСПОНЕНТИ 16**

Застосовуючи систему комп'ютерної алгебри GAP, пакети SONATA та LocalNR, ми визначили всі ендоциклічні 2-породжені групи  $G$  порядку 256 та експоненти 16, а також навели список груп, які не будуть адитивними групами локальних майже-кілець.

*Ключові слова і фрази:* 2-породжена група, ендоциклічна група, локальне майже-кілець.

---

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine  
e-mail: [raeirina@imath.kiev.ua](mailto:raeirina@imath.kiev.ua), [raemarina@imath.kiev.ua](mailto:raemarina@imath.kiev.ua)

**Вступ**

Узагальненням кільця в тому сенсі, що додавання не обов'язково є комутативним і виконується хоча б один дистрибутивний закон, є майже-кілець. Очевидно, що кожне асоціативне кілець є майже-кілець, і кожна група є адитивною групою майже-кілець, але не обов'язково майже-кілець з одиницею.

Майже-кілець з одиницею називається локальним, якщо множина усіх необоротних елементів утворює підгрупу адитивної групи майже-кілець. Дослідження локальних майже-кілець було ініційовано Мексоном [5], який визначив ряд їх основних властивостей і, зокрема, довів, що адитивна група нуль-симетричного локального майже-кілець є  $p$ -групою.

Дослідження алгебраїчних структур методами теорії груп та комп'ютерної алгебри є важливим та перспективним напрямком досліджень не лише в алгебрі, а й інших галузях математики.

Список усіх локальних майже-кілець порядку не більше 31 можна отримати з пакету SONATA [1] системи комп'ютерної алгебри GAP [4]. Однак класифікація майже-кілець вищих порядків вимагає набагато складніших обчислень. Для локальних майже-кілець вони були реалізовані в новому GAP-пакеті LocalNR [12]. Поточна версія (ще не розповсюджена за допомогою GAP) містить 37599 локальних майже-кілець порядку не більше 361, за винятком порядків 128, 256 і деяких локальних майже-кілець порядків 32, 64 і 243.

Основні результати, що стосуються локальних майже-кілець, підсумовані в оглядах: Сисак [15], І. Раєвська та М. Раєвська [9].

---

УДК 512.6

2010 *Mathematics Subject Classification*: 16W30.

Відомо, що існує 51 неізоморфна група порядку  $32 = 2^5$ , з яких 35 є ендоциклічними групами, і лише 19 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець. Список та базу даних локальних майже-кілець порядку 32 можна знайти в [8], [12] та [13].

Зазначимо, що з 267 неізоморфних груп порядку  $64 = 2^6$ , 53 є 2-породженими групами, і лише 39 з цих груп є ендоциклічними. Більш того, 24 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець. Список та базу даних усіх локальних майже-кілець порядку 64 можна знайти в [9], [10], [12] та [14].

Існує 2328 неізоморфних груп порядку  $128 = 2^7$ , з яких 162 є 2-породженими групами: 5 груп мають експоненту 64, і лише 2 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець, 18 груп мають експоненту 32, і лише 6 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець, 65 груп мають експоненту 16, і лише 16 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець, 72 групи мають експоненту 8, не менше 17 груп є адитивними групами локальних майже-кілець, та 2 групи мають експоненту 4, і обидві ці групи є адитивними групами локальних майже-кілець. Список та базу даних локальних майже-кілець порядку 128 можна знайти в [7] та [11].

Зазначимо, що залишається відкритим питання, які неабелеві групи порядку  $p^n$  можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець. З іншого боку, Файгелсток [3] довів, що для кожного простого числа  $p$  та кожного цілого  $n > p$  існує група  $G$  порядку  $p^n$ , яка не є адитивною групою локального майже-кілець. Ним же було поставлене питання про характеристику неабелевих  $p$ -груп, які можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець.

В статті опишемо ендоциклічні 2-породжені групи порядку 256 та експоненти 16. А також визначимо, які з цих груп можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець.

## 1 ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нагадаємо означення майже-кілець.

**Означення 1.** Множина  $R$  з двома бінарними операціями “+” та “ $\cdot$ ” називається майже-кілецем, якщо:

- 1)  $(R, +)$  — група з нейтральним елементом 0,
- 2)  $(R, \cdot)$  — напівгрупа,
- 3)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  для всіх  $x, y, z \in R$ .

Таке майже-кілець називається лівим майже-кілецем. Якщо ж аксіому 3) замінити аксіомою  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$  для всіх  $x, y, z \in R$ , то отримаємо праве майже-кілець.

Група  $(R, +)$  позначається через  $R^+$  та називається адитивною групою, а її нейтральний елемент 0 — нулем майже-кілець  $R$ . З аксіоми 3 випливає, що  $r \cdot 0 = r \cdot (0 + 0) = r \cdot 0 + r \cdot 0$ , звідки отримуємо  $r \cdot 0 = 0$ . З цієї ж аксіоми витікає, що  $r \cdot (-s) = -(r \cdot s)$ . Майже-кілець  $R$  називається нуль-симетричним, якщо також  $0 \cdot x = 0$ .

**Означення 2.** Майже-кілець  $R$ , в якому напівгрупа  $(R, \cdot)$  є моноїдом з одиничним елементом  $i$ , називається майже-кілецем з одиницею  $i$ . Група всіх оборотних елементів цього моноїда позначається через  $R^*$  та називається мультиплікативною групою майже-кілець  $R$ , а її доповнення  $R \setminus R^*$  — множиною необоротних елементів із  $R$ .

**Означення 3.** *Майже-кільце  $R$  з одиницею називається локальним, якщо множина  $L$  всіх необоротних елементів із  $R$  утворює підгрупу адитивної групи  $R^+$ . В цьому випадку  $L$  будемо називати підгрупою необоротних елементів майже-кільця  $R$ .*

**Теорема 1** ([5]). *Якщо  $R$  — скінченне локальне майже-кільце, яке не є майже-полем, то  $|R| \leq |L|^2$ .*

Нехай  $G$  — група та  $\text{End } G$  — множина всіх її ендоморфізмів, яку можна розглядати як напівгрупу відносно операції композиції ендоморфізмів. Для кожного  $g \in G$  позначимо через  $g^{\text{End } G}$  множину  $\{g^\alpha \mid \alpha \in \text{End } G\}$  всіх образів елемента  $g$  відносно ендоморфізмів із  $\text{End } G$ .

Наведемо наступне означення (див., наприклад, [6]).

**Означення 4.** *Групу  $G$  назвемо ендоморфно циклічною (або ендоциклічною), коли в ній існує елемент  $g$ , для якого  $G = g^{\text{End } G}$ .*

## 2 ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нагадаємо, що експонентою групи є найменше спільне кратне порядків її елементів. Зокрема, експонентою скінченної  $p$ -групи є максимальний порядок її елементів.

Наступна лема визначає експоненту адитивної групи скінченного майже-кільця з одиницею [2, Theorem 3].

**Лема 1.** *Експонента адитивної групи скінченного майже-кільця  $R$  з одиницею дорівнює адитивному порядку його одиниці, який співпадає з адитивним порядком кожного елемента його мультиплікативної групи  $R^*$ .*

**Лема 2** ([9]). *Нехай  $R$  — локальне майже-кільце порядку  $p^n$ . Тоді  $|R^*| = p^n - p^k$ , де  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k < n$ .*

Позначимо через  $U(G)$  множину всіх елементів групи  $G$ , порядок яких дорівнює експоненті цієї групи.

Безпосередній наслідок леми 2.

**Наслідок 1.** *Якщо група  $G$  є адитивною групою локального майже-кільця  $R$  порядку  $p^n$ , тоді  $U(G)$  не менше  $p^n - p^{n-1}$ .*

Існує 56092 неізоморфних груп порядку  $256 = 2^8$ , з яких 540 є 2-породженими групами: 3 групи мають експоненту 128, 9 груп мають експоненту 64, 30 груп мають експоненту 32, 107 груп мають експоненту 16, 84 групи мають експоненту 8, та 3 групи мають експоненту 4.

Нехай  $[n, i]$  —  $i$ -та група порядку  $n$  у бібліотеці SmallGroups в GAP.

Застосовуючи систему комп'ютерної алгебри GAP, пакети SONATA та LocalNR, ми визначили всі ендоциклічні 2-породжені групи  $G$  порядку 256 експоненти 16 та порядок множини всіх елементів групи  $G$ , порядок яких дорівнює експоненті цієї групи.

**Лема 3.** *Наступні 2-породжені групи  $G$  порядку 256 та експоненти 16 є ендоциклічними, та вказано порядок  $U(G)$  для кожної групи  $G$ :*

$\text{IdGroup}(G)$	$\text{StructureDescription}(G)$	$ U(G) $
[256, 39]	$C_{16} \times C_{16}$	192

*Продовження на наступній сторінці*

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$ U(G) $
[256, 40]	$C_{16} \rtimes C_{16}$	192
[256, 41]	$C_{16} \rtimes C_{16}$	192
[256, 42]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_2$	128
[256, 43]	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_{16}$	128
[256, 44]	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_{16}) \times C_2$	128
[256, 45]	$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_{16}$	128
[256, 46]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_2$	128
[256, 47]	$(C_4 \times C_2) \cdot ((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 48]	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_{16}) \times C_2$	128
[256, 49]	$(C_4 \times C_2) \cdot ((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 50]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_{16}$	128
[256, 51]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_{16}$	128
[256, 52]	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_{16}$	128
[256, 53]	$(C_4 \times C_2) \cdot ((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 54]	$(C_4 \times C_2) \cdot ((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 56]	$(C_{16} \times C_8) \rtimes C_2$	128
[256, 57]	$Q_{16} \rtimes C_{16}$	128
[256, 58]	$(C_8 \rtimes C_{16}) \times C_2$	128
[256, 59]	$Q_{16} \rtimes C_{16}$	128
[256, 64]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_2$	64
[256, 80]	$(C_8 \rtimes C_{16}) \times C_2$	128
[256, 84]	$(C_8 \rtimes C_{16}) \times C_2$	128
[256, 87]	$C_{16} \rtimes C_{16}$	192
[256, 88]	$C_{16} \rtimes C_{16}$	192
[256, 89]	$C_{16} \rtimes C_{16}$	192
[256, 90]	$((C_{16} \times C_2) \times C_4) \times C_2$	128
[256, 93]	$((C_{16} \times C_2) \times C_4) \times C_2$	128
[256, 95]	$((C_{16} \times C_2) \times C_4) \times C_2$	128
[256, 96]	$(C_2 \times C_2) \cdot ((C_4 \times C_8) \times C_2) =$ $= (C_4 \times C_4) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 97]	$((C_{16} \times C_2) \times C_4) \times C_2$	64
[256, 98]	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_8) \times C_2$	64
[256, 99]	$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_8$	64
[256, 100]	$((C_{16} \times C_2) \times C_4) \times C_2$	64
[256, 101]	$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_8$	64
[256, 102]	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_8) \times C_2$	102
[256, 104]	$((C_{16} \times C_2) \times C_4) \times C_2$	128
[256, 105]	$(C_2 \times C_2) \cdot ((C_8 \times C_4) \times C_2) =$ $= (C_4 \times C_4) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 106]	$(C_4 \rtimes C_4) \rtimes C_{16}$	128

*Продовження на наступній сторінці*

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$ U(G) $
[256, 107]	$(C_8 \times C_4) \times C_8$	64
[256, 109]	$(C_8 \times C_4) \times C_8$	64
[256, 113]	$(C_8 \times C_4) \times C_8$	64
[256, 114]	$(C_8 \times C_4) \times C_8$	64
[256, 115]	$(C_8 \times C_4) \times C_8$	64
[256, 116]	$(C_8 \times C_4) \times C_8$	128
[256, 121]	$(C_2 \times Q_8) \times C_{16}$	128
[256, 124]	$((C_2 \times C_2).(C_2 \times C_2 \times C_2)) \times C_8$	128
[256, 125]	$(C_4 \times C_2).((C_2 \times C_2 \times C_2) \times C_4) =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2).(C_8 \times C_2)$	128
[256, 126]	$(C_{16} \times C_2) \times C_8$	128
[256, 127]	$(C_{16} \times C_2) \times C_8$	128
[256, 130]	$(C_{16} \times C_2) \times C_8$	128
[256, 131]	$(C_{16} \times C_2) \times C_8$	128
[256, 133]	$(C_{16} \times C_4) \times C_4$	128
[256, 134]	$(C_{16} \times C_4) \times C_4$	128
[256, 136]	$(C_8 \times C_2) \times C_{16}$	128
[256, 137]	$(C_4 \times C_2).((C_4 \times C_2) \times C_4) =$ $= (C_4 \times C_2).(C_8 \times C_4)$	128
[256, 139]	$(C_4 \times C_{16}) \times C_4$	128
[256, 140]	$(C_8 \times C_2) \times C_{16}$	128
[256, 151]	$(C_4 \times C_2).((C_4 \times C_2) \times C_4) =$ $= (C_4 \times C_2).(C_8 \times C_4)$	128
[256, 155]	$(C_8 \times C_2) \times C_{16}$	128
[256, 159]	$(C_8 \times C_8) \times C_4$	64
[256, 160]	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \times C_8$	64
[256, 161]	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \times C_8$	64
[256, 162]	$(C_8 \times C_8) \times C_4$	64
[256, 163]	$(C_8 \times C_8) \times C_4$	64
[256, 164]	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \times C_8$	64
[256, 165]	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \times C_8$	64
[256, 166]	$(C_8 \times C_8) \times C_4$	64
[256, 167]	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \times C_4$	64
[256, 168]	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \times C_4$	64
[256, 169]	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \times C_4$	64
[256, 170]	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \times C_4$	64
[256, 171]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_4$	128
[256, 172]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_4$	128
[256, 173]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_4$	128
[256, 174]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_4$	128
[256, 179]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_4$	128
[256, 180]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_4$	128
[256, 181]	$((C_{16} \times C_2) \times C_2) \times C_4$	128
[256, 182]	$(C_8 \times C_2) \times C_{16}$	128

Продовження на наступній сторінці

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$ U(G) $
[256, 183]	$(C_4 \times C_2) \cdot ((C_4 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_4)$	128
[256, 184]	$(C_4 \times C_2) \cdot ((C_4 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_2 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_4)$	128
[256, 185]	$(C_4 \times C_4) \cdot ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_4)$	128
[256, 186]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	128
[256, 187]	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_{16}$	128
[256, 197]	$((C_4 \rtimes C_4) \rtimes C_4) \rtimes C_4$	128
[256, 218]	$((C_4 \rtimes C_4) \rtimes C_4) \rtimes C_4$	64
[256, 221]	$(C_2 \times (C_8 \times C_4)) \rtimes C_4$	64
[256, 242]	$(C_2 \times (C_8 \times C_4)) \rtimes C_4$	64
[256, 246]	$(C_2 \times (C_8 \times C_4)) \rtimes C_4$	64
[256, 250]	$(C_2 \times (C_8 \times C_4)) \rtimes C_4$	64
[256, 256]	$(C_8 \cdot D_8 = C_4 \cdot (C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$	128
[256, 257]	$(C_8 \cdot D_8 = C_4 \cdot (C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$	128
[256, 328]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2 \rtimes C_2$	128
[256, 329]	$C_2 \cdot (((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2 =$ $= (C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 330]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2 \rtimes C_2$	128
[256, 331]	$C_2 \cdot (((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2 =$ $= (C_4 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 344]	$(C_4 \cdot ((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	128
[256, 345]	$(C_4 \cdot ((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	128
[256, 348]	$C_4 \cdot ((C_2 \times Q_8) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_4) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 349]	$C_4 \cdot ((C_2 \times Q_8) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_4) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 356]	$C_4 \cdot ((C_4 \times C_4) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_4) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 357]	$C_4 \cdot ((C_4 \times C_4) \rtimes C_4) =$ $= (C_4 \times C_4) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 361]	$C_4 \cdot (((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_4) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 362]	$C_4 \cdot (((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_4) \cdot (C_8 \times C_2)$	128
[256, 384]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2 \rtimes C_2$	64

Застосовуючи до леми 3 наслідок 1 маємо наступне твердження.

**Лема 4.** *Наступні 2-породжені ендосиклічні групи  $G$  порядку 256 та експоненти 16 не є адитивними групами локальних майже-кілець:*

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$
[256, 64]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2 \rtimes C_2$
[256, 97]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$
[256, 98]	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_8) \rtimes C_2$
[256, 99]	$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_8$
[256, 100]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$
[256, 101]	$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_8$
[256, 102]	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_8) \rtimes C_2$
[256, 107]	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
[256, 109]	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
[256, 113]	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
[256, 114]	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
[256, 115]	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_8$
[256, 159]	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$
[256, 160]	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$
[256, 161]	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$
[256, 162]	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$
[256, 163]	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$
[256, 164]	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$
[256, 165]	$(C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_8$
[256, 166]	$(C_8 \rtimes C_8) \rtimes C_4$
[256, 167]	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$
[256, 168]	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$
[256, 169]	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$
[256, 170]	$(C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)) \rtimes C_4$
[256, 218]	$((C_4 \times C_4) \rtimes C_4) \rtimes C_4$
[256, 221]	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$
[256, 242]	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$
[256, 246]	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$
[256, 250]	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_4)) \rtimes C_4$
[256, 384]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2 \rtimes C_2$

Леми 3 і 4 є результатами обчислень, виконаних за допомогою GAP та пакета LocalNR (див. [https://github.com/raemarina/256\\_exp\\_16](https://github.com/raemarina/256_exp_16)).

Робота підтримана грантом Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, I.Yu.R., M.Yu.R.).

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Aichinger E., Binder F., Ecker Ju., Mayr P. and Noebauer C. *SONATA — system of near-rings and their applications*, GAP package, Version 2.9.1. 2018, <https://gap-packages.github.io/sonata/>

- [2] Clay J.R., Malone Jr. *The near-rings with identities on certain finite groups*. Math. Scand. 1966, **19**, 146–150.  
<https://www.mscaand.dk/article/view/10803/8824>
- [3] Feigelstock S. *Additive groups of local near-rings*. Comm. Algebra 2006, **34** (2), 743–747.  
<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00927870500388042>
- [4] *The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.14.0. 2024,  
<https://www.gap-system.org>
- [5] Maxon C.J. *On local near-rings*. Math. Z. 1968, **106**, 197–205.  
<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01110133>
- [6] Oxford E., Walls Gary. *Endocyclic groups*. Arch. Math. (Basel) 1979, **32** (2), 109–113.  
<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01238476>
- [7] Raevska I. *Local nearrings with additive groups of order 128*. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics 2024, **45** (2), 110–114.  
[https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).110-114](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).110-114)
- [8] Raievska I., Raievska M. *Finite local nearrings*. Mohyla Mathematical Journal 2018, **1**, 38–48.  
<https://mmj.ukma.edu.ua/article/view/152611/151700>
- [9] Raievska I., Raievska M. *Local nearrings, their structure and GAP*. Ukr. Mat. Zh. 2024, **76** (11), 1629–1644; translated Ukr. Math. J. 2025, **76** (11), 1831–1848.  
<https://doi.org/10.1007/s11253-025-02426-y>
- [10] Raevska I., Raevska M., Sysak Ya. Local nearrings of order 64. International mathematical conference “Groups and Actions: Geometry and Dynamics, dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchansky” (December 19–22, 2016, Kyiv, Ukraine). Book of abstracts. — Kyiv, 2016. — P. 43.
- [11] Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. *DatabaseEndom128: (v0.2)* [Data set], 2022. Zenodo,  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.6538441>
- [12] Raievska I., Raievska M., Sysak Y. *LocalNR, Package of local nearrings*, Version 1.0.4. 2024 (GAP package),  
<https://gap-packages.github.io/LocalNR>
- [13] Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. *DatabaseEndom32: (v1.0.2)* [Data set], 2024. Zenodo,  
<https://zenodo.org/records/10820301>
- [14] Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. *DatabaseEndom64: (v1.0.1)* [Data set], 2024. Zenodo,  
<https://zenodo.org/records/10820320>
- [15] Sysak Ya.P. *Products of groups and local nearrings*. Note di Mat. 2008, **28** (2), 179–213.  
<http://siba-ese.unisalento.it/index.php/notemat/article/view/11153>

*Надійшло 14.11.2025*

---

Raievska I., Raievska M. *Endocyclic 2-generated groups of order 256 of exponent 16*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 161–169.

Using GAP, the SONATA and LocalNR packages, we have defined all endocyclic 2-generated groups  $G$  of order 256 and exponent 16, and listed the groups that can not be additive groups of local nearrings.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.17>

ЄЛАГІН В.О.

## НЕСКІНЧЕННІ ЗГОРТКИ БЕРНУЛЛІ, КЕРОВАНІ НЕГА-ДВІЙКОВИМ РЯДОМ

У роботі вивчаються нескінченні згортки Бернуллі, керовані нега-двійковим рядом:  $\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n}$ , а саме розподіли випадкових величин виду  $\xi = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(-2)^n} = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{-2}$ , де  $(\xi_n)$  – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значення 0 та 1 з ймовірностями  $p_{0n}$  та  $p_{1n}$  відповідно. Використовуючи формули зв'язку нега-двійкового та класичного двійкового зображень, вказано необхідні та достатні умови дискретності, сингулярності, неперервності, рівномірності, експоненційності розподілу  $\xi$ . Встановлено лебегівську структуру розподілу випадкової величини  $\tau = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \dots}^{-2}$ , за умови, що цифри  $\tau_n$  її нега-двійкового зображення утворюють однорідний ланцюг Маркова.

*Ключові слова і фрази:* Нега-двійкове зображення чисел, циліндр нега-двійкового зображення, згортки Бернуллі, сингулярний розподіл, експоненційний розподіл, дискретний розподіл, ланцюг Маркова.

---

Institution of mathematics of NAS Ukraine  
e-mail: [fracta.art@gmail.com](mailto:fracta.art@gmail.com)

### ВСТУП

Двосимвольні системи кодування дійсних чисел ефективно використовуються в науці [1, 5] і техніці [4] в різних цілях. Найпростішими з тополого-метричної точки зору є класична двійкова та нега-двійкова системи. Остання має від'ємну основу  $-2$ . Їй відповідна система кодування чисел ґрунтується на розкладах чисел в нега-двійковий ряд (знакопозначений двійковий ряд). Метрична теорія нега-двійкового зображення чисел схожа з відповідною теорією класичного двійкового зображення (існують формули взаємозв'язку). Разом з цим нега-двійкове зображення не є топологічно-еквівалентним класичному двійковому. Його наявність розширює можливості для конструювання математичних об'єктів з локально складною структурою та фрактальними властивостями. Дана робота присвячена використанню нега-двійкового зображення чисел у дослідженні розподілів випадкових величин, зокрема нескінченних згорток Бернуллі.

---

УДК 519.21

2010 *Mathematics Subject Classification*: 60G30.

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine00014586, Yelahin V.O.)

1 НЕГА-ДВІЙКОВЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Нега-двійковим рядом називається ряд:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \dots \quad (1)$$

Нехай  $A = \{0, 1\}$  – алфавіт,  $L \equiv A \times A \times \dots$  – простір послідовностей елементів алфавіту. Відомо, що для довільного числа  $x \in [0; 1]$  існує послідовність  $(\alpha_n) \in L$ , така, що

$$x = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-2)^n} = \frac{2}{3} - \left( \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} - \dots \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{-2} \quad (2)$$

Подання числа  $x$  рядом (2) називається його нега-двійковим представленням, а символічний запис  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{-2}$  – нега-двійковим зображенням [8]. Нега-двійкове зображення чисел має нульову надлишковість, тобто кожне число має не більше двох нега-двійкових зображень, причому тих, що мають їх два, лише зліченна множина. Нега-двійкове зображення є топологічно еквівалентним ланцюговому  $A_2$ -зображенню чисел [1].

