ISSN 2309-4001

БУКОВИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, № 1

Чернівці
Чернівецький національний університет
2024

ISSN 2309-4001

BIKOVINIAN MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 12, № 1

Chernivtsi
Chernivtsi National University
2024

Буковинський математичний журнал. – Т. 12, № 1. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2024. – 142 с.

Журнал входить до переліку наукових фахових видань України категорії "Б"
(наказ МОНУ № 409 від 17.03.2020)
Спеціальності
111 Математика
113 Прикладна математика

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Журнал публікує оригінальні статті англійською та українською мовами із математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей і математичної статистики, математичного моделювання та обчислювальних методів

Реферується Zentralblatt MATH, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia Naukowa, WorldCat

Редколегія:

Петришин Р.І., д. ф.-м.н, проф.,
науковий редактор (Україна);
Городецький В.В., д. ф.-м.н, проф.,
заступник наукового редактора (Україна);
Літовченко В.А. д. ф.-м.н, проф.,
заступник наукового редактора (Україна);
Черевко І.М., д. ф.-м.н, проф.,
відповідальний за випуск
заступник наукового редактора (Україна);
Бігун Я.Й., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Бойчук О.А., д. ф.-м.н, проф.,
академік НАНУ (Україна);
Григорків В.С., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Григорчук Р.І., д. ф.-м.н, проф. (США);
Загороднюк А.В., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Зарічний М.М., д. ф.-м.н, проф. (Польща);
Карлова О.О., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Козьма Д.В., д. ф.-м.н, проф. (Молдова);
Лопушанський О.В., д. ф.-м.н., проф. (Польща);
Малик І.В., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Мартинюк О.В., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Перестюк М.О., д. ф.-м.н, проф.,
академік НАНУ (Україна);
Петрик М.Р., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Попов М.М., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Пукальський І.Д., д. ф.-м.н, проф. (Україна);
Ронто М.Й., д. ф.-м.н, проф. (Угорщина);
Скасків О.Б., д. ф.-м.н, проф.(Україна);
Слюсарчук В.Ю., д. ф.-м.н, проф.,
чл.-кор. НАНУ (Україна);
Станжицький О.М., д. ф.-м.н, проф. (Україна).
Яшан Б.О., доктор філософії,
відповідальний секретар (Україна);

Адреса редакції:
58012 м.Чернівці, вул. Університетська, 28, тел. (0372)58-48-80, e-mail: clg-math@chnu.edu.ua

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
Державної реєстраційної служби України: серія КВ № 19465–9265 ПР від 07.11.2012
(Видання є правонаступником Наукового вісника Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика. Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Міністерства юстиції України: серія КВ № 15749–4221Р від 26.10.2009)

Вітчизняне наукове видання
Рік заснування 2013

©Чернівецький національний університет, 2024

Bukovinian Mathematical Journal. – Vol. 12, No 1. - Chernivtsi: Chernivtsi Nat. Univ., 2024. – 142 p.

The journal is included in the List of Scientific Professional Publications of Ukraine of category "B"
(Order of the Ministry of Education and Science №409 of March 17, 2020)
Specialties
111 Mathematics
113 Applied Mathematics

The journal publishes original papers in English and Ukrainian in mathematical analysis, differential equations, probability theory and mathematical statistics, mathematical modelling and methods of computations

Reviewed by Zentralblatt, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia Naukowa, WorldCat

Editorial Board of the issue:

Petryshyn R.I., D.Sc., Prof.,
Scientific editor (Ukraine);
Gorodetskyi V.V., D.Sc., Prof.,
Deputy editor-in chief (Ukraine);
Litovchenko V.A., D.Sc., Prof.,
Deputy editor-in chief (Ukraine);
Cherevko I.M., D.Sc., Prof.,
Executive Editor of the issue,
Deputy editor-in chief (Ukraine);
Bihun Ya.J., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Boichuk O.A., D.Sc., Prof.,
academician of NAS of Ukraine;
Grygorkiv V.S., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Grygorchuk R.I., D.Sc., Prof. (USA);
Zagorodnyuk A.V., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Zarichnyi M.M., D.Sc., Prof. (Poland);
Karlova O.O., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Cozma D.V., D.Sc., Prof. (Moldova);
Lopushansky O.V., D.Sc., Prof. (Poland);
Malyk I.V.,D.Sc., Prof. (Ukraine);
Martynyuk O.V., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Perestyuk M.O., D.Sc., Prof.,
academician of NAS of Ukraine;
Petryk M.R., D.Sc., Prof. Ukraine;
Popov M.M., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Pukalskyi I.D., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Ronto M.J., D.Sc., Prof. (Hungary);
Skaskiv O.B., D.Sc., Prof. (Ukraine);
Slyusarchuk V.Yu., D.Sc., Prof.,
corresponding member of NAS of Ukraine;
Stanzhitskyi O.M., D.Sc., Prof. (Ukraine).
Yashan B.O., Doctor of philosophy,
Managing Editor (Ukraine);

Editorial office address:
58012, Chernivtsi, Universytetska str., 28, tel. (0372)58-48-80, e-mail: clg-math@chnu.edu.ua

Certificate of state registration of the print mass media of the State Registration Service of Ukraine: Series KB No 19465-9265 PR of 11/07/2012
(The journal is the assignee of Naukovyj Visnyk Chernivets'kogo Universytetu. Matematyka. Chernivets'kyj Universytet, Chernivtsi. Ukrainian. Certificate of state registration of the print mass media of the Ministry of Justice of Ukraine: Series KB No 15749-4221 P of 10/26/2009)

National Scientific Publication
Founded in 2013

©Chernivtsi National University, 2024

ЗМІСТ

Gorbachuk V.M., Spivak Yu.V. On solvability and well-posedness of $(n+1)$-times integrated Cauchy problem 7

Gutik O.V. On locally compact shift-continuous topologies on semigroups $\mathscr{C}_+(a,b)$ and $\mathscr{C}_-(a,b)$ with adjoined zero 14

Melnyk H.V., Melnyk V.S., Vikovan V.K. Application of natural language processing and fuzzy logic to disinformation detection 21

Sheremeta M.M., Trukhan Yu.S. On the Growth of the Maximum Modulus of Dirichlet Series 32

Дронь В.С., Мединський І.П. Задача Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з блочною структурою 43

Козловський М.Р. Характеризація одноточкових розривів нарізно неперервних функцій багатьох змінних 63

Маценко В.Г. Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю 74

Пасічник Г.С. Розв'язки деяких класів інтегральних рівнянь другого роду 84

Пукальський І.Д., Яшан Б.О. Багатоточкова за часом крайова задача для $2b$-параболічного рівняння з виродженням 94

Філіпчук М.П., Філіпчук О.І. Про крайову задачу з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами 107

Петрина Г.О., Станжицький А.О. Апроксимація систем стохастичних рівнянь із запізненням стохастичною системою без запізнення 120

СВІТЛІЙ ПАМ'ЯТІ ВЧЕНОГО, ПЕДАГОГА, ВЧИТЕЛЯ – ПЕРЕСТЮКА МИКОЛИ ОЛЕКСІЙОВИЧА 137

ПАМ'ЯТІ ВЧЕНОГО – БОЙЧУКА ОЛЕКСАНДРА АНДРІЙОВИЧА 139

ПАМ'ЯТІ ВЧЕНОГО – СЛЮСАРЧУКА ВАСИЛЯ ЮХИМОВИЧА 141

CONTENTS

Gorbachuk V.M., Spivak Yu.V. On solvability and well-posedness of $(n+1)$-times integrated Cauchy problem 7

Gutik O.V. On locally compact shift-continuous topologies on semigroups $\mathscr{C}_+(a,b)$ and $\mathscr{C}_-(a,b)$ with adjoined zero 14

Melnyk H.V., Melnyk V.S., Vikovan V.K. Application of natural language processing and fuzzy logic to disinformation detection 21

Sheremeta M.M., Trukhan Yu.S. On the Growth of the Maximum Modulus of Dirichlet Series 32

Dron V.S., Medynskyi I.P. Cauchy problem for ultra-parabolic equations of Kolmogorov type with block structure 43

Kozlovskyi M.R. Characterization of one-point set of discontinuous of separately continuous functions of several variable 63

Matsenko V.G. Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy 74

Pasichnyk H.S. Solutions of some integral equations of the second kind 84

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. A multipoint boundary value problem in time for a 2*b*-parabolic equation with degeneracy 94

Filipchuk M.P., Filipchuk O.I. On a boundary value problem with integral conditions for a system of differential equations with many transformed arguments 107

Petryna G.O., Stanzhytskyi A.O. Approximation of Stochastic Delay Differential Systems by a Stochastic System Without Delay 120

IN LOVING MEMORY OF THE SCIENTIST, EDUCATOR, TEACHER - PERESTYUK MYKOLA OLEKSIYOVYCH 137

IN MEMORY OF THE SCIENTIST - OLEKSANDR ANDRIYOVYCH BOYCHUK 139

IN MEMORY OF THE SCIENTIST - SLYUSARCHUK VASIL YUKHYMOVYCH 141

Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 1, 7–13 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 7–13

Gorbachuk V.M.,Spivak Yu.V.

ON SOLVABILITY AND WELL-POSEDNESS OF $(N+1)$-TIMES INTEGRATED CAUCHY PROBLEM

For a closed operator A in a Banach space X, the $(n+1)$-times integrated Cauchy problem $C_{n+1}[\tau],\ 0<\tau<\infty$, of finding a solution $v(t)$ of the problem $v'(t)=Av(t)+\frac{t^n}{n!}x, v(0)=0, (t\in[0,\tau], x\in X)$ is considered. In the case where the operator A is normal in a Hilbert space, all its solutions are described. The necessary and sufficient conditions on the spectrum of A under which this problem is well-posed are established.

Key words and phrases: Banach and Hilbert spaces, closed operator, normal operator, Cauchy problem, $(n+1)$-times integrated Cauchy problem, well-posed solvability..

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
e-mail: *v.m.horbach@gmail.com*

Introduction

Let A be a closed linear operator in a Banach space X with norm $\|\cdot\|$ and $0<\tau<\infty$. By $C_0[\tau]$ we mean the Cauchy problem

$$\left\{\begin{array}{l} u\in C([0,\tau];\mathcal{D}(A))\cap C^1([0,\tau];X),\\ \quad u'(t)=Au(t),\quad t\in[0,\tau],\\ \quad u(0)=x,\end{array}\right. \qquad C_0[\tau]$$

where $\mathcal{D}(\cdot)$ is the domain of an operator, $C([0,\tau];\mathcal{D}(A))$ $(C^1([0,\tau];X))$ is the space of all continuous (continuously differentiable) vectop-valued functions $u(t):[0,\tau]\mapsto\mathcal{D}(A)$ $(u(t):[0,\tau]\mapsto X)$, $\mathcal{D}(A)$ is considered with the graph norm $\|x\|_A=\|x\|+\|Ax\|$.

If $u(t)$ is a solution of $C_0[\tau]$, then the vector-valued function

$$v(t)=\int\limits_0^t\frac{(t-s)^n}{n!}u(s)\,ds=\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\dots\int\limits_0^{t_n}v(t_{n+1})\,dt_{n+1}dt_n\dots dt_1$$

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K90,47D06.

© Gorbachuk V.M.,Spivak Yu.V., 2024

is a solution of the problem

$$\begin{cases} v \in C([0,\tau];\mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\tau];X), \\ v'(t) = Av(t) + \dfrac{t^n}{n!}x, \quad t \in [0,\tau], \\ v(0) = 0. \end{cases} \qquad C_{n+1}[\tau]$$

Really, by differentiating $\int\limits_0^t \dfrac{(t-s)^n}{n!}u(s)\,ds$ in the parameter t and taking into account that not only the integrand but the upper limit of the integral depends on t, we obtain

$$v'(t) = \left(\int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}u(s)\,ds\right)' = \int_0^t \left(\frac{(t-s)^n}{n!}u(s)\right)'_t ds + t'\frac{(t-s)^n}{n!}u(s)\Big|_{s=t} =$$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,ds = u(s)\frac{(t-s)^n}{n!}\Big|_{s=0}^t + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}u'(s)\,ds =$$

$$= \frac{t^n}{n!}x + A\int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}u(s)\,ds = Av(t) + \frac{t^n}{n!}x.$$

In accordance with [1], $C_{n+1}[\tau]$ is called the $(n+1)$-times integrated Cauchy problem. By the definition, $C_n[\tau], n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ is well-posed if for any $x \in X$ it has a unique solution.

It should be noted that if A is the generator of a C_0-semigroup of linear operators in X, then for all $x \in \mathcal{D}(A)$ there exists a unique solution of $C_0[\tau]$ (see, for example, [2]). As has been shown in [3], the converse, generally, is not true. However, $C_1[\tau]$ is well-posed if and only if A generates a C_0-semigroup.

In this paper, all the solutions of the problem $C_{n+1}[\tau]$ are described in the case where A is a normal operator in a Hilbert space, and the criterion of its well-posedness is presented. The results without proof were announced in [4].

1 Preliminaries

For $\lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0$, we put

$$\Phi_n(\lambda,t) = \frac{1}{\lambda^{n+1}}\left(e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(t\lambda)^k}{k!}\right).$$

It is obvious that

$$\Phi_n(\lambda,t) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{t^k\lambda^{k-(n+1)}}{k!} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^{p+n+1}\lambda^p}{(p+n+1)!} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p\lambda^p}{(n+2)\dots(n+p+1)}. \quad (1)$$

The function $\Phi_n(\lambda,t)$ possesses the following properties:

1) for a fixed λ (a fixed t), $\Phi_n(\lambda,t)$ is entire with respect to t (to λ);

2) $\dfrac{d\Phi_n(\lambda,t)}{dt}=\Phi_{n-1}(\lambda,t), n\in\mathbb{N}$;

$$\frac{d^k\Phi_n(\lambda,t)}{dt^k}=\lambda^k\Phi_n(\lambda,t)+\frac{\lambda^{k-1}t^n}{n!}+\cdots+\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!},\quad k=0,1,\dots n;$$

3) $\left.\dfrac{d^k\Phi_n(\lambda,t)}{dt^k}\right|_{t=0}=0,\quad k=0,1,\dots n;$

4) $\left.\dfrac{d^{n+1}\Phi_n(\lambda,t)}{dt^{n+1}}\right|_{t=0}=1.$

The properties 2) - 4) can be verified directly. The fact that for a fixed t, the function $\Phi_n(\lambda,t)$ is entire in λ follows from the relation (see [5])

$$\sqrt[p]{\frac{|t|^p}{(n+2)\dots(n+p+1)}}=\frac{|t|}{\sqrt[p]{(n+2)\dots(n+p+1)}}<\frac{|t|}{\sqrt[p]{p!}}<\frac{|t|}{\sqrt[p]{(\sqrt{p})^p}},$$

which shows that

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{|t|}{\sqrt[p]{(n+2)\dots(n+p+1)}}=0,$$

so, the convergence radius of the series in (1) is infinite. It is also evident that for a fixed λ, $\Phi_n(\lambda,t)$ is entire in t as a product of two entire functions.

2 The conditions for solvability and well-posedness of the problem

In this section, the main attention is focussed on the case of normal A. So, let $X=\mathfrak{H}$ be a Hilbert space with scalar product $(\cdot,\cdot)$ and A be a normal operator in it. Starting from the properties 1)-4) of the function $\Phi_n(\lambda,t)$ and the operational calculus for normal operators (see [6, 7]) we arrive to the following assertion.

Theorem 1. *Suppose that the operator A is normal in $\mathfrak{H}$, $E(\lambda)$ and $\sigma(A)$ are its resolution of identity and spectrum respectively. The problem $C_{n+1}[\tau]$ has a solution if and only if*

$$\forall t\in[0,\tau]:\int\limits_{\sigma(A)}|\Phi_{n-1}(\lambda,t)|^2\,d(E(\lambda)x,x)<\infty. \tag{2}$$

Moreover, the solution may be represented in the form

$$v(t)=\int\limits_{\sigma(A)}\Phi_n(\lambda,t)\,dE(\lambda)x. \tag{3}$$

In order that this problem be well-posed, it is necessary and sufficient that

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\Phi_{n-1}(\lambda,t)|<\infty,\ t\in[0,\tau]. \tag{4}$$

Proof. Assume that condition (2) is fulfilled. This condition stipulates the inclusion $x \in \mathcal{D}(\Phi_n(A,t))$.

Really, it follows from the property 2) of $\Phi_n(\lambda,t)$ that

$$\Phi_n(\lambda,t) = \int\limits_0^t \Phi_{n-1}(\lambda,s)\,ds,$$

so,

$$\int\limits_{\sigma(A)} |\Phi_n(\lambda,t)|^2\,d(E(\lambda)x,x) = \int\limits_{\sigma(A)} \left|\int\limits_0^t \Phi_{n-1}(\lambda,s)\,ds\right|^2 d(E(\lambda)x,x) \le$$

$$\le \int\limits_{\sigma(A)} \left(\int\limits_0^t |\Phi_{n-1}(\lambda,s)|\,ds\right)^2 d(E(\lambda)x,x) = \left(\int\limits_{\sigma(A)}\int\limits_0^t |\Phi_{n-1}(\lambda,s)|\,ds\,d(E(\lambda)x,x)\right)^2 =$$

$$= \left(\int\limits_0^t ds \int\limits_{\sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda,s)|\,d(E(\lambda)x,x)\right)^2.$$

Since the function $\int\limits_{\sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda,s)|\,d(E(\lambda)x,x)$ is continuous on $[0,\tau]$ (see [6]), we have

$$\int\limits_0^t ds \int\limits_{\sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda,s)|\,d(E(\lambda)x,x) < \infty.$$

Thus, $x \in \mathcal{D}(\Phi_n(A,t))$ for any $t \in [0,\tau]$. Then the property 2) implies the relation

$$|\lambda\Phi_n(\lambda,t)|^2 = \left|\frac{d\Phi_n(\lambda,t)}{dt} - \frac{t^n}{n!}\right|^2 = \left|\Phi_{n-1}(\lambda,t) - \frac{t^n}{n!}\right|^2 \le$$

$$\le \left(|\Phi_{n-1}(\lambda,t)| + \frac{t^n}{n!}\right)^2 \le 2\left(|\Phi_{n-1}(\lambda,t)|^2 + \frac{t^{2n}}{n!^2}\right),$$

whence

$$\int\limits_{\sigma(A)} |\lambda\Phi_n(\lambda,t)|^2\,d(E(\lambda)x,x) \le 2\int\limits_{\sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda,t)|^2\,d(E(\lambda)x,x) + 2\left(\frac{\tau^n}{n!}\right)^2 \|x\|^2 < \infty,$$

that is, $\Phi_n(A,t)x \in \mathcal{D}(A)$.

By the direct verification one can ascertain that vector-valued function (3) is a solution of the problem $C_{n+1}[\tau]$. Indeed,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \int\limits_{\sigma(A)} \Phi_{n-1}(\lambda,t)\,d(E(\lambda)x,x) = \int\limits_{\sigma(A)} \lambda\Phi_n(\lambda,t)\,d(E(\lambda)x,x) + \frac{t^n}{n!}x = Av(t) + \frac{t^n}{n!}x.$$

It is also obvious that, in view of (1), $v(0) = 0$.

Now prove the necessity of the condition. Suppose that the problem $C_{n+1}[\tau]$ is solvable and $v(t)$ is its solution. Then

$$v'(t) - Av(t) = \frac{t^n}{n!}x = \Phi_{n-1}(\lambda, t) - \lambda\Phi_n(\lambda, t)x,$$

which implies the inclusion $x \in \mathcal{D}(\Phi_{n-1}(A,t)) \bigcap \mathcal{D}(A\Phi_n(A,t))$. Therefore condition (2) is valid.

The well-posedness of $C_{n+1}[\tau]$ in the case of normal A is equivalent to the definability of the closed operator $\Phi_{n-1}(A,t),\ t \in [0,\tau]$, on the whole space $\mathfrak{H}$, so, by the Banach closed graph theorem, to the boundedness of this operator, i.e. inequality (4). □

Theorem 2. *Let A be a normal operator in $\mathfrak{H}$. The problem $C_{n+1}[\tau]$ is well-posed if and only if there exist constants $R > 0$ and $c > 0$ such that*

$$\sigma(A) \subseteq K_R \bigcup E_c(n, \tau),$$

where

$$K_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le R\},$$
$$E_c(n,\tau) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0,\ |Im\lambda| \ge ce^{\frac{\tau Re\lambda}{n}}\right\}.$$

Proof. Suppose that the problem $C_{n+1}[\tau]$ is well-posed. Then, in accordance with Theorem 1, there exists $c > 0$ such that

$$\forall\lambda \in \sigma(A) : |\Phi_{n-1}(\lambda, \tau)| \le c,$$

that is,

$$c \ge \frac{1}{|\lambda|^n}\left|e^{\lambda\tau} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\tau\lambda)^k}{k!}\right| \ge$$
$$\ge \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{|\lambda|^n} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tau^k|\lambda|^k}{|\lambda|^n k!} = \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{|\lambda|^n} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tau^k}{|\lambda|^{n-k}k!}.$$

For this reason, for $\lambda \in \sigma(A)$ with $\mathrm{Re}\lambda \ge \beta$, where $\beta > 0$ is arbitrary fixed, we obtain

$$c \ge \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{|\lambda|^n} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tau^k}{(\mathrm{Re}\lambda)^{n-k}k!} \ge \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{|\lambda|^n} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tau^k}{\beta^{n-k}k!} =$$

$$= \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{|\lambda|^n} - \frac{1}{\beta^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\tau\beta)^k}{k!} \ge \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{|\lambda|^n} - \frac{e^{\tau\beta}}{\beta^n}.$$

Set now $\beta = \dfrac{n}{\tau}$. Then for $\mathrm{Re}\lambda > 0$ we have

$$c \ge \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{|\lambda|^n} - \frac{e^n}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^n} = \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{|\lambda|^n} - \left(\frac{e\tau}{n}\right)^n,$$

Since minimum of the function $\frac{e^{\tau\beta}}{\beta^n}$, $\beta > 0$, is attained at the point $\frac{n}{\tau}$, it follows for any $\mathrm{Re}\lambda > 0$ the inequality

$$|\lambda|^n \left(c + \left(\frac{e\tau}{n}\right)^n\right) \geq e^{\tau \mathrm{Re}\lambda},$$

whence

$$|\lambda|^n \geq \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{c + \left(\frac{e\tau}{n}\right)^n} \geq \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{\left(\sqrt[n]{c} + \frac{e\tau}{n}\right)^n} \geq \frac{e^{\tau\mathrm{Re}\lambda}}{(\sqrt[n]{c} + e\tau)^n},$$

and, consequently,

$$|\lambda| \geq c_1 e^{\frac{\tau\mathrm{Re}\lambda}{n}},$$

where $c_1 = (\sqrt[n]{c} + e\tau)^{-1}$ does not depend on $\mathrm{Re}\lambda$.

For a a fixed $\mathrm{Re}\lambda = \beta > 0$, we have

$$|\mathrm{Im}\lambda| = |\lambda| \sin\left(\arccos\frac{\beta}{|\lambda|}\right) \geq c_2 e^{\frac{\tau\beta}{n}}$$

with $c_2 = c_1 \sin\left(\arccos\frac{\beta}{|\lambda|}\right)$.