Циліндром рангу  $n$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_n$ , що відповідає нега-двійковому зображенню чисел відрізка  $[0; 1]$ , називають [1] множину

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-2} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \beta_1 \beta_2 \dots}^{-2}, (\beta_n) \in L\}.$$

При цьому  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-2} = [u - v; u + w]$ , де  $u = \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(-2)^i}$ ,

$$v = \begin{cases} \frac{1}{3 \cdot 2^n} & \text{для непарних } n, \\ \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} & \text{для парних } n; \end{cases} \quad w = \begin{cases} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} & \text{для непарних } n, \\ \frac{1}{3 \cdot 2^n} & \text{для парних } n. \end{cases}$$

Деякі властивості циліндрів:

1)  $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} 1}^{-2} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} 0}^{-2}, \quad \max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} 0}^{-2} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1} 1}^{-2};$

2)  $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{-2}| = \frac{1}{2^m}, \quad |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{-2}| = |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^{-2}| + |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1}^{-2}|;$

3) основне метричне відношення має вигляд:

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^{-2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{-2}|} = \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1}^{-2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{-2}|} = \frac{1}{2} = \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^2|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^2|} = \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1}^2|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^2|},$$

4)  $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{-2} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_m}^{-2}.$

2 ЗГОРТКИ БЕРНУЛЛІ, КЕРОВАНІ НЕГА-ДВІЙКОВИМ РЯДОМ

**Означення 1.** Якщо  $(\xi_n)$  – послідовність випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями  $p_{0n}$  та  $p_{1n}$  відповідно, то розподіл випадкової величини

$$\xi = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(-2)^n} = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{-2}$$

називається [9] нескінченною згорткою Бернуллі, керованою рядом (1).

**Лема 1.** Якщо випадкова величина  $\xi$  має рівномірний розподіл на відрізку  $[0; 1]$ , то цифри її нега-двійкового зображення є незалежними, однаково розподіленими, причому  $P\{\xi_n = 0\} = P\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{2}$ .

*Доведення.* Оскільки розподіл  $\xi$  є рівномірним на  $[0, 1]$ , то він є неперервним, отже,  $P\{\xi = x\} = 0$  для всіх  $x \in [0, 1]$ , і  $P\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{-2}\} = |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{-2}| = 2^{-m}$ . Тому

$$P\{\xi_1 = 0\} = P\{\xi \in \Delta_0^{-2}\} = P\{\xi > \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi \in \Delta_1^{-2}\} = P\{\xi < \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$P\{\xi_n = 0\} = P\{\xi \in \bigcup_{(c_1, \dots, c_{n-1}) \in A^{n-1}} \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 0}^{-2}\} = \sum_{(c_1, \dots, c_{n-1}) \in A^{n-1}} P(\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 0}^{-2}) = \frac{1}{2},$$

$$P\{\xi_n = 1\} = P\{\xi \in \bigcup_{(c_1, \dots, c_{n-1}) \in A^{n-1}} \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 1}^{-2}\} = \sum_{(c_1, \dots, c_{n-1}) \in A^{n-1}} P(\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 1}^{-2}) = \frac{1}{2},$$

оскільки події в цьому об'єднанні є несумісними і ймовірності не залежать від набору цифр  $(c_1, \dots, c_{n-1})$ , то розподіл  $\xi_n$  не залежить від розподілів  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ .  $\square$

**Теорема 1.** Якщо  $(\xi_n)$  – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значення 0 та 1 з ймовірностями  $p_{0n}$  і  $p_{1n}$ , то розподіл випадкової величини  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{-2}$  має чистий лебегівський тип, причому:

$$1) \text{ чисто дискретний, якщо } \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} > 0;$$

$$2) \text{ чисто абсолютно неперервний, якщо } \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2p_{0k})^2 < \infty;$$

$$3) \text{ чисто сингулярний, якщо } \begin{cases} \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} = 0; \\ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2p_{0k})^2 = \infty. \end{cases}$$

*Доведення.* Твердження теореми впливає з

- 1) аналогічного твердження для класичного двійкового зображення [6];
- 2) формули взаємозв'язку між нега-двійковим зображенням та класичним двійковим зображенням [2]:

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k} \dots}^{-2} = \Delta_{[1-\alpha_1] \alpha_2 [1-\alpha_3] \alpha_4 \dots [1-\alpha_{2k-1}] \alpha_{2k} \dots}^{-2}. \quad (3)$$

- 3) основного метричного співвідношення для циліндрів.  $\square$

**Теорема 2.** Нехай  $(\eta_n)$  – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями  $p_{0n}$  та  $p_{1n}$  відповідно,  $0 \neq c$  – деяка константа. Якщо

$$p_{0,2k-1} = \frac{e^{\frac{c}{2^{2k-1}}}}{1 + e^{\frac{c}{2^{2k-1}}}}, \quad p_{1,2k-1} = \frac{1}{1 + e^{\frac{c}{2^{2k-1}}}},$$

$$p_{0,2k} = \frac{1}{1 + e^{\frac{c}{2^{2k}}}}, \quad p_{1,2k} = \frac{e^{\frac{c}{2^{2k}}}}{1 + e^{\frac{c}{2^{2k}}}}$$

то випадкова величина  $\eta = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n}^{-2}$  має експоненційний розподіл на відрізку  $[0; 1]$ .

*Доведення.* Дане твердження є наслідком формули взаємозв'язку між нега-двійковим та класичним двійковим зображеннями (3) і відомого факту [3]: випадкова величина  $\tau = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n}^2$ , цифри  $(\tau_n)$  класичного двійкового зображення якої є незалежними і розподіленими за законами:

$$P\{\tau_n = 0\} = \frac{1}{1 + e^{\frac{c}{2^n}}}, \quad P\{\tau_n = 1\} = \frac{e^{\frac{c}{2^n}}}{1 + e^{\frac{c}{2^n}}},$$

має експоненційний розподіл на відрізку  $[0; 1]$  зі щільністю  $f(x) = \frac{ce^{cx}}{e^c - 1}$ . □

**Теорема 3.** Якщо  $(\xi_n)$  – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями

$$p_{0n} = \frac{1}{1 + e^{\frac{c}{2^n}}}, \quad p_{1n} = \frac{e^{\frac{c}{2^n}}}{1 + e^{\frac{c}{2^n}}}, \tag{4}$$

то випадкова величина  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}^{-2}$  має абсолютно неперервний розподіл.

*Доведення.* Випадкова величина  $\xi$  буде мати абсолютно неперервний розподіл тоді і лише тоді, коли буде мати абсолютно неперервний розподіл випадкова величина  $\tau$  з незалежними двійковими цифрами, що мають такі ж розподіли як цифри  $\xi_n$  випадкової величини  $\xi$ . Отже, використовуючи критерій абсолютної неперервності, який відомий з робіт [6, 7], констатуємо, що  $\xi$  матиме абсолютно неперервний розподіл тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1 - 2p_{0k})^2 + (1 - 2p_{1k}^2)] < \infty.$$

Оскільки, ця умова виконується для ймовірностей, заданих формулами (4), то розподіл  $\xi$  є абсолютно неперервним, але не експоненційним. □

### 3 ХАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦІЯ НЕСКІНЧЕННОЇ ЗГОРТКИ БЕРНУЛЛІ

Нагадаємо, що характеристичною функцією розподілу випадкової величини  $\zeta$  з функцією розподілу  $F_\zeta(x)$  називається [2] комплекснозначна функція  $f_\zeta(t)$ , що є математичним сподіванням випадкової величини  $e^{it\zeta}$ , тобто

$$f_\zeta(t) = M e^{it\zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\zeta(x).$$

**Лема 2.** Нехай  $\xi = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(-2)^n} = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}^{-2}$  – нескінченна згортка Бернуллі, де  $\xi_n$  набувають значень 0 та 1 з ймовірностями  $p_{0n}$  та  $p_{1n}$ . Характеристична функція випадкової величини  $\xi$  буде мати вигляд:

$$f_\xi(t) = M e^{it(\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(-2)^n})} = e^{\frac{2it}{3}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (p_{0k} + p_{1k} \cdot e^{\frac{it}{(-2)^k}}),$$

а її модуль  $-|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2(\frac{t}{2^{k+1}})}$ .

*Доведення.* Згідно з означенням характеристичної функції:

$$\begin{aligned}
 f_{\xi}(t) &= M e^{it(\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(-2)^n})} = M e^{\frac{2it}{3}} \cdot M e^{it \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(-2)^n}} = \\
 &= e^{\frac{2it}{3}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} M e^{it \frac{\xi_k}{(-2)^k}} = e^{\frac{2it}{3}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (p_{0k} + p_{1k} \cdot e^{\frac{it}{(-2)^k}}). \\
 |f_{\xi}(t)| &= |e^{\frac{2it}{3}}| \cdot \prod_{k=1}^{\infty} |f_{\xi_k}| = 1 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} |p_{0k} + p_{1k} \cos(\frac{t}{(-2)^k}) + ip_{1k} \sin(\frac{t}{(-2)^k})| = \\
 &= \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_{0k}^2 + 2p_{0k}p_{1k} \cos(\frac{t}{(-2)^k}) + p_{1k}^2 \cos^2(\frac{t}{(-2)^k}) + p_{1k}^2 \sin^2(\frac{t}{(-2)^k})} = \\
 &= \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + 2p_{0k}p_{1k}(\cos(\frac{t}{2^k}) - 1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2(\frac{t}{2^{k+1}})} \quad \square.
 \end{aligned}$$

**Теорема 4.** Для того, щоб характеристична функція  $f_{\xi}$  випадкової величини  $\xi$  задовольняла умову  $L_{\xi} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_{\xi}(t)| = 0$ , необхідно і достатньо, щоб  $p_{0k} \rightarrow \frac{1}{2}$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

*Доведення.* Модуль характеристичної функції випадкової величини  $\xi$  дорівнює модулю характеристичної функції випадкової величини  $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{2^k}$ , де цифри  $\tau_k$  незалежні і набувають значення 0 та 1 з ймовірностями  $p_{0k}$  та  $p_{1k}$  відповідно. Тоді  $L_{\xi} = L_{\tau}$ . Поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини  $\tau$  на нескінченності відома з роботи [1]. Отже, для  $L_{\xi}$  твердження вірне.  $\square$

**Наслідок 1.** За умови  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{0k} \neq \frac{1}{2}$  розподіл випадкової величини  $\xi \in$  сингулярним.

#### 4 Випадкові величини, цифри яких мають марковську залежність

**Теорема 5.** Нехай  $(\tau_n)$  – послідовність випадкових величин  $\tau_n$ , які набувають значень 0 та 1, утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями  $p_0$  та  $p_1$  і матрицею перехідних ймовірностей  $\|p_{ik}\|$ ,  $i, k \in \{0, 1\}$ . Тоді випадкова величина  $\tau = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n}^{-2}$  матиме:

- 1) дискретний розподіл з двома атомами, коли матриця перехідних ймовірностей  $\|p_{ij}\|$  містить два нулі,
- 2) дискретний розподіл із зліченною множиною атомів, якщо  $\|p_{ij}\|$  містить один нуль та  $p_{00}p_{11} \neq 0$ ,
- 3) сингулярний розподіл канторівського типу, коли матриця  $\|p_{ij}\|$  містить один нуль та  $p_{00}p_{11} = 0$ ,
- 4) неперервний розподіл, коли матриця перехідних ймовірностей не містить нулів.

*Доведення.* 1. Стохастична матриця  $2 \times 2$  не може мати більше ніж два нулі. Якщо матриця  $\|p_{ik}\|$  має два нулі, то очевидно, що атомами розподілу  $\tau \in$  точки:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Delta_{(1)}^{-2}, & x_2 &= \Delta_{0(1)}^{-2}, & \text{якщо } p_{00} &= p_{10} = 0; \\ x_3 &= \Delta_{(0)}^{-2}, & x_4 &= \Delta_{1(0)}^{-2}, & \text{якщо } p_{01} &= p_{11} = 0; \\ x_5 &= \Delta_{(01)}^{-2}, & x_6 &= \Delta_{(10)}^{-2}, & \text{якщо } p_{00} &= p_{11} = 0; \\ x_7 &= \Delta_{(0)}^{-2}, & x_8 &= \Delta_{(1)}^{-2}, & \text{якщо } p_{01} &= p_{10} = 0. \end{aligned}$$

2. Нехай матриця  $\|p_{ik}\|$  містить лише один нуль.

Якщо  $p_{10} = 0$ , атомами розподілу будуть числа виду  $\Delta_{(1)}^{-2}, \Delta_{0(1)}^{-2}, \Delta_{00(1)}^{-2}, \dots, \Delta_{0\dots0(1)}^{-2}$ . Якщо  $p_{01} = 0$ , атомами розподілу будуть числа виду  $\Delta_{(0)}^{-2}, \Delta_{1(0)}^{-2}, \Delta_{11(0)}^{-2}, \dots, \Delta_{1\dots1(0)}^{-2}$ . Якщо  $p_{ii} = 0$ , то спектр у цьому випадку складається з точок  $x \in [0, 1]$ , які в нега-двійковому розкладі не містять пар послідовних цифр  $(ii)$ . Розглянемо множину точок

$$D = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-2}, (\alpha_{2m-1}(x), \alpha_{2m}(x)) \in \{(1-i, 1-i), (i, 1-i)\}, m \in \mathbb{N}\}.$$

Між  $D$  і  $[0, 1]$  можна встановити бієктивне відображення:

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2m} \dots}^{-2} \longleftrightarrow y = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m \dots}^{-2},$$

де

$$\gamma_m(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\alpha_{2m-1}(x), \alpha_{2m}(x)) = (1-i, 1-i), \\ 1, & \text{якщо } (\alpha_{2m-1}(x), \alpha_{2m}(x)) = (i, 1-i). \end{cases}$$

Оскільки кожне число з множини  $[0; 1]$  має нега-двійкове зображення, то спектр є континуальними, а його розмірність буде розв'язком рівняння  $\frac{1}{2}^x + (1 + \frac{1}{2})^x = 1$ , і дорівнює  $1 - \log_2(\sqrt{5} - 1)$ .

Якщо матриця перехідних ймовірностей не містить нулів, то очевидно, що  $\tau_n$  може набувати будь-яких значень з відрізка  $(0;1)$ , а отже, розподіл буде неперервним.  $\square$

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Pratsiovytyi M.V. Two-symbol systems of encoding of real numbers and their applications. Naukova Dumka, Kyiv (2022). (in Ukrainian)
- [2] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach to the study of singular distributions. Nats. Pedagog. Dragomanov Univ., Kyiv (1998). (in Ukrainian)
- [3] Salem, R. On Some Singular Monotonic Functions Which Are Strictly Increasing. Transactions of the American Mathematical Society 53, no. 3 (1943), pp. 427–439. <https://doi.org/10.2307/1990210>.
- [4] Cherri, A., Kamal, H. (2004). Parallel negabinary signed-digit arithmetic operations: One-step negabinary, one-step ternary, and one-step quaternary addition algorithms. Proceedings of SPIE, 5484, 35–45. <https://doi.org/10.1117/12.568845>.
- [5] Pratsiovytyi M., Goncharenko Y., Lysenko I. Nega-binary representation of real numbers and its application. Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser. 1. Fiz.-Mat. Nauky, 2015. № 17. pp. 83–106. (in Ukrainian)

- [6] Marsaglia, George. Random Variables with Independent Binary Digits. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 42, no. 6, 1971, pp. 1922–29.
- [7] Chatterji, S. D. Certain induced measures on the unit interval. *Journal of the London Mathematical Society* 1.1 (1963): 325–331.
- [8] Pratsiovytyi M.V. Nega-Cantor Representations of Real Numbers as Trivial Recodings of Cantor Representations (negative s-adic recodings of s-adic Representations). *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2017, 14(4), pp. 167–177. (in Ukrainian)
- [9] Goncharenko Y. Convolutions of Distributions of Sums of Random Series of a Special Type, *Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser. 1. Fiz.-Mat. Nauky* (2003), no. 4, pp. 216–232. (in Ukrainian)

Надійшло 01.12.2025

---

Yelagin V.O. *Infinite Bernoulli Convolutions Governed by a Negabinary Expansion*, *Bukovinian Math. Journal*. **13**, 2 (2025), 170–176.

This paper investigates infinite Bernoulli convolutions governed by a negabinary expansion:  $\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{-n}}$ , namely the distributions of random variables of the form  $\xi = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(-2)^n} = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{-2}$ , where  $(\xi_n)$  – is a sequence of independent random variables taking values 0 and 1 with probabilities  $p_{0n}$  and  $p_{1n}$  respectively.

Using the transformation formulas linking the negabinary expansion with the classical binary representation, we establish necessary and sufficient conditions for the distribution of  $\xi$  to be discrete, singular, continuous, uniform, or exponential.

The Lebesgue structure of the distribution of the random variable  $\tau = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \dots}^{-2}$  under the assumption that the digits  $\tau_n$  of its negabinary expansion form a homogeneous Markov chain has been determined. Negabinary representation, negabinary cylinders, Bernoulli convolutions, singular distribution, exponential distribution, Markov chain. ■

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.18>

LITOVCHENKO V.A.

## EXTENSION OF THE CLASS OF INITIAL DATA OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE ISOTROPIC SUPERDIFFUSION EQUATION

We consider the Cauchy problem for the isotropic superdiffusion equation with the Riesz fractional differentiation operator of order  $\alpha \in (0; 2)$ , which generalizes the classical heat conduction equation. Such models arise in the description of anomalous transport of energy and mass in fractal and porous media, plasma, and other complex structures exhibiting superdiffusive behavior. The Riesz operator is the generator of symmetric  $\alpha$ -stable Levy processes; therefore, the solution of the Cauchy problem may be interpreted as the probability density of the corresponding stochastic process.

We prove the existence of a classical bounded smooth solution, even when the initial data contain a finite number of integrable discontinuities of the second kind.

*Key words and phrases:* Isotropic superdiffusion equation; Riesz operator; fractional Laplacian; Cauchy problem; symmetric  $\alpha$ -stable Levy process.

---

Yu. Fedkovych Chernivtsi National University, Kotsubinsky str. 2, Chernivtsi – 58012, Ukraine  
e-mail: [v.litovchenko@chnu.edu.ua](mailto:v.litovchenko@chnu.edu.ua)

### INTRODUCTION

Consider the equation

$$\partial_t u(t; x) + a(-\Delta)_x^{\alpha/2} u(t; x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

where  $a > 0$ ,  $u$  is the unknown function,  $\partial_t$  denotes the partial derivative with respect to the variable  $t$ , and  $A_x^\alpha \equiv (-\Delta)_x^{\alpha/2}$  is the Riesz fractional differentiation operator (i.e., the fractional Laplacian of order  $\alpha \in (0; 2)$ ) acting in the variable  $x \in \mathbb{R}^n$  according to the rule

$$(A_x^\alpha f)(x) = c(\alpha) \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(x+y) + [\alpha](y, \text{grad} f(x))}{|y|^{n+\alpha}} dy, & \alpha \neq 1, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{f(x) - f(x+y)}{|y|^{n+\alpha}} dy, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (2)$$

---

УДК 517.937

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35S11.

Information on some grant ...

Here  $[\cdot]$  denotes the integer part, and

$$c(\alpha) = \begin{cases} \frac{2^\alpha \Gamma(1+\alpha/2) \Gamma((n+\alpha)/2)}{\pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2) \Gamma(1-\alpha/2)}, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}, & \alpha = 1, \\ \frac{\alpha \Gamma((3-\alpha)/2) \Gamma((n+\alpha)/2)}{\pi^{(n+1)/2} \Gamma(2-\alpha)}, & 1 < \alpha < 2, \end{cases}$$

is the corresponding coefficient, where  $\Gamma(\cdot)$  denotes Euler's gamma function. On sufficiently smooth functions  $f(\cdot)$ , the action of this operator is also given by [12]

$$(A_x^\alpha f)(x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [|\xi|^\alpha F_{x \rightarrow \xi}[f](\xi)](x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where  $F_{\xi \rightarrow x}$  denotes the Fourier transform with respect to  $\xi$ .

Note that for  $\alpha = 2$ , equation (1) reduces to the classical heat equation. This equation has found wide applications in many areas of science and engineering [13, 3, 15, 11, 16]. It describes the propagation of resonant photons in plasma and diffusion processes in fractal media [14, c. 251], which is why equation (1) is often referred to as the *isotropic superdiffusion equation*. Equation (1) is also used to model local vortices of Riesz-type gravitational fields generated by moving objects [8, 10, 9].

An important example motivating the study of the isotropic superdiffusion equation is given in [1, c. 2], where a probabilistic model of a random jump-type walk of a particle  $X$  on  $\mathbb{R}^n$  is proposed, and it is shown that the probability  $u(t; x)$  of finding  $X$  at point  $x$  at time  $t$  is a solution of equation (1) (for the case  $n = 1$ ). A typical example of such motion is the darting of a hungry shark or the flight of a swift hunting insects.

The fundamental solution

$$G_\alpha(t; x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [e^{-t|\xi|^\alpha}](t; x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

of the Cauchy problem for equation (1) is the probability density of a symmetric  $\alpha$ -stable Levy stochastic process [17]. The Cauchy problem for equation (1) and the function  $G_\alpha(t; x)$  has been studied in many papers (see the survey in [2, 4]). Various methods have been developed to analyze the properties of  $G_\alpha(t; x)$ , and numerous results have been obtained on the well-posedness of the Cauchy problem in different functional classes for continuous bounded initial data. Typical properties of classical solutions of equation (1) and some of its generalizations have also been established.

In this paper, the well-posedness of the Cauchy problem for equation (1) is established in the case when the initial functions on  $\mathbb{R}^n$  are almost everywhere continuous, locally integrable, and may have a finite number of discontinuities of the second kind. In this way, the known results for bounded continuous initial data are generalized.

## 1 PRELIMINARY INFORMATION. PROBLEM STATEMENT

Let  $\mathbb{N}_m = \{1, \dots, m\}$ ; let  $\mathbb{R}^n$  denote the  $n$ -dimensional Euclidean space equipped with the scalar product  $(\cdot, \cdot)$  and the norm  $|x| = (x, x)^{1/2}$ , and let  $\mathbb{Z}_+^n$  denote the set of all multi-indices of dimension  $n$ .

In the case  $\alpha = 1$ , one can compute the Fourier transform in the right-hand side of equality (3) and obtain an explicit expression for the fundamental solution  $G_1$ :

$$G_1(t; x) = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \frac{at}{((at)^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

This fact confirms that, unlike the classical heat equation (the case  $\alpha = 2$ ), the fundamental solution of the Cauchy problem for equation (1) exhibits a power-law behavior at infinity, rather than exponential decay.

For the derivatives of the function  $G_\alpha$ , the following estimates hold (see [5, 7]):

$$|\partial_x^k G_\alpha(t; x)| \leq c_{1,k} t \left( t^{1/\alpha} + |x| \right)^{-n-|k|-\alpha}; \tag{5}$$

$$|\partial_t \partial_x^k G_\alpha(t; x)| \leq c_{2,k} \left( t^{1/\alpha} + |x| \right)^{-n-|k|-\alpha}, \tag{6}$$

where  $c_{1,k}$  and  $c_{2,k}$  are positive constants depending only on  $k \in \mathbb{Z}_+^n$ .

The fundamental solution of the Cauchy problem for equation (1) possesses the following properties:

- 1°  $G_\alpha(t; \cdot)$  is a radial function;
- 2°  $G_\alpha(t; \cdot)$  is a positive function;
- 3°  $G_\alpha(t; \cdot)$  is unimodal for every fixed  $t$ ;
- 4° the following equality holds:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(t; x - \zeta) dx = 1, \quad t > 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Note that property 1° follows from the corresponding property of the Fourier transform of a radial function; properties 2° and 3° are well-known results from the theory of symmetric stable stochastic processes (see details in [17]). Equality (7) follows directly from the Fourier inversion formula.

**Definition 1.** We call the domain of the operator  $A_x^\alpha$ , denoted by  $\mathcal{D}(A_x^\alpha)$ , the set of all functions  $f(\cdot)$  defined on  $\mathbb{R}^n$  for which the right-hand side of representation (2) is finite for the corresponding value of  $\alpha$ .

Next, consider a function  $f(\cdot)$  that is continuous on the set  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_j\}_{j=1}^m$ , bounded at infinity, and such that in sufficiently small neighborhoods of each point  $x_j$  the following estimates

$$|f(x)| \leq \frac{c}{|x - x_j|^{\gamma_j}}, \quad 0 \leq \gamma_j < n, \quad j \in \mathbb{N}_m, \tag{8}$$

hold. Set

$$\varepsilon_0 := \min_{j \neq l} \frac{|x_j - x_l|}{2}, \quad \hat{\varepsilon}_0 := \min\{\varepsilon_0; 1\}, \quad \mathbb{U}_j := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_j| < \hat{\varepsilon}_0\}, \quad \mathbb{U} := \bigcup_{j=1}^m \mathbb{U}_j.$$

Note that the function  $f(\cdot)$  is bounded on  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{U}$  and integrable on every compact set  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ . For equation (1), we consider the Cauchy problem with the initial condition

$$u(t; \cdot)|_{t=0} = f(\cdot). \tag{9}$$

**Definition 2.** A function  $u(t; x)$  is called a solution of the Cauchy problem (1), (9) on the set  $\Pi_+ = \{(t; x) : t > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$  if it is differentiable in  $t$  on this set and satisfies  $u(t; \cdot) \in \mathcal{D}(A_x^\alpha)$  for all  $t > 0$ . Moreover,  $u$  satisfies equation (1) on  $\Pi_+$  in the classical sense and attains the initial condition (9) in the sense of pointwise limit

$$u(t; x) \xrightarrow{t \rightarrow +0} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_j\}_{j=1}^m. \tag{10}$$

The problem consists in finding a solution of the Cauchy problem (1), (9) and proving its uniqueness.

## 2 THE MAIN RESULT

We will need the following auxiliary statement.

**Lemma 1.** *Let*

$$u(t; x) = (f * G_\alpha)(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_+. \quad (11)$$

Then the function  $u$  satisfies:

- 1) for each fixed  $t > 0$ ,  $u(t; \cdot)$  is infinitely differentiable in  $x$  on  $\mathbb{R}^n$  and all its derivatives are bounded;
- 2) for each fixed  $x \in \mathbb{R}^n$ , the function  $u(t; \cdot)$  is differentiable in  $t$  on  $(0; +\infty)$ ;
- 3) for each fixed  $t \in (0; +\infty)$ ,  $u(t; \cdot)$  belongs to  $\mathcal{D}(A_x^\alpha)$ .

Moreover, for all  $(t; x) \in \Pi_+$  the equalities

$$\begin{aligned} \partial_x^k u(t; x) &= (f * \partial_x^k G_\alpha)(t; x), \quad \partial_t u(t; x) = (f * \partial_t G_\alpha)(t; x), \\ A_x^\alpha u(t; x) &= (f * A_x^\alpha G_\alpha)(t; x) \end{aligned} \quad (12)$$

hold.

**Proof.** Observe that

$$(f * G_\alpha)(t; x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) G_\alpha(t; x - y) dy, \quad (t; x) \in \Pi_+.$$

We first verify the existence of the first-order partial derivatives  $\partial_x^1 u(t; \cdot)$  on  $\mathbb{R}^n$  for every fixed  $t > 0$ . Fix an arbitrary point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  and consider the ball

$$\mathbb{K}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}, \quad r > 0.$$

Let

$$\Phi_t(x; \xi) = ct \left( t^{1/\alpha} + |x - \xi| \right)^{-n-1-\alpha}.$$

Clearly, for all  $x \in \mathbb{K}_1(x_0)$  we have

$$\Phi_t(x; \xi) \leq \begin{cases} ct^{\frac{n+1}{\alpha}}, & \xi \in \mathbb{K}_2(x_0), \\ ct \left( t^{1/\alpha} + (|x_0 - \xi| - 1) \right)^{-n-1-\alpha}, & \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_2(x_0). \end{cases}$$

In view of this estimate and the bound

$$f(\xi) \leq \begin{cases} c|\xi - x_j|^{-\gamma_j}, & \xi \in \mathbb{U}_j, \quad j \in \mathbb{N}_m, \\ c, & \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{U}, \end{cases}$$

we conclude that there exists a positive function  $\hat{\Phi}_t(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ,  $t > 0$ , such that for all  $x \in \mathbb{K}_1(x_0)$  and  $\xi \in \mathbb{R}^n$  the inequality

$$|f(\xi) G_\alpha(t; x - \xi)| \leq \hat{\Phi}_t(\xi), \quad t > 0,$$

holds.

Then, by the standard result on differentiation of an integral with respect to a parameter under the Lebesgue dominated convergence condition [6, p. 368], we obtain

$$\partial_x^1 \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(t; x - \xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^1 G_\alpha(t; x - \xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (\forall x : |x - x_0| < 1).$$

Hence, by the arbitrariness of the point  $x_0$ , we conclude that the solution  $u(t; x)$  is differentiable at every  $x \in \mathbb{R}^n$  for  $t > 0$ , and that

$$\partial_x^1 u(t; x) = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^1 G_\alpha(t; x - \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

In a similar way, one verifies the existence of the remaining derivatives  $\partial_x^k u(t; \cdot)$  on  $\mathbb{R}^n$  for  $t > 0$ , as well as the validity of the first identity in (12).

Next, we justify the boundedness of  $\partial_x^k u(t; \cdot)$  for every fixed  $t > 0$ . Using estimates (5) and (8), we obtain

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall (t; x) \in \Pi_+ : \quad & \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \partial_x^k G_\alpha(t; x - y) dy \right| \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^m \int_{|y-x_j|<1} |f(y)| |\partial_{x-y}^k G_\alpha(t; x - y)| dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \cup} |f(y)| |\partial_{x-y}^k G_\alpha(t; x - y)| dy \leq \\ & \leq \frac{c_k}{t^{n+|k|}} \sum_{j=1}^m \int_{|y-x_j|<1} \frac{dy}{|y-x_j|^{\gamma_j}} + \sum_{j=1}^m \hat{\varepsilon}_0^{-\gamma_j} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_k t dy}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{n+|k|+\alpha}} = \\ & = \frac{\tilde{c}_k}{t^{n+|k|}} + \sum_{j=1}^m \frac{c_k}{\hat{\varepsilon}_0^{\gamma_j} t^{|k|/\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{(1+|z|)^{n+|k|+\alpha}} \equiv \frac{\tilde{c}_k}{t^{n+|k|}} + \frac{\tilde{b}_k}{t^{|k|/\alpha}} \end{aligned}$$

(where the positive constants  $\tilde{c}_k$  and  $\tilde{b}_k$  depend only on  $k$ ). These estimates guarantee the boundedness of the derivatives  $\partial_x^k u$  on every set  $[\delta; +\infty) \times \mathbb{R}^n$ ,  $\delta > 0$ .

In a similar way, using estimates (6) and (8), we verify that the function  $u$  is differentiable with respect to  $t$ , and the second equality in (12) holds.

Let us now proceed to establishing the third equality in (12).

First, consider the case  $\alpha < 1$ . According to the definition of the operator  $A_x^\alpha$ , for  $(t; x) \in \Pi_+$  we have

$$A_x^\alpha u(t; x) = c(\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \left( |y|^{-(n+\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \left( G_\alpha(t; x - \xi) - G_\alpha(t; x - \xi + y) \right) f(\xi) d\xi \right) dy. \quad (13)$$

Hence, we see that the justification of this equality reduces to proving the possibility of changing the order of integration in (13). According to the corresponding statement of Fubini's theorem, it is sufficient to establish the absolute convergence of the iterated integral in (13). Let us prove this convergence for  $(t; x) \in \Pi_+$ :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( |y|^{-(n+\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \left( G_\alpha(t; x - \xi) - G_\alpha(t; x - \xi + y) \right) f(\xi) d\xi \right) dy \right| \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \left( |y|^{-(n+\alpha)} \int_{|\xi-x_j|<1} |G_\alpha(t; x - \xi) - G_\alpha(t; x - \xi + y)| |f(\xi)| d\xi \right) dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \left( |y|^{-(n+\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \cup} |G_\alpha(t; x - \xi) - G_\alpha(t; x - \xi + y)| |f(\xi)| d\xi \right) dy \equiv \mathcal{I}_1(t; x) + \mathcal{I}_2(t; x). \end{aligned}$$

Using the Lagrange theorem on finite increments together with estimates (5) and (8), we obtain:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1(t; x) &\leq c \sum_{j=1}^m \left( \sum_{l=1}^n \int_{|y|<1} \int_{|\xi-x_j|<1} \frac{|\partial_{z_l} G_\alpha(t; x - \xi + y' + \theta_l y_l)|}{|\xi - x_j|^{\gamma_j} |y|^{n+\alpha-1}} d\xi dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_{|y|\geq 1} \frac{dy}{|y|^{n+\alpha}} \int_{|\xi-x_j|<1} \frac{|G_\alpha(t; x - \xi)| d\xi}{|\xi - x_j|^{\gamma_j}} + \int_{|y|\geq 1} \int_{|\xi-x_j|<1} \frac{|G_\alpha(t; x - \xi + y)|}{|\xi - x_j|^{\gamma_j}} d\xi dy \right) \leq \\ &\leq c \sum_{j=1}^m \left( \sum_{l=1}^n t^{-\frac{n+1}{\alpha}} \int_{|y|<1} \frac{dy}{|y|^{n+\alpha-1}} \int_{|\xi-x_j|<1} \frac{d\xi}{|\xi - x_j|^{\gamma_j}} + t^{-\frac{n}{\alpha}} \int_{|y|\geq 1} \frac{dy}{|y|^{n+\alpha}} \int_{|\xi-x_j|<1} \frac{d\xi}{|\xi - x_j|^{\gamma_j}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(t; z) dz \int_{|\xi-x_j|<1} \frac{d\xi}{|\xi - x_j|^{\gamma_j}} \right) \leq c(1 + t^{-\frac{n}{\alpha}} + t^{-\frac{n+1}{\alpha}}), \quad \theta_l \in (0; 1), (t; x) \in \Pi_+; \\ \mathfrak{I}_2(t; x) &\leq c \left( \sum_{l=1}^n \int_{|y|<1} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \cup} \frac{|\partial_{z_l} G_\alpha(t; x - \xi + y' + \theta_l y_l)|}{|y|^{n+\alpha-1}} d\xi dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_{|y|\geq 1} \left( |y|^{-(n+\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \cup} (G_\alpha(t; x - \xi) + G_\alpha(t; x - \xi + y)) d\xi \right) dy \leq \right. \\ &\leq c \left( \sum_{l=1}^n t^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{|y|<1} \frac{dy}{|y|^{n+\alpha-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{(1 + |z|)^{n+\alpha+1}} + 2 \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(t; z) dz \int_{|y|\geq 1} \frac{dy}{|y|^{n+\alpha}} \right) \leq \\ &\leq c(1 + t^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad \theta_l \in (0; 1), \quad (t; x) \in \Pi_+. \end{aligned}$$

From here we already obtain the required absolute convergence on the set  $\Pi_+$  of the repeated integral on the right-hand side of equality (13).

The case  $\alpha > 1$  is treated analogously.

Let us now consider the case  $\alpha = 1$ . To avoid cumbersome arguments, we assume  $n = 1$ . The general case of arbitrary  $n$  is handled in a similar manner.

According to the definition of the operator  $A_x^1$ , for  $(t; x) \in \Pi_+$  we have

$$A_x^1 u(t; x) = c(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y|>\varepsilon} \left( |y|^{-2} \int_{\mathbb{R}} \left( G_1(t; x - \xi) - G_1(t; x - \xi + y) \right) f(\xi) d\xi \right) dy. \tag{14}$$

Since the repeated integral on the right-hand side of (15) is absolutely convergent on  $\Pi_+$  for every  $\varepsilon > 0$ —which is not difficult to verify, taking into account estimates (5) and (8)—the previous equality can be rewritten in the following form:

$$\begin{aligned} A_x^1 u(t; x) &= c(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left( f(\xi) \int_{|y|>\varepsilon} \frac{G_1(t; x - \xi) - G_1(t; x - \xi + y)}{|y|^2} dy \right) d\xi \equiv \\ &\equiv c(1) \left( \int_{\mathbb{R}} \left( f(\xi) \int_{|y|\geq 1} \frac{G_1(t; x - \xi) - G_1(t; x - \xi + y)}{|y|^2} dy \right) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left( f(\xi) \int_{1>|y|>\varepsilon} \frac{G_1(t; x - \xi) - G_1(t; x - \xi + y)}{|y|^2} dy \right) d\xi \right). \end{aligned}$$

Therefore, the proof comes down to substantiating the correctness of the equality

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left( f(\xi) I_{\varepsilon}(t; x - \xi) \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left( f(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}(t; x - \xi) \right) d\xi,$$

where

$$I_{\varepsilon}(t; \zeta) = \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{G_1(t; \zeta) - G_1(t; \zeta + y)}{|y|^2} dy.$$

According to the well-known statement on passing to the limit under the integral sign [6], it is sufficient to establish the existence of a nonnegative function  $g(t; \zeta)$ , independent of  $\varepsilon$ , such that:

$$\text{I) } |I_{\varepsilon}(t; \zeta)| \leq g(t; \zeta), \quad \varepsilon \in (0; 1), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$\text{II) } \int_{\mathbb{R}} |f(\xi)| g(t; x - \xi) d\xi < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

First, we compute the value of the integral  $I_{\varepsilon}$ . Using the structure (4) of the function  $G_1$ , we transform the integrand as follows:

$$\begin{aligned} \frac{G_1(t; \zeta) - G_1(t; \zeta + y)}{|y|^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}y^2} \left( \frac{\tilde{a}}{\tilde{a}^2 + \zeta^2} - \frac{\tilde{a}}{\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2} \right) = \\ &= \frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}(\tilde{a}^2 + \zeta^2)} \frac{2\zeta y + y^2}{y^2(\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2)} = \frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}(\tilde{a}^2 + \zeta^2)} \left( \frac{2\zeta}{y(\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2)} + \frac{1}{\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2} \right) = \\ &= \frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}(\tilde{a}^2 + \zeta^2)} \left( \frac{2\zeta}{\tilde{a}^2 + \zeta^2} \left( \frac{1}{y} - \frac{y + 2\zeta}{\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2} \right) + \frac{1}{\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2} \right) \end{aligned}$$

(here  $\tilde{a} = at$ ). Then

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon}(t; \zeta) &= \frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}(\tilde{a}^2 + \zeta^2)} \left( \frac{2\zeta}{\tilde{a}^2 + \zeta^2} \left( \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{dy}{y} - \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{(\zeta + y)dy}{\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \zeta \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{dy}{\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2} \right) + \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{dy}{\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2} \right) = \\ &= \frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}(\tilde{a}^2 + \zeta^2)} \left( \left( 1 - \frac{2\zeta^2}{\tilde{a}^2 + \zeta^2} \right) \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{dy}{\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2} - \frac{\zeta}{\tilde{a}^2 + \zeta^2} \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{d(\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2)}{\tilde{a}^2 + (\zeta + y)^2} \right) = \\ &= \frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}(\tilde{a}^2 + \zeta^2)} \left( \frac{\tilde{a}^2 - \zeta^2}{\tilde{a}(\tilde{a}^2 + \zeta^2)} \left( \arctan \frac{\zeta - \varepsilon}{\tilde{a}} - \arctan \frac{\zeta + \varepsilon}{\tilde{a}} + \arctan \frac{\zeta + 1}{\tilde{a}} - \arctan \frac{\zeta - 1}{\tilde{a}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\zeta}{\tilde{a}^2 + \zeta^2} \ln \left( \frac{\tilde{a}^2 + (\zeta - \varepsilon)^2}{\tilde{a}^2 + (\zeta - 1)^2} \cdot \frac{\tilde{a}^2 + (\zeta + 1)^2}{\tilde{a}^2 + (\zeta + \varepsilon)^2} \right) \right), \quad \varepsilon \in (0; 1), \quad t > 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

For convenience, introduce the notation

$$\Phi_{1,\varepsilon}(\zeta) = \frac{\tilde{a}^2 + (\zeta - \varepsilon)^2}{\tilde{a}^2 + (\zeta - 1)^2}, \quad \Phi_{2,\varepsilon}(\zeta) = \frac{\tilde{a}^2 + (\zeta + 1)^2}{\tilde{a}^2 + (\zeta + \varepsilon)^2}.$$

Using standard tools of differential calculus, one verifies the validity of the estimates

$$\frac{\tilde{a}^2}{\tilde{a}^2 + (1 + \sqrt{1 + \tilde{a}^2})^2} \leq \Phi_{1,\varepsilon}(\zeta) \leq \frac{4 + 3\tilde{a}^2}{\tilde{a}^2}, \quad \varepsilon \in (0; 1), \quad \tilde{a} \neq 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Taking into account the equality

$$\Phi_{2,\varepsilon}(\zeta) = \frac{1}{\Phi_{1,\varepsilon}(-\zeta)},$$

and also the strict monotonicity of  $\ln(\cdot)$  together with the boundedness of  $\arctan(\cdot)$ , we obtain the following estimate:

$$|I_\varepsilon(t; \zeta)| \leq \frac{b(t)}{(at)^2 + \zeta^2}, \quad \varepsilon \in (0; 1), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

(where the positive quantity  $b(t)$  depends only on  $t > 0$ ). Setting

$$g(t; \zeta) = \frac{b(t)}{(at)^2 + \zeta^2},$$

we obtain the validity of condition I).

We now show that condition II) also holds:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|g(t; x - \xi)d\xi &\leq \sum_{j=1}^m \int_{|\xi - x_j| < 1} |f(\xi)|g(t; x - \xi)d\xi + \int_{\mathbb{R} \setminus \cup} |f(\xi)|g(t; x - \xi)d\xi \leq \\ &\leq \frac{cb(t)}{(at)^2} \sum_{j=1}^m \int_{|\xi - x_j| < 1} \frac{d\xi}{|\xi - x_j|^{\gamma_j}} + c_1 b(t) \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(at)^2 + (x - \xi)^2} < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

The lemma is proved.

The main result is formulated as the following statement.

**Theorem 1.** *Let the initial function  $f(\cdot)$  be continuous on  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_j\}_{j=1}^m$ , bounded in a neighbourhood of the point at infinity, and satisfy estimates (8) in sufficiently small neighbourhoods of the points  $x_j$ . Then, on the set  $\Pi_+$ , formula (11) defines the unique solution of the Cauchy problem (1), (9).*

**Proof.** Since  $G_\alpha$  is a solution of equation (1), using formulas (12) we obtain:

$$\partial_t u(t; x) = (f * \partial_t G_\alpha)(t; x) = -a(f * A_x^\alpha G_\alpha)(t; x) = -aA_x^\alpha u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_+.$$

Hence, on the set  $\Pi_+$ , representation (11) defines a classical solution of equation (1).

We now show that this solution satisfies the initial condition (9) in the sense of relation (13). Fix an arbitrary point  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_j\}_{j=1}^m$ , denote by  $l$  the index of the singular point  $x_j$  closest to  $x$ , and set  $r := |x - x_l|$ . According to formula (7), we have:

$$\left| (f * G_\alpha)(t; x) - f(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(t; \xi) |f(x - \xi) - f(x)| d\xi \equiv \mathfrak{L}(t; x).$$

Since  $f$  is continuous on  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_j\}_{j=1}^m$ , then for every  $\varepsilon > 0$  there exist  $t_0 \in (0; r)$  such that  $t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}} < \varepsilon$  and  $|f(x - \xi) - f(x)| < \varepsilon$ , whenever  $|\xi| < t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}$ . Thus,

$$\mathfrak{L}(t; x) < \varepsilon \int_{|\xi| < t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}} G_\alpha(t; \xi) d\xi + \int_{|\xi| \geq t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}} G_\alpha(t; \xi) |f(x - \xi) - f(x)| d\xi \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(t; \xi) d\xi + |f(x)| \int_{|\xi| \geq t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}} G_\alpha(t; \xi) d\xi + \int_{|\xi| \geq t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}} G_\alpha(t; \xi) |f(x - \xi)| d\xi \equiv \\ &\equiv \varepsilon + \mathfrak{L}_0(t; x) + \mathfrak{L}_1(t; x), \end{aligned}$$

where

$$\mathfrak{L}_0(t; x) := |f(x)| \int_{|\xi| \geq t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}} G_\alpha(t; \xi) d\xi, \quad \mathfrak{L}_1(t; x) := \int_{|\xi| \geq t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}} G_\alpha(t; \xi) |f(x - \xi)| d\xi.$$

Taking into account estimates (5) and (8), for  $t > 0$  we obtain:

$$\mathfrak{L}_0(t; x) \leq cr^{-\gamma} t \int_{|\xi| \geq t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}} |\xi|^{-n-\alpha} d\xi \equiv \alpha \tilde{c}_1 t \int_{t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}}^{+\infty} \rho^{-1-\alpha} d\rho = \tilde{c}_1 t t_0^{-\frac{\alpha}{2(n+\alpha)}}. \quad (15)$$

To estimate the integral  $\mathfrak{L}_1$  we use the decomposition

$$\mathfrak{L}_1(t; x) = \int_{2r \geq |\xi| \geq t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}} G_\alpha(t; \xi) |f(x - \xi)| d\xi + \int_{|\xi| \geq 2r} |G_\alpha(t; \xi)| |f(x - \xi)| d\xi \equiv \mathfrak{L}_{11}(t; x) + \mathfrak{L}_{12}(t; x).$$

Once again, using (5) and (8), for  $t > 0$  we obtain:

$$\mathfrak{L}_{11}(t; x) \leq ct \int_{2r \geq |x-z| \geq t_0^{\frac{1}{2(n+\alpha)}}} \frac{|f(z)| dz}{(t^{1/\alpha} + |x-z|)^{n+\alpha}} \leq c t t_0^{-\frac{n+\alpha}{2(n+\alpha)}} \int_{2r \geq |x-z|} |f(z)| dz \equiv \tilde{c}_2 t t_0^{-\frac{1}{2}}; \quad (16)$$

$$\mathfrak{L}_{12}(t; x) \leq ct \int_{|\xi| \geq 2r} \frac{|f(x - \xi)| d\xi}{(t^{1/\alpha} + |\xi|)^{n+\alpha}} \leq ct \int_{|\xi| \geq 2r} \frac{|f(x - \xi)| d\xi}{|\xi|^{n+\alpha}} \equiv \tilde{c}_3 t. \quad (17)$$

From inequalities (15)–(17) it follows that for all  $t \leq t_0$ ,

$$\mathfrak{L}_0(t; x) + \mathfrak{L}_1(t; x) \leq \tilde{c}_1 t_0^{\frac{2n+\alpha}{2(n+\alpha)}} + \tilde{c}_2 t_0^{\frac{1}{2}} + \tilde{c}_3 t_0 < \tilde{c}_1 \varepsilon^{2n+\alpha} + \tilde{c}_2 \varepsilon^{n+\alpha} + \tilde{c}_3 \varepsilon^{2(n+\alpha)}.$$

Hence,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_j\}_{j=1}^m \quad \exists c > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_0 < \varepsilon^{2(n+\alpha)} \quad \forall t \leq t_0 : \\ \mathfrak{L}(t; x) < c(\varepsilon + \varepsilon^{n+\alpha} + \varepsilon^{2n+\alpha} + \varepsilon^{2(n+\alpha)}), \end{aligned}$$

that is, the limit relation (13) holds.