Assume now that $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$. As has been shown in [8],

$$\sigma(A) \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C} \middle| \lambda = tz : t \in [1, \infty), |z| \leq R\right\},$$

where R is the norm of the bounded normal operator $A(I + A^\star)^{-1}$. Since $\mathrm{Re}\lambda = t\mathrm{Re}z \leq 0$, we have $\mathrm{Re}z \leq 0$, namely, $\mathrm{Re}z \in [-R, 0]$. Taking into account correlation (1), we conclude that

$$c \geq |\Phi_{n-1}(\lambda, \tau)| = \frac{\tau^n}{n!}\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k \lambda^k}{(n+1)\dots(n+k)}\right| = \frac{\tau^n}{n!}\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k t^k z^k}{(n+1)\dots(n+k)}\right|. \qquad (5)$$

Let now $\lambda_0 = z_0 t_0 \in \sigma(A)$. Then the power series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k {\lambda_0}^k}{(n+1)\dots(n+k)}$$

converges at the point λ_0. By the former Abel theorem (see, for instance, [9]), the circle $|\lambda| = |\lambda_0|$ divides the whole plane $\mathbb{C}$ into the convergence region $\{\lambda : |\lambda| < |\lambda_0|\}$ of series (5) and its divergence one $\{\lambda : |\lambda| > |\lambda_0|$. Thus, there are no poits of spectrum of the operator A outside the circle $|\lambda| \leq |\lambda_0|$. As $|z_0| \leq R$ and the minimal value of t_0 is equal to 1, $K_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda|\} \leq R$ is the minimal circle containing all the points $\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\lambda \leq 0$. □

3 References

[1] Arendt W., Mennaoui O., Keyantuo V. *Local integrated semigroups: evolution with jumps of regularity.* J. Math. Anal. 1994,**186**, 572–595.

[2] Krein S.G. Linear Differential Equations in Banach Space. Amer. Math. Soc. Providence RI, 1971.

[3] Nagel R.(Ed.).*One parameter semigroups of positive operators.* Lect. Notes in Math. 1986,**1184**, Springer-Verlag, Berlin.

[4] Gorbachuk V.M.*On solutions of the (n + 1)-times integrated Cauchy problem.* Mathematics and Information Technology, Chernivtsi Nat. Univ. Chernivtsi, 2023, 56–57.

[5] Privalov I.I. Introductuon into Theory of Functions of Complex Variable. Nauka, Moscow, 1984 (Russian).

[6] Plesner I. Spectral Theory of Linear Operators. Nauka, Moscow, 1965 (Russian).

[7] Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators, Part II: Spectral Theory. Selfadjoint Operators in Hilbert Space. Interscience, New York- London, 1963.

[8] Berezansky Yu.M., Sheftel Z.G., Us G.F. Functional Analysis, Vol. II. Inst. of Math. NASU, Kyiv, 2010.

[9] Bludova T.V., Martynenko V.S. Theory of Functions of Complex Variable. Prosvita, Kyiv, 2000 (Ukrainian).

Received 01.07.2024

Горбачук В.М., Співак Ю.В. *Про розв'язність і коректність* $(n+1)$*-раз проінтегрованої задачі Коші* // Буковинський матем. журнал — 2024. — Т.12, №1. — С. 7–13.

Як відомо, класична теорія C_0-півгруп лінійних операторів є важливим інструментом для вивчення багатьох питань теорії диференціальних рівнянь у банаховому просторі, зокрема задачі Коші $C_0[\tau]$ відшукання розв'язку $u(t), t \in [0,\tau]$ рівняння $u'(t) = Au(t)$, що задовольняє умову $u(0) = x \in X$, де A - замкнений лінійний оператор у банаховому просторі X. Виявляється, що одним із самих плідних методів дослідження $(n+1)$-раз ($n \in N$) проінтегрованої задачі Коші $C_{n+1}[\tau] : v'(t) = Av(t) + \frac{t^n}{n!}x, v(0) = 0$, є вивчення введених Арендтом так званих $(n+1)$-раз проінтегрованих півгруп, теорію яких у подальшому розробляли Келлерман і Гебер, Танака і Міядера, деЛаубенфелс та ін.

У цій статті основна увага сконцентрована на випадку, коли A є нормальним оператором у гільбертовому просторі. Виходячи з властивостей функції $\Phi_n(\lambda,t) = \frac{1}{\lambda^{n+1}}\left(e^{\lambda t} - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(t\lambda)^k}{k!}\right), \lambda \in \mathbb{C}$, пов'язаної певним чином з відповідною $(n+1)$-раз проінтегрованою півгрупою, та операційного числення для нормальних операторів,з допомогою зазначеної функції описано всі розв'язки задачі $C_{n+1}[\tau]$ і знайдено умови, необхідні й достатні для її коректної постановки. Більше того, установлено критерій коректності цієї задачі в термінах локалізації спектра операторп A.

Gutik O.V.

ON LOCALLY COMPACT SHIFT-CONTINUOUS TOPOLOGIES ON SEMIGROUPS $\mathscr{C}_+(A,B)$ AND $\mathscr{C}_-(A,B)$ WITH ADJOINED ZERO

Let $\mathscr{C}_+(a,b)$ and $\mathscr{C}_-(a,b)$ be upper and down subsemigroups of the bicyclic semigroup defined in [15]. Let $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ and $\mathscr{C}_-(p,q)^0$ be the semigroups $\mathscr{C}_+(a,b)$ and $\mathscr{C}_-(a,b)$ with the adjoined zero. We show that the semigroups $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ and $\mathscr{C}_-(p,q)^0$ admit continuum many different Hausdorff locally compact shift-continuous topologies up to topological isomorphism.

Key words and phrases: semitopological semigroup, topological semigroup, left topological semigroup, locally compact.

Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, 79000, Ukraine
e-mail: *oleg.gutik@lnu.edu.ua*

In this paper we shall follow the terminology of [4, 5, 6, 18].

By ω we denote the set of all non-negative integers. Throughout these notes we always assume that all topological spaces involved are Hausdorff.

Definition 1 ([4, 18])**.** *Let S be a non-void topological space which is provided with an associative multiplication (a semigroup operation) $\mu\colon S\times S\to S$, $(x,y)\mapsto \mu(x,y)=xy$. Then the pair (S,μ) is called*

- (i) a right topological (left topological) semigroup *if all interior left (right) shifts $\lambda_s\colon S\to S$, $x\mapsto sx$ ($\rho_s\colon S\to S$, $x\mapsto xs$), are continuous maps, $s\in S$;*
- (ii) a semitopological semigroup *if the map μ is separately continuous;*
- (iii) a topological semigroup *if the map μ is jointly continuous.*

We usually omit the reference to μ and write simply S instead of (S,μ). It goes without saying that every topological semigroup is also semitopological and every semitopological semigroup is both a right and left topological semigroup.

A topology τ on a semigroup S is called:

- a *semigroup* topology if (S,τ) is a topological semigroup;

УДК 512.536
2010 *Mathematics Subject Classification:* 22A15, 54D45, 54H10.

© Gutik O.V., 2024

- a *shift-continuous* topology if (S,τ) is a semitopological semigroup;
- an *left-continuous* (*right-continuous*) topology if (S,τ) is a left (right) topological semigroup.

The bicyclic monoid $\mathscr{C}(a,b)$ is the semigroup with the identity 1 generated by two elements a and b subjected only to the condition $ab=1$. The semigroup operation on $\mathscr{C}(a,b)$ is determined as follows:

$$b^k a^l \cdot b^m a^n = \begin{cases} b^{k-l+m}a^n, & \text{if } l<m;\\ b^k a^n, & \text{if } l=m;\\ b^k a^{l-m+n}, & \text{if } l>m. \end{cases}$$

In [15] Makanjuola and Umar study algebraic property of the following anti-isomorphic subsemigroups

$$\mathscr{C}_+(p,q)=\left\{q^ip^j\in\mathscr{C}(p,q)\colon i\leqslant j\right\} \quad \text{and} \quad \mathscr{C}_-(p,q)=\left\{q^ip^j\in\mathscr{C}(p,q)\colon i\geqslant j\right\},$$

of the bicyclic monoid. In the paper [8] we prove that every Hausdorff left-continuous (right-continuous) topology on the monoid $\mathscr{C}_+(a,b)$ ($\mathscr{C}_-(a,b)$) is discrete and show that there exists a compact Hausdorff topological monoid S which contains $\mathscr{C}_+(a,b)$ ($\mathscr{C}_-(a,b)$) as a submonoid. Also, in [8] we constructed a non-discrete right-continuous (left-continuous) topology τ_p^+ (τ_p^-) on the semigroup $\mathscr{C}_+(a,b)$ ($\mathscr{C}_-(a,b)$) which is not left-continuous (right-continuous).

Later by $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ and $\mathscr{C}_-(p,q)^0$ we denote the semigroups $\mathscr{C}_+(a,b)$ and $\mathscr{C}_-(a,b)$ with the adjoined zero.

In [7] it is proved that every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on the bicyclic monoid with adjoined zero is either compact or discrete. This result was extended by Bardyla onto the p-polycyclic monoid [1] and graph inverse semigroups [2], and by Mokrytskyi onto the monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ with adjoined zero [17]. In [9] the results of paper [7] onto the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ of all partial cofinite isometries of positive integers with adjoined zero are extended. In [12] the similar dichotomy was proved for so called bicyclic extensions $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ when a family $\mathscr{F}$ consists of inductive non-empty subsets of ω. Algebraic properties on a group G such that if the discrete group G has these properties, then every locally compact shift continuous topology on G with adjoined zero is either compact or discrete studied in [16]. The above results are extended in [10] to the bicyclic extension $\boldsymbol{B}_{[0,\infty)}$ of the additive group of reals with adjoined zero (see [13]) in the cases when on the semigroup $\boldsymbol{B}_{[0,\infty)}$ the usual topology, the discrete topology or the topology determined by the natural partial order is defined. Also, in [11] it is proved that the extended bicyclic semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$ with adjoined zero admits distinct $\mathfrak{c}$-many shift-continuous topologies, however every Hausdorff locally compact semigroup topology on $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$ is discrete. In [3] Bardyla proved that a Hausdorff locally compact semitopological semigroup McAlister Semigroup $\mathcal{M}_1$ is either compact or discrete. However, this dichotomy does not hold for the McAlister Semigroup $\mathcal{M}_2$ and moreover, $\mathcal{M}_2$ admits continuum many different Hausdorff locally compact inverse semigroup topologies [3].

In this paper we show that the semigroups $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ and $\mathscr{C}_-(p,q)^0$ admit continuum many different Hausdorff locally compact shift-continuous topologies up to topological isomorphism.

Lemma 1. *Every locally compact Hausdorff shift-continuous topology τ on the additive semigroup of non-negative integers $(\omega,+)$ is discrete.*

Proof. Fix any $n_0 \in \omega$. The Hausdorffness of the space (ω,τ) implies that $n_0^{\downarrow} = \{k \in \omega\colon k \leqslant n\}$ is a closed subset of (ω,τ). Then $\omega\setminus n_0^{\downarrow}$ is an open subset of (ω,τ), and by Corollary 3.3.10 of [6], $\omega\setminus n_0^{\downarrow}$ is locally compact, and hence, Baire. By Proposition 1.30 of [14] the space $\omega\setminus n_0^{\downarrow}$ contains an isolated point n_1, which is isolated in (ω,τ) because $\omega \setminus n_0^{\downarrow}$ is an open subset of (ω,τ). This and the condition $n_0 < n_1$ imply that n_0 is an isolated point in (ω,τ), because n_0 is the full preimage of n_1 under the continuous right shift $\rho_{n_1-n_0}\colon (\omega,+,\tau) \to (\omega,+,\tau)$, $i \mapsto i + (n_1 - n_0)$. This completes the proof of the lemma. □

Later by $(\omega,+)^0$ we denote the additive semigroup of non-negative integers $(\omega,+)$ with adjoined zero. Without loss of generality we may assume that $(\omega,+)^0 = \omega \cup \{\infty\}$ with the extended semigroup operation $n + \infty = \infty + n = \infty + \infty = \infty$ for all $n \in \omega$, i.e., ∞ is the zero of $(\omega,+)^0$.

Proposition 1. *Every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on the semigroup $(\omega,+)^0$ is either compact or discrete.*

Proof. Let τ_{lc} be an arbitrary non-discrete Hausdorff locally compact shift-continuous topology on the semigroup $(\omega,+)^0$. The Hausdorffness of $((\omega,+)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$ implies that ω is an open subset of $((\omega,+)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$. Then by Corollary 3.3.10 of [6], ω is locally compact, and by Lemma 1 is a discrete subspace of $((\omega,+)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$.

Since all point from ω are open-and-closed subsets of the locally compact space $((\omega,+)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$, there exists a base $\mathscr{B}_{\tau_{\mathrm{lc}}}(\infty)$ of the topology τ_{lc} at the point ∞ which consists of compact-and-open subsets of $((\omega,+)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$. Hence, for any $U,V \in \mathscr{B}_{\tau_{\mathrm{lc}}}(\infty)$ the set $U \setminus V$ is finite.

We state that for any $U \in \mathscr{B}_{\tau_{\mathrm{lc}}}(\infty)$ the set $\omega \setminus U$ is finite. Suppose to the contrary that there exists $U \in \mathscr{B}_{\tau_{\mathrm{lc}}}(\infty)$ the set $\omega \setminus U$ is infinite. The separate continuity of the semigroup operation in $((\omega,+)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$ implies that there exists $V \in \mathscr{B}_{\tau_{\mathrm{lc}}}(\infty)$ such that $V \subseteq U$ and $1 + V \subseteq U$. Since $\omega \setminus U$ is infinite, there exists a sequence $\{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq U$ such that $1 + x_i \neq U$ for any $i \in \omega$. This implies that $x_i \neq V$ for any $i \in \omega$, and hence, the set $U \setminus V$ is infinite, a contradiction. The obtained contradiction implies that τ_{lc} is a compact topology on $(\omega,+)^0$. □

Later by τ_{lc} we denote a Hausdorff locally compact shift-continuous topology on the semigroup $\mathscr{C}_+(p,q)^0$.

Since every Hausdorff shift-continuous topology on the semigroup $\mathscr{C}_+(p,q)$ is discrete (see [8, Theorem 6]), the following statements holds.

Lemma 2. *If U and V are any compact-and-open neighbourhoods of the zero in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$, then the set $U \setminus V$ is finite.*

For any $i \in \omega$ we denote

$$\mathscr{C}_+^i(p,q) = \{b^i a^{i+s} \in \mathscr{C}_+(p,q)\colon s \in \omega\}.$$

The semigroup operation of $\mathscr{C}_+(p,q)$ implies that $\mathscr{C}_+^i(p,q)$ is a subsemigroup of $\mathscr{C}_+(p,q)$, and moreover, $\mathscr{C}_+^i(p,q)$ is isomorphic to the additive semigroup of non-negative integers $(\omega,+)$ for any $i \in \omega$ [8].

Lemma 3. *For any compact-and-open neighbourhood U of the zero in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$ there exists $i \in \omega$ such that the set $U \cap \mathscr{C}_+^i(p,q)$ is infinite.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists a compact-and-open neighbourhood U of the zero in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$ such that $\left|U \cap \mathscr{C}_+^i(p,q)\right| < \infty$ for any $i \in \omega$. Then there exists a sequence $\{i_j\}_{j\in\omega} \subseteq \omega$ such that $U \cap \mathscr{C}_+^{i_j}(p,q) \neq \varnothing$ for any $j \in \omega$. The separate continuity of the semigroup operation in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$ and local compactness of τ_{lc} imply that there exists a compact-and-open neighbourhood V of zero in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$ such that $V \subseteq U$ and $V \cdot a \subseteq U$. By the definition of the semigroup operation in $\mathscr{C}_+(p,q)$ we get that $\mathscr{C}_+^i(p,q) \cdot a \subseteq \mathscr{C}_+^i(p,q)$ for all $i \in \omega$. Since for any $j \in \omega$ the set $U \cap \mathscr{C}_+^{i_j}(p,q)$ is non-empty and finite, there exists maximal non-negative integer s_j such that $b^{i_j}a^{i_j+s_j} \in U$ but $b^{i_j}a^{i_j+s_j} \notin V$. This implies that the set $U \setminus V$ is infinite, which contradicts Lemma 2. The obtained contradiction implies the statement of the lemma. □

Lemma 4. *For any compact-and-open neighbourhood U of the zero in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$ there exists $i_0 \in \omega$ such that $\mathscr{C}_+^{i_0}(p,q) \cup \{0\}$ is a compact subset of $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$.*

Proof. By Lemma 3 for any compact-and-open neighbourhood U of the zero in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$ there exists $i_0 \in \omega$ such that the set $U \cap \mathscr{C}_+^{i_0}(p,q)$ is infinite. Since $\mathscr{C}_+(p,q)$ is a discrete subspace of $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$, $\mathscr{C}_+^{i_0}(p,q) \cup \{0\}$ is a closed subset of $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$. By Corollary 3.3.10 of [6], $\mathscr{C}_+^{i_0}(p,q) \cup \{0\}$ is locally compact. Since the semigroup $\mathscr{C}_+^{i_0}(p,q) \cup \{0\}$ is isomorphic to the additive semigroup of non-negative integers with adjoined zero $(\omega,+)^0$, by Proposition 1 the semigroup $\mathscr{C}_+^{i_0}(p,q)\cup\{0\}$ is a compact subsemigroup of $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$. □

Lemma 5. *$\mathscr{C}_+^i(p,q) \cup \{0\}$ is a compact subset of $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$ for any $i \in \omega$.*

Proof. By Lemma 4 there exists $i_0 \in \omega$ such that $\mathscr{C}_+^{i_0}(p,q) \cup \{0\}$ is a compact subset of $(\mathscr{C}_+(p,q)^0,\tau_{\mathrm{lc}})$. We fix an arbitrary $i \in \omega$. The semigroup operation in $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ implies the following:

(1) if $i < i_0$, then

$$\begin{aligned} a^{i_0-i} \cdot \mathscr{C}_+^{i_0}(p,q) &= \left\{a^{i_0-i} \cdot b^{i_0}a^{i_0+s} \colon s \in \omega\right\} = \\ &= \left\{b^{i_0-(i_0-i)}a^{i_0+s} \colon s \in \omega\right\} = \\ &= \left\{b^{i}a^{i_0+s} \colon s \in \omega\right\} = \\ &= \mathscr{C}_+^i(p,q) \setminus \left\{b^ia^i, \ldots, b^ia^{i_0-1}\right\}; \end{aligned}$$

(2) if $i > i_0$, then

$$\begin{aligned} b^ia^i \cdot \mathscr{C}_+^{i_0}(p,q) &= \left\{b^ia^i \cdot b^{i_0}a^{i_0+s} \colon s \in \omega\right\} = \\ &= \left\{b^ia^i \cdot b^{i_0}a^{i_0} \cdot a^s \colon s \in \omega\right\} = \\ &= \left\{b^ia^i \cdot a^s \colon s \in \omega\right\} = \\ &= \left\{b^ia^{i+s} \colon s \in \omega\right\} = \\ &= \mathscr{C}_+^i(p,q). \end{aligned}$$

Hence, if $i > i_0$, then $\mathscr{C}_+^i(p,q) \cup \{0\}$ is a compact subset of $(\mathscr{C}_+(p,q)^0, \tau_{\mathrm{lc}})$ as a continuous image of compact space $\mathscr{C}_+^{i_0}(p,q)\cup\{0\}$ under the left shift $\lambda_{b^i a^i}\colon x \mapsto b^i a^i \cdot x$ in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0, \tau_{\mathrm{lc}})$. By a similar way, in the case when $i < i_0$ we obtain that $\mathscr{C}_+^i(p,q)\cup\{0\}$ is compact, because it is the union of the finite family of compact subsets $\left\{a^{i_0-i}\cdot\mathscr{C}_+^{i_0}(p,q), \{b^i a^i\}, \ldots, \{b^i a^{i_0-1}\}\right\}$. $\square$

Example 1. *Let $\{x_i\}_{i\in\omega}$ be any non-decreasing sequence of non-negative integers. We define the topology $\tau_{\{x_i\}}$ on the semigroup $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ in the following way. Put*

$$U^n_{\{x_i\}}(0) = \{0\} \cup \left\{b^k a^{k+x_k+s}\colon k, s \in \omega \quad \text{and} \quad k + x_k + s > n\right\}.$$

We suppose that all points of the set $\mathscr{C}_+(p,q)$ are isolated in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0, \tau_{\{x_i\}})$, and the family $\mathscr{B}_{\{x_i\}}(0) = \left\{U^n_{\{x_i\}}(0)\colon n \in \omega\right\}$ is the base of the topology $\tau_{\{x_i\}}$ at zero 0 of the semigroup $\mathscr{C}_+(p,q)^0$.

It is obvious that the space $(\mathscr{C}_+(p,q)^0, \tau_{\{x_i\}})$ is Hausdorff and locally compact.

Next we show that the semigroup operation in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0, \tau_{\{x_i\}})$ is separately continuous.

Suppose $b^m a^{m+x_m+s} \in U^n_{\{x_i\}}(0)$ and $m \leqslant n = i+j \geqslant i$. Then $m + x_m + s > n$, and hence, $i + j + x_m + s \geqslant n$, which implies that $b^i a^{i+j++x_m+s} \in U^n_{\{x_i\}}(0)$.

If $m > n = i+j \geqslant i$, then $b^i a^{i+j}\cdot b^m a^{m+x_m+s} = b^{m-j}a^{m+x_m+s}$. In the case when $m-j \leqslant n$ we have that $m + x_m + s \geqslant n$ and $b^{m-j}a^{m+x_m+s} \in U^n_{\{x_i\}}(0)$. In the case when $m - j > n$ we have that

$$m - j + x_{m-j} + s \leqslant m - j + x_m + s \leqslant m + x_m + s,$$

because $\{x_i\}_{i\in\omega}$ is a non-decreasing sequence of non-negative integers, and hence $b^{m-j}a^{m+x_m+s} \in U^n_{\{x_i\}}(0)$. Therefore, the inclusion $b^i a^{i+j}\cdot U^n_{\{x_i\}}(0) \subseteq U^n_{\{x_i\}}(0)$ holds for any $n \geqslant i + j$.

If $m \geqslant n$, then $m + x_m + s > n$, and hence, we have that

$$b^m a^{m+x_m+s}\cdot b^i a^{i+j} = b^m a^{m+x_m+s-i+i+j} = b^m a^{m+j+x_m+s}.$$

This implies that for any $n \geqslant i + j$ the following inclusion $U^n_{\{x_i\}}(0)\cdot b^i a^{i+j} \subseteq U^n_{\{x_i\}}(0)$ holds.

Therefore, the semigroup operation in $(\mathscr{C}_+(p,q)^0, \tau_{\{x_i\}})$ is separately continuous.

Since there exist continuum many non-decreasing sequence of non-negative integers in ω, Lemma 5 and Example 1 imply the main theorem of this paper.

Theorem 1. *On the semigroup $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ ($\mathscr{C}_-(p,q)^0$) there exist continuum many Hausdorff locally compact shift-continuous topologies up to topological isomorphism.*

Since for any non-decreasing sequence of non-negative integers $\{x_i\}_{i\in\omega}$ in ω and any $n \in \omega$ the set $\mathscr{C}_+(p,q)^0 \setminus U^n_{\{x_i\}}(0)$ is either finite or infinite, we get the following corollary.

Corollary 1. *On the semigroup $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ ($\mathscr{C}_-(p,q)^0$) there exist exactly three Hausdorff locally compact shift-continuous topologies up to homeomorphism.*

References

[1] Bardyla S. *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*. Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka 2016, **13**, 21–28.

[2] Bardyla S. *On locally compact semitopological graph inverse semigroups*. Mat. Stud. 2018, **49** (1), 19–28. doi: 10.15330/ms.49.1.19-28

[3] Bardyla S. *On topological McAlister semigroups*, J. Pure Appl. Algebra 2023, **227** (4), 107274. doi: 10.1016/j.jpaa.2022.107274

[4] Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J. The theory of topological semigroups, Vol. *I*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.

[5] Clifford A.H., Preston G.B. The algebraic theory of semigroups, Vol. **I**, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.

[6] Engelking R. General topology, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.

[7] Gutik O. *On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero*, Visnyk L'viv Univ., Ser. Mech.-Math. 2015, **80**, 33–41.

[8] Gutik O. *On non-topologizable semigroups*, Preprint (arXiv: 2405.16992).