Finally, according to the corresponding maximum principle for classical solutions of equation (1) from [2], the Cauchy problem (1), (9) cannot have more than one classical solution.

The theorem is proved.

### 3 CONCLUSIONS

It has been shown that the Cauchy problem for the isotropic superdiffusion equation (1) has a unique bounded smooth solution even in the case where the initial function has a finite number of discontinuities of the second kind. Thus, a generalization of known results for bounded continuous initial data is established.

## REFERENCES

- [1] Bucur C., Valdinoci E. *Nonlocal diffusion and applications. Lect. Notes Unione Mat. Ital.* **20**, Springer, Berlin. 2016. doi:10.1007/978-3-319-28739-3
- [2] Eidelman S., Ivasyshen S., Kochubei A. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.* Operator Theory: Adv. and Appl. 152. Birkhäuser Verlag, Basel. 2004.
- [3] Ibe O. C. *Markov processes for stochastic modeling.* 2nd Edition. Elsevier, Amsterdam. 2013. doi.org/10.1016/C2012-0-06106-6
- [4] Knopova V. P., Kochubei A. N., Kulik A. M. *Parametrix methods for equations with fractional Laplacians. V. 2 Fractional Differential Equations.* De Gruyter, Boston, (2019), 267–298. doi.org/10.1515/9783110571660-013
- [5] Kochubei A. N. *Parabolic pseudodifferential equations, hypersingular integrals, and Markov processes,* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 52 (1988), no. 5, 909–934.
- [6] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of function theory and functional analysis.* Dover Publications, New York. 1999.
- [7] Litovchenko V. A. *Cauchy problem with Riesz operator of fractional differentiation,* Ukr. Math. J., 57 (2005), 1937–1956. <https://doi.org/10.1007/s11253-006-0040-6>
- [8] Litovchenko V. A. *The Cauchy problem and distribution of local fluctuations of one Riesz gravitational field.* Fract. Calc. Appl. Anal. **25**, 668–686 (2022). <https://doi.org/10.1007/s13540-022-00034-2>
- [9] Litovchenko V. A. *Classical Solutions of the Equation of Local Fluctuations of Riesz Gravitational Fields and their Properties,* Ukr. Math. J., 74 (2022), 69–86. <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02048-8>
- [10] Litovchenko V. A. *Local Polya Fluctuations of Riesz Gravitational Fields and the Cauchy Problem,* Carpathian Math. Publ., 15 (2023), 222–235. <https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.222-235>
- [11] Reynolds A. *Liberating Lévy walk research from the shackles of optimal foraging,* Phys. Life Rev., 14 (2015), 59–83.
- [12] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications,* Science and technology, Minsk. 1987. (in Russian)
- [13] Sun H., Zhang Y., Baleanu D., Chen W., Chen Y. *A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering,* Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 64 (2018), 213–231. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019>
- [14] Uchaikin V. V. *Fractional derivatives method,* Artishok, Ulyanovsk. 2008.
- [15] Uchaikin V., Sibatov R. *Fractional Kinetics In Space: Anomalous Transport Models.* World Scientific, Singapore. 2017. <https://doi.org/10.1142/10581>

- [16] Viswanathan G. M., Afanasyev V., Buldyrev S. V., Havlin S., Luz M. G., Raposo E. P., Stanley H. E. *Lévy flights in random searches*, Phys. A., 282 (2000), no. 1-2, 1–12. doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00071-6
- [17] Zolotarev V. M. *One-dimensional stable distributions*, Nauka, Moscow. 1983.

Received 09.11.2025

---

Літовченко В.А. *Розширення класу початкових даних задачі Коші для рівняння ізотропної супердифузії* // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №2. — С. 177–187.

Розглядається задача Коші для рівняння ізотропної супердифузії з оператором Рісса дробового диференціювання порядку  $\alpha \in (0; 2)$ , яке узагальнює класичне рівняння теплопровідності. Такі моделі застосовуються при описі перенесення енергії та маси у фрактальних і пористих середовищах, плазмових системах та інших складних структурах з аномально швидким поширенням. Оператор Рісса є генератором симетричних  $\alpha$ -стійких процесів Леві, тому розв'язок задачі Коші може інтерпретуватися як густина ймовірності відповідного стохастичного процесу.

У класі обмежених гладких функцій встановлено існування класичного розв'язку задачі у випадку, коли початкова умова допускає скінченну кількість інтегровних розривів другого роду.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.19>

GRIGORCHUK R.I., SAMARAKOON S.T., VOROBETS Y.

## ON THE SECOND 2-DIMENSIONAL RATIONAL MAP ASSOCIATED WITH THE FIRST GROUP OF INTERMEDIATE GROWTH

We show that the second rational map  $G$  associated with the group  $\mathcal{G}$  of intermediate growth constructed by the first author in 1980 is semiconjugate with the antiholomorphic map  $z \rightarrow \bar{z}^2$ . For doing this we use a family of  $G$ -invariant curves found by the third author and for each invariant curve, create a Markov partition of it.

*Key words and phrases:* Grigorchuk Group, Intermediate Growth, Complex Dynamics, Markov Shift.

---

Texas A&M University, College Station, Texas, United States (Grigorchuk R.I.)  
Sam Houston State University, Huntsville, Texas, United States (Samarakoon S.T.)  
Texas A&M University, College Station, Texas, United States (Vorobets Y.)  
e-mail: [grigorch@tamu.edu](mailto:grigorch@tamu.edu) (Grigorchuk R.I.), [ssamarakoon@shsu.edu](mailto:ssamarakoon@shsu.edu) (Samarakoon S.T.),  
[yvorobets@tamu.edu](mailto:yvorobets@tamu.edu) (Vorobets Y.)

### INTRODUCTION

The dynamics of rational maps has attracted sustained interest due to its central role in complex dynamics and its deep connections with diverse areas of mathematics. Iteration of rational maps on the Riemann sphere exhibits a rich interplay between stability and chaos, captured by the dichotomy between the Fatou and Julia sets [5, 12]. Beyond its intrinsic dynamical complexity, the study of rational maps has strong links to holomorphic dynamics, potential theory, and geometric function theory [16]. It also interfaces with number theory through arithmetic dynamics, where questions about periodic points, canonical heights, and equidistribution have led to significant advances [19]. Moreover, rational maps serve as fundamental models for nonlinear phenomena, making them a natural testing ground for general concepts in ergodic theory and bifurcation theory [14].

Multidimensional rational maps associated with graphs and groups have become an important tool for analyzing self-similar and recursively defined structures. In the context of self-similar and automaton groups, the recursive action on rooted trees gives rise to natural renormalization schemes that can be encoded by rational maps acting on finite-dimensional parameter spaces [6, 7, 17]. Such renormalization maps play a central role in the spectral analysis of Schreier graphs and Hecke-type operators for fractal groups, where iteration of rational maps governs the asymptotic behavior of spectra and Green functions [2, 4]. Closely related ideas appear in the study of Laplacians

---

УДК 514.7:512

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20E08, 37D20.

on self-similar graphs and lattices, where spectral decimation leads to multidimensional rational maps whose dynamics control eigenvalue distributions and spectral measures [21, 18, 1, 22]. These methods also interact with probabilistic and geometric aspects of groups, including random walks and amenability, where self-similarity and renormalization phenomena are fundamental [3, 13, 8].

The study of growth rates of groups has a long history [20, 15, 11], and it is well known that such growth can range from polynomial to exponential, with intermediate growth lying strictly between these two extremes. The first example of a group of intermediate growth – neither polynomial nor exponential – was constructed by the first author in 1980 [9]. This group,  $\mathcal{G}$ , is a finitely generated infinite torsion group, and it was subsequently shown in [10] that its growth is indeed intermediate.

The group  $\mathcal{G}$  is associated with two 2–dimensional rational maps given below:

$$\begin{aligned}
 F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{2x^2}{4-y^2} \\ y + \frac{x^2y}{4-y^2} \end{pmatrix} \\
 G: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{2(4-y^2)}{x^2} \\ -y - \frac{y(4-y^2)}{x^2} \end{pmatrix} \tag{1}
 \end{aligned}$$

Both maps share many properties such as topological and algebraic degrees, indeterminacy points, and algebraic stability [4]. The map  $F$  has been studied extensively in the literature (see [4]), whereas the corresponding map  $G$  has received comparatively little attention to date. It is known that the map  $G$  is semiconjugate to the Ulam-Chebyshev map.

**Theorem 1** ([6]). *The maps  $F$  and  $G$  are semiconjugate to the Ulam-Chebyshev map  $z \mapsto 2z^2 - 1$  and hence to  $z \mapsto z^2$ , via the rational functions  $\psi_F: (x, y) \mapsto \frac{4 - x^2 + y^2}{4y}$  and  $\psi_G: (x, y) \mapsto \frac{4 + x^2 - y^2}{4x}$ , respectively.*

The maps  $F$  and  $G$  are two dimensional versions of more complicated maps in  $\mathbb{C}^4$  computed by V.Nekrashevych and the first author in [6] using the Schur map technique that they extended to the case of self-similar  $C^*$ -algebras acting in infinite-dimensional Hilbert space.

In this article, we continue investigating the map  $G$  and its dynamical properties. It is observed by the third author that the rational function  $I$ , defined by

$$I(x, y) = -\frac{(x^6 - x^4y^2 - 12x^4 - 4x^2y^2 + 48x^2 - 4y^4 + 32y^2 - 64)^2}{(x^4 - 8x^2 - 4y^2 + 16)^2 (x^4 - 2x^2y^2 - 8x^2 + y^4 - 8y^2 + 16)}, \tag{2}$$

is invariant under the map  $G$ . Consequently, the level curves  $I = c$ , denoted by  $I_c$ , are  $G$ -invariant. In particular, the invariant curves  $I_0, I_\infty$ , and  $I_2$  are presented in Figure 1. Further examination of the level curves  $I_c$  shows that each  $I_c$  consists of two disjoint components, which we denote by  $I_c^1$  and  $I_c^2$ . Moreover, each component admits a natural partition into twelve sub-arcs. This decomposition allows for a more refined analysis of the restriction of  $G$  to the invariant curves  $I_c$  and reveals additional structure in the dynamics. As a result, we obtain the following theorem.

**Theorem 2.** *1. The map  $G$  has a family of invariant curves  $I_c$  given by the equation  $I(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , where  $I(x, y)$  is the rational function given by Equation (2). Each curve  $I_c$  consists of two disjoint components  $I_c^1$  and  $I_c^2$ .*

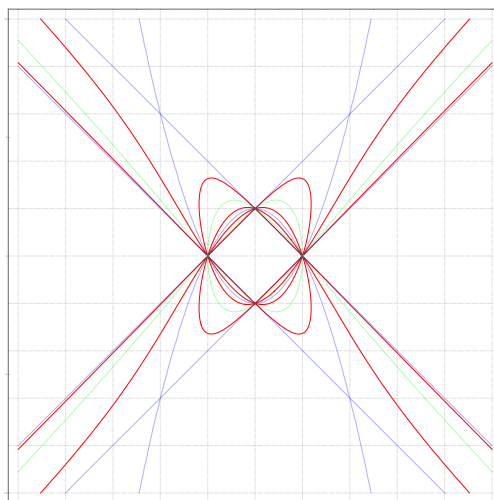


Figure 1: Red:  $I = 2$ , Green:  $I = 0$ , Blue:  $I = \infty$

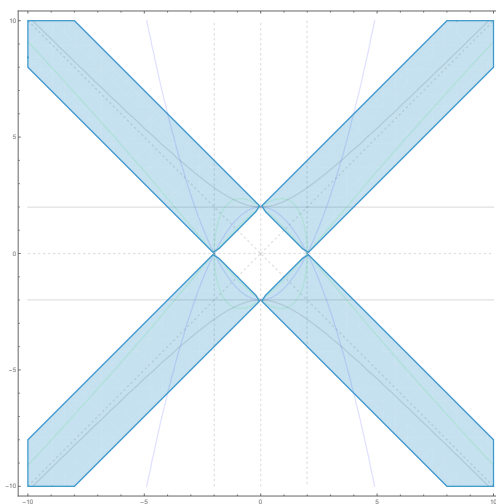


Figure 2: The *cross*,  $R_C$ , defined using four straight lines with slopes  $\pm 1$  and intercepts  $(0, \pm 2)$  is given by  $R_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x + y + 2)(x + y - 2)(x - y + 2)(x - y - 2) < 0\}$ .

2. For  $i \in \{1, 2\}$ , the dynamics of the restriction of  $G$  on  $I_c^i$  is determined by the Markov partition consisting of 12 pieces and hence  $G|_{I_c^i}$  from the dynamical point of view is a Markov shift.
3. For  $i \in \{1, 2\}$ ,  $G$  restricted to  $I_c^i$  is semiconjugate to the antiholomorphic map  $z \mapsto \bar{z}^2$ .

The cross-shaped structure

$$R_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x + y + 2)(x + y - 2)(x - y + 2)(x - y - 2) < 0\}$$

(hereafter referred to simply as the *cross*), shown in Figure 2, happens to be crucial in calculating the joint spectrum of a family of operators arising from the group  $\mathcal{G}$  [2, 1, 6, 4]. The level curves  $I_c$  forms a foliation of the cross when  $c \geq 0$  and a foliation of the exterior of the cross when  $c \leq -1$ , as seen in the Figure 3.

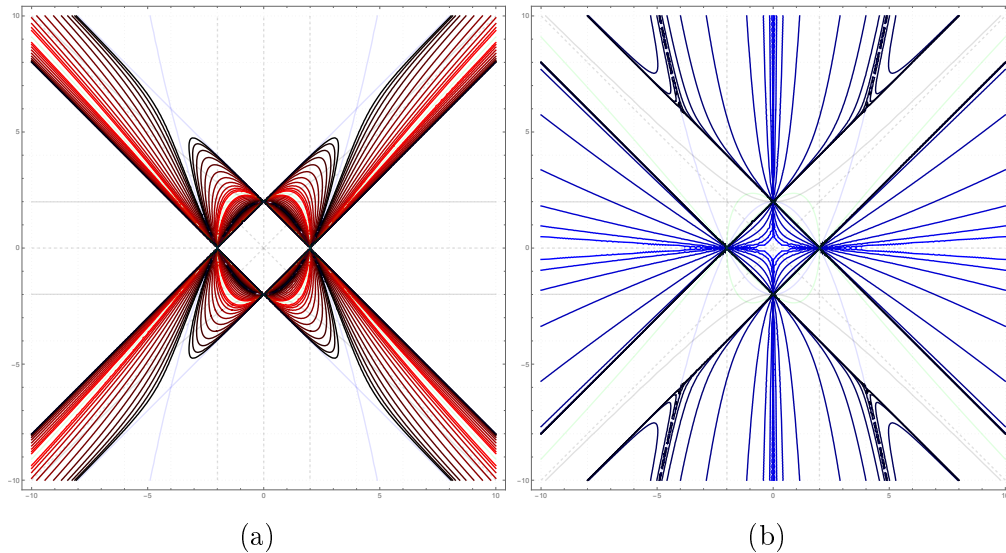


Figure 3: Foliation of the plane by  $G$ -invariant curves  $I_c$ . Figure 3a illustrates the foliation of the interior of the cross when  $c \geq 0$  and Figure 3b illustrates the foliation of the exterior of the cross when  $c \leq -1$ .

### 1 THE MAP $G$ AND $G$ -INVARIANT FUNCTION $I$

We dedicate this section to the study of the properties of the map  $G$  (defined in Equation (1)) and the function  $I$  (defined in Equation (2)). First, let us observe some properties of the map  $G$ .

**Proposition 1.** 1. *The map  $G$  has topological degree 2 and algebraic degree 3.*

2. *The vertical axis is mapped to infinity, except for the points  $(0, \pm 2)$ , which are indertminacy points of  $G$ .*
3. *The map  $G$  is symmetric in the first coordinate and skew-symmetric in the second coordinate. That is, if  $(X, Y) = G(x, y)$ , then  $G(-x, y) = (X, Y)$  and  $G(x, -y) = (X, -Y)$ .*

We now consider the rational function  $I$  defined in Equation (2). Observe that its denominator admits a factorization, allowing the map  $I$  to be rewritten in the following form:

$$I(x, y) = -\frac{(x^6 - x^4y^2 - 12x^4 - 4x^2y^2 + 48x^2 - 4y^4 + 32y^2 - 64)^2}{(x^2 + 2y - 4)^2 (x^2 - 2y - 4)^2 (x + y + 2)(x + y - 2)(x - y + 2)(x - y - 2)}.$$

Next, we introduce a set of functions that will be instrumental in analyzing the function  $I$ . First, we define the linear functions

$$\begin{aligned} L_{+,+}(x, y) &:= L_{+,+} := x + y + 2, & L_{+,-}(x, y) &:= L_{+,-} := x + y - 2, \\ L_{-,+}(x, y) &:= L_{-,+} := x - y + 2, & L_{-,-}(x, y) &:= L_{-,-} := x - y - 2, \\ H_+(x, y) &:= H_+ := y + 2, & H_-(x, y) &:= H_- := y - 2, \end{aligned} \tag{3}$$

that describe a family of straight lines. Then, we define quadratic polynomials

$$P_+(x, y) := P_+ := x^2 + 2y - 4, \quad P_-(x, y) := P_- := x^2 - 2y - 4, \tag{4}$$

defining parabolic curves,

$$H(x, y) := H := x^2 - y^2 + 4, \quad (5)$$

which characterizes a hyperbola, and a degree six polynomial

$$N(x, y) := N = (x^6 - x^4y^2 - 12x^4 - 4x^2y^2 + 48x^2 - 4y^4 + 32y^2 - 64). \quad (6)$$

They will serve as a foundational framework for subsequent geometric and analytical discussions. The following proposition describes the image of these polynomials under the map  $G$ .

**Proposition 2.** *Let  $(X, Y)$  denote the image of  $(x, y)$  under the map  $G$ . Then;*

1.  $X = -\frac{2}{x^2}H_+H_-.$
2.  $Y = -\frac{y}{x^2}H.$
3.  $N(X, Y) = -\frac{4}{x^{12}}NH^3H_+^2H_-^2.$
4.  $H(X, Y) = -\frac{1}{x^4}H_+H_- \cdot (x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 8y^2 + 16).$
5.  $P_+(X, Y) = -\frac{2}{x^4}HP_+H_+.$
6.  $P_-(X, Y) = \frac{2}{x^4}HP_-H_-.$
7.  $L_{+,+}(X, Y) = -\frac{1}{x^2}HH_-.$
8.  $L_{+,-}(X, Y) = -\frac{1}{x^2}L_{+,-}L_{-,+}H_+.$
9.  $L_{-,+}(X, Y) = \frac{1}{x^2}HH_+.$
10.  $L_{-,-}(X, Y) = \frac{1}{x^2}L_{+,+}L_{-,-}H_-.$
11.  $H_+(X, Y) = -\frac{1}{x^2}H_- \cdot (x^2 - y^2 - 2y).$
12.  $H_-(X, Y) = -\frac{1}{x^2}H_+ \cdot (x^2 - y^2 + 2y).$

Using the polynomials in (3), (4), and (6) we write the ration function  $I$  as

$$I(x, y) = -\frac{N^2}{P_+^2P_-^2L_{+,+}L_{+,-}L_{-,+}L_{-,-}}. \quad (7)$$

Applying Proposition 2 to the Equation (7) shows that the rational function  $I$  is  $G$ -invariant, which is restated below.

**Theorem 3.** *The rational function  $I$  is  $G$ -invariant. That is,  $I(G(x, y)) = I(x, y)$  on the set of points where the function  $I$  is defined.*

The set of indeterminacies of  $I$  occurs when both the numerator and the denominator of  $I$  vanish simultaneously, which happened to be the set  $\{(\pm 2, 0), (0, \pm 2)\}$ . Beside from the indeterminacy points, the points where the numerator,  $N$ , vanishes coincide with the roots of the map  $I$ . This shows that the roots of  $I$  lie in the cross,  $R_C$  that is shown in Figure 2. The cross can be written using the polynomials from (3) as

$$R_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid L_{+,+}L_{-,+}L_{+,-}L_{-,-} < 0\}.$$

Note that a point  $(x, y)$  lies inside the cross is equivalent to the condition that the denominator in Equation (7) is less than zero, which is equivalent to the condition that  $I(x, y) \geq 0$ . Thus, the points that lie inside the cross can be characterized by  $I \geq 0$ . We summarize this more formally in the following proposition.

**Proposition 3.** *Let  $(x, y)$  be a non-indeterminacy point of  $I$  that does not lie on parabolas  $P_+ = 0$  and  $P_- = 0$ . Then,*

1. *The point  $(x, y)$  is on the boundary of the cross if and only if  $I(x, y)$  is infinite.*
2. *The point  $(x, y)$  is in the cross if and only if  $I(x, y) \geq 0$ .*
3. *The point  $(x, y)$  is in the exterior of the cross if and only if  $I(x, y) < 0$ .*

## 2 INVARIANT CURVES $I_c$

Let  $I_c$  be the curves  $I(x, y) = c$ , where  $c \in [0, \infty]$ . By the Theorem 3, the curves  $I_c$  are  $G$ -invariant. The invariant curves  $I_0, I_\infty$ , and  $I_2$  are presented in Figure 1. From this point onward, we will use the curve  $I_2$  as a tool for visualizing the structure and behavior of  $I_c$ . By Proposition 3, we see that  $I_c$  lies in the cross for  $c \geq 0$ . Thus, we restrict our analysis to the cross  $R_C$ .