[9] Gutik O., Khylynskyi P. *On a locally compact submonoid of the monoid cofinite partial isometries of* $\mathbb{N}$ *with adjoined zero,* Topol. Algebra Appl. 2022, **10** (1), 233–245. doi: 10.1515/taa-2022-0130

[10] Gutik O.V., Khylynskyi M.B. *On locally compact shift continuous topologies on the semigroup* $\boldsymbol{B}_{[0,\infty)}$ *with an adjoined compact ideal*, Mat. Stud. 2024, **61** (1), 10–20. doi: 10.30970/ms.61.1.10-20

[11] Gutik O.V., Maksymyk K.M. *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero*, J. Math. Sci. 2022, **265** (3), 369–381. doi: 10.1007/s10958-022-06058-6

[12] Gutik O., Mykhalenych M. *On a semitopological semigroup* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ *when a family* $\mathscr{F}$ *consists of inductive non-empty subsets of* ω, Mat. Stud. 2023, **59** (1), 20–28. doi: 10.30970/ms.59.1.20-28

[13] Gutik O., Pagon D., Pavlyk K. *Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. 2011, **15** (2), 61–80. DOI: 10.12697/ACUTM.2011.15.10

[14] Haworth R.C., McCoy R.A. Baire spaces, Dissertationes Math., Warszawa, PWN, 1977. Vol. **141**.

[15] Makanjuola S.O., Umar A. *On a certain subsemigroup of the bicyclic semigroup*, Commun. Algebra 1997, **25** (2), 509–519. doi: 10.1080/00927879708825870

[16] Maksymyk K. *On locally compact groups with zero*, Visn. Lviv Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2019, **88**, 51–58. (in Ukrainian).

[17] Mokrytskyi T. *On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of* $\mathbb{N}^n$ *with adjoined zero*, Visn. Lviv Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2019, **87**, 37–45.

[18] Ruppert W. Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory, Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984. doi: 10.1007/BFb0073675

Received 08.09.2024

Гутік О.В. *Про локально компактні трансляційно неперервні топології на напівгрупах $\mathscr{C}_+(a,b)$ і $\mathscr{C}_-(a,b)$ з приєднаним нулем* // Буковинський матем. журнал — 2024. — Т.12, №1. — С. 14–20.

У праці [15] Маканюола та Умар вивчали алгебричні властивості верхньої $\mathscr{C}_+(a,b) = \{q^ip^j \in \mathscr{C}(p,q) \colon i \leqslant j\}$ та нижньої $\mathscr{C}_-(a,b) = \{q^ip^j \in \mathscr{C}(p,q) \colon i \geqslant j\}$ піднапівгруп біциклічного моноїда $\mathscr{C}(a,b)$. Приймемо $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ і $\mathscr{C}_-(p,q)^0$ – напівгрупи $\mathscr{C}_+(a,b)$ і $\mathscr{C}_-(a,b)$ з приєднаним нулем. Відомо [7], що на біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}(p,q)^0$ кожна гаусдорфова локально компактна трансляційно неперервна топологія є або компактною, або дискретною. У цій праці описано всі гаусдорфові локально компактні трансляційно неперервні топології на адитивній напівгрупі невід'ємних цілих чисел з приєднаним нулем $(\omega,+)^0$ і на напівгрупах $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ і $\mathscr{C}_-(p,q)^0$. Зокрема доведено, що на напівгрупах $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ і $\mathscr{C}_-(p,q)^0$ існує континуум різних гаусдорфових локально компактних трансляційно неперервних топологій з точністю до топологічного ізоморфізму, причому таких топологій на напівгрупах $\mathscr{C}_+(p,q)^0$ і $\mathscr{C}_-(p,q)^0$ існує рівно три з точністю до гомеоморфізму.

Bukovinian Math. Journal. 2024, **12** (1) , 21–31 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 21–31

Melnyk H.V., Melnyk V.S., Vikovan V.K.

APPLICATION OF NATURAL LANGUAGE PROCESSING AND FUZZY LOGIC TO DISINFORMATION DETECTION

Natural language processing (NLP) is a field of computer science that is concerned with processing, collection and analysis of data encoded in natural language, such as speech, written text, online posts, etc. This paper explores the integration of Natural Language Processing (NLP) methods, specifically TF-IDF and n-gram analysis, with fuzzy logic rules employing Gaussian membership functions to detect disinformation in text data. The approach emphasizes reducing false positives by assessing the probability of disinformation rather than binary decisions, enhancing the accuracy and reliability of text analysis under informational uncertainty.

Key words and phrases: Fuzzy logic, TF-IDF, natural language processing, n-gramms.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *g.melnik@chnu.edu.ua, va.melnyk@chnu.edu.ua, vikovan.valentyn@chnu.edu.ua*

Introduction

In today's interconnected world, the rapid spread of information across digital platforms has amplified the challenge of combating disinformation. False and misleading information can have far-reaching consequences, from swaying public opinion to impacting political and social stability. Effective detection of disinformation is crucial, and advanced computational techniques offer promising solutions. This article explores the application of Natural Language Processing (NLP) techniques for detecting disinformation and leverages fuzzy logic to refine these methods, reducing the incidence of false positives.

Natural Language Processing (NLP) encompasses a range of computational techniques aimed at understanding and processing human language. For disinformation detection, several NLP methods are particularly effective. TF-IDF (Term Frequency-Inverse Document Frequency) measures the importance of a word in a document relative to a collection of documents (corpus). This statistical measure helps highlight terms that are particularly significant in identifying unique content, which is crucial in spotting disinformation. N-grams, on the other hand, capture contiguous sequences of words, providing a more comprehensive understanding of context and word associations. These methods, when combined, offer a

УДК 519.115.1
2010 *Mathematics Subject Classification:* 05A15.

© Melnyk H.V., Melnyk V.S., Vikovan V.K., 2024

robust framework for analyzing textual data and identifying patterns indicative of disinformation.

While NLP techniques are powerful, they can sometimes produce false positives, mistakenly classifying truthful information as disinformation. This is a significant challenge, as over-correcting for disinformation can undermine the credibility of legitimate content. To address this, we integrate fuzzy logic into the disinformation detection process. Fuzzy logic, with its ability to handle uncertainty and partial truths, provides a means to refine NLP-based disinformation detection, ensuring a more accurate and reliable outcome.

Fuzzy logic allows for degrees of truth, making it well-suited to handle the nuances and ambiguities inherent in natural language ([8]). By applying fuzzy logic, we can assess the likelihood of a piece of information being disinformation rather than making a binary decision. This probabilistic approach helps to capture the subtleties that NLP techniques might miss, reducing the chances of misclassifying truthful information. By incorporating features such as the credibility of sources, historical accuracy of the content, and the overall sentiment, fuzzy logic systems can better differentiate between disinformation and legitimate information ([6], [9], [10], [11], [12]).

In order to implement our own functions for TF-IDF and n-gram analysis, as well as fuzzy logic analysis of the results, we used python modules numpy and skfuzzy ([2]).

The datasets used in this study consist of 2 thousand text samples sourced from ([13]), encompassing a range of themes including political news, social media posts, and blog entries. Each dataset was curated to reflect realistic scenarios of disinformation spread. Texts were preprocessed using standard NLP techniques such as stop-word removal, lemmatization, and tokenization to ensure consistency and quality of input data.

Overview of linguistic analysis methods

Most tasks related to text processing in data science can be accomplished with relatively simple methods that we can easily understand without any reference to sophisticated machine learning: methods such as TF-IDF vectors and n-gram language models.

TF-IDF vectors: this method also uses a vector representation of the text, but takes into account not only the frequency of words in the document, but also their information content. TF-IDF (the term frequency inverse of document frequency) determines how well a document matches the analysis criteria with other documents in the collection. This allows us to identify keywords or terms that may indicate disinformation ([1], [3], [4], [7]).

N-gram language models: This method is used to analyze text based on sequences of fixed length words (n-grams). The difference from the bag-of-words model is that it takes into account word order. This can be useful for identifying phrases or language structures that are often found in disinformation materials ([5]).

We can represent documents using a frequency matrix and an $m \times n$ matrix, where m denotes the number of documents and n denotes the size of the dictionary (i.e., the number of unique words in all documents).

```
term frequencies:
[[0 0 0 0 1]
 [0 0 0 0 0]
 [0 0 0 1 1]]
```

Now let's build a matrix that contains the number of words (frequency of occurrence) for all documents.

An obvious problem with using conventional term frequency counts to represent a document is that the document vector will often be 'dominated' by very common words, e.g: 'of', 'the', 'is'. This problem can be mitigated to some extent by excluding the so-called 'stop words' (common English words such as 'the', 'a', 'of' that are not considered relevant to specific documents) from the term frequency matrix. However, this ignores the case when a word that is not a common stop word still occurs in a very large number of documents. Intuitively, we expect that the most 'important' words in a document are those that appear in only a relatively small number of documents, so we want to discard the weight of very frequently used terms.

$$idf_j = \log(\frac{N_{documents}}{N_{documents\ with\ word\ j}}).$$

For example, if a word appears in every document, the inverse frequency weight of the document will be zero (log(1)). Conversely, if a word appears in only one document, its inverse frequency in the document will be $\log(N_{documents})$.

```
inverce document frequencies:
[1.         1.         1.         1.09861229 0.40546511]
```

The combination of 'term frequency inverse document frequency' (TF-IDF) simply scales the columns of the term frequency matrix by the inverse document frequency. This way, we still have an effective bag of words representing each document, but we do so with weights derived from the inverse document frequency: we discard words that occur very frequently and increase the weight of less frequent terms.

```
tfidf * idf:
[[0.         0.         0.         0.         0.40546511]
 [0.         0.         0.         0.         0.        ]
 [0.         0.         0.         1.09861229 0.40546511]]
```

Given a TF-IDF matrix, one of the most common issues to solve is to compute the similarity between multiple documents in the corpus. The most common metric for this is to calculate the cosine similarity between two different documents. This is simply the normalized inner product between the vectors describing each document:

$$CosineSimilarity(x, y) = \frac{x * y}{||x||_2 \cdot ||y||_2}$$

Cosine similarity is a number between zero (meaning that two documents have no terms in common) and one (meaning that two documents have exactly the same term frequency or TF-IDF representation). In data analysis, cosine similarity is often used to determine the similarity between two non-zero sets of values defined in the inner product space. The cosine similarity is the cosine of the angle between vectors; that is, it is the scalar product of the vectors divided by the product of their lengths. It follows that cosine similarity does not depend on the magnitudes of the vectors, but only on their angle.

```
[0.4472136         nan 0.57439531]
```

We can calculate the cosine similarity between TF-IDF vectors in our corpus using the Euclidean product of two vectors.

N-gram analysis involves breaking down search queries into smaller fragments (n-grams) of 'n' words or terms. This helps to identify patterns or trends that might otherwise go unnoticed. In the context of our tool and most text analysis programs, n-grams refer to sequences of words. Here is their distribution:

- Unigram (1-gram): One word. For example, in the sentence 'I love ice cream', the unigrams are 'I', 'love', 'ice', and 'cream'.
- Bigram (2-gram): A sequence of two adjacent words. In this sentence, the bigrams are 'I love', 'love ice', and 'ice cream'.
- Trigram (3-gram): A sequence of three adjacent words. In this case, the trigrams are 'I love ice' and 'love ice cream'.
- 4-gram: A sequence of four adjacent words. If our sentence was 'I love ice cream', the 4-gram would be 'I love ice cream'.

N-grams are crucial in a variety of applications, including:

- Text analysis: They help to understand the context and semantics of a text.
- Machine learning and natural language processing: n-grams are used for predictive text input, speech recognition, and machine translation.
- Search engines: Help improve search accuracy by considering word sequences rather than individual terms.

Understanding n-grams can offer a deeper understanding of text structure and patterns, making them invaluable for linguistic and computational analysis.

In this article we combine TF-IDF analysis and n-gram text processing to achieve better detectability of texts containing disinformation.

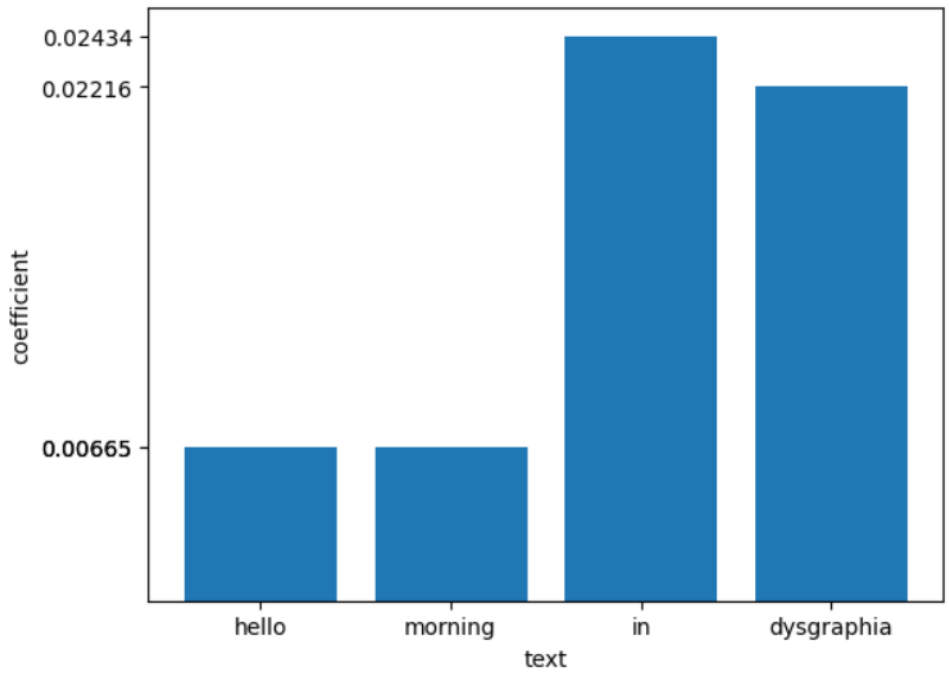
Results of tf-idf and n-gram analysis

TF-IDF analysis is the main method in textual linguistics that assigns a numerical value to each word in a text, reflecting its importance in the relevant context. Using the TF-IDF method allows you to identify keywords and topics in texts, as well as determine their similarity to each other.

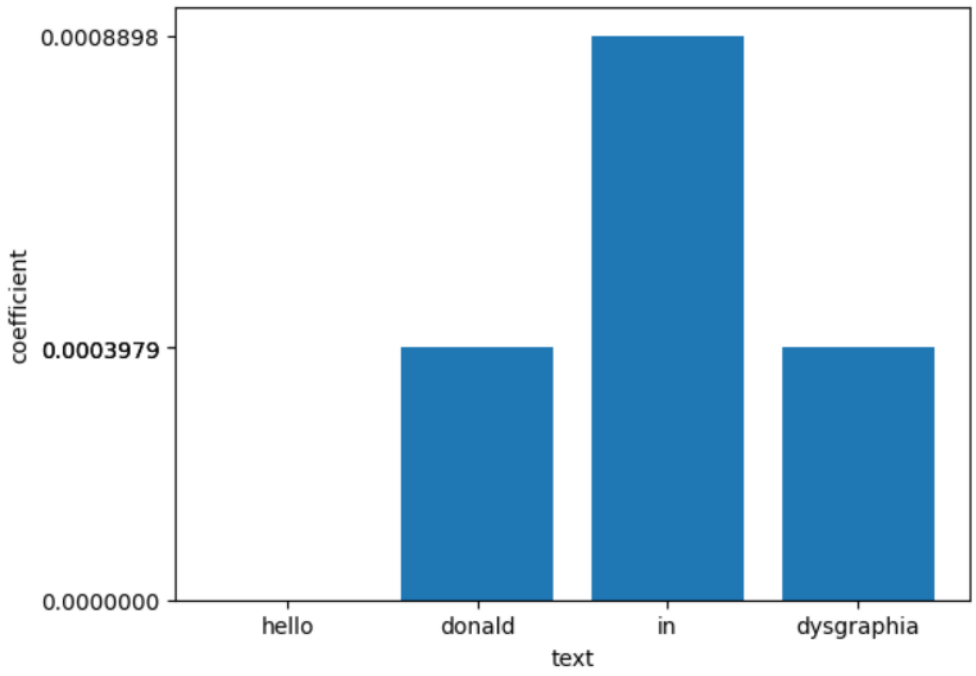
N-grams are sequences of n words in a text that allow you to analyze not only individual words but also their combinations. The use of n-grams improves the quality of analysis by providing more accurate detection of key terms and phrases in texts, as well as taking into account contextual information. The use of n-grams allows for a more detailed analysis of the text, which improves the analysis results and makes it more informative for further use.

On the other hand, as the size of n-grams increases, the similarity coefficients between texts decrease. This may be due to the fact that larger n-grams include more unique word sequences, which reduces the overall similarity between texts. In addition, large n-grams may be less effective in detecting similarities between texts with different topics and structures.

In our research, we first used simple TF-IDF analysis to example texts. The difference in cosine coefficients was not detectable at first:



After applying n-gram approach, we can see a more confident detection for disinformation texts. On the diagram below is the result of TF-IDF approach combined with 3-gram processing of text.



As the length of n-grams increases, the number of times a particular n-gram can be seen to also decrease. This can lead to sparse data and make text modeling more difficult. The choice of n-gram size in text mining is a trade-off between sparsity and generalisability of the model, and should be made based on the specific task and data characteristics.

FUZZY LOGIC APPLICATION

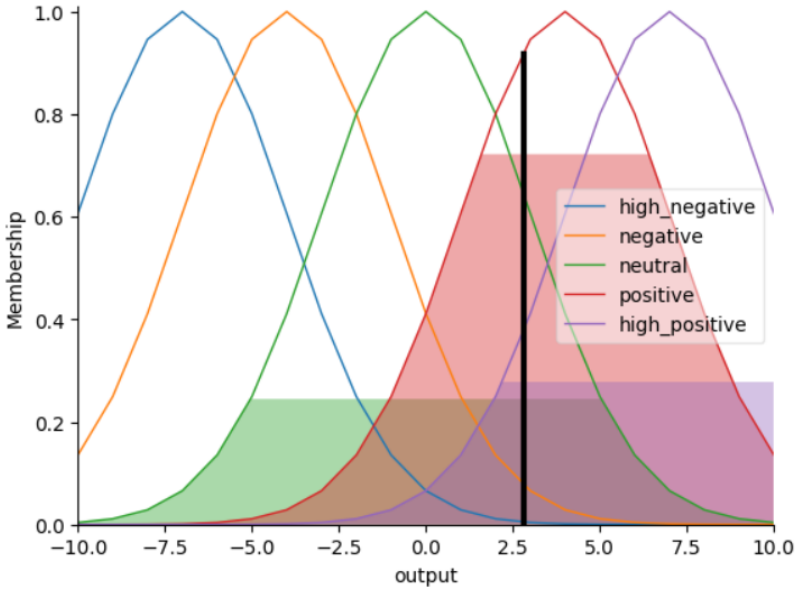
We propose to use fuzzy logic rules to detect possible false-positives in TF-IDF and n-gram text analysis. Namely, we use another dataset with data samples, that can be misinterpreted as disinformation, but which are not actual examples of disinformation.

The result of TF-IDF and n-gram analysis of text for disinformation we denote $c_{disinfo}$, and result of text analysis for false-positives we denote $c_{false-positive}$. Then, we have to setup the fuzzy rules for determining the resulting coefficient c. For example, if $c_{disinfo}$ is high and $c_{false-positive}$ is low, we determine, that the text is very likely a disinformation, and thus c should be high. On the other hand, if $c_{disinfo}$ is high but $c_{false-positive}$ is also high, we can not conclusively say wether the text contains disinformation, and thus c should have middle values. All these rules can be displayed in the table below:

Lets set up rules:

$c_{false-positive}$ \ $c_{disinfo}$	**low**	**middle**	**high**
low	neutral	high	very high
middle	low	neutral	high
high	very low	low	neutral

By applying the the fuzzy rules to our text example, we received a more confident detection. We also used Gaussian membership functions, as we do not require much calculation for two parameters $c_{false-positive}$ and $c_{disinfo}$, and these membership functions provide more smoothness and concise notation as well as being nonzero at all points. Also, this type of membership function more accurately models many natural and real-world phenomena that exhibit gradual changes rather than abrupt transitions. This makes it particularly suitable for application in our research.



Comparitive Analysis

We compared our fuzzy logic-based approach to leading machine learning techniques, including support vector machines, neural networks, and hybrid rule-based systems. The comparative analysis (Table 2) illustrates that our method outperforms traditional models in terms of reducing false positives and managing ambiguous data, with an accuracy improvement of 85.3% and a reduction in false positives by 12.5%.

- **Fuzzy Logic-Based Model:** Shows the highest overall performance with significant improvements in accuracy (85.3%) and the lowest rate of false positives (12.5%), demonstrating its effectiveness in handling ambiguous data.

- **Support Vector Machine (SVM):** Achieved a lower accuracy (76.8%) and higher false positives (18.9%), highlighting its limitations in managing ambiguity and uncertainty in text data.

- **Hybrid Rule-Based System:** Performs better than SVM and neural networks but still shows higher false positives (15.8%) compared to the fuzzy logic-based approach.

This table clearly illustrates that the fuzzy logic-based approach not only improves accuracy and recall but significantly reduces false positives, making it a superior choice for applications requiring nuanced analysis of ambiguous data.

Table 2: Comparative Analysis of Fuzzy Logic-Based Approach vs. Traditional Machine Learning Techniques

Model	**Accuracy (%)**	**Precision (%)**	**Recall (%)**	**F1 Score (%)**	**False Positives (%)**
Fuzzy Logic-Based Model	**85.3**	**83.7**	**84.2**	**83.9**	**12.5**
Support Vector Machine	76.8	74.5	72.9	73.7	18.9
Hybrid Rule-Based System	80.5	79.1	78.6	78.8	15.8

We evaluated the performance of our model using standard metrics: accuracy, precision, recall, and F1 score. Our fuzzy logic-based model achieved an accuracy of 85.3%, a precision of 83.7%, recall of 84.2%, and an F1 score of 83.9%, outperforming baseline models (Table 3). These results highlight the efficacy of our approach in providing a more reliable and nuanced analysis of disinformation.

Table 3: Performance Evaluation of Fuzzy Logic-Based Model vs. Baseline Models

Model	**Accuracy (%)**	**Precision (%)**	**Recall (%)**	**F1 Score (%)**
Fuzzy Logic-Based Model	**85.3**	**83.7**	**84.2**	**83.9**
Baseline Model 1: SVM	76.8	74.5	72.9	73.7
Baseline Model 2: Decision Tree	73.4	71.8	70.2	70.9
Baseline Model 3: Naive Bayes	71.9	70.5	68.9	69.7

- **Fuzzy Logic-Based Model:** Shows the highest performance across all metrics, demonstrating its superior ability to handle disinformation detection with nuanced analysis. It achieves the best balance between precision and recall, resulting in the highest F1 score (83.9%).

- **Support Vector Machine (SVM):** The SVM model has lower accuracy and precision, indicating challenges in dealing with ambiguous or uncertain data typical of disinformation.

- **Decision Tree:** The decision tree model exhibits the lowest performance among all models, reflecting its tendency to overfit and struggle with generalizing in complex text classification tasks like disinformation detection.

- **Naive Bayes:** The Naive Bayes model shows consistent performance but generally underperforms due to its simplistic assumptions about feature independence, which often does not hold in real-world disinformation scenarios.

Conclusion

This research has demonstrated the effectiveness of integrating Natural Language Processing (NLP) techniques with fuzzy logic for detecting disinformation in textual data. By combining traditional methods like TF-IDF and n-gram analysis with fuzzy logic rules using Gaussian membership functions, in order to cross-reference for false-positives, our approach addresses the limitations of binary classification systems, particularly in handling the nuances and uncertainties inherent in language.

The results of our study indicate that the fuzzy logic-based model significantly improves disinformation detection accuracy, achieving higher precision and recall compared to traditional machine learning models such as support vector machines, neural networks, and hybrid rule-based systems. The model's ability to incorporate degrees of uncertainty provides a more robust framework for distinguishing between disinformation and legitimate content, thus reducing false positives that are common in conventional approaches.

Furthermore, the fuzzy logic framework allows for a probabilistic assessment of disinformation, which better aligns with the complex and often ambiguous nature of human communication. This capability is particularly valuable in applications where the stakes of misclassification are high, such as in public health, political communication, and social media platforms.

Our research underscores the potential of fuzzy logic to enhance NLP techniques by providing a more granular, flexible, and context-aware analysis of textual data. Future work could explore the automation of fuzzy rule generation using machine learning, the expansion of the lexicon to include more nuanced expressions, and the integration of contextual information to further refine the detection process.

Overall, the integration of fuzzy logic with advanced NLP techniques represents a promising direction for improving the reliability and accuracy of disinformation detection, paving the way for more sophisticated and adaptable systems capable of navigating the complexities of digital information landscapes.

References

[1] Practical Natural Language Processing / S. Vajjala et al. O'Reilly Media, Inc., 2020.(https://www.oreilly.com/library/view/practical-natural-language/9781492054047/)

[2] Bressert E. SciPy and Numpy. O'Reilly, 2012. (https://www.oreilly.com/library/view/scipy-and-numpy/9781449361600/)

[3] Robertson S. E. Understanding Inverse Document Frequency: On Theoretical Arguments for IDF. Journal of Documentation. 2004. Vol. 60, no. 5. P. 503–507.

[4] Interpreting TF-IDF term weights as making relevance decisions / H. C. Wu et al. ACM Transactions on Information Systems. 2008. Vol. 26, no. 3.

[5] Cavnar W., Trenkle J. M. N-Gram-Based Text Categorization. Environmental Research Institute of Michigan. 2001.

[6] B. Cardone, F. Di Martino, and S. Senatore, "Improving the emotion-based classification by exploiting the fuzzy entropy in FCM clustering," International Journal of Intelligent Systems, 2021, 36(11).

[7] O. Iparraguirre-Villanueva, V. Guevara-Ponce, F. Sierra-Lican, S. Beltozar-Clemente, and M. Cabanillas-Carbonell, "Sentiment Analysis of Tweets using Unsupervised Learning Techniques and the KMeans Algorithm," International Journal of Advanced Computer Science and Applications, 2022, 13(6), 571-578.

[8] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," Information and control, vol. 8 (1965), pp. 338-353.

[9] Chakraborty, K., Bhattacharyya, S., Bag, R. (2022). A Three-Step Fuzzy-Based BERT Model for Sentiment Analysis. In: Bhattacharyya, S., Das, G., De, S. (eds) Intelligence Enabled Research. Studies in Computational Intelligence, vol 1029. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-0489-9_4

[10] Aytug Onan, Hesham A. Alhumyani,FuzzyTP-BERT: Enhancing extractive text summarization with fuzzy topic modeling and transformer networks,Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences, Volume 36, Issue 6,2024,102080,ISSN 1319-1578, https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2024.102080. (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1319157824001691)

[11] Ch. Sun (2024). Combining Fuzzy Logic and Transformers for Improved Text Classification under Uncertainty. Vol. 5 (2024): 2nd International Conference on Artificial Intelligence, Database and Machine Learning (AIDML 2024).

[12] R. Seth and A. Sharaff, "Sentiment-Aware Detection Method of Fake News Based on Linguistic Fuzzy Bi-LSTM," 2023 OITS International Conference on Information Technology (OCIT), Raipur, India, 2023, pp. 628-633, doi: 10.1109/OCIT59427.2023.10430669.

[13] https://github.com/diptamath/covid_fake_news

Received 04.08.2024

Мельник Г.В., Мельник В.С., Вікован В.К. *Застосування обробки природної мови та нечіткої логіки для виявлення дезінформації.* // Буковинський матем. журнал. — 2024. — Т.12, №1. — С. 21–31.

В умовах сучасного інформаційного середовища проблема автоматичного виявлення дезінформації є актуальним завданням, що потребує новітніх підходів для аналізу текстових даних. У даній статті представлено модель, яка поєднує методи обробки природної мови (NLP) — такі як TF-IDF та n-грамний аналіз — із застосуванням нечіткої логіки для більш точної ідентифікації дезінформаційних текстів. Використання TF-IDF (термін-частота, обернена частота документа) дозволяє кількісно оцінити важливість термінів у контексті документу, а n-грамний аналіз забезпечує виявлення лексичних патернів, що часто супроводжують дезінформацію.

Проте класичні NLP підходи, включаючи TF-IDF та n-грамні моделі, демонструють обмеження у вигляді високої частоти хибнопозитивних класифікацій. Для усунення цієї проблеми, запропоновано інтеграцію правил нечіткої логіки, що моделюють невизначеність та градації істинності. Конкретно, нечітка логіка дозволяє врахувати множинні фактори, включаючи надійність джерела, лексичні показники змісту та емоційний тон тексту, використовуючи функції належності для кожного фактору. Вихідна оцін- ка ймовірності дезінформації обчислюється через композицію функцій належності та нечітких правил типу «Якщо... то...», що дозволяє отримати нечітке рішення, яке відображає ступінь відповідності тексту критеріям дезінформації.

Експериментальні результати свідчать про те, що запропонований підхід із застосуванням нечіткої логіки забезпечує зниження кількості хибнопозитивних спрацьовувань та підвищення загальної точності у порівнянні з базовими моделями, такими як метод опорних векторів (SVM) та гібридні системи на основі правил. Компаративний аналіз показав переваги моделі нечіткої логіки в умовах неповної або суперечливої інформації, що характерно для завдань виявлення дезінформації. Запропонована модель відкриває нові можливості для розвитку інструментів аналізу тексту, що можуть адаптивно реагувати на різні рівні невизначеності в лінгвістичному контенті.

Sheremeta M.M., Trukhan Yu.S.

ON THE GROWTH OF THE MAXIMUM MODULUS OF DIRICHLET SERIES

For an entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \exp\{s\lambda_n\}$ with $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$, a connection between the growth of the maximum modulus $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and the decrease of the coefficients is studied. For example, it is proved that if $\varliminf\limits_{k\to\infty} \alpha(\lambda_k)/\beta\left(\frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|f_k|}\right) = = Q > 0$, where α, β are positive continuous functions on $[x_0, +\infty)$ increasing to $+\infty$, then $\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty} \left(\exp\{\alpha(\ln M(\beta^{-1}(\beta(\sigma) + \ln q), F))\} - p \exp\{\alpha(\ln M(\sigma, F))\}\right) = +\infty$ for any $q > 1$ and $p > 1$ such that $\ln p/\ln q < Q$. Similar results are obtained for Dirichlet series with zero abscissa of absolute convergence .

Key words and phrases: Dirichlet series, maximum modulus, generalized order.

Ivan Franko National University of Lviv, str. Universytetska, 1, Lviv, 79000, Ukraine
e-mail: *m.m.sheremeta@gmail.com (Sheremeta M.M),*
yurkotrukhan@gmail.com (Trukhan Yu.S.)

Introduction

For an entire transcendental function $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ let $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. It is known [5] that $M_f(ar)/M_f(r) \nearrow +\infty$ as $r \to +\infty$ for every $a > 1$. S. Singh [9] gave a more simple (on his opinion) proof of this fact, using the relation between $M_f(r)$ and the maximal term of the power expansion of f. A much simpler proof is given in [6] for entire functions given by both power series and Dirichlet series.

Let's remark that Dirichlet series

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

with non-negative increasing to $+\infty$ exponents λ_n are direct generalization of power series.

We suppose that series (1) has the abscissa of absolute convergence $\sigma_a \in (-\infty, +\infty]$, and for $\sigma < \sigma_a$ we put $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$. If $\sigma_a = +\infty$ and series (1) is not reduced to an exponential polynomial then [6] $M(\sigma + h, F)/M(\sigma, F) \nearrow +\infty$ as $\sigma \to +\infty$ for every $h > 0$.

УДК 517.537.72
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.
Information on some grant ...

© Sheremeta M.M., Trukhan Yu.S., 2024

By L we denote a class of continuous non-negative on $(-\infty, +\infty)$ functions α such that $\alpha(x) = \alpha(x_0) \geq 0$ for $x \leq x_0$ and $\alpha(x) \uparrow +\infty$ as $x_0 \leq x \to +\infty$. We say that $\alpha \in L^0$, if $\alpha \in L$ and $\alpha((1 + o(1))x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ as $x \to +\infty$. Finally, $\alpha \in L_{si}$, if $\alpha \in L$ and $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ as $x \to +\infty$ for each $c \in (0, +\infty)$, i. e. α is a slowly increasing function. Clearly, $L_{si} \subset L^0$. We remak that for every $\alpha \in L_{si}$ there exists $\alpha_1 \in L$ such that $\alpha_1(x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ and $\dfrac{x\alpha_1'(x)}{\alpha_1(x)} \to 0$ as $x \to +\infty$. Therefore, in the future we will assume that the function $\alpha \in L_{si}$ satisfies the condition $\dfrac{x\alpha'(x)}{\alpha(x)} \to 0$ as $x \to +\infty$.

In [6] the following theorems are proved.

Theorem A. *Let $\sigma_a = +\infty$, $\gamma \in L$, $p > 1$. If $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\ln\gamma(\lambda_n)}{\ln\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|f_n|}\right)} = \eta^* > 0$ then*

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\gamma(\ln M(q\sigma, F))}{\gamma^p(\ln M(\sigma, F))} = +\infty \tag{2}$$

for each $q > p^{1/\eta^*}$.

If the function γ is continuously differentiable, $\ln\gamma(e^x) \in L_{si}$, $\ln\ln\gamma(\lambda_{n+1}) = (1 + o(1))\ln\ln\gamma(\lambda_n)$, $\ln n = O(\lambda_n)$ as $n \to \infty$, $\kappa_n[F] := \dfrac{\ln|f_n| - \ln|f_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ as $n_0 \leq n \to \infty$ and $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\ln\gamma(\lambda_n)}{\ln\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|f_n|}\right)} = \eta_* < +\infty$, then

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\gamma(\ln M(q\sigma, F))}{\gamma^p(\ln M(\sigma, F))} = 0 \tag{3}$$

for each $q < p^{1/\eta_*}$.

Theorem B. *Let $\sigma_a = 0$, $p > 1$, $\gamma(e^x) \in L^0$ and $\ln\ln\gamma(x) = o(\ln x)$ as $\to +\infty$. If $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\ln\gamma(\lambda_n)}{\ln(\lambda_n/\ln^+|f_n|)} = \eta^* > 0$ then*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow0}} \frac{\gamma(\ln M(\sigma/q, F))}{\gamma^p(\ln M(\sigma, F))} = +\infty$$

for each $q > p^{1/\eta^*}$.

If the function γ is continuously differentiable, $\ln\gamma(x) \in L_{si}$, $\kappa_n[F] \nearrow 0$ and $\ln\ln\gamma(\lambda_{n+1}) = (1 + o(1))\ln\ln\gamma(\lambda_n)$ as $n_0 \leq n \to \infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n} < 1$ and $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\ln\gamma(\lambda_n)}{\ln(\lambda_n/\ln^+|f_n|)} = \eta_* < +\infty$ then

$$\underline{\lim_{\sigma\uparrow0}} \frac{\gamma(\ln M(\sigma/q, F))}{\gamma^p(\ln M(\sigma, F))} = 0$$

for each $q < p^{1/\eta_*}$.

For the proof of these theorems in [6] the following theorem was used.

Theorem C. *Let $q > 1$, $p > 1$, $\gamma \in L$ and Φ be a positive function continuous on $(x_0, +\infty)$ and increasing to $+\infty$. If $\overline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}} \dfrac{\gamma(\Phi(q\sigma))}{\gamma^p(\Phi(\sigma))} \leq \xi_1 < +\infty$ then $\overline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}} \dfrac{\ln\ln\gamma(\Phi(\sigma))}{\ln\sigma} \leq \dfrac{\ln p}{\ln q}$ and if $\underline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}} \dfrac{\gamma(\Phi(q\sigma))}{\gamma^p(\Phi(\sigma))} \geq \xi_2 > 0$ then $\underline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}} \dfrac{\ln\ln\gamma(\Phi(\sigma))}{\ln\sigma} \geq \dfrac{\ln p}{\ln q}$.*

Using the generalized growth scale, here we will continue the studies started in [6].

1 Entire Dirichlet series

If $\alpha \in L$, $\beta \in L$ and F is an entire function then the quantities

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] := \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(\sigma)}, \quad \lambda_{\alpha,\beta}[F] := \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(\sigma)}$$

are called [7], [8] the generalized (α,β)-order and the generalized lower (α,β)-order of F respectively. We put

$$Q_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|f_k|}\right)}, \quad q_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|f_k|}\right)}.$$

Then the following lemma is true [7], [8].

Lemma 1. *Let $\alpha \in L_{si}$, $\beta \in L^0$ and $\frac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ as $x \to +\infty$ for each $c \in (0,+\infty)$. If $\ln k = o(\lambda_k\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k)))$ as $k \to \infty$ for each $c \in (0,+\infty)$ then $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = Q_{\alpha,\beta}[F]$. If, moreover, $\alpha(\lambda_{k+1}) \sim \alpha(\lambda_k)$ and $\kappa_k[F] \nearrow +\infty$ as $k_0 \le k \to \infty$ then $\lambda_{\alpha,\beta}[F] = q_{\alpha,\beta}[F]$.*

If we choose $\alpha(x) = \ln\ln\gamma(x)$ and $\beta(x) = \ln^+ x$ then $\eta^* = Q_{\alpha,\beta}[F]$, $\eta_* = q_{\alpha,\beta}[F]$ and equalities (2) and (3) can be written, respectively, in the form

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} (\exp\{\alpha(\ln M(q\sigma,F))\} - p\exp\{\alpha(\ln M(\sigma,F))\}) = +\infty \tag{4}$$

and

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} (\exp\{\alpha(\ln M(q\sigma,F))\} - p\exp\{\alpha(\ln M(\sigma,F))\}) = -\infty. \tag{5}$$

We remark also that Theorem C implies the following statement.

Lemma 2. *Let $q > 1$, $p > 1$, $\alpha \in L$ and Φ be a positive function continuous on $(x_0,+\infty)$ and increasing to $+\infty$. If*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\Phi(\sigma))}{\ln\sigma} > \frac{\ln p}{\ln q}$$

then

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} (\exp\{\alpha(\Phi(q\sigma))\} - p\exp\{\alpha(\Phi(\sigma))\}) = +\infty,$$

and if

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\Phi(\sigma))}{\ln\sigma} < \frac{\ln p}{\ln q}$$

then

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} (\exp\{\alpha(\Phi(q\sigma))\} - p\exp\{\alpha(\Phi(\sigma))\}) = -\infty.$$

Using Lemmas 1 and 2 we prove the following theorem.

Theorem 1. *Let $\sigma_a = +\infty$, $\alpha \in L$ and $\beta \in L^0$. If $Q_{\alpha,\beta}[F] > 0$ then*

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \left(\exp\{\alpha(\ln M(\beta^{-1}(\beta(\sigma)+\ln q),F))\} - p\exp\{\alpha(\ln M(\sigma,F))\}\right) = +\infty. \tag{6}$$

for each $p > 1$ and $q > 1$ such that $Q_{\alpha,\beta}[F] > \ln p/\ln q$.

If $\alpha \in L_{si}$, $\beta \in L^0$ and $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ as $x \to +\infty$, $\ln k = o(\lambda_k\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k)))$ as $k \to \infty$ for each $c \in (0,+\infty)$, $\alpha(\lambda_{k+1}) \sim \alpha(\lambda_k)$, $\kappa_k[F] \nearrow +\infty$ as $k_0 \le k \to \infty$ and $q_{\alpha,\beta}[F] < +\infty$ then

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \left(\exp\{\alpha(\ln M(\beta^{-1}(\beta(\sigma)+\ln q),F))\} - p\exp\{\alpha(\ln M(\sigma,F))\}\right) = -\infty \tag{7}$$

for each $p > 1$ and $q > 1$ such that $q_{\alpha,\beta}[F] < \ln p/\ln q$.

Proof. If we put $\Phi(\sigma) = \Phi_1(\beta^{-1}(\ln\sigma))$ then

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} (\exp\{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(\beta(\sigma)+\ln q)))\} - p\exp\{\alpha(\Phi_1(\sigma))\}) = \\
&= \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} (\exp\{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(\ln(qe^{\beta(\sigma)}))))\} - p\exp\{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(\ln(e^{\beta(\sigma)}))))\}) = \\
&= \overline{\lim_{x\to+\infty}} (\exp\{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(\ln(qx))))\} - p\exp\{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(\ln x)))\}) = \\
&= \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} (\exp\{\alpha(\Phi(q\sigma))\} - p\exp\{\alpha(\Phi(\sigma))\}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} (\exp\{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(\beta(\sigma)+\ln q)))\} - p\exp\{\alpha(\Phi_1(\sigma))\}) = \\
&= \underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} (\exp\{\alpha(\Phi(q\sigma))\} - p\exp\{\alpha(\Phi(\sigma))\}),
\end{aligned}$$

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\Phi(\sigma))}{\ln\sigma} = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(\ln\sigma)))}{\ln\sigma} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(x)))}{x} = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\Phi_1(\sigma))}{\beta(\sigma)}$$

and

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\Phi(\sigma))}{\ln\sigma} = \underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\Phi_1(\sigma))}{\beta(\sigma)}.$$

Therefore, in view of Lemma 2 if Φ_1 is a positive function continuous on $(x_0,+\infty)$ and increasing to $+\infty$ and

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\Phi_1(\sigma))}{\beta(\sigma)} > \frac{\ln p}{\ln q}$$

then

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} (\exp\{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(\beta(\sigma)+\ln q)))\} - p\exp\{\alpha(\Phi_1(\sigma))\}) = +\infty,$$

and if

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\Phi_1(\sigma))}{\beta(\sigma)} < \frac{\ln p}{\ln q}$$

then

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} (\exp\{\alpha(\Phi_1(\beta^{-1}(\beta(\sigma)+\ln q)))\} - p\exp\{\alpha(\Phi_1(\sigma))\}) = -\infty$$

Finally, we choose $\Phi_1(\sigma) = \ln M(\sigma, F)$. Then from hence it follows that if

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)} > \frac{\ln p}{\ln q}, \tag{8}$$

then (6) holds and if

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)} < \frac{\ln p}{\ln q} \tag{9}$$

then (7) holds.

If $Q_{\alpha,\beta}[F] > 0$ then for every $Q \in (0, Q_{\alpha,\beta}[F])$ there exists an increasing to ∞ sequence (k_n) such that $\ln |f_{k_n}| \geq -\lambda_{k_n}\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{k_n})/Q)$ for all n. We choose $\sigma_n = \beta^{-1}(\alpha(\lambda_{k_n})/Q) + 1$. Then by the Cauchy inequality

$$\ln M(\sigma_n, F) \geq \ln |f_{k_n}| + \sigma_n\lambda_{k_n} \geq -\lambda_{k_n}\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{k_n})/Q) + \lambda_{k_n}(\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{k_n})/Q) + 1) =$$

$$= \lambda_{k_n} = \alpha^{-1}(Q\beta(\sigma_n - 1)),$$

whence in view of the condition $\beta \in L^0$ and of the arbitrariness of Q we get

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)} \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma_n, F))}{\beta(\sigma_n)} \geq Q_{\alpha,\beta}[F].$$

Therefore, if $Q_{\alpha,\beta}[F] > \ln p/\ln q$ then (8) and, thus, (6) hold. The first part of Theorem 1 is proved.

If $q_{\alpha,\beta}[F] < +\infty$ then by Lemma 1

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)} = \lambda_{\alpha,\beta}[F] = q_{\alpha,\beta}[F].$$

Therefore, if $q_{\alpha,\beta}[F] < \ln p/\ln q$ then (9) and, thus, (7) hold. The proof of Theorem 1 is complete. □

We remark that if $\beta(x) = \ln^+ x$ then (6) and (7) imply (4) and (5).

If we choose $\alpha(x) = \ln^+ x$ and $\beta(x) = x^+$ then we get the following result in the R-order scale.

Corollary 1. *Let $\sigma_a = +\infty$. If $Q_R[F] := \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k|} > 0$ then*

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} (\ln M(\sigma + \ln q, F) - p \ln M(\sigma, F)) = +\infty$$

for each $p > 1$ and $q > 1$ such that $Q_R[F] > \ln p/\ln q$.

If $\ln k = o(\lambda_k \ln \lambda_k)$, $\ln \lambda_{k+1} \sim \ln \lambda_k$, $\kappa_k[F] \nearrow +\infty$ as $k_0 \leq k \to \infty$ and $q_R[F] := \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k|} < +\infty$ then

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} (\ln M(\sigma + \ln q, F) - p \ln M(\sigma, F)) = -\infty$$

for each $p > 1$ and $q > 1$ such that $q_R[F] < \ln p/\ln q$.

2 Dirichlet series absolutely convergent in a half-plane

If $\sigma_a[F]=0$, $\alpha\in L$ and $\beta\in L$ then the quantities

$$\varrho^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]:=\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}\frac{\alpha(\ln\,M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)},\quad \lambda^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]:=\underline{\lim}_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha(\ln\,M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)}$$

are called [3], [4] the generalized (α,β)-order and the generalized lower (α,β)-order of F accordingly. We put

$$Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta(\lambda_k/\ln^+|f_k|)},\quad q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]=\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta(\lambda_k/\ln^+|f_k|)}.$$

The following lemma is correct [3], [4].

Lemma 3. *Let $\alpha\in L_{si}$, $\beta\in L_{si}$ and*

$$\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\uparrow+\infty,\quad \alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right)=(1+o(1))\alpha(x) \tag{10}$$

as $x_0(c)\le x\to+\infty$ for each $c\in(0,+\infty)$. Suppose that $\sigma_a[F]=0$ and $\ln k=o\,(\lambda_k/\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k)))$ as $k\to\infty$ for each $c\in(0,+\infty)$. Then $\varrho^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]=Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]$. If, moreover, $\alpha(\lambda_{k+1})\sim\alpha(\lambda_k)$ and $\kappa_k[F]\nearrow 0$ as $k_0\le k\to\infty$ then $\lambda^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]=q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]$.

Using Lemmas 2 and 3 we prove the following theorem.

Theorem 2. *Let $\sigma_a=0$, $\beta\in L_{si}$, $\alpha(e^x)\in L_{si}$ and $\alpha(x)=o(\beta(x))$ as $x\to+\infty$. If $Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]>0$ then*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}\left(\exp\left\{\alpha\left(\ln\,M\left(-\frac{1}{\beta^{-1}(\beta(1/|\sigma|)+\ln\,q)},F\right)\right)\right\}-p\exp\{\alpha(\ln\,M(\sigma,F))\}\right)=+\infty. \tag{11}$$

for each $p>1$ and $q>1$ such that $Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]>\ln p/\ln q$.

If the functions $\alpha\in L_{si}$ and $\beta\in L_{si}$ satisfy conditions (10), *$\ln k=o\,(\lambda_k/\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k)))$ as $k\to\infty$ for each $c\in(0,+\infty)$, $\alpha(\lambda_{k+1})\sim\alpha(\lambda_k)$, $\kappa_k[F]\nearrow 0$ as $k_0\le k\to\infty$ and $q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]<+\infty$ then*

$$\underline{\lim}_{\sigma\uparrow 0}\left(\exp\left\{\alpha\left(\ln\,M\left(-\frac{1}{\beta^{-1}(\beta(1/|\sigma|)+\ln\,q)},F\right)\right)\right\}-p\exp\{\alpha(\ln\,M(\sigma,F))\}\right)=-\infty \tag{12}$$

for each $p>1$ and $q>1$ such that $q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]<\ln p/\ln q$.