To study the invariant curves  $I_c$ , we partition the cross  $R_C$  into 24 parts using functions  $N, P_+, P_-, H$ , defined by Equations (4),(5), and (6),  $x$ , and  $y$ . The partition of  $R_C$  is shown in Figure 4.

$$\begin{aligned} R_1 &:= \{(x, y) \in R_C \mid N < 0, P_+ < 0, xP_- < 0, xH > 0, y < 0\}, \\ R_2 &:= \{(x, y) \in R_C \mid N < 0, P_+ < 0, P_- > 0, H > 0, x < 0\}, \\ R_3 &:= \{(x, y) \in R_C \mid N > 0, P_+ > 0, P_- < 0, H > 0, x < 0\}, \\ R_4 &:= \{(x, y) \in R_C \mid N > 0, xP_+ < 0, xH > 0, y > 0\}, \\ R_5 &:= \{(x, y) \in R_C \mid N < 0, P_+ > 0, H > 0, L_{-,-} > 0\}, \\ R_6 &:= \{(x, y) \in R_C \mid xN < 0, P_+ > 0, P_- > 0, xH < 0, xy < 0\}, \\ \\ R_7 &:= \{(x, y) \in R_C \mid N < 0, P_+ < 0, xP_- > 0, xH < 0, y < 0\}, \\ R_8 &:= \{(x, y) \in R_C \mid N < 0, P_+ < 0, P_- > 0, H > 0, x > 0\}, \\ R_9 &:= \{(x, y) \in R_C \mid N > 0, P_+ > 0, P_- < 0, H > 0, x > 0\}, \\ R_{10} &:= \{(x, y) \in R_C \mid N > 0, xP_+ > 0, xH < 0, y > 0\}, \\ R_{11} &:= \{(x, y) \in R_C \mid N < 0, P_+ > 0, H > 0, L_{+,+} < 0\}, \\ R_{12} &:= \{(x, y) \in R_C \mid xN > 0, P_+ > 0, P_- > 0, xH > 0, xy > 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{13} &:= \{(x, y) \in R_C | N < 0, xP_+ < 0, P_- < 0, xH > 0, y > 0\}, \\
R_{14} &:= \{(x, y) \in R_C | N < 0, P_+ > 0, P_- < 0, H > 0, x < 0\}, \\
R_{15} &:= \{(x, y) \in R_C | N > 0, P_+ < 0, P_- > 0, H > 0, x < 0\}, \\
R_{16} &:= \{(x, y) \in R_C | N > 0, xP_- < 0, xH > 0, y < 0\}, \\
R_{17} &:= \{(x, y) \in R_C | N < 0, P_- > 0, H > 0, L_{+,-} > 0\}, \\
R_{18} &:= \{(x, y) \in R_C | xN < 0, P_+ > 0, P_- > 0, xH < 0, xy > 0\}, \\
\\
R_{19} &:= \{(x, y) \in R_C | N < 0, xP_+ > 0, P_- < 0, xH < 0, y > 0\}, \\
R_{20} &:= \{(x, y) \in R_C | N < 0, P_+ > 0, P_- < 0, H > 0, x > 0\}, \\
R_{21} &:= \{(x, y) \in R_C | N > 0, P_+ < 0, P_- > 0, H > 0, x > 0\}, \\
R_{22} &:= \{(x, y) \in R_C | N > 0, xP_- > 0, xH < 0, y < 0\}, \\
R_{23} &:= \{(x, y) \in R_C | N < 0, P_- > 0, H > 0, L_{-,+} < 0\}, \\
R_{24} &:= \{(x, y) \in R_C | xN > 0, P_+ > 0, P_- > 0, xH > 0, xy < 0\},
\end{aligned}$$

To continue the analysis, let us examine the images of each partition  $R_i$  of the cross, under the map  $G$ . The following proposition provides the desired description.

**Proposition 4.** For  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,

1.  $G(R_i) = G(R_{i+6}) = R_{13-2i+1} \cup R_{13-2i}$ .
2.  $G(R_{i+12}) = G(R_{i+18}) = R_{25-2i+1} \cup R_{25-2i}$ .

The curve  $I_c$  consists of two components,  $I_c^1$  and  $I_c^2$ , each being the reflection of the other around horizontal axis, as illustrated in Figure 5. For visual clarity, one of these components,  $I_c^1$ , shown in Figure 5a, is further subdivided into two parts, as depicted in Figure 6, which happen to be the reflections of each other around the vertical axis.

Observe that the component  $I_c^1$  fully reside in the union of regions  $R_1$  through  $R_{12}$ , and the component  $I_c^2$  fully reside in the union of regions  $R_{13}$  through  $R_{24}$ .

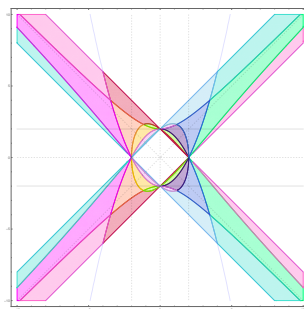
Now let us partition the curve  $I_c$  into 24 segments labeled  $C_1$  through  $C_{24}$ , using the regions  $R_1$  through  $R_{24}$ , where each  $C_i$  is the segment of the curve  $I_c$  in the region  $R_i$ . This partitioning will be used to analyze the image of each segment, as presented in the following proposition, which indicates that the collection  $\{C_i\}$  is a Markov partition for  $I_c^j$ , for any  $c > 0$  and  $j \in \{0, 1\}$ .

**Proposition 5.** For  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $G(C_i) = G(C_{i+6}) = C_{13-2i+1} \cup C_{13-2i}$  and  $G(C_{i+12}) = G(C_{i+18}) = C_{25-2i+1} \cup C_{25-2i}$ .

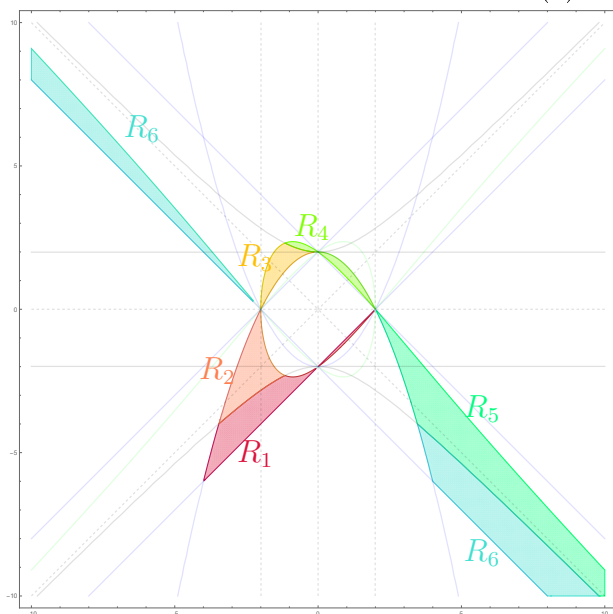
The Proposition 5 is a direct consequence of Proposition 4. Figure 7 illustrates the  $G$ -images of the components  $C_i$  described in Proposition 5. Vertical arrows denote the action of  $G$ , and the pairs labeled  $\widehat{C_i C_j}$  indicate the resulting images after the application of the action of  $G$ .

### 3 DYNAMICS OF THE MAP $G$ ON THE LEVEL CURVES

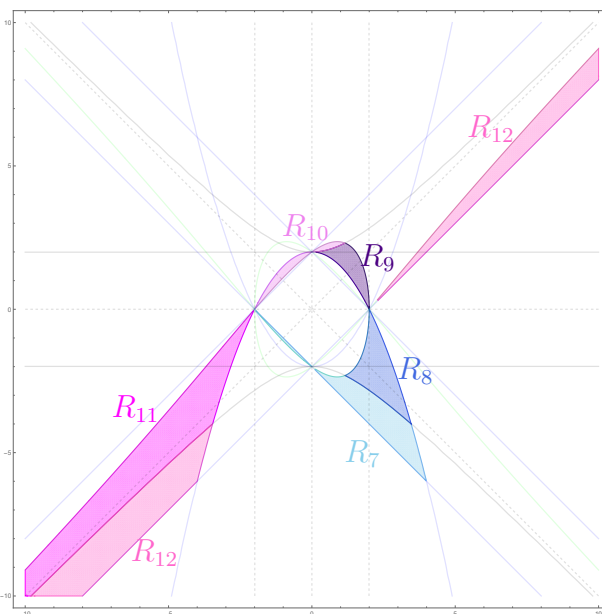
We now restrict the map  $G$  to the component  $I_c^j$  of the invariant curve  $I_c$ , where  $j \in \{1, 2\}$ . By Proposition 5, the partition  $\mathcal{C}$  of  $I_c^j$  defined in the previous section forms a Markov partition for  $I_c^j$ .



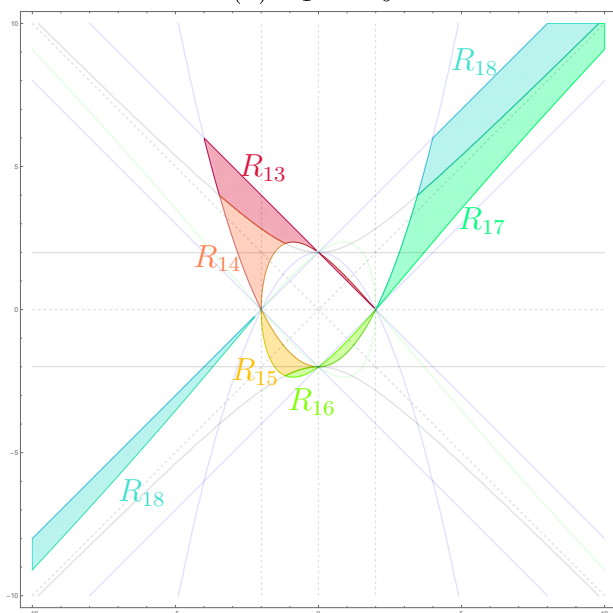
(a) The cross



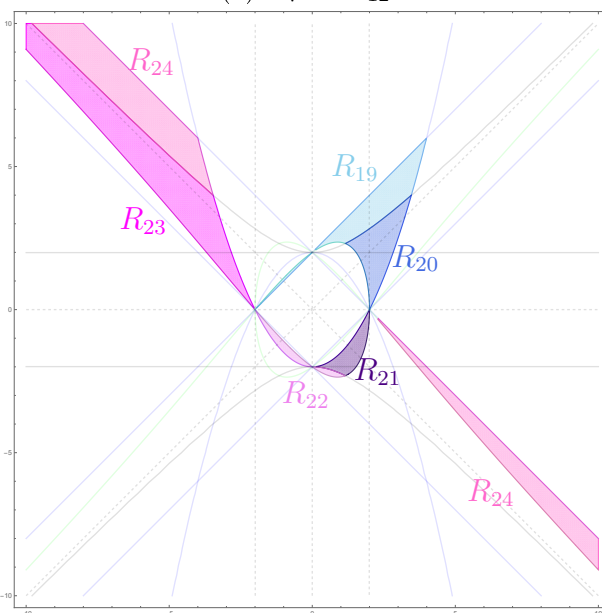
(b)  $R_1$  to  $R_6$



(c)  $R_7$  to  $R_{12}$



(d)  $R_{13}$  to  $R_{18}$



(e)  $R_{19}$  to  $R_{24}$

Figure 4: Partition of the cross  $R_C$ .

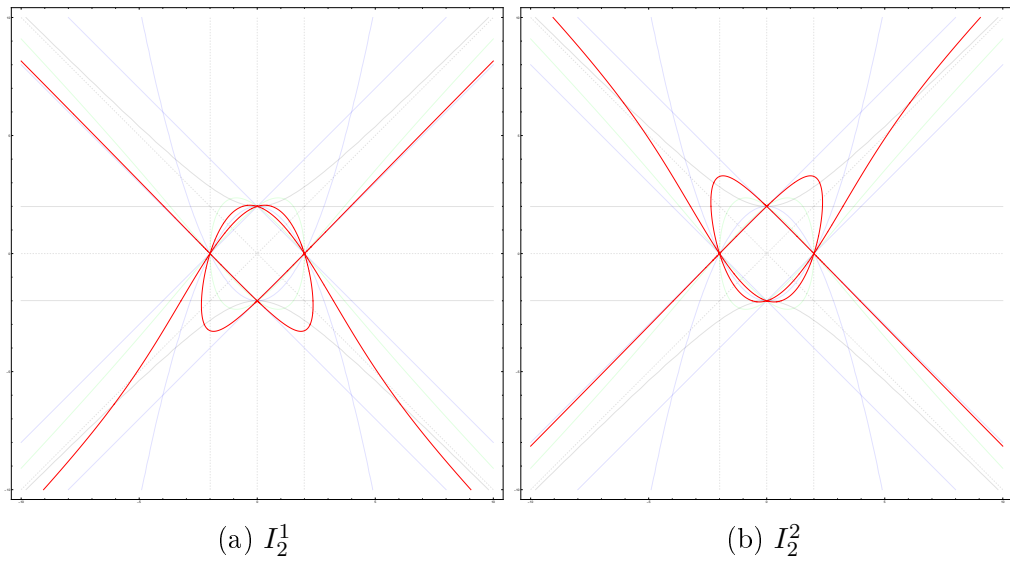


Figure 5: Dividing the curve  $I = 2$  into two components.

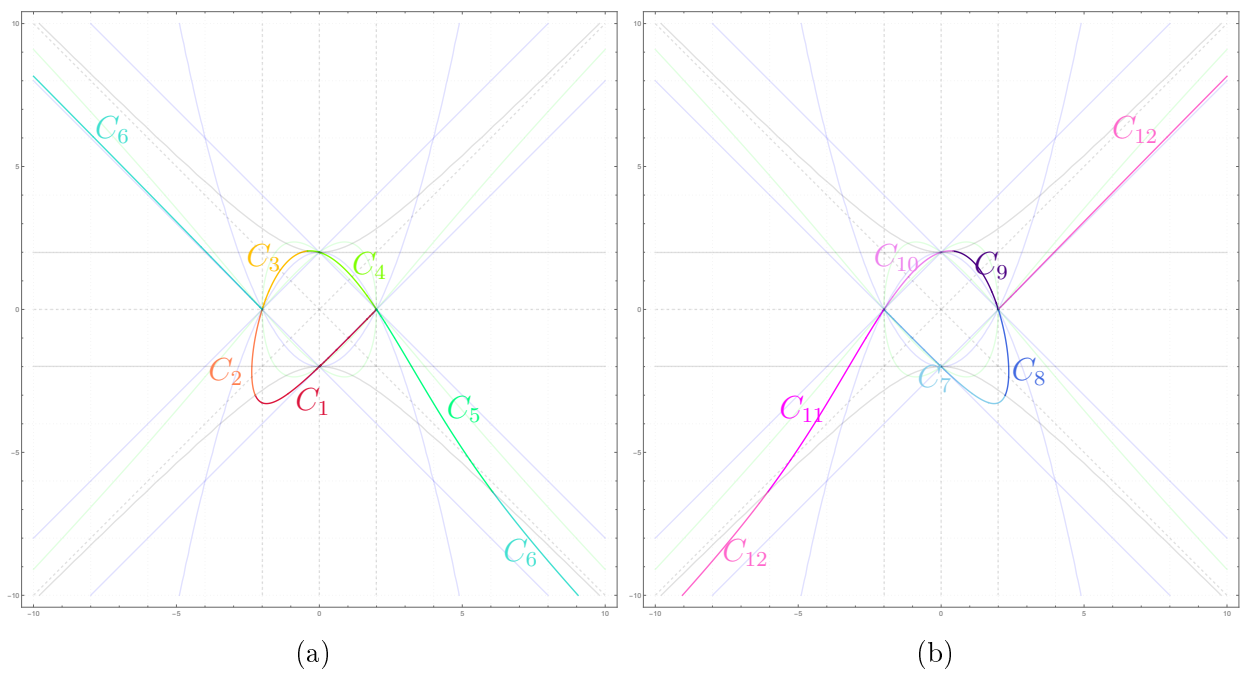


Figure 6: Dividing the curves  $I_2^1$  in Figure 5a into 12 sub-components. These partitions are formed by the curve's intersections with the hyperbola  $H = 0$ , and the points  $(2, 0)$ ,  $(-2, 0)$ .

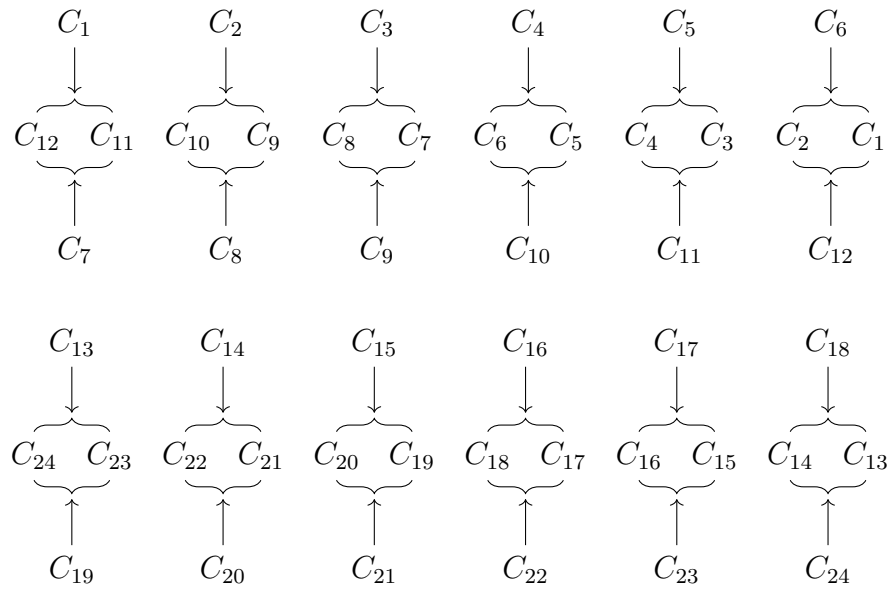


Figure 7: The  $G$ -images of components  $C_1, \dots, C_{24}$

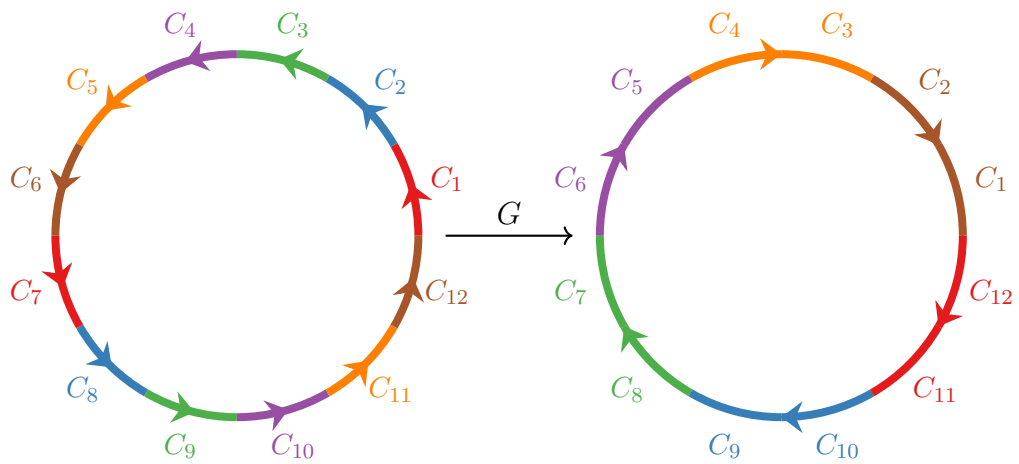


Figure 8: Map  $G$  on the component  $I_c^1$  of the invariant curve  $I_c$  acts as a double cover with reverse orientation.

When restricted to this curve, the map  $G$  acts as a degree-two covering with reversed orientation (see Figure 8). In particular, this implies that the restriction  $G|_{I_c^j}$  is an expanding map.

As a consequence of this expanding Markov structure, each point on the curve  $I_c^j$  can be uniquely encoded by an infinite symbolic sequence drawn from the alphabet  $\mathcal{C}$ . This identification is obtained as follows. Given a point  $p \in I_c^j$ , consider its forward orbit under iteration of  $G$ ,

$$(p, G(p), G^{(2)}(p), G^{(3)}(p), \dots).$$

Since  $I_c^j$  is  $G$ -invariant, every iterate  $G^{(n)}(p)$  lies on  $I_c^j$ . For each  $n \geq 0$ , there exists a unique element  $C_{i_n} \in \mathcal{C}$  such that  $G^{(n)}(p) \in C_{i_n}$ . In this way, the orbit of  $p$  determines a symbolic itinerary  $(C_{i_0}, C_{i_1}, C_{i_2}, \dots) \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ . Let us denote this identification as  $h: I_c^j \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ .

Now consider the space  $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$  equipped with the shift map  $\sigma$ , defined by

$$\sigma((C_{i_n})_{n \geq 0}) = (C_{i_{n+1}})_{n \geq 0}.$$

For a point  $p \in I_c^j$ , let  $h(p) = (C_{i_n})_{n \geq 0}$  denote its symbolic itinerary. Then

$$h(G(p)) = (C_{i_{n+1}})_{n \geq 0} = \sigma((C_{i_n})_{n \geq 0}).$$

Indeed, the  $(n+1)$ th coordinate of  $h(p)$  being  $C_{i_{n+1}}$  is equivalent to the condition  $G^{(n+1)}(p) \in C_{i_{n+1}}$ , which in turn is equivalent to  $G^{(n)}(G(p)) \in C_{i_{n+1}}$ . This shows that the  $n$ th coordinate of  $h(G(p))$  is precisely  $C_{i_{n+1}}$ . Consequently, we obtain

$$\sigma \circ h(p) = h \circ G(p),$$

for all  $p \in I_c^j$ , consequently proving that the map  $G$  is semiconjugate to  $\sigma$ . The relation above can be represented by the following commuting diagram.

$$\begin{array}{ccc} I_c^j & \xrightarrow{G} & I_c^j \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathcal{C}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{C}^{\mathbb{N}} \end{array}$$

Observe that  $h(I_c^j)$  is a Markov subshift of finite type of the full shift  $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ . The shift map  $\sigma$  acts on this subshift as a degree-two covering with reversed orientation. Consequently, the shift dynamics is conjugate to the anti-holomorphic map  $z \mapsto \bar{z}^2$ . Since the map  $G$  is semiconjugate to the shift map  $\sigma$  via the coding map  $h$ , it follows that  $G$  is semiconjugate to the anti-holomorphic map  $z \mapsto \bar{z}^2$ .

#### 4 CONCLUDING REMARKS

We have seen that the map  $G$  admits a family of invariant curves, and that the restriction of  $G$  to any such invariant curve is semiconjugate to the anti-holomorphic map  $z \mapsto \bar{z}^2$ . Further investigation is required to determine whether an equidistribution result can be established for  $G$ , as well as to study the associated Green current. Moreover, this line of inquiry naturally extends to the setting of higher-dimensional rational maps that generalize the map  $G$ , where similar dynamical phenomena may arise.