Proof. If we put $\Phi(x)=\Phi_1\left(-1/\beta^{-1}(\ln\,x)\right)$ then

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}\left(\exp\left\{\alpha\left(\Phi_1\left(-\frac{1}{\beta^{-1}(\beta(1/|\sigma|)+\ln\,q)}\right)\right)\right\}-p\exp\{\alpha(\Phi_1(\sigma))\}\right)=$$

$$=\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}\left(\exp\left\{\alpha\left(\Phi_1\left(\frac{-1}{\beta^{-1}(\ln\,(qe^{\beta(1/|\sigma|)}))}\right)\right)\right\}-p\exp\left\{\alpha\left(\Phi_1\left(\frac{-1}{\beta^{-1}(\ln\,e^{\beta(1/|\sigma|)})}\right)\right)\right\}\right)=$$

$$=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(\exp\left\{\alpha\left(\Phi_1\left(-\frac{1}{\beta^{-1}(\ln\,(qx))}\right)\right)\right\}-p\exp\left\{\alpha\left(\Phi_1\left(-\frac{1}{\beta^{-1}(\ln\,x)}\right)\right)\right\}\right)=$$

$$=\overline{\lim_{x\to+\infty}}(\exp\{\alpha(\Phi(qx))\}-p\exp\{\alpha(\Phi(x))\}),$$

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\left(\exp\left\{\alpha\left(\Phi_1\left(-\frac{1}{\beta^{-1}(\beta(1/|\sigma|)+\ln\, q)}\right)\right)\right\}-p\exp\{\alpha(\Phi_1(\sigma))\}\right)=$$
$$=\varliminf_{x\to+\infty}\left(\exp\{\alpha(\Phi(qx))\}-p\exp\{\alpha(\Phi(x))\}\right),$$

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\Phi(x))}{\ln\, x}=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\Phi_1\left(-1/\beta^{-1}(\ln\, x)\right))}{\ln\, x}=\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha(\Phi_1(\sigma))}{\beta(1/|\sigma|)}$$

and

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\Phi(x))}{\ln\, x}=\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha(\Phi_1(\sigma))}{\beta(1/|\sigma|)}$$

Therefore, in view of Lemma 2 if Φ_1 is a positive function continuous on $(x_0, 0)$ and increasing to $+\infty$ and

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha(\Phi_1(\sigma))}{\beta(1/|\sigma|)}>\frac{\ln\, p}{\ln\, q}$$

then

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\left(\exp\left\{\alpha\left(\Phi_1\left(-\frac{1}{\beta^{-1}(\beta(1/|\sigma|)+\ln\, q)}\right)\right)\right\}-p\exp\{\alpha(\Phi_1(\sigma))\}\right)=+\infty$$

and if

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha(\Phi_1(\sigma))}{\beta(1/|\sigma|)}<\frac{\ln\, p}{\ln\, q}$$

then

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\left(\exp\left\{\alpha\left(\Phi_1\left(-\frac{1}{\beta^{-1}(\beta(1/|\sigma|)+\ln\, q)}\right)\right)\right\}-p\exp\{\alpha(\Phi_1(\sigma))\}\right)=-\infty$$

Finally, we choose $\Phi_1(\sigma)=\ln\, M(\sigma, F)$. Then from hence it follows that if

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha(\ln\, M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)}>\frac{\ln\, p}{\ln\, q}\tag{13}$$

then (11) holds, and if

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha(\ln\, M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)}<\frac{\ln\, p}{\ln\, q}\tag{14}$$

then (12) holds.

If $Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]>0$ then for every $Q\in(0,\, Q_{\alpha,\beta}[F])$ there exists an increasing to ∞ sequence (k_n) such that $\ln^+|f_{k_n}|\geq\dfrac{\lambda_{k_n}}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{k_n})/Q)}$ for all n. We choose $\sigma_n=-\dfrac{1}{2\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{k_n})/Q)}$. Then by the Cauchy inequality

$$\ln\, M(\sigma_n,F)\geq\ln\,|f_{k_n}|+\sigma_n\lambda_{k_n}\geq\lambda_{k_n}\left(\frac{1}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{k_n})/Q)}-\frac{1}{2\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{k_n})/Q)}\right)=$$
$$=\frac{\lambda_{k_n}}{2\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{k_n})/Q)}=\lambda_{k_n}|\sigma_n|=|\sigma_n|\alpha^{-1}\left(Q\beta\left(\frac{1}{2|\sigma_n|}\right)\right),$$

whence in view of the conditions $\beta \in L_{si}$, $\alpha(e^x) \in L_{si}$ and $\alpha(x) = o(\beta(x))$ as $x \to +\infty$ we get

$$\begin{gathered} Q(1+o(1))\beta(1/|\sigma_n|) \le \alpha\left(\ln M(\sigma_n,F)/|\sigma_n|\right) = \alpha\left(\exp\left\{\ln\ln M(\sigma_n,F) + \ln\left(1/|\sigma_n|\right)\right\}\right) \le \\ \le \alpha\left(\exp\left\{2\max\left\{\ln\ln M(\sigma_n,F), \ln\left(1/|\sigma_n|\right)\right\}\right\}\right) = \\ = (1+o(1))\alpha\left(\exp\left\{\max\left\{\ln\ln M(\sigma_n,F), \ln\left(1/|\sigma_n|\right)\right\}\right\}\right) = \\ = (1+o(1))\max\left\{\alpha(\ln M(\sigma_n,F)), \alpha\left(1/|\sigma_n|\right)\right\} \le \\ \le (1+o(1))\left(\alpha(\ln M(\sigma_n,F)) + \alpha\left((1/|\sigma_n|)\right)\right) = \\ = (1+o(1))\alpha(\ln M(\sigma_n,F)) + o\left(\beta\left((1/|\sigma_n|)\right)\right), \quad \sigma \uparrow 0. \end{gathered}$$

Therefore, in view of the arbitrariness of Q we have

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)} \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma_n,F))}{\beta(1/|\sigma_n|)} \ge Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F], \tag{15}$$

and if $Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F] > \ln p/\ln q$ then (13) and, thus, (11) hold. The first part of Theorem 2 is proved.

If $q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F] < +\infty$ then by Lemma 3

$$\underline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)} = \lambda^{(0)}_{\alpha,\beta}[F] = q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F].$$

Therefore, if $q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F] < \ln p/\ln q$ then (14) and, thus, (12) hold. The proof of Theorem 2 is complete. □

From conditions of Theorem 2 it follows that the function α grows more slowly than the function β. In the case if the function β grows more slowly than the function α, the following theorem is true.

Theorem 3. *Let $\sigma_a = 0$, $\beta \in L$ and $\alpha \in L^0$. If $P^{(0)}_{\alpha,\beta}[F] := \overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{\alpha(\ln|f_n|)}{\beta(\lambda_n)} > 0$ then (11) holds for each $p > 1$ and $q > 1$ such that $P^{(0)}_{\alpha,\beta}[F] > \ln p/\ln q$.*

If the functions $\alpha \in L_{si}$ and $\beta \in L_{si}$ satisfy conditions

$$\frac{x}{\alpha^{-1}(c\beta(x))} \uparrow +\infty, \quad \alpha\left(\frac{x}{\gamma^{-1}(c\beta(x))}\right) = (1+o(1))\beta(x), \quad x \to +\infty. \tag{16}$$

for each $c \in (0,+\infty)$, $\gamma(\ln n) = o(\beta(\lambda_n))$, $\beta(\lambda_{n+1}) \sim \beta(\lambda_n)$ and $\kappa_n[F] \nearrow 0$ as $n_0 \le n \to \infty$ and $p^{(0)}_{\alpha,\beta}[F] := \underline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{\alpha(\ln|f_n|)}{\beta(\lambda_n)} < +\infty$ then (12) holds for each $p > 1$ and $q > 1$ such that $p^{(0)}_{\alpha,\beta}[F] < \ln p/\ln q$.

Proof. If $P^{(0)}_{\alpha,\beta}[F] > 0$ then for every $P \in (0,\, P_{\alpha,\beta}[F])$ there exists an increasing to ∞ sequence (k_n) such that $\ln|f_{k_n}| \ge \alpha^{-1}(P\beta(\lambda_{k_n}))$ for all n. We choose $\sigma_n = -1/\lambda_{k_n}$. Then by the Cauchy inequality

$$\ln M(\sigma_n,F) \ge \alpha^{-1}(P\beta(\lambda_{k_n})) + \sigma_n\lambda_{k_n} = \alpha^{-1}(P\beta(\lambda_{k_n})) - 1 = \alpha^{-1}(P\beta(1/|\sigma_n|)) - 1,$$

whence we obtain (15) with $P^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]$ instead $Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]$, and thus, the first part of Theorem 3 is proved.

If the functions $\alpha \in L_{si}$ and $\beta \in L_{si}$ satisfy conditions (16), $\gamma(\ln n) = o(\beta(\lambda_n))$, $\beta(\lambda_{n+1}) \sim \beta(\lambda_n)$ and $\kappa_n[F] \nearrow 0$ as $n_0 \le n \to \infty$ then [4] $\varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} \dfrac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(1/|\sigma|)} = p^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]$ and as above we get the correctness of the second part of Theorem 3. □

As a conclusion, we present two statements corresponding to scales of finite order and finite R-order.

Proposition 1. *Let $\sigma_a = 0$. If $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^+ \ln |f_n|}{\ln \lambda_n} = \tau \in (0,\, 1)$ then*

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0} (\ln M(\sigma/q, F) - p \ln M(\sigma, F)) = +\infty.$$

for each $p > 1$ and $q > 1$ such that $\tau/(1-\tau) > \ln p/\ln q$.

If $\ln \ln n = o(\ln \lambda_n)$, $\ln \lambda_{n+1} \sim \ln \lambda_n$, $\kappa_n[F] \nearrow 0$ as $n_0 \le n \to \infty$ and $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^+ \ln |f_n|}{\ln \lambda_n} = \eta < 1$ then

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0} (\ln M(\sigma/q, F) - p \ln M(\sigma, F)) = -\infty.$$

for each $p > 1$ and $q > 1$ such that $\eta/(1-\eta) < \ln p/\ln q$.

Proof. If $\tau > 0$ then for every $\tau^0 \in (0,\, \tau)$ there exists an increasing to ∞ sequence (k_n) such that $\ln |f_{k_n}| \ge \lambda^{\tau^0}_{k_n}$ for all n. We choose $\sigma_n = -(1/2)\lambda^{\tau^0-1}_{k_n}$. Then by the Cauchy inequality

$$\ln M(\sigma_n, F) \ge \lambda^{\tau^0}_{k_n} - \frac{1}{2}\lambda^{\tau^0}_{k_n} = \frac{1}{2}\lambda^{\tau^0}_{k_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2|\sigma|}\right)^{\tau^0/(1-\tau^0)},$$

i. e. in view the arbitrariness of τ^0 we have

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\ln(1/|\sigma|)} \ge \frac{\tau^0}{1-\tau^0} > 0$$

whence we obtain (15) with $\alpha(x) = \beta(x) = \ln^+ x$ and $\tau^0/(1-\tau^0)$ instead $Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]$, and thus, the first part of Proposition 1 is proved.

To prove the second part, it is enough to note that if $\ln \ln n = o(\ln \lambda_n)$, $\ln \lambda_{n+1} \sim \ln \lambda_n$, $\kappa_n[F] \nearrow 0$ as $n_0 \le n \to \infty$ and $\eta < 1$ then [1] $\varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} \dfrac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\ln(1/|\sigma|)} \ge \dfrac{\eta}{1-\eta} < +\infty$. □

Proposition 2. *Let $\sigma_a = 0$. If $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} \ln^+ |f_k| = Q_R > 0$ then*

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0} (\ln M(\sigma + \ln q, F) - p \ln M(\sigma, F)) = +\infty.$$

for each $p > 1$ and $q > 1$ such that $Q_R > \ln p/\ln q$.

If $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{\ln\ln k}{\ln\lambda_k} < 1$, $\ln\lambda_{k+1} \sim \ln\lambda_k$, $\kappa_k[F] \nearrow 0$ *as* $k_0 \le k \to \infty$ *and* $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{\ln\lambda_k}{\lambda_k} \ln^+|f_k| = q_R < +\infty$ *then*

$$\underline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} (\ln M(\sigma + \ln q, F) - p \ln M(\sigma, F)) = -\infty.$$

for each $p > 1$ *and* $q > 1$ *such that* $q_R < \ln p/\ln q$.

Proof. If $Q_R > 0$ then for every $Q \in (0, Q_R)$ there exists an increasing to ∞ sequence (k_n) such that $\ln|f_{k_n}| \ge Q\lambda_{k_n}/\ln\lambda_{k_n}$ for all n. We choose $\sigma_n = -\xi/\ln\lambda_{k_n}$, where $0 < \xi < Q$. Then by the Cauchy inequality

$$\ln M(\sigma_n, F) \ge \lambda_{k_n}\left(\frac{Q}{\ln\lambda_{k_n}} + \sigma\right) = \frac{(Q-\xi)\lambda_{k_n}}{\ln\lambda_{k_n}} = \frac{Q-\xi}{\xi}|\sigma| \exp\left\{\frac{\xi}{|\sigma|}\right\}$$

i. e. in view the arbitrariness of Q and ξ we have

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F) \ge Q_R > 0$$

whence we obtain (15) with $\alpha(x) = \ln^+ x$, $\beta(x) = x^+$ and Q_R instead $Q^{(0)}_{\alpha,\beta}[F]$, and thus, the first part of Proposition 2 is proved.

To prove the second part, it is enough to note that if $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \dfrac{\ln\ln k}{\ln\lambda_k} < 1$, $\ln\lambda_{k+1} \sim \ln\lambda_k$ and $\kappa_k[F] \nearrow 0$ as $k_0 \le k \to \infty$ then [2] $\underline{\lim\limits_{\sigma\uparrow 0}} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F) = q_R < +\infty$. □

References

[1] Boychuk V.S. *On the growth of Dirichlet series absolutely convergent in a half-plane.* Matem. sbornik. Naukova dumka, Kyiv, 1976, 238-240. (in Russian)

[2] Gaisin A. M. *A bound for the growth in a half-strip of a function represented by a Dirichlet series.* Math. sbornik. 1982, **117**(159):(3), 412-424. (in Russian)

[3] Gal' Yu.M., Sheremeta M.M. *On the growth of analytic fuctions in a half-plane given by Dirichlet series.* Doklady AN USSR, Ser. A. 1978, no. 12, 1064-1067. (in Russian)

[4] Gal' Yu.M. *On the growth of analytic functions given by Dirichlet series absolute convergent in a half-plane.* Drohobych, 1980. Dep. in VINITI, no. 4080-80 Dep. (in Russian)

[5] Goodstein R.L. Complex functions. New York, 1965.

[6] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *A remark to the growth of positive functions and its application to Dirichlet series.* Mat. Stud. 2015, **44**(2), 161-170. doi:10.15330/ms.44.2.161-170

[7] Pyanylo Ya.D., Sheremeta M.M. *On the growth of entire fuctions given by Dirichlet series.* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1975, no. 10, 91-93. (in Russian)

[8] Sheremeta M.M. Entire Dirichlet series. ISDO, Kyiv, 1993. (in Ukrainian)

[9] Singh S.K. *On the maximum modulus and the means of an entire function.* Matem. Vesnik. 1976, **13**(28), 211-213.

Received 07.01.2024

Шеремета М.М., Трухан Ю.С. *Про зростання максимуму модуля рядів Діріхле* // Буковинський матем. журнал — 2024. — Т.12, №1. — С. 32–42.

Для ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \exp\{s\lambda_n\}$ з невід'ємними зростаючими $+\infty$ показниками λ_n і абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a \in (-\infty, +\infty]$ вивчено зв'язок між зростанням на $(-\infty, \sigma_a)$ максимума модуля $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і поводженням коефіцієнтів f_n. Для цього через L позначено клас неперервних зростаючих до $+\infty$ на $(x_0, +\infty)$ функцій α. Належність α до класу L^0 означає, що $\alpha \in L$ і $\alpha((1 + o(1))x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$, а $\alpha \in L_{si}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$.

Для цілих рядів Діріхле ($\sigma_a = +\infty$), наприклад, доведено, що якщо $\alpha \in L$, $\beta \in L^0$, то $\overline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}} \left(\exp\{\alpha(\ln M(\beta^{-1}(\beta(\sigma) + \ln q), F))\} - p\exp\{\alpha(\ln M(\sigma, F))\}\right) = +\infty$ для таких $p > 1$ і $q > 1$, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \alpha(\lambda_n)/\beta\left(\lambda_n^{-1}\ln(1/|f_n|)\right) > \ln p/\ln q$. Якщо ж $\alpha \in L_{si}$, $\beta \in L^0$, $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ при $x \to +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ при $n \to \infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, $\alpha(\lambda_{n+1}) \sim \alpha(\lambda_n)$ при $n \to \infty$ і $\dfrac{\ln|f_n| - \ln|f_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \le n \to \infty$, то $\underline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}} \left(\exp\{\alpha(\ln M(\beta^{-1}(\beta(\sigma) + \ln q), F))\} - p\exp\{\alpha(\ln M(\sigma, F))\}\right) = -\infty$ для таких $p > 1$ і $q > 1$, що $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \alpha(\lambda_n)/\beta\left(\lambda_n^{-1}\ln(1/|f_n|)\right) < \ln p/\ln q$.

Подібні результати отримано для рядів Діріхле, абсолютно збіжних у півплощині $\{s : \mathrm{Re}\, s < 0\}$. Наприклад, доведено, що якщо $\sigma_a = 0$, $\beta \in L_{si}$, $\alpha(e^x) \in L_{si}$ і $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to +\infty$, то

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \left(\exp\left\{\alpha\left(\ln M\left(-\frac{1}{\beta^{-1}(\beta(1/|\sigma|) + \ln q)}, F\right)\right)\right\} - p\exp\{\alpha(\ln M(\sigma, F))\}\right) = +\infty$$

для таких $p > 1$ і $q > 1$, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n/\ln^+|f_n|)} > \ln p/\ln q$.

Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 1, 43–62 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 43–62

Дронь В.С.[1], Мединський І.П.[1,2]

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З БЛОЧНОЮ СТРУКТУРОЮ

Дослідження присвячене ультрапараболічним рівнянням, які виникають в задачах, що описують азійські опціони на фінансових ринках. Клас таких рівнянь за певних умов є узагальненням добре відомого виродженого параболічного рівняння дифузії з інерцією А.М.Колмогорова. Раніше для рівнянь з цього класу було побудовано так званий фундаментальний L-розв'язок, досліджено його властивості та коректну розв'язність задачі Коші.

У цій праці сформульовано спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних на коефіцієнти таких рівнянь, за яких отримано коректну розв'язність задачі Коші у спеціальних вагових просторах, а також інтегральні зображення класичних розв'язків однорідних рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона від функцій або узагальнених мір, якими задається початкова умова. Описано класи коректності задачі Коші.

Отримані результати можна використати у подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних вироджених параболічних рівнянь, а також при вивченні марковських процесів, густиною ймовірності переходу яких є ФРЗК для рівнянь, що розглядалися.

Ключові слова і фрази: ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, коректна розв'язність задачі Коші, інтегральне зображення класичних розв'язків, інтеграли Пуассона, азійські опціони, спеціальні умови Гельдера.

---

[1] Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
[2] Lviv Polytechnic National University, 12 Bandera str., 79013, Lviv, Ukraine
e-mail: *vdron@ukr.net, ihor.p.medynskyi@lpnu.ua*

Вступ

Клас рівнянь, який вивчається у цій праці, є узагальненням класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [1]. Це рівняння та його різноманітні узагальнення вивчалися багатьма авторами. Лінійні й нелінійні ультрапараболічні рівняння виникають у деяких задачах теорії ймовірностей, математичного моделювання опціонів, у теорії броунівського руху, теорії конвективної дифузії, теорії бінарних електролітів,

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.

© Дронь В.С.[1], Мединський І.П.[1,2], 2024

у віковому наближенні теорії сповільнених електронів, у біології, економіці та інших галузях науки.

На фінансових ринках облігації та акції, зазвичай, називаються первинними фінансовими активами. На ринку вторинних цінних паперів (деривативів) платіжні зобов'язання – це інструменти з певним фіксованим часом виконання, за якими виплачується певна винагорода [2, с. 356]. Європейське платіжне зобов'язання (європейський опціон) залежить лише від основних цін в момент часу виконання (кінцевий момент часу).

На відміну від європейського опціону, виплата за азійським деривативом залежить від усієї траєкторії значення ціни, а не лише від кінцевого значення. Одним із методів дослідження варіантів азійських опціонів є включення змінних, що залежать від траєкторії ціни, до простору станів. Це вперше було зроблено в працях [3, 4]. Розширення простору станів за рахунок включення змінних, що залежать від траєкторії ціни, приводить до вироджених рівнянь з частинними похідними, які не є рівномірно параболічними.

У загальному випадку математичні моделі опціонів зводяться до фінансової моделі марковського типу, динаміка в якій визначається стохастичним диференціальним рівнянням в N-вимірному просторі станів

$$dX_t = (BX_t + b(t, X_t))dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \tag{1}$$

де W_t – d-вимірний стандартний вінерівський процес, $d \leq N$, $\sigma = \sigma(t, x)$ – матриця розміру $N \times d$, $B = (b_{ij})$ – стала матриця розміру $N \times N$, вектор $b = (b_1, ..., b_N)$ – такий, що $b_{d+1} = ... = b_N = 0$.

За певних припущень на матриці σ, B, b в праці [5] доведено існування та єдиність слабкого розв'язку рівняння (1), а в [6] доведено, що густина ймовірностей переходу цього розв'язку є фундаментальним розв'язком задачі Коші (далі – ФРЗК) для рівняння

$$L_1 u := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(t,x) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_j\partial_{x_i}u(t,x) + \\ + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\partial_{x_i}u(t,x) + \partial_t u(t,x) = 0, \tag{2}$$

де елементи матриці $(a_{ij}(t,x))_{i,j=1}^{d}$ визначаються через елементи матриці $\sigma(t,x)$. Зауважимо, що при цьому на елементи матриці σ та вектора b, зокрема, ставилися умови обмеженості і неперервності за Гельдером, а накладені на матрицю B умови еквівалентні тому, що для оператора L_1 з фіксованими в кожній точці (t, x) коефіцієнтами виконується умова гіпоеліптичності Л. Хермандера.

У даній праці вивчається коректна розв'язність задачі Коші для рівнянь, подібних до (2), з певною вимогою щодо вигляду матриці B. Сформульовано умови на коефіцієнти рівняння, за яких отримано коректну розв'язність задачі Коші, а також інтегральне зображення класичного розв'язку у вигляді інтеграла Пуссона від функції або узагальненої міри, якими задається початкова умова.

1 Формулювання задачі, припущення й означення

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$(S_B - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{3}$$

де n_1, n_2, n_3 – натуральні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$, $n := n_1+n_2+n_3$; $x := (x_1, x_2, x_3)$, $x_i := (x_{i1}, ..., x_{in_i})$, $i \in \{1,2,3\}$; $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x)|\ t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$\begin{gathered} S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} b_{ij}^1 x_{1i}\right)\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_2} b_{ij}^2 x_{2i}\right)\partial_{x_{3j}}, \\ A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t,x)\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}} + \sum_{i=1}^{n_1} a_i(t,x)\partial_{x_{1i}} + a_0(t,x). \end{gathered} \tag{4}$$

Перший диференціальний вираз з (4) у матричній формі має вигляд

$$S_B = \partial_t - (x, BD_x),$$

де B – матриця розміру $n \times n$, яка має структуру

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \tag{5}$$

B^1 , B^2 – матриці, складені відповідно з дійсних чисел b_{ij}^1, $i \in \{1,...,n_1\}$, $j \in \{1,...,n_2\}$, b_{ij}^2, $i \in \{1,...,n_2\}$, $j \in \{1,...,n_3\}$, O – нульові матриці відповідних розмірів, $D_x := col(\partial_{x_{11}}, ..., \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, ..., \partial_{x_{2n_2}}, \partial_{x_{31}}, ..., \partial_{x_{3n_3}})$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Використовуватимемо такі умови:

A$_1$. Для матриці (5), в якій блоки B^1 і B^2, записані відповідно у вигляді $\binom{B_1^1}{B_2^1}$ і $\binom{B_1^2}{B_2^2}$, де B_1^1, B_2^1, B_1^2 і B_2^2 – матриці відповідно розмірів $n_2 \times n_2$, $(n_1-n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ і $(n_2-n_3) \times n_3$ справджуються умови: $\det B_1^i \ne 0$, $i \in \{1,2\}$;

A$_2$. Існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ виконується оцінка

$$\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t,x)\sigma_{1i}\sigma_{1j} \ge \delta\sum_{i=1}^{n_1}\sigma_{1i}^2.$$

Клас рівнянь (3) при виконанні умов **A**$_1$ та **A**$_2$ часто (див., наприклад, [7]) позначається символом $\mathbf{E}_{22}^B$. Він узагальнює клас ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова $\mathbf{E}_{22}$, запроваджений у монографії [8]. Рівняння типу (3) з'являються в моделях дифузії з інерцією, а також при дослідженні математичних моделей азійських опціонів, коли змінні, що залежать від траєкторії ціни, включають до простору станів.

Позначимо: $M := \sum_{i=1}^{3}(i-1/2)n_i$, $M_k := \sum_{i=1}^{3}(2(i-1)+1)|k_i|/2$ при $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $k := (k_1,k_2,k_3)$, $k_i := (k_{i1}, ..., k_{in_i})$, $i \in \{1,2,3\}$;
$x_t := (t^{-1/2}x_1, t^{-3/2}x_2, t^{-5/2}x_3)$, $x := (x_1,x_2,x_3)$, $x_i := (x_{i1}, ..., x_{in_i})$, $i \in \{1,2,3\}$;

$E_c(t,x;\tau,\xi) := \exp\Big\{-c\sum\limits_{i=1}^{3}(t-\tau)^{1-2i}|X_i(t-\tau)-\xi_i|^2\Big\}$, $t>\tau$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$,
де $X(h) := (X_1(h), X_2(h), X_3(h))$, $X_i(h) := (X_{i1}(h), ..., X_{in_i}(h))$, $i\in\{1,2,3\}$,
$X_{1j}(h) := x_{1j}$, $j\in\{1,...,n_1\}$, $X_{2j}(h) := x_{2j} + h\sum\limits_{i=1}^{n_1} b_{ij}^1 x_{1i}$, $j\in\{1,...,n_2\}$,
$X_{3j}(h) := x_{3j} + h\sum\limits_{i=1}^{n_2} b_{ij}^2 x_{2i} + \frac{h^2}{2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}\sum\limits_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 b_{is}^1 x_{1i}$, $j\in\{1,...,n_3\}$, $h\in\mathbb{R}$, $c>0$ – деяка стала;
$d(x,\xi) := \sum\limits_{i=1}^{3}|x_i-\xi_i|^{1/(2(i-1)+1)}$, $\Delta_x^\xi f(\cdot,x) := f(\cdot,x) - f(\cdot,\xi)$,
$\Delta_{x_1}^{\xi_1} f(\cdot,x) := f(\cdot,(x_1,x_2,x_3)) - f(\cdot,(\xi_1,x_2,x_3))$,
$\Delta_{x_2}^{\xi_2} f(\cdot,x) := f(\cdot,(x_1,x_2,x_3)) - f(\cdot,(x_1,\xi_2,x_3))$,
$\Delta_{x_3}^{\xi_3} f(\cdot,x) := f(\cdot,(x_1,x_2,x_3)) - f(\cdot,(x_1,x_2,\xi_3))$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, f – деяка функція.

Ставитимо на коефіцієнти рівняння (3) ще такі умови:

$\mathbf{A}_3$. Коефіцієнти виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ (тобто функції a_{ij}, a_i, a_0) є обмеженими, неперервними за t на відрізку $[0,T]$ та гельдеровими за просторовими змінними у такому сенсі:
$\exists H_1>0$, $\exists\alpha_1\in(0,1]$ $\forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, $\forall z_1\in\mathbb{R}^{n_1}$: $\big|\Delta_{x_1}^{z_1}a(t,x)\big| \le H_1|x_1-z_1|^{\alpha_1}$;
$\exists H_2>0$, $\exists H_3>0$, $\exists\alpha_2\in(1/3,2/3]$ $\forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, $\forall z_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i\in\{1,2\}$, $\forall h\in[0,T]$:

$$\big|\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)\big| \le H_2(h^{3\alpha_2/2} + |X_2(h)-z_2|^{\alpha_2}),$$

$$\big|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)\big| \le H_3|x_1-z_1|^{\alpha_1}(h^{3\alpha_2/2} + |X_2(h)-z_2|^{\alpha_2});$$

$\exists H_4>0$, $\exists H_5>0$, $\exists\alpha_3\in(3/5,4/5]$ $\forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, $\forall z_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i\in\{1,3\}$, $\forall h\in[0,T]$:

$$\big|\Delta_{x_3}^{z_3}a(t,x)\big| \le H_4(h^{5\alpha_3/2} + |X_3(h)-z_3|^{\alpha_3}),$$

$$\big|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_3}^{z_3}a(t,x)\big| \le H_5|x_1-z_1|^{\alpha_1}(h^{5\alpha_3/2} + |X_3(h)-z_3|^{\alpha_3}).$$

$\mathbf{A}_4$. В $\Pi_{[0,T]}$ існують обмежені похідні $\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}a_{ij}$ і $\partial_{x_{1i}}a_i$, які задовольняють за просторовими змінними умову Гельдера у сенсі $\mathbf{A}_3$.

У [9] було доведено, що якщо для коефіцієнтів рівняння (3) виконуються умови $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_3$, то для нього існує класичний ФРЗК Z, для якого справджуються оцінки

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c(t,x;\tau,\xi),\quad |k_1|/2+|k_2|+|k_3|\le 1,$$

$$k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n,\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \tag{6}$$

$$|S_B Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1}E_c(t,x;\tau,\xi),\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

з деякими сталими $C>0$ і $c>0$.

Якщо для коефіцієнтів рівняння (3) виконуються умови $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$, то для спряженого рівняння вигляду

$$S_B^* v(\tau,\xi) - A^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1}) = 0,\quad (\tau,\xi)\in\Pi_{[0,T)},$$

де

$$S_B^* := -\partial_\tau + \sum_{i=1}^{n_2}\left(\sum_{j=1}^{n_1} b_{ji}^1\xi_{1j}\right)\partial_{\xi_{2i}} + \sum_{i=1}^{n_3}\left(\sum_{j=1}^{n_2} b_{ji}^2\xi_{2j}\right)\partial_{\xi_{3i}},$$

$$A^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1}) := \sum_{i,j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1i}}\partial_{\xi_{1j}}(a_{ij}(\tau,\xi)v(\tau,\xi)) + \sum_{i=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1i}}(a_i(\tau,\xi)v(\tau,\xi)) - a_0(\tau,\xi)v(\tau,\xi),$$

існує класичний ФРЗК Z^*, який пов'язаний з ФРЗК Z рівністю

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = Z(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

і для Z справджується формула згортки

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\lambda,y)Z(\lambda,y;\tau,\xi)dy, \quad 0 \le \tau < \lambda < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо набори функцій $\mathbf{k}(t,\mathbf{a})$ і $\mathbf{s}(t)$, $t \in [0,T]$, які означимо таким способом:

$$\mathbf{k}(t,\mathbf{a}) := (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3)), \ \mathbf{s}(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t)),$$

$$k_i(t,a_i) := c_0 a_i (c_0 - a_i t^{2(i-1)+1})^{-1}, \ i \in \{1,2,3\};$$

$$s_1(t) := k_1(t,a_1) + 2t^2\|B^1\|^2 k_2(t,a_2) + 2t^4(\|B^1\|\,\|B^2\|)^2 k_3(t,a_3),$$

$$s_2(t) := 2k_2(t,a_2) + 4t^2\|B^2\|^2 k_3(t,a_3), \quad s_3(t) := 4k_3(t,a_3),$$

де $c_0 \in (0,c)$, c – стала з оцінок (6), $\mathbf{a} := (a_1,a_2,a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $T < \min\limits_{i\in\{1,2,3\}} (c_0/a_i)^{1/(2(i-1)+1)}$, $\|B^1\|$ і $\|B^2\|$ – норми матриць B^1 і B^2 відповідно. Запровадимо ще таке позначення:

$$[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),\xi)] := \sum_{i=1}^{3} k_i(t,a_i)|\xi_i|^2, \ t > 0, \ \xi_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \ i \in \{1,2,3\}.$$

Зауважимо, що правильними є співвідношення

$$\mathbf{k}(0,\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \ k_i(t,a_i) \ge a_i, \ k_{ij}(t,a_{ij}) \ge a_{ij}, \quad t \in [0,T], \ j \in \{1,...,n_i\}, \ i \in \{1,2,3\};$$

$$k_1(t-\tau, k_1(\tau,a_1)) = k_1(t,a_1), \ k_{1j}(t-\tau, k_{1j}(\tau,a_{1j})) = k_{1j}(t,a_{1j}), \quad j \in \{1,...,n_1\};$$

$$k_i(t-\tau, k_i(\tau,a_i)) \le k_i(t,a_i), \ k_{ij}(t-\tau, k_{ij}(\tau,a_{ij})) \le k_{ij}(t,a_{ij}), \ j \in \{1,...,n_i\}, \ i \in \{2,3\}, \tag{8}$$

і справджується нерівність

$$-c_0 \sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t) - \xi_i|^2 + [\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi] \le [\mathbf{k}(t,\mathbf{a}), X(t)], \quad t \in (0,T], \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Нехай $p \in [1,\infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна для будь-якого $t \in [0,T]$. Для кожного $t \in [0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} := \|u(t,x)\exp\{-[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}), X(t,0)]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} := \|u(t,x)\exp\{-[\mathbf{s}(t),x]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Використовуватимемо також простори:

$L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$, $t \in [0,T]$, $p \in [1,\infty]$, – простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$;

$M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ – простір зліченно-адитивних функцій $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умову

$$\|\mu\|^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),x]\} d|\mu|(x) < \infty,$$

де $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ – повна варіація μ;

$L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_1^{-\mathbf{s}(T)} := \|\psi(x)\exp\{-[\mathbf{s}(T),x]\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

$C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що при $|x| \to \infty$ маємо $|\psi(x)|\exp\{[\mathbf{s}(T),x]\} \to 0$. Норму в $C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ означимо формулою

$$\|\psi\|_\infty^{-\mathbf{s}(T)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (|\psi(x)|\exp\{[\mathbf{s}(T),x]\}).$$

Враховуючи означення точок $X_i(t), i \in \{1,2,3\}$, та нерівності (1.3.9), (1.3.10) з [8], маємо такі нерівності:

$$|X_2(t)|^2 = \left|x_2 + t((B^1)'x_1')'\right|^2 \le 2\left(|x_2|^2 + t^2|((B^1)'x_1')'|^2\right) \le 2\left(|x_2|^2 + t^2\|B^1\|^2|x_1|^2\right),$$

$$|X_3(t)|^2 = \left|x_3 + t((B^2)'x_2')' + \frac{1}{2}t^2((B^2)'(B^1)'x_1')'\right|^2 \le 4\Bigg(|x_3|^2 + t^2|((B^2)'x_2')'|^2) +$$

$$+ \left|\frac{1}{2}t^2((B^2)'(B^1)'x_1')'\right|^2\Bigg) \le 4\left(|x_3|^2 + t^2\|B^2\|^2|x_2|^2 + \frac{1}{4}t^4\|B^1\|^2\|B^2\|^2|x_1|^2\right) \qquad (10)$$

та аналогічно

$$|X_{2j}(t)|^2 \le 2\left(|x_{2j}|^2 + t^2\|B^1\|^2|x_{1j}|^2\right),\ j \in \{1,...,n_2\};$$

$$|X_{3j}(t)|^2 \le 4\left(|x_{3j}|^2 + t^2\|B^2\|^2|x_{2j}|^2 + \frac{1}{4}t^4\|B^1\|^2\|B^2\|^2|x_{1j}|^2\right),\ j \in \{1,...,n_3\}.$$

Із цих нерівностей випливає нерівність

$$\exp\{-[\mathbf{s}(t),x]\} \le \exp\{-[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),x]\},$$

і тому

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} \le \|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})},\quad t \in [0,T],\ p \in [1,\infty]. \qquad (11)$$

Оскільки за означенням $\mathbf{s}(t) \ge \mathbf{k}(0,\mathbf{a})$, $t \in [0,T]$, то для $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{\mathbf{s}(t)} \le \|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})},\quad t \in [0,T],\ p \in [1,\infty]. \qquad (12)$$

2 Формулювання основних результатів

Основні результати статті містяться у теоремах 1, 2.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (3) *виконуються умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$ *і* $p \in [1, \infty]$. *Тоді правильними є такі твердження:*

1) для будь-яких функцій $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ *формула*

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{13}$$

визначає єдиний в шарі $\Pi_{(0,T]}$ *розв'язок однорідного рівняння* (3);

існує стала $C > 0$, *яка не залежить від* $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *така, що для довільного* $t \in (0,T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})};$$

для $p \in [1,\infty)$ *справджується рівність* $\lim\limits_{t\to 0}\|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\boldsymbol{s}(t)} = 0$, *а для* $p = \infty$ – *граничні співвідношення* $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \varphi$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $L_1^{-\boldsymbol{s}(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx;$$

2) для будь-якої узагальненої міри $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ *формула*

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{14}$$

визначає єдиний в шарі $\Pi_{(0,T]}$ *розв'язок однорідного рівняння* (3);

існує стала $C > 0$, *яка не залежить від* $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *така, що для довільного* $t \in (0,T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\mu\|^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})};$$

справджується граничне співвідношення $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \mu$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $C_0^{-\boldsymbol{s}(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\mu(x).$$

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 1.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$ *і* u – *розв'язок в* $\Pi_{(0,T]}$ *однорідного рівняння* (3), *який задовольняє умову*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C,\ t \in (0,T], \tag{15}$$

з деякими $C > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$. *Тоді для* $p \in (1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,a)}$, *а для* $p = 1$ – *єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді* (13) *або* (14).

Нехай U_p, $p \in [1,\infty]$, – класи усіх розв'язків однорідного рівняння (3), які при кожному $t \in (0,T]$ належать до просторів $L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$ як функції x і для яких виконується умова (15). Із теорем 1 і 2 випливають такі важливі наслідки.

Наслідок 1. *Множинами початкових значень розв'язків із класів U_p, $p \in (1,\infty]$, та U_1 є відповідно простори $L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ та $M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і тільки вони.*

Наслідок 2. *Класи U_p, $p \in (1,\infty]$, і U_1 є множинами значень операторів Пуассона, визначених формулами (13) і (14) на просторах відповідно $L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і $M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, причому ці оператори є ізоморфізмами.*

Для отримання результатів, сформульованих у теоремах 1 і 2, використовується методика, подібна до праці [8].

3 Властивості інтегралів Пуассона

Припускатимемо, що виконуються умови $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$.

Лема 1. *Якщо $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $p \in [1,\infty]$, то для інтеграла Пуассона (13) справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}, \quad t \in (0,T]. \tag{16}$$

Доведення. Досить безпосередньо перевірити виконання нерівності (16) за різних значень p. Для цього необхідно оцінити $|u(t,x)|$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, використовуючи нерівності (6), (8) та рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_\delta(t,x;0,\xi)d\xi = C, \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \delta>0. \tag{17}$$

При $p \in (1,\infty)$, крім того, використовується нерівність Гельдера:

$$|u(t,x)| \le Ct^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(|\varphi(\xi)| \exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\} E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,x;0,\xi)\big) \times$$

$$\times \exp\Big\{-\frac{c+c_0}{2}\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2 + [\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\Big\}d\xi \le$$

$$\le Ct^{-M}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \exp\{-p[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\} E_{p((c-c_0)/2)}(t,x;0,\xi)d\xi\bigg)^{1/p} \times$$

$$\times\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big\{-p'((c+c_0)/2)\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2 + p'[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\Big\}d\xi\bigg)^{1/p'} \le$$

$$\le C\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \exp\{-p[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\} E_{p((c-c_0)/2)}(t,x;0,\xi)t^{-M}d\xi\bigg)^{1/p} \times$$

$$\times \exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)]\}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{p'((c-c_0)/2)}(t,x;0,\xi)t^{-M}d\xi\Big)^{1/p'},\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

де число p' таке, що $1/p+1/p'=1$. Отже, при $p\in(1,\infty)$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}\le C\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|\varphi(\xi)|^p\exp\{-p[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}E_{p((c-c_0)/2)}(t,x;0,\xi)t^{-M}d\xi\Big)dx\Big)^{1/p}=$$

$$=C\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|^p\exp\{-p[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}t^{-M}E_{p((c-c_0)/2)}(t,x;0,\xi)dx\Big)d\xi\Big)^{1/p}=$$

$$=C\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})},\quad t\in(0,T].\square$$

Наступна лема показує, в якому сенсі інтеграл Пуассона (13) задовольняє початкову умову.

Лема 2. *Якщо $\varphi\in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $p\in[1,\infty]$, то для інтеграла Пуассона* (13) *при $p\in[1,\infty)$ виконується рівність*

$$\lim_{t\to0}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)}=0,\tag{18}$$

а при $p=\infty$ $u(t,\cdot)\underset{t\to0}{\longrightarrow}\varphi$ слабко, тобто для довільних $\psi\in L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ справджується співвідношення

$$\lim_{t\to0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)dx.\tag{19}$$

Доведення. Встановимо співвідношення (18) при $p\in[1,\infty)$. За означенням границі треба довести, що для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta\in(0,T)$, що для всіх $t\in(0,\delta)$ виконується нерівність

$$\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi-\varphi(\cdot)\Big\|_p^{\mathbf{s}(t)}<\varepsilon.\tag{20}$$

Візьмемо $R>0$ та означимо функцію $\varphi^{(R)}$ так, що $\varphi^{(R)}(x)=\varphi(x),\ x\in B_R$ і $\varphi^{(R)}(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R$, де $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^n|d(x,0)\le R\}$. Маємо

$$\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi-\varphi(\cdot)\Big\|_p^{\mathbf{s}(t)}\le\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot;0,\xi)(\varphi(\xi)-\varphi^{(R)}(\xi))d\xi\Big\|_p^{\mathbf{s}(t)}+$$

$$+\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi-\varphi^{(R)}(\cdot)\Big\|_p^{\mathbf{s}(t)}+\|\varphi(\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)}:=I_1+I_2+I_3,\quad t\in(0,T].$$

На підставі леми 1 маємо

$$\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot;0,\xi)(\varphi(\xi)-\varphi^{(R)}(\xi))d\xi\Big\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}\le\|\varphi(\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})},$$

що разом з (11) дає

$$I_1 \le C\|\varphi(\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}, \quad t\in(0,T].$$

Із (12) випливає, що

$$I_3 \le \|\varphi(\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{a}}, \quad t\in(0,T].$$

При певному $\varphi>0$ виберемо $R>0$ так, щоб

$$\|\varphi(\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} |\varphi(x)|^p \exp\{-p[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),x]\})dx\Big)^{1/p} < \varepsilon/(2(C+1)).$$

Тоді $I_1+I_3<\varepsilon/2$.

Оскільки

$$I_2 \le C\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,\cdot\,;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi-\varphi^{(R)}(\cdot)\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =: I^{1/p},$$

то для доведення (20) залишилося довести існування такого $\delta\in(0,T)$, щоб для всіх $t\in(0,\delta)$ виконувалася нерівність $I^{1/p}<\varepsilon/2$. Для цього I розбиваємо на два доданки

$$I=\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}}\Big|\int\limits_{B_R} Z(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi\Big|^p dx+\int\limits_{B_{2R}}\Big|\int\limits_{B_R} Z(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi-\varphi^{(R)}(x)\Big|^p dx =: J_1+J_2,$$

кожен з яких оцінюємо окремо.

Зауважимо, що існує число $\delta_0\in(0,1)$ таке, що

$$\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2 > t^{-1}(R/2)^2, \quad t\in(0,\delta_0),\ x\in\mathbb{R}^n\setminus B_{2R},\ \xi\in B_R. \tag{21}$$

Для оцінки J_1 при $p=1$ використовуються нерівності (6), (21) та рівність (17). При $p>1$, крім того, як і при доведенні леми 1, потрібно ще використати нерівність Гельдера. Отримаємо, що

$$J_1 \le C\|\varphi^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}(\exp\{-(c-c_0)t^{-1}(R/2)^2\}+\exp\{-(p(c-c_0)/2)t^{-1}(R/2)^2\}),\ t\in(0,\delta_0).$$

Звідси випливає існування такого $\delta_1>0$, що для всіх $t\in(0,\delta_1)$ виконується нерівність $J_1<(1/2)(\varepsilon/2)^p$.

Для оцінки J_2 використаємо $\varphi_h^{(R)}$ – середню функцію для $\varphi^{(R)}$:

$$J_2^{1/p} \le \Big(\int\limits_{B_{2R}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)(\varphi^{(R)}(\xi)-\varphi_h^{(R)}(\xi))d\xi\Big|^p dx\Big)^{1/p}+$$

$$+\Big(\int\limits_{B_{2R}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi_h^{(R)}(\xi)d\xi-\varphi_h^{(R)}(x))\Big|^p dx\Big)^{1/p}+\Big(\int\limits_{B_{2R}}|\varphi_h^{(R)}(x)-\varphi_h^{(R)}(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$

Перший доданок оцінюється подібно до того, як це було зроблено при доведенні леми 1, тільки без вагової функції. Далі, використовуючи властивості середніх функцій, відповідно до яких

$$\|\varphi^{(R)}-\varphi_h^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

а при фіксованому $h > 0$ рівномірно щодо $x \in B_{2R}$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi_h^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi_h^{(R)}(x)) \Big|^p \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

отримуємо, що існує така стала $\delta_2 > 0$, що для всіх $t \in (0,\delta_2)$ виконується нерівність $J_2 < (1/2)(\varepsilon/2)^p$. З цієї оцінки та подібної оцінки для J_1 випливає потрібна оцінка $I^{1/p} < \varepsilon/2$ для всіх $t \in (0,\delta_2)$, де δ – найменше з чисел δ_1 і δ_2.

Доведемо використану вище нерівність (21). Позначимо

$$Y(t) := \Big(\underbrace{0,...,0}_{n_1}, -t\sum_{j=1}^{n_1} b_{j1}^1 x_{1j}, ..., -t\sum_{j=1}^{n_1} b_{jn_2}^1 x_{1j}, -t\sum_{l=1}^{n_2} b_{l1}^2 x_{2l} - 2^{-1}t^2 \sum_{j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} b_{l1}^2 b_{jl}^1 x_{1j},$$

$$..., -t\sum_{l=1}^{n_2} b_{ln_3}^2 x_{2l} - 2^{-1}t^2 \sum_{j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} b_{ln_3}^2 b_{jl}^1 x_{1j}\Big).$$

Для $t \in (0,1)$ маємо

$$|Y(t)| \le \Bigg(t^2 \sum_{s=1}^{n_2} \Big(\sum_{j=1}^{n_1} |b_{js}^1 \| x_{1j}| \Big)^2 + t^2 \sum_{s=1}^{n_2} \Big(\sum_{l=1}^{n_2} |b_{ls}^2 \| x_{2l}| \Big)^2 +$$

$$+ 4^{-1}t^4 \sum_{s=1}^{n_2} \Big(\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} |b_{ls}^2 \| b_{jl}^1 \| x_{1j}| \Big)^2 \Bigg)^{1/2} \le c_1 t|x|;$$

$$|X(t)| = |x - Y(t)| \ge \big||x| - |Y(t)|\big|.$$

Звідси маємо, що для числа $\delta_0 \in (0,1)$ такого, що $c_1\delta_0 \le 1/4$, для довільних $t \in (0,\delta_0)$ і $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ виконується нерівність $|X(t)| \ge (3/4)|x| \ge 3R/2$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t) - \xi_i|^2 \ge t^{-1}|X(t) - \xi|^2 \ge t^{-1}\big||X(t)| - |\xi|\big|^2 > t^{-1}(R/2)^2,$$

$$t \in (0,\delta_0),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R},\ \xi \in B_R,$$

що і слід було довести.