## REFERENCES

- [1] Bartholdi L., Grigorchuk R.I. *Spectra of non-commutative dynamical systems and graphs related to fractal groups*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000, **331** (6), 429–434. doi:10.1016/S0764-4442(00)01658-X
- [2] Bartholdi L., Grigorchuk R.I. *On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups*. Tr. Mat. Inst. Steklova 2000, **231**, 5–45. (in Russian)
- [3] Bartholdi L., Virág B. *Amenability via random walks*. Duke Math. J. 2005, **130** (1), 39–56. doi:10.1215/S0012-7094-05-13012-5
- [4] Dang N.B., Grigorchuk R.I., Lyubich M. *Self-similar groups and holomorphic dynamics: renormalization, integrability, and spectrum*. Arnold Math. J. 2023, **9** (4), 505–597. doi:10.1007/s40598-022-00223-0
- [5] Pierre Fatou. *Œuvres mathématiques*. Centre National de la Recherche Scientifique, 1964. Originally published works from 1917–1920 on iteration of rational functions.
- [6] Grigorchuk R.I., Nekrashevych V. *Self-similar groups, operator algebras and Schur complement*. J. Mod. Dyn. 2007, **1** (3), 323–370. doi:10.3934/jmd.2007.1.323
- [7] Grigorchuk R.I., Nekrashevych V., Šunić Z. *From self-similar groups to self-similar sets and spectra*. In: Fractal geometry and stochastics V, Progr. Probab. **70**, 175–207, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.
- [8] Grigorchuk R.I., Samarakoon S.T. *Integrable and chaotic systems associated with fractal groups*. Entropy Feb 2021, **23** (2), 237. doi:10.3390/e23020237
- [9] Grigorchuk R.I. *On Burnside’s problem on periodic groups*. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 1980, **14** (1), 53–54.
- [10] Grigorchuk R.I. *On the Milnor problem of group growth*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 1983, **271** (1), 30–33.
- [11] Grigorchuk R.I. *On growth in group theory*. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), Math. Soc. 325–338, Japan, Tokyo, 1991.
- [12] Julia G. *Mémoire sur l’itération des fonctions rationnelles*. J. Math. Pures Appl. 1918, **8**, 47–245. (in French)
- [13] Kaimanovich V.A. *“Münchhausen trick” and amenability of self-similar groups*. Internat. J. Algebra Comput. 2005, **15** (5–6), 907–937. doi:10.1142/S0218196705002694
- [14] McMullen C.T. *Complex Dynamics and Renormalization*. In: Annals of Mathematics Studies, 135. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [15] Milnor J. *Advanced problems: 5603*. Amer. Math. Monthly 1968, **75** (6), 685–686.
- [16] Milnor J. *Dynamics in One Complex Variable*. In: Annals of Mathematics Studies, 160 (3). Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [17] Nekrashevych V. *Self-Similar Groups*. In: Mathematical Surveys and Monographs, 117. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [18] Sabot C. *Spectral properties of self-similar lattices and iteration of rational maps*. Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) 2003, (92), vi+104. doi:10.24033/msmf.405 (in French)
- [19] Silverman J.H. *The Arithmetic of Dynamical Systems*. In: Graduate Texts in Mathematics, 241. Springer, New York, 2007.
- [20] Švarc A.S. *A volume invariant of coverings*. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 1955, **105**, 32–34. (in Russian)
- [21] Teplyaev A. *Spectral analysis on infinite sierpiński gasket*. J. Funct. Anal. 1998, **159** (2), 537–567. doi:10.1006/jfan.1998.3297

- [22] Yang R. *Projective spectrum in Banach algebras*. J. Topol. Anal. 2009, **1** (3), 289–306. doi:10.1142/S1793525309000126

Received 01.12.2025

---

Grigorchuk R.I., Samarakoon S.T., Vorobets Y. (in Ukrainian) *На другій двовимірній раціональній карті, пов'язаній з першою групою проміжного зростання*. // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №2. — С. 188–200.

Ми показуємо, що друге раціональне відображення  $G$ , пов'язане з групою  $\mathcal{G}$  проміжного зростання, побудованою першим автором у 1980 році, є напівспряженим з антиголоморфним відображенням  $z \rightarrow \bar{z}^2$ . Для цього ми використовуємо сімейство  $G$ -інваріантних кривих, знайдених третім автором, і для кожної інваріантної кривої створюємо її марковське розбиття.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.20>

Симотюк М.М.

## ЗАДАЧА З ДВОМА КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У праці досліджено коректність задачі з двома кратними вузлами за виділеною змінною  $t$  та умовами періодичності за рештою координат  $x_1, \dots, x_p$  для лінійних псевдодиференціальних рівнянь. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі у просторах експоненційного типу на торі. За допомогою метричного підходу доведено теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

*Ключові слова і фрази:* двоточкова задача, псевдодиференціальні рівняння, малі знаменники, метричний підхід.

---

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine

e-mail: [mykhailo.m.symotiuk@gmail.com](mailto:mykhailo.m.symotiuk@gmail.com)

### Вступ

Задачі з двома кратними вузлами для рівнянь із частинними похідними є цікавими для побудови загальної теорії крайових задач [2, 13, 21]. Такі задачі є моделями низки фізичних процесів [13]. У працях [4, 14, 16, 17, 18] встановлено достатні умови коректної розв'язності задач з двома кратними вузлами за виділеною змінною  $t$  та умовами періодичності за рештою координат для окремих класів рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Ці достатні умови сформульовано в термінах діофантових властивостей послідовності характеристичних визначників, пов'язаних зі задачею. Для обґрунтування зазначених властивостей у цитованих працях було використано метричний підхід та результати метричної теорії чисел [1, 3, 13, 15] і доведено, що такі властивості виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів рівняння та значень вузлів інтерполяції.

Поряд із цим, недостатньо вивченими залишаються задачі з двома кратними вузлами інтерполяції для загальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Це зумовлено, очевидно, складною нелінійною структурою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків таких задач, та відсутністю ефективних підходів для встановлення

---

УДК 517.95+511.42

2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80, 11K50, 26A27, 26A30.

оцінок знизу цих знаменників. Розробці вказаних питань на випадок псевдодиференціальних рівнянь зі змінними за  $t$  символами присвячена дана праця. Важливу роль для оцінювання малих знаменників відіграє специфічна вронскіанна техніка, розроблена у розділах 4–6.

Зауважимо, що для випадку необмежених за просторовими координатами областях класи єдиності двоточкових задач для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними встановлено у роботах [10, 11], при цьому використано диференціально-символьний метод відокремлення змінних [7].

## 1 ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Домовимося про такі позначення:  $\Omega_p$  –  $p$ -вимірний тор  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ ,  $Q_p^T = (0, T) \times \Omega_p$ ,  $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$ ,  $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$ ,  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega_p$ ,  $D_x = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$ ,  $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_p) \in Q_p^T$ ,  $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_p x_p$ ,  $\text{mes}_{\mathbb{R}^n} M$  – міра Лебега в  $\mathbb{R}^n$  вимірної множини  $M \subset \mathbb{R}^n$ ;  $\delta_{j,q}$  – символ Кронекера:  $\delta_{j,q} = \begin{cases} 1, & j = q, \\ 0, & j \neq q \end{cases}$ ;

$C^n(I; \mathbb{R})$  ( $C^n(I; \mathbb{C})$ ) – простір дійснозначних (комплекснозначних) функцій,  $n$  раз неперервно диференційовних на проміжку  $I \subset \mathbb{R}$ ;

$\mathcal{T}_n$  – простір тригонометричних поліномів степеня  $n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  :

$$\mathcal{T}_n = \left\{ \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p, |k| \leq n} \varphi_k \exp(ik, x) : \varphi_k \in \mathbb{C}, |k| \leq n \right\};$$

$\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$  – простір тригонометричних поліномів скінченного степеня, збіжність у якому визначається таким чином [5]: послідовність

$$\left\{ \varphi^m(x) = \sum_k \varphi_k^m \exp(ik, x); \quad m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathcal{T}$$

збігається до  $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k \exp(ik, x) \in \mathcal{T}$ , якщо:

1) існує  $N \in \mathbb{N}$  таке, що  $\varphi^m(x) \in \mathcal{T}_N$  для всіх  $m \in \mathbb{N}$ ,

2) для кожного  $k \in \mathbb{Z}^p$   $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_k^m = \varphi_k$ ;

$\mathcal{T}'$  – простір антилінійних неперервних функціоналів на  $\mathcal{T}$  зі слабкою збіжністю, який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів [5];

$C^n([0, T]; \mathcal{T})$  ( $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$ ) – простір функцій  $u(t, x)$ ,  $n$  раз неперервно диференційовних за  $t$ , і таких, що при кожному фіксованому  $t \in [0, T]$   $\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in \mathcal{T}$  ( $\mathcal{T}'$ ),  $j = 0, 1, \dots, n$ ;

$W_{\alpha, \beta}(G)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , – простір, отриманий поповненням простору скінченних тригонометричних поліномів  $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$  за нормою

$$\|\varphi(x); W_{\alpha, \beta}(G)\| = \sqrt{\sum_{|k| \geq 0} |\varphi_k|^2 G^{2\alpha}(k) \exp(2\beta G(k))},$$

де  $G : \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$  – така додатна функція, що: 1)  $G(k) \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ ; 2)  $\lim_{|k| \rightarrow +\infty} G(k) = +\infty$ ;

$C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$  – простір функцій  $u(t, x)$  таких, що при фіксованому  $t \in [0, T]$  похідні  $\partial^j u(t, x) / \partial t^j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , належать до простору  $W_{\alpha, \beta}(G)$  і як елементи цього простору є неперервними за  $t$  на  $[0, T]$ ; норму в просторі  $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$  задаємо формулою

$$\|u(t, x); C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))\| = \sum_{j=0}^n \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j}; W_{\alpha, \beta}(G) \right\|;$$

$S^n(G)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  – множина псевдодиференціальних операцій  $A(t, D_x)$ , дія яких на функцію  $u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(ik, x)$  задається формулою

$$A(t, D_x)u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} A(t, k)u_k(t) \exp(ik, x),$$

де для кожного  $k \in \mathbb{Z}^p$   $A(t, k) \in C^n[0, T]$ , причому

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \left\{ \frac{\|A(t, k)\|_{C^n[0, T]}}{G(k)} \right\} < \infty;$$

функції  $A(t, k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ , називатимемо амплітудами псевдодиференціальної операції  $A(t, D_x)$ ;  $S_{\mathbb{R}}^n(G)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  – множина операцій  $A(t, D_x) \in S^n(G)$ , усі амплітуди яких є дійснозначними функціями.

## 2 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглядаємо задачу

$$L_n \left( \frac{\partial}{\partial t}, D_x \right) u(t, x) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t, D_x) \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0, \quad (t, x) \in Q_p^T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} U_j[u] \equiv \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, r, \quad 1 \leq r < n, \quad x \in \Omega_p, \\ U_{r+j}[u] \equiv \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=t_1} = \varphi_{r+j}(x), \quad j = 1, \dots, n-r, \quad x \in \Omega_p, \end{cases} \quad (2)$$

де  $0 < t_1 \leq T$ ,  $A_j(t, D_x) \in S^0(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Задача (1), (2) називається задачею з кратними вузлами  $t = 0$  і  $t = t_1$ , числа  $r$  і  $(n-r)$  називаються кратностями вузлів  $t = 0$  і  $t = t_1$  відповідно.

**Означення 1.** Задачу (1), (2) будемо називати  $(+\infty, +\infty)$ -коректною, якщо для довільних  $\varphi_j \in \mathcal{T}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , у просторі  $C^n([0, T]; \mathcal{T})$  існує єдиний розв'язок  $u(t, x)$  цієї задачі, який неперервно залежить від  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , тобто з того, що послідовності  $\{\varphi_j^m\}_{m=1}^\infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ , збігаються в  $\mathcal{T}$  до  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , відповідно, випливає, що послідовність  $\{u^m(t, x)\}_{m=1}^\infty$  розв'язків задач

$$L_n(\partial/\partial t, D_x)u^m(t, x) = 0, \quad U_j[u^m(t, x)] = \varphi_j^m(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad m \in \mathbb{N},$$

збігається в просторі  $C^n([0, T]; \mathcal{T})$  до  $u(t, x)$ .

**Означення 2.** Задачу (1), (2) будемо називати  $(-\infty, -\infty)$ -коректною, якщо для довільних  $\varphi_j \in \mathcal{T}'$ ,  $j = 1, \dots, n$ , у просторі  $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$  існує єдиний розв'язок  $u(t, x)$  цієї задачі, який неперервно залежить від  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , тобто з того, що послідовності  $\{\varphi_j^m\}_{m=1}^\infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ , збігаються в  $\mathcal{T}'$  до  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , відповідно, випливає, що послідовність  $\{u^m(t, x)\}_{m=1}^\infty$  розв'язків задач

$$L_n(\partial/\partial t, D_x)u^m(t, x) = 0, \quad U_j[u^m(t, x)] = \varphi_j^m(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad m \in \mathbb{N},$$

збігається в просторі  $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$  до  $u(t, x)$ .

**Означення 3.** Задачу (1), (2) будемо називати  $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною, де  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ , якщо для довільних  $\varphi_j \in W_{\alpha_j, \beta_j}(G)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , існує єдина функція  $u(t, x)$  з простору  $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$  така, що

$$\|L_n(\partial/\partial t, D_x)u(t, x); C([0, T]; W_{\alpha-1, \beta}(G))\| = 0,$$

$$\|U_j[u(t, x)] - \varphi_j(x); W_{\alpha_j, \beta_j}(G)\| = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\|u(t, x); C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))\| \leq C \sum_{j=1}^n \|\varphi_j(x); W_{\alpha_j, \beta_j}(G)\|,$$

де стала  $C > 0$  не залежить від вибору  $\varphi_j \in W_{\alpha_j, \beta_j}(G)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

У статті числа  $\alpha_j, \beta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , будемо використовувати тільки, як компоненти векторів  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ .

### 3 УМОВИ КОРЕКТНОСТІ ЗАДАЧІ (1), (2)

Встановимо умови коректності задачі (1), (2). Оскільки операції  $A_j(t, D_x)$  належать до класу  $S^0(G)$ , то  $A_j(t, k) \in C[0, T]$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ . Тому для кожного  $k \in \mathbb{Z}^p$  звичайне диференціальне рівняння

$$L_n\left(\frac{d}{dt}, k\right)u_k(t) = 0, \quad (3)$$

має таку фундаментальну систему розв'язків  $f_1(t, k), \dots, f_n(t, k) \in C^n[0, T]$ , що

$$f_q^{(j-1)}(0, k) = \delta_{j,q}, \quad j, q = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Позначимо:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} f_{r+1}(t_1, k) & \dots & f_n(t_1, k) \\ f'_{r+1}(t_1, k) & \dots & f'_n(t_1, k) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{r+1}^{(n-r-1)}(t_1, k) & \dots & f_n^{(n-r-1)}(t_1, k) \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (5)$$

**Теорема 1.** Нехай  $A_j(t, D_x) \in S^0(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Для  $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректності задачі (1), (2) необхідно, а для  $(+\infty, +\infty)$ -коректності та  $(-\infty, -\infty)$ -коректності задачі (1), (2) необхідно й досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \neq 0. \quad (6)$$

*Доведення.* Розглянемо випадок  $(-\infty, -\infty)$ -коректності.

*Необхідність.* Якщо  $\Delta(k^0) = 0$  для деякого  $k^0 \in \mathbb{Z}^p$ , то система  $(n-r)$  лінійних рівнянь

$$\sum_{q=r+1}^n C_{k^0, q} f_q^{(j-1)}(t_1, k^0) = 0, \quad j = 1, \dots, n-r,$$

має ненульовий розв'язок  $(C_{k^0, r+1}, \dots, C_{k^0, n})$ . Легко перевірити, що тоді функція

$$u^0(t, x) = \sum_{q=r+1}^n C_{k^0, q} f_q(t, k^0) \exp(ik^0, x)$$

належить до простору  $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$  і є ненульовим розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (1), (2). Це суперечить  $(-\infty, -\infty)$ -коректності задачі (1), (2).

*Достатність.* Нехай в умовах (2) праві частини  $\varphi_j(x)$  належать до  $\mathcal{T}'$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тоді правильними є наступні зображення:

$$\varphi_j(x) = \sum_{|k| \geq 0} \varphi_{j,k} \exp(ik, x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

де  $\varphi_{j,k} \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ . Якщо функція  $u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(ik, x)$  належить до простору  $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$  і є розв'язком задачі (1), (2), то кожна функція  $u_k(t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ , є розв'язком рівняння (3) і справджує умови

$$u_k^{(j-1)}(0) = \varphi_{j,k}, \quad j = 1, \dots, r, \quad u_k^{(j-1)}(t_1) = \varphi_{r+j,k}, \quad j = r+1, \dots, n. \quad (8)$$

Розв'язок задачі (3), (8) з простору  $C^n[0, T]$  зображується рівністю

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^n C_{k,q} f_q(t, k), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (9)$$

де сталі  $C_{k,q}$ ,  $q = 1, \dots, n$ , є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^n C_{k,q} f_q^{(j-1)}(0, k) = \varphi_{j,k}, & j = 1, \dots, r, \\ \sum_{q=1}^n C_{k,q} f_q^{(j-1)}(t_1, k) = \varphi_{r+j,k}, & j = 1, \dots, n-r. \end{cases} \quad (10)$$

Із початкових умов (4) для функцій  $f_1(t, k), \dots, f_n(t, k)$  та перших  $r$  рівнянь системи (10) випливає, що  $C_{k,q} = \varphi_{q,k}$ ,  $q = 1, \dots, r$ . Тоді останні  $(n-r)$  рівнянь системи (10) набувають вигляду

$$\sum_{q=r+1}^n C_{k,q} f_q^{(j-1)}(t_1, k) = \varphi_{r+j,k} - \sum_{q=1}^r \varphi_{q,k} f_q^{(j-1)}(t_1, k), \quad j = 1, \dots, n-r. \quad (11)$$

Оскільки визначник системи (11) співпадає з визначником  $\Delta(k)$  і виконується умова (6), то система (11) має єдиний розв'язок  $C_{k,r+1}, \dots, C_{k,n}$ , який знаходимо за правилом Крамера:

$$C_{k,q} = \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \left( \varphi_{r+j,k} - \sum_{q=1}^r \varphi_{q,k} f_q^{(j-1)}(t_1, k) \right), \quad (12)$$

де  $\Delta_{j,q}(k)$ ,  $j, q = 1, \dots, n-r$ , – алгебричне доповнення елемента  $f_{r+q}^{(j-1)}(t_1, k)$  у визначнику  $\Delta(k)$ . Із формул (9), (12) випливає, що при виконанні умови (6) задача (1), (2), у якій функції  $\varphi_j \in \mathcal{T}'$ ,  $j = 1, \dots, n$ , визначені рівностями (7), має єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \exp(ik, x) & \left\{ \sum_{q=1}^r \varphi_{q,k} f_q(t, k) - \sum_{q=r+1}^n \sum_{j=1}^{n-r} \sum_{s=1}^r \frac{\Delta_{j,q-r}(k)}{\Delta(k)} \times \right. \\ & \left. \times f_q(t, k) f_s^{(j-1)}(t_1, k) \varphi_{s,k} + \sum_{q=r+1}^n \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\Delta_{j,q-r}(k)}{\Delta(k)} f_q(t, k) \varphi_{r+j,k} \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

що належить до простору  $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$ . Доведемо, що за умови (6) отриманий розв'язок (13) неперервно залежить від  $\varphi_j \in \mathcal{T}'$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Нехай послідовності  $\{\varphi_j^m(x)\}_{m=1}^\infty$  збігаються в  $\mathcal{T}'$  до  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , відповідно. Це означає, що

$$\varphi_j^m(x) = \sum_{|k| \geq 0} \varphi_{j,k}^m \exp(ik, x), \quad \varphi_{j,k} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

і для кожного  $k \in \mathbb{Z}^p$  існує границя  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{j,k}^m = \varphi_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Оскільки виконується умова (6), то для кожного  $m \in \mathbb{N}$  задача

$$L_n(\partial/\partial t, D_x)u^m(t, x) = 0, \quad U_j[u^m(t, x)] = \varphi_j^m(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad m \in \mathbb{N},$$

має в просторі  $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$  єдиний розв'язок  $u^m(t, x) \equiv \sum_{|k| \geq 0} u_k^m(x) \exp(ik, x)$ . Із формул (12), (13), (14) дістаємо, що

$$u^m(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \exp(ik, x) \left\{ \sum_{q=1}^r \varphi_{q,k}^m f_q(t, k) - \sum_{q=r+1}^n \sum_{j=1}^{n-r} \sum_{s=1}^r \frac{\Delta_{j,q-r}(k)}{\Delta(k)} \times \right. \\ \left. \times f_q(t, k) f_s^{(j-1)}(t_1, k) \varphi_{s,k}^m + \sum_{q=r+1}^n \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\Delta_{j,q-r}(k)}{\Delta(k)} f_q(t, k) \varphi_{r+j,k}^m \right\}. \quad (15)$$

Із формул (13), (15) випливає, що для кожного  $k \in \mathbb{Z}^p$  і для довільного  $t \in [0, T]$  виконуються нерівності

$$\left| \frac{d^j u_k^m(t)}{dt^j} - \frac{d^j u_k(t)}{dt^j} \right| \leq C_1 \delta_k M_k \left( \sum_{j=1}^r |\varphi_{j,k}^m - \varphi_{j,k}| M_k + \sum_{j=r+1}^n |\varphi_{j,k}^m - \varphi_{j,k}| \right), \quad (16)$$

де  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $C_1 > 0$  – стала, яка не залежить від  $j, k, m, t$ ,

$$\delta_k = 1 + \max_{1 \leq j, q \leq n-r} \left| \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \right|, \quad M_k = 1 + \max_{1 \leq q \leq n} \{ \|f_q(t, k); C^n[0, T]\| \}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

З нерівностей (16) отримуємо, що для кожного  $k \in \mathbb{Z}^p$  існує границя

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_k^m(t) - u_k(t); C^n[0, T]\| = 0.$$

Таким чином, послідовність  $\{u^m(t, x)\}_{m=1}^\infty$  збігається в просторі  $C^n([0, T]; \mathcal{T}')$  до  $u(t, x)$ .

Доведення теореми для випадків  $(-\infty, -\infty)$ -коректності та  $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректності проводиться аналогічно. Теорему доведено.  $\square$

**Приклад 1.** Нехай рівняння (1) має факторизований вигляд

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - B_n(t, D_x) \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial t} - B_1(t, D_x) \right) u(t, x) = 0,$$

у якому  $B_j(t, D_x) \in S_{\mathbb{R}}^{n-j}(G)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . У цьому випадку диференціальний вираз  $L_n(d/dt, k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ , є композицією диференціальних виразів першого порядку з дійсними коефіцієнтами. Тоді за теоремою Пойя (див. [6, с. 87]) умова (6) виконується для довільного  $t_1 \in (0, T]$ .

**Теорема 2.** Нехай  $A_j(t, D) \in S^0(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , справджується умова (6) та існують сталі  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  виконується нерівність

$$|\Delta(k)| \geq G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta G(k)). \quad (17)$$

Якщо  $\alpha_j \geq \alpha + \gamma + 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\beta_j \geq \beta + \delta + (n - r + 2)AT, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\beta_j \geq \beta + \delta + (n - r + 1)AT, \quad j = r + 1, \dots, n,$$

де

$$A = \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \left\{ \frac{1}{G(k)} \sqrt{1 + \sum_{j=0}^{n-1} \max_{t \in [0, T]} |A_j(t, k)|^2} \right\}, \quad (18)$$

то задача (1), (2) є  $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною.