Перейдемо до доведення співвідношення (19). Спочатку зауважимо, що інтеграли з (19) мають сенс при будь-яких $\varphi \in L_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $\psi \in L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ і $t \in (0,T]$, оскільки на підставі нерівності (11) і леми 1 норма $\|u(t,\cdot)\|_\infty^{\mathbf{s}(t)}$ є скінченною для довільних $t \in (0,T]$, якщо $\varphi \in L_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$. Справді, на підставі того, що $a_i \le s_i(t) \le s_i(T)$ для довільних $t \in (0,T]$, $i \in \{1,2,3\}$, маємо

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx \Big| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\psi(x)| \exp\{[\mathbf{s}(T),x]\})(|u(t,x)| \exp\{-[\mathbf{s}(t),x]\})dx \le$$

$$\le \|\psi\|_1^{-\mathbf{s}(T)} \|u(t,\cdot)\|_\infty^{\mathbf{s}(t)} < \infty,$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx \Big| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\psi(x)| \exp\{[\mathbf{s}(T),x]\})(|\varphi(x)| \exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),x]\})dx \le$$

$$\leq \|\psi\|_1^{-\mathbf{s}(T)}\|\varphi\|_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} < \infty.$$

Для доведення (19) досить встановити співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(v(t,\xi)-\psi(\xi))\varphi(\xi)d\xi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

де

$$v(t,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\psi(x)dx.$$

Враховуючи, що $\varphi \in L_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і справджується нерівність

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(v(t,\xi)-\psi(\xi))\varphi(\xi)d\xi\Big| \leq \|\varphi\|_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|v(t,\xi)-\psi(\xi)|\exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\})d\xi,$$

залишається тільки довести, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|v(t,\xi)-\psi(\xi)|\exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}d\xi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{22}$$

Оскільки $a_i < k_i(T,a_i)$, $i\in\{1,2,3\}$, то існує таке $\gamma>0$, що $s_i(T)\geq k_i(T,a_i)\geq g_i(t) := c_0k_i(T,a_i)/(c_0+k_i(T,a_i)t^{2i-1})\geq a_i$, $i\in\{1,2,3\}$, для всіх $t\in[0,\gamma]$. Тому

$$\exp\{[\mathbf{g},\xi]\}\geq\exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\},\quad t\in[0,\gamma],\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

і для доведення (22) досить для будь якого $\varepsilon>0$ довести існування такого $\delta\in(0,\gamma)$, що для всіх $t\in(0,\delta)$ виконується нерівність

$$\|v(t,\cdot)-\psi(\cdot)\|_1^{-\mathbf{g}(t)} := \|(v(t,\cdot)-\psi(\cdot))\exp\{[\mathbf{g}(t),\cdot\,]\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}<\varepsilon,$$

де $\mathbf{g}(t) := (g_1(t),g_2(t),g_3(t))$. Доведення цього проводиться аналогічно до доведення (20), тільки з використанням нерівності

$$[\mathbf{k}(T,\mathbf{a}),X(t)]\leq[\mathbf{s}(T),x],\quad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

яка справджується на підставі (10) та означення $\mathbf{s}(T)$, і нерівності

$$-c_0\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2-[\mathbf{k}(T,\mathbf{a}),X(t)]\leq-[\mathbf{g}(t),\xi],\quad t\geq 0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

яка обгрунтовується так само, як (9). □

Подібно до доведення лем 1 і 2 можна встановити наступну лему.

Лема 3. *Якщо $\mu\in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, то для інтеграла Пуассона* (14) *виконується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}\leq C\|\mu\|^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})},\quad t\in(0,T], \tag{23}$$

і $u(t,\cdot)\to\mu$ при $t\to 0$ слабко, тобто для довільних $\psi\in C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ справджується співвідношення

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)d\mu(x). \tag{24}$$

4 Інтегральне зображення розв'язків задачі Коші

Сформулюємо твердження про зображення класичних розв'язків задачі Коші для рівняння (3) у вигляді інтегралів Пуассона. Припускатимемо, що виконуються умови $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$.

Лема 4. *Якщо $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $p \in [1,\infty]$, то класичний розв'язок u рівняння* (3)*, який задовольняє умову*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t)} \le C, \quad t \in (0,T], \tag{25}$$

з деякою сталою $C > 0$, умови (18) *і* (19) *відповідно для $p \in [1,\infty)$ і $p = \infty$, зображується у вигляді* (13)*.*

Доведення. Використаємо формулу Гріна-Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{B_R} (vLu - uL^*v)(\theta,y)dy = \int_{B_R} (vu)(\theta,y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \Big(\sum_{j=1}^{n_2} \Big(\sum_{l=1}^{n_1} b_{lj}^1 y_{1l} \Big) \mu_{2j} + \sum_{j=1}^{n_3} \Big(\sum_{l=1}^{n_2} b_{lj}^2 y_{2l} \Big) \mu_{3j} \Big) (vu)(\theta,y) dS_y +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} B^j[v,u](\theta,y)\mu_{1j} dS_y, \tag{26}$$

де $0 \le t_1 < t_2 \le T$, B_R – куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат, Γ_R – її межа, $(\mu_{11},...,\mu_{1n_1},\mu_{21},...,\mu_{2n_2},\mu_{31},...,\mu_{3n_3})$ – одинична зовнішня нормаль до Γ_R, $L := S_B - A(\theta,y,\partial_{y_1})$, $L^* := S_B^* - A^*(\theta,y,\partial_{y_1})$,

$$B^j[v,u] := -\sum_{l=1}^{n_1} (a_{jl}\partial_{y_{1l}} uv - u\partial_{y_{1l}}(a_{jl}v)) + a_j uv, \quad j \in \{1,...,n_1\},$$

u і v – досить гладкі функції. Формула (26) є правильною для функцій u і v, які мають класичні похідні, що входять у рівняння (3).

Наведемо схему доведення леми. Нехай u – класичний розв'язок, для якого виконуються умови леми, і нехай $V_R := (0,T] \times B_R$; ζ – досить гладка на $[0,\infty)$ функція така, що $\zeta = 1$ на $[0,1/2]$, $\zeta = 0$ на $[3/4,\infty)$ і $\zeta' \le 0$; $\zeta_R(x) := \zeta(|x|/R)$; (t,x) – довільно фіксована точка з $V_{R_0/4}$, де R_0 – довільно взяте додатне число. Покладемо в формулі (23) замість t_1, t_2, θ, y, $u(\theta,y)$ і $v(\theta,y)$ відповідно h, $t-\varepsilon$, τ, ξ, $u(\tau,\xi)$ і $v(\tau,\xi) = Z^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi)$, де $R \ge R_0$, $0 < h < t/2$, $0 < \varepsilon < t/2$. Використовуючи властивості функції ζ_R, рівність (7) для Z і те, що $Lu = 0$, одержуємо

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t-\varepsilon,\xi)\zeta_R(\xi)u(t-\varepsilon,\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)\zeta_R(\xi)u(h,\xi)d\xi -$$

$$-\int\limits_{h}^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} (L^*(Z^*(\tau,\xi;,x)\zeta_R(\xi)))u(\tau,\xi)d\xi,$$

а після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ приходимо до рівності

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)\zeta_R(\xi)u(h,\xi)d\xi -$$

$$-\int\limits_{h}^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} (L^*(Z^*(\tau,\xi;,x)\zeta_R(\xi)))u(\tau,\xi)d\xi =: I_1^{(R)} + I_2^{(R)}. \tag{27}$$

У цій рівності переходимо до границі при $R \to \infty$. Доводиться, що при цьому перший доданок правої чатини $I_1^{(R)}$ прямує до інтеграла

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi,$$

а другий доданок $I_2^{(R)}$ прямує до 0. Для доведення того, що $I_1^{(R)} \xrightarrow[R\to\infty]{} I_1$, оцінюємо різницю $|I_1 - I_1^{(R)}|$ за допомогою таких нерівностей:

$$-c_0\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t-h)-\xi_i|^2 + [\mathbf{k}(h,\mathbf{a}),\Xi(h)] \le -c_0\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t-h)-\xi_i|^2 +$$

$$+[\mathbf{s}(h),\xi] \le [\mathbf{k}(t-h,\mathbf{s}(h)),X(t-h)] \le c_1, \quad x \in B_{R_0/4},\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{28}$$

тут h – досить мале число таке, що $0 < t-h \le T < \min\limits_{i\in\{1,2,3\}} (c_0/s_i(h))^{1/(2i-1)}$;

$$\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t-h)-\xi_i|^2 \ge (t-h)^r(R/4)^2, \quad 0 < t-h \le T,\ x \in B_{R_0/4},\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R/2}, \tag{29}$$

де $c_1 > 0$, $r = -1$ при $0 < t-h \le 1$ і $r = -5$ при $t-h > 1$, R – досить велике число, R_0 – фіксоване число, причому $0 < R_0 < R$.

Друга нерівність з (28) доводиться так само, як нерівність (9), а перша і третя – очевидні на підставі нерівностей (10) та означення функцій s_i, $i \in \{1,2,3\}$. Доведення нерівності (29) аналогічне до доведення нерівності (21).

Перейдемо у (24) до границі при $R \to \infty$, одержимо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi. \tag{30}$$

Тепер, якщо у рівності (30) перейти до границі при $h \to 0$ і використати рівність

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \tag{31}$$

одержимо доведення леми.

Зауважимо, що для доведення рівності (31) використовується таке твердження: для довільних фіксованих $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$ існують такі сталі $C' > 0$, $c' \in (c_0, c)$ (c – стала з оцінки (6)) і $h_0 > 0$, що для будь-яких $h \in (0, h_0)$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ правильна оцінка

$$|Z(t,x;h,\xi)| \le C' t^{-M} \exp\Big\{ - c' \sum_{i=1}^{3} t^{1-2i} |X_i(t) - \xi_i|^2 \Big\}. \tag{32}$$

Справді, на підставі оцінки (6) маємо

$$|Z(t,x;h,\xi)| \le C t^{-M} \exp\Big\{ - c \sum_{i=1}^{3} t^{1-2i} |X_i(t-h) - \xi_i|^2 \Big\}.$$

Оскільки для $c > 0$ існують сталі $C' > 0$ і $c' \in (c_0, c)$ такі, що для довільних $\{u, v\} \subset \mathbb{R}$, $|v| \le 1$, виконується нерівність

$$\exp\{-c|u-v|^2\} \le C' \exp\{-c'|u|^2\},$$

то

$$\exp\{-ct^{-3}|X_2(t-h) - \xi_2|^2\} = \exp\{-c|t^{-3/2}(X_2(t) - \xi_2) - t^{-3/2} h (B^1)' x_1'|^2\} \le$$
$$\le C' \exp\{-c' t^{-3} |X_2(t) - \xi_2|^2\},$$

якщо h брати таким, що $ht^{-3/2}\|B^1\|\,|x_1| \le 1$, і

$$\exp\{-ct^{-5}|X_3(t-h) - \xi_3|^2\} = \exp\{-c|t^{-5/2}(X_3(t) - \xi_3) - t^{-5/2}(B^2)'(hx_2' + ht(B^1)' x_1' -$$
$$-h^2 (B^1)' x_1'/2)|^2\} \le C' \exp\{-c' t^{-5} |X_3(t) - \xi_3|^2\},$$

якщо h брати таким, що $t^{-5/2}\|B^2\|\big(h(t\|B^1\|\,|x_1| + |x_2|) + h^2\|B^1\|\,|x_1|/2\big) \le 1$. □

Лема 5. *Якщо $\mu \in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, то класичний розв'язок рівняння* (3), *який задовольняє умову* (25) *з $p = 1$ і співвідношення* (24), *зображується у вигляді* (14).

Доведення. Для доведення цієї леми так само, як в лемі 4, в рівності (30) переходимо до границі при $h \to 0$. □

5 Доведення теорем

Доведення теореми 1. Оскільки ФРЗК Z є класичним розв'язком рівняння (3), то на підставі оцінок (6) маємо, що при $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $p \in [1,\infty]$, $\mu \in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ інтеграли Пуассона (13) і (14) також є класичними розв'язками рівняння (3). Із лем 4 і 5 випливає єдиність цих розв'язків. Інші твердження теореми 1 є наслідками з лем 1–3. □

Доведення теореми 2. Нехай $p \in (1,\infty]$. З умови (15) випливає, що послідовність за параметром $\nu \in \mathbb{N}$ функцій

$$\{u(1/\nu, x) \exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu, \mathbf{a}), X(1/\nu)]\},\ x \in \mathbb{R}^n : \nu \in \mathbb{N}\} \tag{33}$$

обмежена в просторі $L_p(\mathbb{R}^n)$. Простір $L_p(\mathbb{R}^n)$ ізометричний простору, спряженому до $L'_p(\mathbb{R}^n)$, $p' := p/(p-1)$. Скористаємося теоремою про слабку компактність обмеженої множини в спряженому просторі. Одержимо, що послідовність (33) слабко компактна в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Тому існує її підпослідовність

$$\{u(1/\nu(r),x)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),X(1/\nu(r))]\},\ x\in\mathbb{R}^n : r\in\mathbb{N}\},\quad \lim_{r\to\infty}\nu(r)=\infty, \tag{34}$$

і функція $\chi\in L_p(\mathbb{R}^n)$ такі, що для довільної $\psi\in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi =$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\chi(\xi)d\xi. \tag{35}$$

Покладемо $\varphi(\xi) := \chi(\xi)\exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. Тоді $\varphi\in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і співвідношення (35) записуються у вигляді

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi =$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}\varphi(\xi)d\xi. \tag{36}$$

Нехай (t,x) – фіксована точка шару $\Pi_{(0,T]}$ і

$$\psi(\xi) := Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\},\quad \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{37}$$

Із оцінки

$$|\psi(\xi)|\le Ct^{-M}\exp\{-(c-c_0)\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2+[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)]\},\quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{38}$$

яка одержується за допомогою нерівностей (6) і (9), випливає, що $\psi\in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$. Тому на підставі рівності (36) маємо

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi =$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi. \tag{39}$$

Припустимо, що $1/\nu(r)\le t/2$, $r\ge 1$. Згідно з формулою (30)

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;1/\nu(r),\xi)u(1/\nu(r),\xi)d\xi. \tag{40}$$

На підставі цієї рівності маємо

$$u(t,x)-\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(Z(t,x;1/\nu(r),\xi)-Z(t,x;0,\xi))u(1/\nu(r),\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)(1-\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi+$$

$$+\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\Big)=:K_1^{(r)}+K_2^{(r)}+K_3^{(r)},\quad r\geq 1. \tag{41}$$

Щоб одержати зображення (13), досить довести, що

$$\lim_{r\to\infty}K_i^{(r)}=0,\quad i\in\{1,2,3\}. \tag{42}$$

Те, що $\lim\limits_{r\to\infty}K_1^{(r)}=0$, доводиться з використанням оцінки (32), як при доведенні (31) в лемі 4. Із (39) випливає, що $K_3^{(r)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$. Залишилося довести, що $K_2^{(r)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$.

За допомогою нерівності Гельдера та умови (15) маємо

$$|K_2^{(r)}|\leq\|u(1/\nu(r),\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a})}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}F_r(\xi)d\xi\Big)^{1/p'}\leq C\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}F_r(\xi)d\xi\Big)^{1/p'}, \tag{43}$$

де

$$F_r(\xi):=|Z(t,x;0,\xi)|^{p'}\big|\exp\{[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]\}-\exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}\big|^{p'},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ r\geq 1.$$

З оцінок (6) і (9) випливають нерівності

$$(F_r(\Xi))^{1/p'}\leq Ct^{-M}\exp\{-(c-c_0)\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2\}\Big(\exp\{-c_0\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2+$$

$$+[\mathbf{s}(1/\nu(r)),\xi]\}+\exp\{-c_0\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}\Big)\leq Ct^{-M}\times$$

$$\times\exp\{-(c-c_0)\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2\}\Big(\exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{s}(1/\nu(r))),X(t)]\}+\exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)]\}\Big).$$

Тут $r\geq r_0$, де r_0 взято так, щоб $t<H(1/\nu(r_0))$. Оскільки для довільних $r\geq r_0$

$$k_i(t,s_i(1/\nu(r)))\leq k_i(t,s_i(1/\nu(r_0))),\quad i\in\{1,2,3\},$$

то

$$(F_r(\Xi))^{1/p'}\leq Ct^{-M}\exp\{-(c-c_0)\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2\}\times$$

$$\times\Big(\exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{s}(1/\nu(r_0))),X(t)]\}+\exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)]\}\Big),\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ r\geq r_0,$$

звідки випливає, що послідовність $\{F_r, r\geq r_0\}$ має інтегровну мажоранту. Оскільки для кожного $\xi\in\mathbb{R}^n$ $F_r(\xi)\xrightarrow[r\to\infty]{}0$, то на підставі теореми Лебега про мажорантну збіжність

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}F_r(\xi)d\xi=0.$$

Звідси з урахуванням (43) одержуємо (42) для $i=2$.

Розглянемо випадок $p=1$. Із умови (15) випливає, що послідовність (33) обмежена в просторі $L_1(\mathbb{R}^n)$. Цей простір не є спряженим до жодного іншого банахового простору, але він вкладається у простір $M(\mathbb{R}^n)$ всіх узагальнених мір $\mu:\mathcal{B}\to\mathbb{C}$, які мають скінченну повну варіацію $|\mu|(\mathbb{R}^n)$. Якщо для μ ввести норму за формулою $\|\mu\|:=|\mu|(\mathbb{R}^n)$, то $M(\mathbb{R}^n)$ стає банаховим простором. Цей простір ізометричний простору, спряженому до простору $C_0(\mathbb{R}^n)$ усіх комплекснозначних неперервних функцій на $\mathbb{R}^n$, які прямують до нуля на нескінченності, з рівномірною нормою. Із обмеженості в $L_1(\mathbb{R}^n)$ послідовності (33) випливає обмеженість відповідної послідовності узагальнених мір в $M(\mathbb{R}^n)$ і, звідси, слабка компактність останньої. Тому існують такі послідовність (34) та узагальнена міра $\mu\in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, що для довільної функції $\psi\in C_0(\mathbb{R}^n)$ справджується рівність

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}d\mu(\xi).\tag{44}$$

Із оцінки (38) випливає, що функція (37) належить до простору $C_0(\mathbb{R}^n)$ для будь-якої фіксованої точки $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$. Тому на підставі (44) одержуємо, що

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi).\tag{45}$$

Далі діємо так само, як при $p>1$. За допомогою формули (40) записуємо рівність

$$u(t,x)-\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi)=K_1^{(r)}+K_2^{(r)}+K_4^{(r)},\quad r\geq 1,\tag{46}$$

де $K_1^{(r)}$ і $K_2^{(r)}$ – ті самі, що і в (41), а

$$K_4^{(r)}:=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi).$$

На підставі (42) $K_4^{(r)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$. Враховуючи також рівності (42) для $i \in \{1,2\}$ і (46), отримуємо потрібне ображення (14).

Таким чином доведено існування функції $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $p \in (1,\infty]$, і узагальненої міри $\mu \in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ при $p = 1$, таких, що заданий розв'язок u, який задовольняє умову (15), є інтегралом Пуассона відповідно функції φ або узагальненої міри μ. Єдиність φ і μ випливає з теореми 1. □

Висновки

У роботі розглянуто ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова з блочною структурою, які узагальнюють відоме рівняння дифузії з інерцією. Такі рівняння виникають при дослідженнях азійських опціонів на ринку цінних паперів. Клас таких рівнянь за певних умов на вигляд його блочної структури позначено через $\mathbf{E}_{22}^B$.

У статті сформульовано спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних на коефіцієнти рівнянь із класу $\mathbf{E}_{22}^B$, за яких отримано коректну розв'язність задачі Коші у спеціальних вагових просторах, а також отримано інтегральне зображення класичних розв'язків однорідних рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона від функцій або узагальнених мір, якими задається початкова умова. Описано класи коректності задачі Коші. При цьому одержано оцінки в спеціальних вагових нормах інтегралів Пуассона, породжених ФРЗК, та досліджена їх гранична поведінка.

Наведені результати є досить точними. З них, зокрема, випливає повна характеризація розглянутих класів розв'язків. Цим самим для таких розв'язків розв'язана задача, яка є важливою класичною задачею теорії аналітичних та гармонічних функцій. Вона полягає у відшуканні умов на розв'язки рівнянь, визначених в області, які гарантують існування їхніх граничних значень на межі області. Зауважимо, що подібні результати для так званих L-розв'язків задачі Коші для рівняння (3) отримано в [7].

Отримані результати є реалізацією відомого підходу Ейдельмана–Івасишена [8]. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії марковських процесів, густиною ймовірності переходу яких є ФРЗК для рівнянь із класу $\mathbf{E}_{22}^B$.

Список літератури

[1] Kolmogoroff A. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung).* Ann.Math. 1934, **35**, No.1, 116–117. – https://doi.org/10.2307/1968123

[2] Mishura Yu.S., Ralchenko K.V., Sakhno M.L., Shevchenko G.M. Stochastic processes: theory, statistics, application: textbook. 2nd Edition. Kyiv University, Kyiv, 2023 (in Ukrainian).

[3] Stanton R. Path Dependent Payoffs and Contingent Claim Valuation: Single Premium Deferred Annuities. Graduate School of Business, Stanford University 1989.

[4] Barraquand J., Pudet T. *Pricing of American path-dependent contingent claims.* Math. Finance 1996, **6**, 17–51.

[5] Pascucci A. *Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options.* Finance and Stoch. 2008, **12**, 21–41. doi: 10.1007/s00780-007-0051-7

[6] Di Francesco, Pascucci A. *On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type.* AMRX Appl. Math. Res. Exprass 2005, **3**, 77–116.

[7] Ivasyshen S.D., Layuk V.V. *Cauchy problem for some degenerated parabolic equations of Kolmogorov type.* Mat. Metody i Fiz.-Mekh. Polya 2007, **50** (3), 56–65 (in Ukrainian).

[8] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser. Basel 2004, Ser. Operator Theory: Adv. and Appl., Vol. 152. https://doi.org./10.1007/978-3-0348-7844-9.

[9] Dron V.S., Medynskyi I.P. *On fundamental solution of the Cauchy problem for ultra-parabolic equations in the Asian options models.* Math. Modeling and Computing 2024, **11** (2), 593–606. https://doi.org/10.23939/mmc2024.02.593

Надійшло 04.05.2024

Dron V.S.[1], Medynskyi I.P.[1,2] *Cauchy problem for ultra-parabolic equations of Kolmogorov type with block structure*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 43–62.

The investigation is devoted to ultra-parabolic equations which appear in Asian options problems. Unlike the European option, the payout of Asian derivative depends on the entire trajectory of the price value, not the final value only.

Among methods of researching of the Asian options, the one is to include dependent on the price trajectory variables in the state space. The expansion of the state space by including of dependent on the price trajectory variables transforms the path-dependent problem for the Asian option into an equivalent path-independent Markov problem. However, the increasing of the dimension usually leads to partial differential equations which are not uniformly parabolic. The class of these equations under some conditions is a generalization of the well-known degenerate parabolic A.N.Kolmogorov's equation of diffusion with inertia.