*Доведення.* Функції  $f_q(t, k)$ ,  $q = 1, \dots, n$ , є розв'язками рівняння (3) і справджують умови (4). Зведемо задачі Коші (4) для рівняння (3) до відповідних задач Коші для системи рівнянь першого порядку і використаємо наслідок 1 із [9, с. 29]. Тоді для функцій із фундаментальної системи розв'язків рівняння (3) отримаємо оцінки

$$\max_{t \in [0, T]} |f_q^{(j)}(t, k)| \leq C_2(1 + \delta_{j,n}G(k)) \exp(ATG(k)), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad q = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Із нерівностей (19) дістанемо, що

$$|\Delta_{j,q}(k)| \leq C_3 \exp((n - r)ATG(k)), \quad j, q = 1, \dots, n - r. \quad (20)$$

Нехай в умовах (2)  $\varphi_j \in W_{\alpha_j, \beta_j}(G)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Оскільки виконується умова (6), то існує єдиний формальний розв'язок задачі (1), (2), який зображається рядом (13). Доведемо, що цей ряд належить до простору  $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$ . З нерівностей (17)–(20) для коефіцієнта Фур'є  $u_k(t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ , ряду (13) отримуємо оцінки

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} |u_k^{(q)}(t)|^2 &\leq C_4 \left( \sum_{j=1}^r |\varphi_{j,k}|^2 w_k^2(\gamma + 1; \delta + (n - r + 2)AT) + \right. \\ &\left. + \sum_{j=r+1}^n |\varphi_{j,k}|^2 w_k^2(\gamma + 1; \delta + (n - r + 1)AT) \right), \quad q = 0, 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (21)$$

де вжито позначення  $w_k(\xi; \eta) = G^\xi(k) \exp(\eta G(k))$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ . Враховуючи елементарні співвідношення

$$w_k(\alpha; \beta) w_k(\gamma + 1; \delta + (n - r + 2)AT) \leq w_k(\alpha_j; \beta_j), \quad j = 1, \dots, r,$$

$$w_k(\alpha; \beta) w_k(\gamma + 1; \delta + (n - r + 1)AT) \leq w_k(\alpha_j; \beta_j), \quad j = r + 1, \dots, n,$$

з формули (13) та оцінок (21) дістаємо, що

$$\begin{aligned} \|u(t, x); C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))\| &= \sum_{q=0}^n \max_{t \in [0, T]} \sqrt{\sum_{|k| \geq 0} |u_k^{(q)}(t)|^2 w_k^2(\alpha; \beta)} \leq \\ &\leq C_5 \sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{|k| \geq 0} |\varphi_{j,k}|^2 w_k^2(\alpha_j; \beta_j)} = C_5 \sum_{j=1}^n \|\varphi_j(x); W_{\alpha_j, \beta_j}(G)\|. \end{aligned}$$

Таким чином, ряд (13) належить до простору  $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta}(G))$  і неперервно залежить від функцій  $\varphi_j \in W_{\alpha_j, \beta_j}(G)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Теорему доведено.  $\square$

## 4 ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Наступні леми будуть використані при дослідженні питання про можливість виконання нерівності (17). Домовимося про те, що для  $n$  гладких функцій  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  символ  $W(g_1, \dots, g_n)(t)$  позначатиме вронскіан

$$W(g_1, \dots, g_n)(t) = \det \left\| g_q^{(j-1)}(t) \right\|_{j,q=1}^n.$$

**Лема 1.** Нехай функції  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  утворюють на відрізку  $[a, b]$  фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$g^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)g^{(n-1)}(t) + \dots + p_0(t)g(t) = 0, \quad n \geq 2,$$

коефіцієнти  $p_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , якого є такими, що

$$p_{n-1} \in C^{n-1}[a, b], \quad p_j \in C^{n-2}[a, b], \quad j = 0, 1, \dots, n-2.$$

Нехай  $G_j(t)$  – мінор вронскіана  $W(g_1, \dots, g_n)(t)$ , який відповідає елементові  $g_j^{(n-1)}(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , і нехай

$$\tilde{G}_j(t) = e^{\alpha(t)} G_j(t), \quad j = 1, \dots, n,$$

де  $\alpha(t) = \int_a^t p_{n-1}(\tau) d\tau$ . Тоді функції  $\tilde{G}_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , утворюють на  $[a, b]$  фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$\tilde{G}^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} (p_j(t) \tilde{G}(t))^{(j)} = 0, \quad (22)$$

таку, що

$$\left| W(\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_n)(t) \right| = \left| e^{n\alpha(t)} \right| \cdot |W(g_1, \dots, g_n)(t)|^{n-1}. \quad (23)$$

*Доведення.* Те, що функції  $\tilde{G}_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (22) – відомий факт (див. [8, §17.7]).

Доведемо істинність співвідношення (23). Для  $n = 2$  рівність (23) можна перевірити безпосередньою підстановкою. Дійсно, у цьому випадку  $G_1(t) = g_2(t)$ ,  $G_2(t) = g_1(t)$  і тому

$$W(\tilde{G}_1, \tilde{G}_2)(t) = W(e^{\alpha(t)} G_1(t), e^{\alpha(t)} G_2(t)) = e^{2\alpha(t)} \cdot W(g_2, g_1)(t) = -e^{2\alpha(t)} \cdot W(g_1, g_2)(t).$$

У випадку  $n \geq 3$  через  $V_{j,q}(t)$ ,  $j, q = 1, \dots, n$ , будемо позначати мінор, що відповідає елементові  $g_q^{(j-1)}(t)$  у визначнику  $W(g_1, \dots, g_n)(t)$ . Легко перевірити, що для кожного  $q = 1, \dots, n$ , виконуються наступні співвідношення:

$$\begin{cases} V'_{n,q}(t) = V_{n-1,q}(t), \\ V'_{n-1,q}(t) = -p_{n-2}(t)V_{n,q}(t) - p_{n-1}(t)V_{n-1,q}(t) + V_{n-2,q}(t), \\ \dots, \\ V'_{2,q}(t) = (-1)^n p_1(t)V_{n,q}(t) - p_{n-1}(t)V_{2,q}(t) + V_{1,q}(t), \\ V'_{1,q}(t) = (-1)^{n+1} p_0(t)V_{n,q}(t) - p_1(t)V_{1,q}(t). \end{cases} \quad (24)$$



Розвинемо визначник  $W(g_1, \dots, g_n, y)$  за елементами останнього стовпця, тоді запишемо рівняння (31) у вигляді

$$y^{(n)}(t) + \sum_{q=0}^{n-1} r_q(t) y^{(q)}(t) = 0, \quad (32)$$

де

$$r_q(t) = \frac{w_q(t)}{W(g_1, \dots, g_n)(t)}, \quad q = 0, 1, \dots, n-1,$$

а  $w_q(t)$  – алгебричне доповнення елемента  $y^{(q)}(t)$ ,  $q = 0, 1, \dots, n-1$ , у визначнику  $W(g_1, \dots, g_n, y)(t)$ . Із умови леми 2 випливає, що коефіцієнти  $r_q(t)$ ,  $q = 0, 1, \dots, n-1$ , рівняння (32) підпорядковані таким вимогам гладкості:  $r_{n-1} \in C^{n-1}[a, b]$ ,  $r_j \in C^{n-2}[a, b]$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-2$ . Тому твердження леми 2 випливає з леми 1.  $\square$

## 5 МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ МАЛИХ ЗНАМЕННИКІВ

З'ясуємо питання про можливість виконання нерівності (17), додатково припускаючи, що функція  $G : \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ , яка описує ріст амплітуд псевдодиференціальних операцій у рівнянні (1), для деяких невід'ємних  $\lambda, \mu$  справджує умову

$$\sum_{|k| \geq 0} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)) < \infty. \quad (33)$$

Нам знадобиться класична лема Бореля-Кантеллі.

**Лема 3.** (Бореля-Кантеллі, [13, 19]). Нехай  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  – послідовність вимірних (за мірою Лебега в  $\mathbb{R}^n$ ) множин з  $\mathbb{R}^n$  таких, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}_{\mathbb{R}^n} A_k < \infty.$$

Тоді міра Лебега в  $\mathbb{R}^n$  множини тих точок, які потрапляють до нескінченної кількості множин даної послідовності, дорівнює нулю.

Для кожного  $j = 0, 1, \dots, r$ , через  $V_j(t, k)$  позначимо вронскіан  $(n-j)$  функцій  $f_{j+1}(t, k), \dots, f_n(t, k)$ :

$$V_j(t, k) = \begin{vmatrix} f_{j+1}(t, k) & \dots & f_n(t, k) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{j+1}^{(n-j-1)}(t, k) & \dots & f_n^{(n-j-1)}(t, k) \end{vmatrix}.$$

Через  $V_{j,q}(t, k)$ ,  $q = j+1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, r$ , будемо позначати той мінор визначника  $V_j(t, k)$ , який відповідає елементові  $f_q^{(n-j-1)}(t, k)$ ; зрозуміло, що мінор  $V_{j,j+1}(t, k)$  співпадає з вронскіаном  $V_{j+1}(t, k)$ .

**Лема 4.** Нехай  $A_j(t, D_x) \in S^{n-2}(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ,  $A_{n-1}(t, D_x) \in S^{n-1}(G)$ . Якщо на деякому проміжку  $I \subset [0, T]$  виконується нерівність

$$\forall t \in I \quad |V_j(t, k)| \geq \exp(-\rho_j G(k)), \quad \rho_j \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

то для довільного  $\sigma_j > 0$  множини

$$\{t \in I : |V_{j+1}(t, k)| < \exp(-\rho_{j+1}G(k))\}, \quad \rho_{j+1} = (n - j - 1)(\rho_j + AT + \sigma_j),$$

можна покрити не більше, ніж  $N_{j+1}(k)$  проміжками, довжина кожного з яких не перевищує  $d_{j+1}(k)$ , при цьому для довільного  $\varepsilon \in (0, \sigma_j)$  виконуються оцінки

$$N_{j+1}(k) \leq C_6 |I| \exp((\xi_j + \varepsilon)G(k)), \quad d_{j+1}(k) \leq C_7 \exp((\varepsilon - \sigma_j)G(k)),$$

де  $\xi_j = (\rho_j + 2AT)(n - j - 1)$ , а додатні сталі  $C_6, C_7$  не залежать від  $k$ .

*Доведення.* Із умови леми 4 випливає, що

$$A_j(t, k) \in C^{m-2}[0, T], \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \quad A_{n-1}(t, k) \in C^{n-1}[0, T].$$

Тому функції  $f_{j+1}(t, k), \dots, f_n(t, k)$  належать до простору  $C^{2(n-j)-1}[0, T]$ .

Оскільки  $V_j(t, k) \neq 0$  для всіх  $t \in I$ , то за лемою 2

$$|W(V_{j,j+1}, \dots, V_{j,n})(t, k)| = |W(f_{j+1}, \dots, f_n)(t, k)|^{n-j-1} = |V_j(t, k)|^{n-j-1}.$$

Тоді з нерівності (34) випливає, що

$$|W(V_{j,j+1}, \dots, V_{j,n})(t, k)| \geq \exp(-(n - j - 1)\rho_j G(k)). \quad (35)$$

Розкриваючи визначник  $W(V_{j,j+1}, \dots, V_{j,n})(t, k)$  і враховуючи, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \{G^\xi(k) \exp(-\varepsilon G(k))\} < \infty,$$

з оцінок (19) отримаємо

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad |W(V_{j,j+1}, \dots, V_{j,n})(t, k)| &\leq C(n, j) \max_{0 \leq q \leq n-j-1} \{|V_{j+1}^{(q)}(t, k)|\} \times \\ &\times \left( \max_{\substack{0 \leq q \leq n-j-1, \\ j+2 \leq s \leq n}} \{|V_{j,s}^{(q)}(t, k)|\} \right)^{n-j-1} \leq C_8 \max_{0 \leq q \leq n-j-1} \{|V_{j+1}^{(q)}(t, k)|\} \times \\ &\times \exp((n - j - 1)(AT + \varepsilon)G(k)), \end{aligned} \quad (36)$$

де  $C(n, j), C_8 > 0$  – сталі, які не залежать від  $k \in \mathbb{Z}^p$ . Тоді з формул (35), (36) випливає, що для довільного  $\varepsilon > 0$  існує стала  $C_9 > 0$  така, що в кожній точці  $t \in I$  виконується нерівність

$$\max_{0 \leq q \leq n-j-1} \{|V_{j+1}^{(q)}(t, k)|\} \geq C_9 \exp(-(n - j - 1)(\rho_j + AT + \varepsilon)G(k)). \quad (37)$$

Зазначимо також, що для довільного  $\varepsilon > 0$  існує стала  $C_{10} > 0$  така, що

$$\max_{0 \leq q \leq n-j} \{|V_{j+1}^{(q)}(t, k)|\} \leq C_{10} \exp((n - j - 1)(AT + \varepsilon)G(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (38)$$

Використовуючи міркування, аналогічні до наведених при доведенні допоміжних лем у праці [20], з формул (37), (38) отримуємо твердження леми 4.  $\square$

**Теорема 3.** Нехай  $A_{n-1}(t, D_x) \in S^{n-1}(G)$ ,  $A_j(t, D_x) \in S^{n-2}(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-2$ , а для функції  $G(k)$  виконується умова (33). Для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $\mathbb{R}$ ) чисел  $t_1 \in (0, T]$  нерівність (17) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  при довільному  $\gamma \in \mathbb{R}$  та  $\delta = \nu_r$ , де число  $\nu_r$  визначається зі системи таких рекурентних співвідношень:  $n_1 = 3AT(n-1)$ ,  $\nu_1 = (n-1)((3n-2)AT + \mu + \sigma_0)$ ,

$$\begin{cases} \nu_{j+1} = (n-j-1)(n_j + \nu_j + AT + \mu + \sigma_j) + (n-j-1)^2(\nu_j + 2AT), \\ n_{j+1} = n_j + (n-j-1)(\nu_j + 2AT), \quad j = 1, \dots, r-1, \end{cases}$$

де  $\sigma_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, r-1$ , – довільні фіксовані додатні числа.

*Доведення.* Розглянемо такі множини:

$$E_j(k) = \{t \in [0, T] : |V_j(t, k)| < \exp(-\nu_j G(k))\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad j = 1, \dots, r.$$

Із формули Ліувілля для вронскіана системи функцій  $f_1(t, k), \dots, f_n(t, k)$  випливає, що на всьому відрізку  $[0, T]$  виконується нерівність

$$|W(f_1, \dots, f_n)(t, k)| = |V_0(t, k)| \geq \exp(-ATG(k)) = \exp(-\nu_0 G(k)).$$

Згідно з лемою 4, множину  $E_1(k)$  можна покрити відрізками, які позначимо через  $I_q^{(1)}(k)$ ,  $q = 1, \dots, N_1(k)$ , довжина кожного з яких не перевищує  $d_1(k)$ ; при цьому для довільного  $\varepsilon > 0$  виконуються такі оцінки:

$$\begin{aligned} N_1(k) &\leq C_{11} \exp((n_1 + \varepsilon)G(k)), \\ d_1(k) &\leq C_{12} \exp\left(\left(\nu_0 - \frac{\nu_1}{n-1} + \varepsilon\right)G(k)\right). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sum_{q=1}^{N_1(k)} \text{mes}_{\mathbb{R}} I_q^{(1)}(k) \leq N_1(k)d_1(k) \leq C_{13}G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)).$$

Припустимо, що множину  $E_j(k)$ ,  $j \geq 1$ , можна покрити відрізками, які позначимо через  $I_q^{(j)}(k)$ ,  $q = 1, \dots, N_j(k)$ , довжина кожного з яких не перевищує  $d_j(k)$  так, що для довільного  $\varepsilon > 0$  виконуються оцінки

$$\begin{aligned} N_j(k) &\leq C_{14} \exp((n_j + \varepsilon)G(k)), \\ d_j(k) &\leq C_{15} \exp\left(\left(\nu_{j-1} + AT - \frac{\nu_j}{n-j} + \varepsilon\right)G(k)\right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\sum_{q=1}^{N_j(k)} \text{mes}_{\mathbb{R}} I_q^{(j)}(k) \leq N_j(k)d_j(k) \leq C_{16}G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)). \quad (39)$$

Множина  $[0, T] \setminus \left\{ \bigcup_{q=1}^{N_j(k)} I_q^{(j)}(k) \right\}$  складається з не більше ніж  $N_j(k) + 2$  проміжків  $J_q^{(j+1)}(k)$ ,  $q \leq N_j(k) + 2$ . На кожному з проміжків  $J_q^{(j+1)}(k)$ ,  $q \leq N_j(k) + 2$ , виконується нерівність

$$|V_j(t, k)| \geq \exp(-\nu_j G(k)).$$

За лемою 3 кожну з множин  $E_{j+1}(k) \cap J_q^{(j+1)}$  ( $q \leq N_j(k) + 2$ ) можна покрити  $N_q^{(j+1)}(k)$  відрізками  $I_{q,s}^{(j+1)}$ ,  $s \leq N_q^{(j+1)}(k)$ , довжина кожного з яких не перевищує  $d_{j+1}(k)$ ; при цьому для довільного  $\varepsilon > 0$  виконуються оцінки

$$N_q^{(j+1)}(k) \leq C_{17} \exp(((n-j-1)(\nu_j + 2AT) + \varepsilon)G(k)),$$

$$d_{j+1}(k) \leq C_{18} \exp\left(\left(\nu_j + AT - \frac{\nu_{j+1}}{n-j-1} + \varepsilon\right)G(k)\right),$$

Нехай

$$\Pi_{j+1}(k) = \bigcup_{q=1}^{N_j(k)} I_q^{(j)} \cup \left\{ \bigcup_{q=1}^{N_j(k)+2} \bigcup_{s=1}^{N_q^{(j+1)}(k)} I_{q,s}^{(j+1)} \right\}.$$

Зрозуміло, що система відрізків  $\Pi_{j+1}(k)$  є покриттям множини  $E_{j+1}(k)$ . Оскільки

$$\sum_{q=1}^{N_j(k)+1} \sum_{s=1}^{N_q^{(j+1)}(k)} \text{mes}_{\mathbb{R}} I_{q,s}^{(j+1)} \leq C_{19} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)), \quad (40)$$

то з нерівностей (39), (40) випливає, що

$$\text{mes}_{\mathbb{R}} E_{j+1}(k) \leq C_{20} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)).$$

Таким чином, дістаємо

$$\text{mes}_{\mathbb{R}} E_r(k) \leq C_{21} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)).$$

Із умови (33) випливає, що ряд  $\sum_{|k| \geq 0} \text{mes}_{\mathbb{R}} E_r(k)$  є збіжним. Тоді за лемою Бореля–Кантеллі міра Лебега в  $\mathbb{R}$  множини тих чисел  $t_1$ , які належать до нескінченної кількості множин  $E_r(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^P$ , дорівнює нулеві. Теорему доведено.  $\square$

## 6 ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ЗАДАЧІ

Результат теореми 3 можна суттєво уточнити для часткових випадків задачі (1), (2), коли кратність вузла  $t = 0$  є максимальною ( $r = n - 1$ ) або мінімальною ( $r = 1$ ). Відповідні уточнення встановлено у теоремах 4, 5.

**Лема 5.** (див. [20]) *Нехай функція  $f \in C^n([a, b]; \mathbb{C})$  є розв'язком рівняння*

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = 0, \quad (41)$$

*в якому  $a_j \in C([a, b]; \mathbb{C})$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Якщо*

$$\max_{1 \leq j \leq n} |f^{(j-1)}(a)| \geq \delta > 0, \quad \sum_{j=1}^n \max_{t \in [a, b]} |f^{(j)}(t)| \leq M,$$

*то для довільного  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$  виконується оцінка*

$$\text{mes}_{\mathbb{R}} \{t \in (a, b) : |f(t)| < \varepsilon\} \leq C_{22} \max \left\{ 1, \frac{M}{\delta} \exp\left(\frac{n(b-a)A}{n-1}\right) \right\} n^{-1} \sqrt{\varepsilon/\delta},$$

*де  $\varepsilon_2 = \frac{\delta \exp(-(b-a)A)}{(2\sqrt{n})}$ ,  $A = \left(1 + \sum_{j=1}^n \max_{t \in [a, b]} |a_j(t)|^2\right)^{1/2}$ ,  $C_{22} = C_{22}(n, b-a)$ .*

**Теорема 4.** Нехай  $A_j(t, D) \in S^0(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , а для функції  $G(k)$  виконується умова (33). Якщо  $r = n-1$ , то нерівність (17) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $\mathbb{R}$ ) чисел  $t_1 \in (0, T]$ , для всіх (крім скінченної кількості) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  при  $\gamma \geq (\lambda+1)(n-1)$ ,  $\delta \geq (2n-1)AT + \mu(n-1)$ .

*Доведення.* Якщо  $r = n-1$ , то  $\Delta(k) = f_n(t_1, k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ . Функція  $f_n(t, k)$  є розв'язком задачі Коші:

$$f_n^{(n)}(t, k) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t, k) f_n^{(j)}(t, k) = 0, \quad f_n^{(j-1)}(0, k) = \delta_{j,n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Використаємо лему 5 для оцінки мір множин

$$M_{\gamma, \delta}(k) := \{t_1 \in (0, T] : |f_n(t_1, k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta G(k))\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Враховуючи, що

$$\max_{1 \leq j \leq n} |f_n^{(j-1)}(0, k)| = 1, \quad \sqrt{1 + \sum_{j=0}^{n-1} \max_{t \in [0, T]} |A_j(t, k)|^2} \leq AG(k),$$

а також те, що

$$\|f_n(t, k); C^n[0, T]\| \leq C_{23} G(k) \exp(ATG(k)),$$

при  $\gamma \geq (\lambda+1)(n-1)$ ,  $\delta \geq (2n-1)AT + \mu(n-1)$ , дістанемо, що

$$\begin{aligned} \text{mes}_{\mathbb{R}} M_{\gamma, \delta}(k) &\leq C_{24} G(k) \exp\left(\frac{2n-1}{n-1} ATG(k)\right) n^{-1} \sqrt{G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta G(k))} = \\ &= C_{24} G^{1-\gamma/(n-1)}(k) \exp\left(\frac{(2n-1)AT - \delta}{n-1} G(k)\right) \leq C_{25} G^{-\lambda} \exp(-\mu G(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \end{aligned}$$

Таким чином, при  $\gamma \geq (\lambda+1)(n-1)$ ,  $\delta \geq (2n-1)AT + \mu(n-1)$  ряд  $\sum_{|k| \geq 0} \text{mes}_{\mathbb{R}} M_{\gamma, \delta}(k)$  є збіжним.

Тоді з леми Бореля–Кантеллі випливає, що міра Лебега в  $\mathbb{R}$  множини чисел  $t_1$ , які належать до нескінченної кількості множин  $M_{\gamma, \delta}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ , дорівнює нулеві. Теорему доведено.  $\square$

**Теорема 5.** Нехай  $A_j(t, D) \in S^{n-2}(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ,  $A_{n-1}(t, D) \in S^{n-1}(G)$ , а для функції  $G(k)$  виконується умова (33). Якщо  $r = 1$ , то нерівність (17) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $\mathbb{R}$ ) чисел  $t_1 \in (0, T]$  для всіх (крім скінченної кількості) векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$  при

$$\gamma \geq (\lambda+1)(n-1), \quad \delta \geq (2n-1)A_1T + \mu(n-1) + a_{n-1}T,$$

де

$$A_1 = a \left(1 + \sum_{j=0}^{n-1} r_j^2\right)^{1/2}, \quad r_j = \sum_{q=0}^{n-1-j} C_{j+q}^j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$a_{n-1} = \max \left\{0; \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{t \in [0, T]} G^{-1}(k) \text{Re } A_{n-1}(t, k)\right\},$$

$$a = \max_{k \in \mathbb{Z}^p} \sup \left\{ \max_{0 \leq j \leq n-2} G^{-1}(k) \|A_j(t, k)\|_{C^{n-2}[0, T]}; G^{-1}(k) \|A_{n-1}(t, k)\|_{C^{n-1}[0, T]} \right\}.$$

*Доведення.* У випадку  $r = 1$  визначник  $\Delta(k)$  є мінором  $(n - 1)$ -го порядку, що відповідає елементові  $f_1^{(n-1)}(t_1, k)$  у вронскіані  $W(f_1, \dots, f_n)(t, k)$ . Розглянемо функцію

$$y(t, k) \equiv \Delta(k) \exp \left( \int_0^t A_{n-1}(\tau) d\tau \right), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (42)$$

За лемою 1 функція  $y(t, k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ , на відрізку  $[0, T]$  є розв'язком рівняння

$$y^{(n)}(t, k) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} (A_j(t, k) y(t, k))^{(j)} = 0. \quad (43)$$

Після елементарних перетворень (розкриття похідних за правилом Лейбніца та зміни порядку підсумовування) рівняння (43) зведемо до такого вигляду:

$$y^{(n)}(t, k) + \sum_{j=0}^{n-1} r_j(t, k) y^{(j)}(t, k) = 0, \quad (44)$$

де  $r_j(t, k) \equiv \sum_{q=0}^{n-1-j} (-1)^{n-q-j} C_{j+q}^j A_{j+q}^{(q)}(t, k)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Для коефіцієнтів  $r_j(t, k)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , рівняння (44) виконуються нерівності

$$\max_{t \in [0, T]} |r_j(t, k)| \leq \sum_{q=0}^{n-1-j} C_{j+q}^j \max_{t \in [0, T]} |A_{j+q}^{(q)}(t, k)| \leq ar_j G(k), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

з яких випливає, що

$$\sqrt{1 + \sum_{j=0}^{n-1} \max_{t \in [0, T]} |r_j(t, k)|^2} \leq A_1 G(k).$$

Оскільки  $f_q^{(j-1)}(0, k) = \delta_{j,q}$ ,  $j, q = 1, \dots, n$ , то з формули Тейлора для функцій  $f_2(t, k), \dots, f_n(t, k)$  випливають такі розвинення:

$$f_q(t, k) = \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} + \beta_q(t, k) t^n, \quad q = 2, \dots, n, \quad (45)$$

де  $\beta_q(t, k)$ ,  $q = 2, \dots, n$ , – неперервні функції в околі точки  $t = 0$ . У випадку  $r = 1$  визначник  $\Delta(k)$  для кожного  $k \in \mathbb{Z}^p$  дорівнює значенню у точці  $t = t_1$  вронскіана  $W_{n-1}(f_2(t, k), \dots, f_n(t, k))$  системи функцій  $f_2(t, k), \dots, f_n(t, k)$ . Враховуючи властивість вронскіана, описану в задачі 57 у [12, ч. 2, с. 126], з розвинень (45) отримаємо, що в околі точки  $t_1 = 0$  виконуються рівність

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= W_{n-1} \left( \frac{t_1}{1!} + \beta_2(t_1, k) t_1^n, \dots, \frac{t_1^{n-1}}{(n-1)!} + \beta_n(t_1, k) t_1^n \right) = \\ &= t_1^{n-1} W_{n-1} \left( \frac{1}{1!} + \beta_2(t_1, k) t_1^{n-1}, \dots, \frac{t_1^{n-2}}{(n-1)!} + \beta_n(t_1, k) t_1^{n-1} \right) = \\ &= t_1^{n-1} W_{n-1} \left( \frac{1}{1!}, \dots, \frac{t_1^{n-2}}{(n-1)!} \right) + \beta(t_1, k) t_1^n = C_{26} t_1^{n-1} + \beta(t_1, k) t_1^n, \end{aligned} \quad (46)$$

де  $C_{26} = \frac{1}{(n-1)!}$ , а  $\beta(t_1, k)$  – неперервна функція в околі точки  $t_1 = 0$ . Із розвинення (46) випливає, що

$$\left. \frac{d^{j-1} \Delta(k)}{dt_1^{j-1}} \right|_{t_1=0} = \delta_{j,n}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (47)$$

На підставі правила Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, із рівності (42) та формул (47) отримуємо, що

$$\left. \frac{d^{j-1}y(t_1, k)}{dt_1^{j-1}} \right|_{t_1=0} = \delta_{j,n}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (48)$$

Застосовуючи лему 5 до функції  $y(t, k)$ , яка є розв'язком задачі Коші (44), (48), дістаємо, що при  $\gamma \geq (\lambda + 1)(n - 1)$ ,  $\delta_0 \geq (2n - 1)A_1T + \mu(n - 1)$

$$\begin{aligned} & \text{mes}_{\mathbb{R}} \{t_1 \in (0, T] : |y(t_1, k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta_0 G(k))\} \leq \\ & \leq C_{27} G(k) \exp\left(\frac{2n-1}{n-1} A_1 T G(k)\right) {}^{n-1}\sqrt{G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta_0 G(k))} = \\ & = C_{27} G^{1-\frac{\gamma}{(n-1)}}(k) \exp\left(\frac{(2n-1)A_1 T - \delta_0}{n-1} G(k)\right) \leq C_{28} G^{-\lambda} \exp(-\mu G(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \end{aligned} \quad (49)$$

Із рівності (42) випливає включення

$$\begin{aligned} & \{t_1 \in [0, T] : |\Delta(k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-(\delta_0 + a_{n-1}T)G(k))\} \subset \\ & \subset \{t_1 \in [0, T] : |y(t_1, k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-\delta_0 G(k))\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \end{aligned}$$

Тому з нерівностей (49) отримуємо, що ряд

$$\sum_{|k| \geq 0} \text{mes} \{t_1 \in [0, T] : |\Delta(k)| < G^{-\gamma}(k) \exp(-(\delta_0 + a_{n-1}T)G(k))\}$$

є збіжним, коли  $\gamma \geq (\lambda + 1)(n - 1)$ ,  $\delta_0 \geq (2n - 1)A_1T + \mu(n - 1)$ . Із леми Бореля–Кантеллі дістаємо твердження теореми.  $\square$

## 7 КОРЕКТНІСТЬ ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МАЙЖЕ ВСІХ ЗНАЧЕНЬ ДРУГОГО ВУЗЛА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

**Зауваження 1.** Для кожного  $k \in \mathbb{Z}^p$  визначник  $\Delta(k)$  як функція змінної  $t_1$  може мати на  $[0, T]$  не більш ніж скінченну кількість нулів. Тому множина

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p} \{t_1 \in [0, T] : \Delta(k) = 0\}$$

має нульову міру Лебега.

Із теорем 2–5 і зауваження 1 випливають такі твердження про коректність задачі (1), (2) для майже всіх чисел  $t_1 \in (0, T]$ .

**Наслідок 1.** Нехай  $A_{n-1}(t, D) \in S^{n-1}(G)$ ,  $A_j(t, D) \in S^{n-2}(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-2$ , а для функції  $G(k)$  виконується умова (33). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $\mathbb{R}$ ) чисел  $t_1 \in (0, T]$  задача (1), (2) є  $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною, де

$$\begin{aligned} \alpha_j & \geq \alpha + \gamma + 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ \beta_j & \geq \beta + \nu_r + (n - r + 2)AT, \quad j = 1, \dots, r, \\ \beta_j & \geq \beta + \nu_r + (n - r + 1)AT, \quad j = r + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$\gamma$  – довільне дійсне число, число  $\nu_r$  – таке ж, як у теоремі 3.

**Наслідок 2.** Нехай  $A_j(t, D_x) \in S^0(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , а для функції  $G(k)$  виконується умова (33). Якщо  $r = n-1$ , то для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $\mathbb{R}$ ) чисел  $t_1 \in (0, T]$  задача (1), (2) є  $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною, де

$$\alpha_j \geq \alpha + (\lambda + 1)(n - 1) + 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\beta_j \geq \beta + \mu(n - 1) + (2n + 2)AT, \quad j = 1, \dots, n - 1,$$

$$\beta_n \geq \beta + \mu(n - 1) + (2n + 1)AT.$$

**Наслідок 3.** Нехай  $A_{n-1}(t, D_x) \in S^{n-1}(G)$ ,  $A_j(t, D_x) \in S^{n-2}(G)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-2$ , і нехай для функції  $G(k)$  виконується умова (33). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $\mathbb{R}$ ) чисел  $t_1 \in (0, T]$  задача (1), (2) при  $r = 1$  є  $(\alpha, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -коректною, де

$$\alpha_j \geq \alpha + (\lambda + 1)(n - 1) + 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\beta_1 \geq \beta + \mu(n - 1) + ((2n - 1)A_1 + a_{n-1} + 3nA)T,$$

$$\beta_j \geq \beta + \mu(n - 1) + ((2n - 1)A_1 + a_{n-1} + (3n - 1)A)T, \quad j = 2, \dots, n,$$

де сталі  $A_1, a_{n-1}$  – такі ж, як у теоремі 5.

## 8 ВИСНОВКИ

Ця стаття присвячена дослідженню коректності задач з локальними двоточковими умовами за змінною  $t$  для рівнянь з псевдодиференціальними за  $x$  операціями, символи яких залежать від  $t$ . Встановлено умови однозначної розв'язності цих задач у функціональних просторах, вага яких залежить від функції, що описує можливий ріст амплітуд псевдодиференціальних операцій–коефіцієнтів рівняння. На основі тверджень про оцінки мір виняткових множин гладких функцій уперше для рівнянь загального вигляду зі змінними за  $t$  коефіцієнтами доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень другого вузла інтерполяції. Доцільним завданням є перенесення отриманих результатів на випадок систем псевдодиференціальних рівнянь зі змінними за  $t$  коефіцієнтами.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Arnol'd V.I. *Small denominators. I. Mapping the circle onto itself*. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1961, 25, (1), 21–86. (Russian)
- [2] Bernik V.I., Beresnevich V.V., Vasylyshyn P.B., Ptashnyk B.Yo. *Multipoint problem with multiple nodes for linear hyperbolic equations*. Ukr. math. journ. 1999, 51 (10), 1311–1316. (Ukrainian)
- [3] Bernik V.I., Melnychuk Yu.V. *Diophantine approximations and the Hausdorff dimension*. Nauka i Tekhnika, Minsk, 1988. (Russian)
- [4] Bobyk I.O., Ptashnyk B.Yo. *Boundary value problems for hyperbolic equations with constant coefficients*. Ukr. math. journ. 1994, 46 (7), 795–802. (Ukrainian)
- [5] Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L. *Boundary value problems for differential-operator equations*. Nauk. Dumka, Kyiv, 1984, 284 p. (Russian)
- [6] Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. Mir, Moscow: Mir, 1970, 720 p. (Russian)
- [7] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M. *Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method*. Publishing House of Lviv Polytechnic National University, Lviv, 2002. (Ukrainian)

- [8] Kamke E. Handbook of Ordinary Differential Equations. Nauka, Moscow, 1971, 576 p. (Russian)
- [9] Kartashev A.P., Rozhdestvenskii B.L. Ordinary Differential Equations and Fundamentals of the Calculus of Variations. Nauka, Moscow, 1980. – 288 p. (Russian)
- [10] Nytrebych Z.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics*. Azerb. Journal of Mathematics 2017, **7** (2), 180–196.
- [11] Nytrebych Z.M., Malanchuk O.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *On the solvability of two-point in time problem for PDE*. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics 2017, (38), 715–726.
- [12] Polya G., Szegő G. Problems and Theorems in Analysis: in 2 vols. Nauka, Moscow, 1978. – Vol. 1, 391 p. – Vol. 2, 432 p. (Russian)
- [13] Ptashnik B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. Nauk. Dumka, Kyiv, 1984. (Russian)
- [14] Ptashnik B.I., Shtabalyuk P.I. *A boundary value problem for hyperbolic equations in a class of functions that are almost periodic with respect to space variables*. Differentsial'nye Uravneniya 1986, **22** (4), 669–678. (Russian)
- [15] Sprindzhuk V. G. *Achievements and problems in Diophantine approximation theory*. Russian Mathematical Surveys, 1980, Volume 35, Issue 4, 1–80.
- [16] Symotyuk M.M. *Two-point problem for linear partial differential equations with constants coefficients*. Sci. Bull. Uzhhorod Nat. University, 2002, **7**, 96–107. (Ukrainian)
- [17] Symotyuk M.M. *Diophantine approximations of characteristic determinant of the two-point problem for partial differential equations*. Mathem. Bulletin of Shevchenko Scientific Society 2004, **2**, 199–212. (Ukrainian)
- [18] Symotyuk M.M., Tymkiv I.R. *Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time*. Carpathian Mathematical Publication 2014, **6** (2), 351–359. doi: 10.15330/cmp.6.2.351–359.
- [19] Sprindzhuk V.G. Metric Theory of Diophantine Approximations. Nauka, Moscow, 1977, 144 p. (Russian)
- [20] Symotyuk M.M. *A multipoint problem for pseudodifferential equations with partial derivatives*. Math. Methods and Phys.-Mech. Fields, 2003, Vol. 46, No. 2, P. 26–41.
- [21] Valitskii Yu.N. *Well-posedness of a problem for a differential equation with given values for a function and its derivatives at several points*. Sibirsk. Mat. Zh. 1996, **37** (2), 251–258. (Russian)

Надійшло 11.11.2025

---

Symotiuk M.M. *Two-point problem for linear systems of partial differential equations*, Bukovian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 201–218.

In this paper, we study the well-posedness of a problem with two multiple nodes with respect to a distinguished variable  $t$  and periodicity conditions with respect to the remaining coordinates  $x_1, \dots, x_p$  for linear pseudodifferential equations. Conditions for the existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration in spaces of exponential type on the torus are established. By means of a metric approach, theorems providing lower bounds for small denominators arising in the construction of the solution are proved.

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.21>

Мартинюк О.В.

## МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ, ПРИСВЯЧЕНА 75-Й РІЧНИЦІ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ВОЛОДИМИРА МАСЛЮЧЕНКА

25-27 вересня 2025 року на факультеті математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича відбулася міжнародна наукова конференція, присвячена 75-й річниці від дня народження видатного українського математика, професора Володимира Кириловича Маслюченка (26.09.1950 – 25.09.2020), відомого науковця у галузі теорії функцій та функціонального аналізу, багаторічного завідувача кафедри математичного аналізу Чернівецького університету та яскравої особистості, чий науковий, педагогічний і громадянський доробок справив відчутний вплив на розвиток української й світової математичної спільноти.

*Ключові слова і фрази:* міжнародна наукова конференція, Володимир Маслюченко, факультет математики та інформатики.

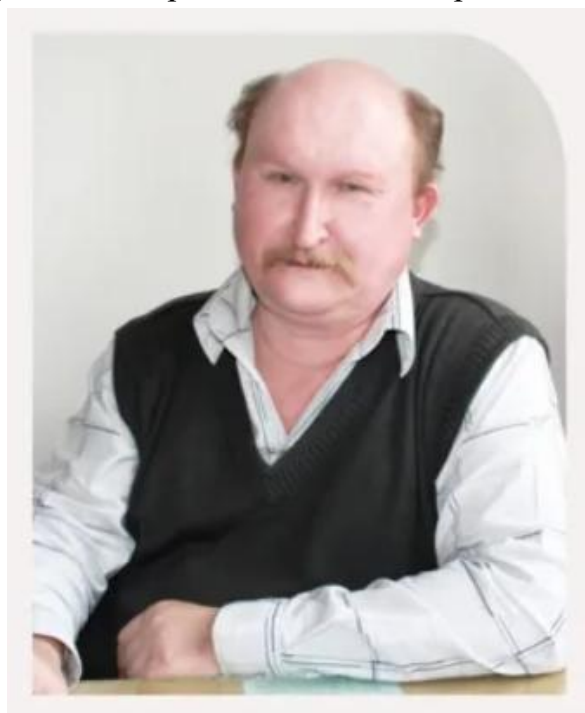
---

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна  
e-mail: [o.martynyuk@chnu.edu.ua](mailto:o.martynyuk@chnu.edu.ua)

25-27 вересня 2025 року на факультеті математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича проходила міжнародна наукова конференція, присвячена 75-й річниці від дня народження видатного українського математика, професора Володимира Кириловича Маслюченка.

Володимир Кирилович Маслюченко народився 26 вересня 1950 року в селі Ключівка Новосанжарського району Полтавської області. У серпні 1967 року він вступив на відділення математики фізико-математичного факультету Чернівецького державного університету, з яким була пов'язана вся його подальша наукова й педагогічна діяльність.

Після завершення навчання з лютого 1973 року Володимир Кирилович розпочав



свою трудову діяльність на кафедрі математичного аналізу Чернівецького університету, де пропрацював до 25 вересня 2020 року. Протягом майже п'яти десятиліть він відіграв визначальну роль у становленні та розвитку потужної наукової школи з теорії функцій та функціонального аналізу. У 2000 році В. К. Маслюченко захистив докторську дисертацію, з 2001 року очолював кафедру математичного аналізу, а у 2002 році йому було присвоєно вчене звання професора кафедри математичного аналізу.

Науково-педагогічна діяльність Володимира Кириловича тісно поєднувалася з активною роботою з підготовки наукових кадрів. Під його керівництвом було захищено 14 кандидатських дисертацій; четверо його учнів згодом стали докторами фізико-математичних наук, у підготовці яких він виступав науковим консультантом. Його науковий доробок налічує понад 350 публікацій, що здобули широке визнання у вітчизняній та міжнародній науковій спільноті.

Поряд із науковою діяльністю Володимир Кирилович був надзвичайно різнобічною особистістю. Він поєднував глибоку математичну культуру з мистецьким талантом — писав поезію, створював музику, співав і грав на музичних інструментах. Його невичерпна енергія, працездатність і творча відданість справі були й залишаються прикладом для колег та учнів.

Важливою складовою його життєвої позиції була чітка громадянська свідомість і глибокий патріотизм. Володимир Кирилович послідовно наголошував на визначальній ролі української мови як фундаменту державності, культури та національної гідності, вважаючи її невід'ємною складовою майбутнього України.

Урочисте відкриття конференції відбулося 25 вересня у Шевченківській залі



Чернівецького університету. Із вітальними словами до учасників та гостей звернулися деканка факультету математики та інформатики Ольга Мартинюк, яка наголосила на неоціненному внеску Володимира Кириловича у розвиток математичної науки та формування наукових шкіл, а також проректор з наукової роботи Юрій Халавка. У своєму виступі він підкреслив не лише вагомі наукові здобутки професора В. К. Маслюченка, але й його активну громадянську позицію, любов до української культури та мови, а також участь у творчій діяльності як соліста чоловічої капели «Дзвін».

Вітальні слова також прозвучали від представників Інституту математики НАН України – академіка НАН України Сергія Максименка, професора Анатолія Сердюка та вченого секретаря Ігоря Соколенка. Вони відзначили високий рівень наукових шкіл факультету математики та інформатики ЧНУ й побажали учасникам плідної роботи. У межах відкриття конференції було вручено пам'ятні відзнаки Руслану Білоскурському, Роману Петришину, Ользі Мартинюк, Михайлу Попову, Олені Карловій, Володимиру Михайлюку та Олександру Маслюченку (сину Володимира Кириловича). Особливою подією стало вручення професору Ростиславу Івановичу Григорчуку сертифіката про присвоєння звання «Почесний дослідник Інституту математики НАН України» та іменних подарунків.

Ростислав Григорчук – науковець світового рівня, батько якого, Іван Григорчук, був першим науковим керівником Володимира Маслюченка, під керівництвом якого він виконував курсову роботу на другому курсі навчання.



На відкритті конференції панувала особлива атмосфера наукової та людської єдності, адже захід зібрав численних го стей і науковців із провідних університетів України, а також представників зарубіжних наукових центрів, зокрема професора Тираспольського державного університету (м. Кишинів) Думітру Козьми.

Першу пленарну доповідь виголосив учень і багаторічний товариш Володимира Маслюченка – доктор фізико-математичних наук, професор Михайло Попов. У своєму виступі він поєднав ґрунтовний науковий аналіз здобутків Учителя з особистими спогадами про пів століття дружби та співпраці. Наступним із доповіддю виступив професор Львівського національного університету імені Івана Франка Михайло Зарічний, який зворушливо згадав спільну творчу співпрацю та зазначив, що Володимир Маслюченко написав музику на його вірш «Ми ненадовго тут...», що увійшов до книжки «Просто сто сторінок». Завершив пленарне засідання академік НАН України Сергій Максименко, який, окрім наукових аспектів, поділився спогадами про професора Маслюченка та нагадав про конференцію, присвячену 145-й річниці від дня народження Ганса Гана, ініціатором проведення якої свого часу був саме Володимир Кирилович.

Наступного дня було заслухано ще чотири пленарні доповіді, у яких органічно поєднувалися сучасні наукові результати та теплі спогади про Володимира

Кириловича. Доповідачами були Тарас Банах (Львівський національний університет імені Івана Франка), Ростислав Григорчук (Техаський університет), Петро Когут (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара) та Микола Працьовитий (Український державний університет імені Михайла Драгоманова).

У ході роботи конференції учасники обговорювали актуальні проблеми сучасної математики та інформаційних технологій, мали змогу поспілкуватися з



колегами з України, Європи та Америки. Тематика доповідей охоплювала теорію диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь, теорію функцій і функціональний аналіз, алгебру, геометрію, топологію, математичне моделювання та застосування інформаційних технологій.

Робота конференції здійснювалася за такими напрямками: теорія функцій, функціональний аналіз і топологія; диференціальні рівняння; алгебра та геометрія. Конференція проходила в очному форматі. Було заслухано близько 70 наукових доповідей, серед яких 7 пленарних:

- 1) Михайло Попов «Про життя і творчість Володимира Маслюченка»,
- 2) Zarichnyi Mykhailo «On  $*$ -measures and  $*$ -convexity»,
- 3) Lysynskyi Mykola, Maksymenko Sergiy «Classification of smooth structures on non-Hausdorff one-dimensional manifolds: from local to global»,
- 4) Banach Taras «Linear Geometry and Algebra»,
- 5) Rostislav Grigorchuk «A Hunt for Spectral Gaps»,

- 6) Kogut Peter «A novel statement of SAR image despeckling problem in weighted Sobolev spaces»,
- 7) Працьовитий Микола «Локально складні функції з фрактальними властивостями, означені у термінах двосимвольних зображень чисел».

До матеріалів конференції увійшло понад 100 тез, авторами яких стали більш ніж 170 науковців із 8 країн світу: України, США, Німеччини, Польщі, Молдови, Латвії, Люксембургу та Великої Британії. Україна була представлена науковцями з 13 міст: Чернівців, Луцька, Львова, Києва, Одеси, Івано-Франківська, Житомира, Кропивницького, Харкова, Ужгорода, Берегового, Кривого Рогу та Слов'янська.

Окрім наукової програми, учасники мали нагоду ознайомитися з архітектурною та культурною спадщиною Чернівців, відвідавши Резиденцію митрополитів Буковини і Далмації та історичний центр міста. Важливою частиною програми стало вшанування пам'яті Володимира Кириловича Маслюченка – учасники відвідали його могилу, а на факультеті математики та інформатики було урочисто відкрито пам'ятну дошку вченому.



До ювілейних дат життя і наукової діяльності Володимира Кириловича Маслюченка його постать неодноразово ставала предметом ґрунтовного осмислення, зокрема у розлогій біографічній статті, присвяченій 60-річчю від дня народження вченого, опублікованій у *Математичному віснику Наукового товариства ім. Шевченка* (2010, т. 7, с. 455–483), де всебічно висвітлено його життєвий шлях, наукові здобутки та педагогічну спадщину.

На сайті конференції опубліковано програму конференції та тези доповідей її учасників <https://hahn.chnu.edu.ua/>