Mathematical models of the options have been studied in many works. It has been constructed so called L-type fundamental solutions for considered equations previously, some their properties have been established, the Cauchy problem has been researched.

In current work, for the given equations we study the classical solutions of the Cauchy problem. For the coefficients of the equations we apply special Hölder conditions with respect to spatial variables. Under these conditions, we prove the well-posedness of the Cauchy problem in special weighed spaces, obtained integral presentation of classic solutions of the Cauchy problem for homogeneous equations. Classes of well-posedness of the Cauchy problem were described.

The results obtained in the work are realization of well-known Eidelman–Ivasyshen approach. Ones can be used to advanced studying of the Cauchy problem and boundary value problems for linear and quasi-linear degenerated parabolic equations, as well as in the theory of stochastic processes when studying Markov processes, the transition probability density of which is the fundamental solution of the Cauchy problem for these equations.

Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 1, 63–73 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 63–73

Козловський М.Р.

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ОДНОТОЧКОВИХ РОЗРИВІВ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

В даній статті показано, що для цілком регуляних просторів $X_1, ..., X_n$ із x_{i0} – неізольована G_δ-точка у просторі X_i, якщо для деяких $1 \leq i \neq j \leq n$ існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$, то існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$. Використовуючи цей факт показний основний результат, що для цілком регуляних просторів $X_1, ..., X_n$ існування нарізно неперервної функції $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із одноточковим розривом $(x_{10}, ..., x_{n0})$, де x_{i0} – це G_δ точка у X_i, рівносильне тому, що із n P-фільтрів хоча б два є майже когерентними.

Ключові слова і фрази: нарізно неперервні функції, P-фільтри, одноточкові розриви, майже когерентні фільтри.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна
e-mail: *kozlovskyi.mykola@chnu.edu.ua*

1 Вступ

Вивчення множини точок розриву нарізно неперервної функції (тобто функції двох і більше змінних, які неперервні відносно кожної змінної) беруть свій початок з дисертації Р.Бера [1]. Ці дослідження продовжились і розвивались багатьма математиками (див. [2] і вказану там літературу). Зауважимо, що повний опис множини точок розриву одержаний лише у наступних двох випадках: для нарізно неперервних функцій на добутку n метризовних просторів [3], і для нарізно неперервних функцій на добутку n просторів, кожен з яких є добутком сепарабельних метризовних просторів [4].

Окремий інтерес викликають дослідження нарізно неперервних функцій та їх аналогів з одноточковою множиною розривів. Ця тематика розвивалась у роботах [2], [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Зокрема, у [6] були одержані необхідні і достатні умови існування нарізно неперервної функцій з одноточковими розривами на добутку двох компактних просторів. У [7] цей результат був узагальнений на випадок функцій багатьох змінних.

З іншого боку, у [9] було виявлено, що існування нарізно неперервної функцій з даними одноточковими розривами типу G_δ тісно пов'язано з властивостями P-фільтрів,

---

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C05, 54C08, 54A35, 03E35,03E50, 03E65.

© Козловський М.Р., 2024

а відповідь на це питання не залежить ZFC-аксіом. В той же час у [10] було узагальнено даний результат на випадок сильно нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутку цілком регуляних просторів і показано, що для довільної кількості відповідних просторів існування відповідної сильно нарізно неперервної функції також рівносильне тому, що довільні два P-фільтри із $\mathcal{F}$ є майже когерентними.

Сильно нарізно неперервна функція n змінних – це функція, яка неперервна відносно кожної сукупності $n-1$ змінних, тобто функція, як при фіксованому значенні однієї змінної є неперервною відносно решти змінних. Зрозуміло, що для функції двох змінних сильна нарізна неперервність збігається з нарізною неперервністю, а у загальному випадку кожна сильно нарізно неперервна функція n змінних є нарізно неперервною.

Оскільки існування сильно нарізно неперервної функції – це сильніша умова за існування нарізно неперервної функції, то виникає питання чи можна також послабити умову майже когерентності P-фільтрів. В дані роботі ми покажемо, що існування нарізно неперервної функції n змінних із одноточковим розривом рівносильне тому, що із довільних n P-фільтрів хоча б два є майже когерентними.

2 Майже когерентність P-фільтрів – необхідна умова

Непорожня система $\mathcal{A}$ непорожніх підмножин множини S називається фільтром на S, якщо виконуються наступні умови:
1) $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ для довільних $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$;
2) якщо $A \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq B \subseteq S$, то $B \in \mathcal{A}$.

Фільтр $\mathcal{A}$ на множині S називається P-фільтром, якщо для довільної послідовності $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ множин $A_m \in \mathcal{A}$ існує множина $A \in \mathcal{A}$, така, що множина $A \setminus A_m$ скінчена для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Фільтри $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ на множині S називаються майже когерентними, якщо існує відображення $\varphi : S \to S$ таке, що множина $\varphi^{-1}(s)$ – скінчена для кожного $s \in S$ і $\varphi(A) \cap \varphi(B) \neq \varnothing$ для довільних $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Позначимо через $\mathcal{F}$ сукупність усіх фільтрів x на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ таких, що для довільних $A, B \subseteq \mathbb{N}$ зі скінченою різницею $A \triangle B$ якщо $A \in x$, то $B \in x$. Зрозуміло, що фільтр x на множині $\mathbb{N}$ входить у $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\{k \in \mathbb{N} : k \geq m\} \in x$$

для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Для кожного $x \in \mathcal{F}$ через $\mathbb{N}_x$ будемо позначати простір $\mathbb{N} \cup \{x\}$, в якому всі точки $m \in \mathbb{N}$ є ізольованими, а множина $A \cup \{x\}$, де $A \subseteq \mathbb{N}$, є околом точки x в $\mathbb{N}_x$ тоді і тільки тоді, коли $A \in x$.

Для довільного $n \geq 2$ фільтри $x_1, ..., x_n$ на множині S називаються *майже когерентними*, якщо існує відображення $\varphi : S \to S$ таке, що множина $\varphi^{-1}(s)$ – скінчена для кожного $s \in S$ і $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \neq \varnothing$ для довільної $A_i \in x_i$ для кожного $1 \leq i \leq n$.

Розглянемо твердження, яке дає зв'язок між майже когерентністю двох і n фільтрів.

Твердження 1. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – довільні фільтри на множині S такі, що існує пара фільтрів x_i, x_j, які не є майже когерентними. Тоді $x_1, ..., x_n$ не є майже когерентними.*

Доведення. Оскільки x_i, x_j не є майже когерентними, то для довільного відображення $\varphi : S \to S$ такого, що множина $\varphi^{-1}(s)$ – скінчена для кожного $s \in S$, існують $A_i \in x_i$ і $A_j \in x_j$ такі, що $\varphi(A_i) \cap \varphi(A_j) = \varnothing$. Тоді і для довільних множин $B_k \in x_k$ для кожного $1 \leq k \leq n, k \notin \{i, j\}$ маємо

$$\varphi(A_i) \cap \varphi(A_j) \cap \Big(\bigcap_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \notin \{i,j\}}} \varphi(B_k) \Big) = \varnothing,$$

а, отже, $x_1, ..., x_n$ не є майже когерентними □

Твердження 2. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – P-фільтри із $\mathcal{F}$, які попарно не є майже когерентними, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ є сильно нарізно неперервною.*

Доведення. Доводимо методом математичної індукції. Очевидно, що при $n = 2$ твердження виконується. Припустимо, що воно вірне для $n - 1 \geq 2$ фільтрів і доведемо, що твердження вірне для n фільтрів.

Для довільного $1 \leq i \leq n$ зафіксуємо довільну точку $u_i \in X_i$ і розглянемо функцію $f_{u_i} : \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} X_j \to \mathbb{R}$ означену наступним чином

$$f_{u_i}(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n) = f(u_1, ..., u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, ..., u_n).$$

Оскільки f є нарізно неперервною, то функція f_{u_i} також є нарізно неперервною і згідно із припущенням індукції, вона буде сильно нарізно неперервною.

Оскільки фільтри $x_1, ..., x_n$ попарно не є майже когерентними, то згідно із лемою 1 фільтри $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n$ не є майже когерентними. Враховуючи це і те, що f_{u_i} є сильно нарізно неперервною, згідно із теоремою 2 [10] маємо, що f_{u_i} є неперервною. Враховуючи довільність вибору точки u_i і довільність вибору індексу змінної, ми отримали, що функція f є сильно нарізно неперервною. □

Для функції f через $D(f)$ ми позначаємо множину точок розриву цієї функції.

Наступна теорема є основним результатом даного розділу. Вона показує, що майже когерентність хоча б двох P-фільтрів є необхідною умовою для існування нарізно неперервної функції з одноточковим розривом.

Теорема 1. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – P-фільтри із $\mathcal{F}$ та існує нарізно неперервна функція $f : \prod_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{x_i} \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Тоді із P-фільтрів $x_1, ..., x_n$ можна вибрати два, які є майже когерентними.*

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто фільтри $x_1, ..., x_n$ попарно не є майже когерентними. Тоді із леми 1 отримуємо, фільтри $x_1, ..., x_n$ не є майже когерентними. Також із леми 2 отримуємо, що функція f є сильно нарізно неперервною. Тоді згідно із теоремою 2 [10] функція f є неперервною, а це суперечить умові твердження. Отже, наше припущення не вірне і із P-фільтри $x_1, ..., x_n$ є хоча б два, які є майже когерентними. □

3 Нарізно неперервні функції на добутку n спеціальних просторів

У даному розділі ми продовжимо розгляд нарізно неперервних функцій на добутку n просторів N_{x_i} і одержимо повне розв'язання задачі про побудову нарізно неперервної функції з одноточковим розривом $\{(x_1, ..., x_n)\}$.

Спочатку розглянемо твердження, яке для просторів $\mathbb{N}_{x_i}$ показує можливість побудови нарізно неперервної функції n змінних, якщо існує нарізно неперервна функція $n-1$ змінних.

Твердження 3. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – фільтри із $\mathcal{F}$, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$, та існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_1, ..., x_{n-1})\}$. Тоді існує нарізно неперервна функція $g : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(g) = \{(x_1, ..., x_n)\}$.*

Доведення. Для кожного $1 \leq i \leq n-1$ і для довільного $k \in \mathbb{N}$ покладемо $U_{i,k} = ([k, +\infty) \cap \mathbb{N}) \cup \{x_i\}$ і $W_k = \prod\limits_{i=1}^{n-1} U_{i,k}$. Виходячи із побудови маємо, що W_k є відкрито замкнена у $\prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і $\{x_1, .., x_{n-1}\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} W_k$.

Для довільного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо функцію $h_k : \prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$h_k(u_1, ..., u_{n-1}) = \begin{cases} f(x_1, ..., x_{n-1}) & , (u_1, ..., u_{n-1}) \in W_k, \\ f(u_1, ..., u_{n-1}) & , (u_1, ..., u_{n-1}) \notin W_k. \end{cases}$$

Із побудови функції h_k і того, що W_k відкрито-замкнена множина, випливає, що $D(h_k) \subseteq D(f) = \{(x_1, ..., x_{n-1})\}$. В той же час $(x_1, ..., x_{n-1}) \in W_k$. Враховуючи, що множина W_k є відкрито-замкненою і h_k дорівнює сталому значенню на W_k, маємо, що h_k неперервна в $(x_1, ..., x_{n-1})$. Отже, функція h_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$.

Тепер розглянемо функцію $g : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$g(u_1, ..., u_n) = \begin{cases} h_{u_n}(u_1, ..., u_{n-1}) & , u_n \in \mathbb{N}, \\ f(u_1, ..., u_{n-1}) & , u_n = x_n. \end{cases}$$

Покажемо, що g є нарізно неперервна із $D(g) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Спочатку доведемо, що g неперервна відносно кожної змінної u_i, де $1 \leq i \leq n-1$. Для цього потрібно показати, що для кожного фіксованого $u_n \in X_n$ функція g_{u_n} є нарізно неперервною. Якщо $u_n \in \mathbb{N}$,

то функція $g_{u_n} = h_{u_n}$ і тому g_{u_n} є неперервною. Якщо ж $u_n = x_n$, то $g_{u_n} = f$ і g_{u_n} є нарізно неперервною.

Тепер доведемо, що функція g є неперервною відносто n-тої змінної. Зафіксуємо точку $(u_1, ..., u_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} X_i$ і розглянемо відповідну функцію $g_{(u_1,...,u_{n-1})} : X_n \to \mathbb{R}$ означену наступним чином

$$g_{(u_1,...,u_{n-1})}(u_n) = g(u_1, ..., u_{n-1}, u_n).$$

Оскільки кожна точка $u_n \in \mathbb{N}$ є ізольованою в X_n, то $g_{(u_1,...,u_{n-1})}$ непервна в даній точці. Тепер покажемо, що функція неперервна у точці x_n. Якщо $(u_1, ..., u_{n-1}) = (x_1, ..., x_{n-1})$, то $g_{(x_1,...,x_{n-1})}(u_n) = f(x_1, ..., x_{n-1})$ для довільного $u_n \in X_n$, тому ця функція є неперервною. Якщо $(u_1, ..., u_{n-1}) \neq (x_1, ..., x_{n-1})$, то покладемо $k = \min(\{u_1, .., u_{n-1}\} \cap \mathbb{N}) + 1$ і розглянемо окіл $U_n = ([k, +\infty) \cap \mathbb{N}) \cup \{x_n\}$ точки x_n. Тоді $(u_1, ..., u_{n-1}) \notin W_{u_n}$ для довільного $u_n \in U_n$ і тому $g_{(u_1,...,u_{n-1})}(u_n) = f(u_1, ..., u_{n-1})$. Отже, $g_{(u_1,...,u_{n-1})}$ є неперервною в x_n.

Таким чином, g є нарізно неперервною. Тепер покажемо, що $D(g) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Оскільки $D(f) = \{(x_1, .., x_{n-1})\}$ і $g_{x_n} = f$, то функція g розривна в точці $(x_1, ..., x_n)$.

Покажемо, що g є неперервною у кожній точці $(u_1, ..., u_n) \neq (x_1, ..., x_n)$. Оскільки $(u_1, ..., u_n) \neq (x_1, ..., x_n)$, то існує $1 \leq i \leq n$ таке, що $u_i \in \mathbb{N}$. Спочатку розглянемо випадок, коли $i = n$. Тоді $g(u_1, ..., u_n) = h_{u_n}(u_1, ..., u_{n-1})$. Оскільки u_n ізольована точка і функція h_{u_n} неперервна, то функція g неперервна в точці $(u_1, ..., u_n)$.

Тепер розглянемо випадок, коли $1 \leq i < n$. Без втрати загальності вважатимемо, що $i = 1$, тобто $u_1 \in \mathbb{N}$. Також будемо вважати, що $u_n = x_n$, оскільки випадок, коли це не так ми вже розглянули. Покладемо окіл $U_n = ([u_1 + 1, +\infty) \cap \mathbb{N}) \cup \{x_n\}$ точки u_n і розглянемо окіл $U = \{u_1\} \times \prod_{j=1}^{n-1} X_j \times U_n$ точки $(u_1, ..., u_n)$. Тоді $(v_1, .., v_{n-1}) \notin W_{v_n}$ для довільної точки $(v_1, ..., v_n) \in U$ і тому $g(v_1, .., v_n) = f(v_1, .., v_{n-1})$. Оскільки $u_1 \in \mathbb{N}$, то функція f неперервна в точці $(u_1, .., u_{n-1})$. Отже, і функція g неперервна в точці $(u_1, .., u_n)$.

Таким чином, $D(g) = \{(x_1, ..., x_n)\}$ □

Із отриманого твердження за допомогою методу математичної індукції очевидно випливає наступне твердження.

Твердження 4. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – фільтри із $\mathcal{F}$, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$, та для $1 \leq i \neq j \leq n$ існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_i, x_j)\}$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$.*

Також розглянемо наступне допоміжне твердження.

Твердження 5. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – фільтри із $\mathcal{F}$, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$, такі, що не існує нарізно неперервної функції $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Тоді*

(a) $x_1, ...x_n$ є P-фільтрами;

(b) $x_1, .., x_n$ попарно не є майже когерентними.

Доведення. Припустимо, що умова (a) не виконується, тобто хоча б одне x_i не є P-фільтром. Тоді візьмемо довільний інший фільтр x_j. З теореми 5.3.1 [11] випливає, що існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$ із $D(g) = \{(x_i, x_j)\}$.

Якщо ж виконується умова (a), а умова (b) не виконується, тобто всі $x_1, ..., x_n$ є P-фільтрами, і ми можемо вибрати x_i, x_j такі, що x_i, x_j є майже когерентними. Тоді згідно із теоремою 5.3.1 [11] існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$ із $D(g) = \{(x_i, x_j)\}$.

Отже, в будь-якому випадку ми можемо обрати різні i та $_j$ такі, що існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$ із $D(g) = \{(x_i, x_j)\}$. Тоді із твердження 4 отримуємо, що існує $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Отримали суперечність із умовою теореми, отже, умови (a) та (b) виконуються. □

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови на існування нарізно неперервної функції із одноточковою множиною розривів для просторів $\mathbb{N}_{x_i}$.

Теорема 2. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – фільтри із $\mathcal{F}$, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) існує нарізно неперервна функція $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$;

(ii) хоча б один з фільтрів $x_1, ..., x_n$ не є P-фільтром або існують два фільтри, які є майже когерентними.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що (ii) не виконується. Тоді, зокрема $x_1, ..., x_n$ є P-фільтрами. Тоді згідно із теоремою 1 із $x_1, ..., x_n$ можна вибрати два фільтри, які є майже когерентними. Отримали суперечність із нашим припущенням, і, отже, умова (ii) виконується.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що (i) не виконується. Тоді згідно із твердженням 5 $x_1, ..., x_n$ є P-фільтрами, які не є майже когерентними. А це суперечить умові (ii). Отже, наше припущення невірне і умова (i) виконується. □

4 Випадок цілком регулярних просторів

Як у попередньому розділі, спочатку розглянемо твердження, яке для цілком регулярних просторів показує можливість побудови нарізно неперервної функції n змінних, якщо існує нарізно неперервна функція $n - 1$ змінних.

Твердження 6. *Нехай $k \geq 2$, $X = \prod_{i=1}^{k} X_i, Y$ – цілком регулярні простори, $x_0 = (x_{10}, ..., x_{k0})$ – G_δ-точка у просторі X, y_0 – неізольована G_δ-точка у просторі Y та існує нарізно неперервна функція $g : X \to \mathbb{R}$ така, що $D(g) = \{x_0\}$.*

Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$.

Доведення. Оскільки $x_0, y_0 \in G_\delta$-точками у відповідних цілком регулярних просторах, то згідно із твердженням 5.3.7 [11] існують неперервні функції $\varphi : X \to [0, 1], \psi : Y \to [0, 1]$ такі, що $\{x_0\} = \varphi^{-1}(0), \{y_0\} = \psi^{-1}(0)$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини $U_n = \varphi^{-1}\left([0, \frac{1}{n})\right), V_n = \varphi^{-1}\left([0, \frac{1}{n}]\right)$. Оскільки φ неперервна, то U_n – відкрита множина і V_n – замкнена множина для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Виходячи із того, що φ неперервна і того, як ми обирали U_n, V_n, легко побачити, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $\varphi_n : X \to [0,1]$ така, що $\varphi_n(X \setminus U_n) = \{0\}$ і $\varphi_n(V_{n+1}) = \{1\}$. Тоді розглянемо функцію $g_n : X \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$g_n(x) = \varphi_n(x)g(x_0) + (1 - \varphi_n(x))g(x).$$

Тоді

$$g_n|_{V_{n+1}} = g(x_0), g_n|_{X \setminus U_n} = g(x).$$

Крім того, g_n неперервна на $X \setminus \{x_0\}$, як сума неперервних, і неперервна в точці x_0, оскільки є сталою на околі цієї точки.

Тепер для $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини $G_n = \psi^{-1}\left([0, \frac{1}{n})\right), F_n = \psi^{-1}\left([0, \frac{1}{n}]\right)$, які відповідно є функціонально відкритими і функціонально замкненими у Y. Також для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $\alpha_n : Y \to [0,1]$ така, що

$$\alpha_n|_{F_{n+1}} = 1, \alpha_n|_{Y \setminus G_n} = 0.$$

Також покладемо $G_0 = Y$ і $\alpha_0 : Y \to [0,1]$: $\alpha_0(y) = 1$.

Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$f(x,y) = \begin{cases} (1 - \alpha_n(y))g_n(x) + \alpha_n(y)g_{n+1}(x) & , y \in G_n \setminus G_{n+1}, \\ g(x) & , y = y_0. \end{cases}$$

Покажемо, що f шукана. Нехай $(x', y') \in X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Покажемо, що тоді f неперервна в точці (x', y').

Нехай $y' \neq y_0$. Тоді існує такий номер $n \geq 0$, що $y' \in G_n \setminus F_{n+2}$. Оскільки $\alpha_{n+1}(y) = 0$ для довільного $y \in G_n \setminus G_{n+1}$ і $\alpha_n(y) = 1$ для довільного $y \in G_{n+1} \setminus G_{n+2}$, то нескладно отримати, що

$$f(x,y) = (1 - \alpha_n(y))g_n(x) + (\alpha_n(y) - \alpha_{n+1}(y))g_{n+1}(x) + \alpha_{n+1}(y)g_{n+2}(x)$$

для довільного $(x,y) \in X \times (G_n \setminus F_{n+2})$. Отримали, що f неперервна на відкритому околі $X \times (G_n \setminus F_{n+2})$ точки (x', y') як сума неперервних. Отже, в даному випадку f неперервна в точці (x', y').

Тепер нехай $y' = y_0$ і $x' \neq x_0$. Візьмемо найменший номер n такий, що $x' \in X \setminus V_n$, причому множина $X \setminus V_n$ відкрита і є околом точки x'. Для кожного $m \geq n$ і $x \in X \setminus V_n$ маємо, що $g_m(x) = g(x)$. Тоді $f(x,y) = g(x)$ для довільної точки $(x,y) \in (X \setminus V_n) \times G_n$. Оскільки $D(g) = \{x_0\}$, то f неперервна на околі $(X \setminus V_n) \times G_n$ точки (x', y') і тому f неперервна в (x', y').

Отже, f неперервна функція у кожній точці $(x', y') \in X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Покажемо, що $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$. Оскільки $D(g) = \{x_0\}$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного окола U точки x_0 існує точка x така, що $|g(x) - g(x_0)| > \varepsilon$. Існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $x \in U_n$

і $g_n(x) = g(x)$. Нехай V – довільний окіл точки y_0. Візьмемо $y \in V \cup G_n$. Враховуючи вибір номера n маємо, що $f(x, y) = g(x)$ і тоді

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |g(x) - g(x_0)| > \varepsilon.$$

Отже, f розривна у точці (x_0, y_0).

Залишилось показати, що f нарізно неперервна. Достатньо перевірити, що f неперервна відносно кожної змінної в точці (x_0, y_0). Оскільки $f(x, y_0) = g(x)$ для кожної точки $x \in X$ і функція g нарізно неперервна, то функція f неперервна відносно кожної змінної x_i в точці (x_0, y_0). Крім того, $f(x_0, y) = g(x_0)$ для кожного $y \in Y$. Тому f неперервна відносно y в точці (x_0, y_0). □

Індукцією відносно кількості змінних одержуємо наступне твердження.

Твердження 7. *Нехай $n \geq 2$, $X_1, ..., X_n$ – цілком регулярні простори, x_{i0} – неізольована G_δ-точка у просторі X_i, та для $1 \leq k < m \leq n$ існує нарізно неперервна функція $g : X_k \times X_m \to \mathbb{R}$ така, що $D(g) = \{(x_{k0}, x_{m0})\}$.*

Тоді існує нарізно неперервна функція $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$.

Тепер розглянемо теорему, яка дає достатні умови на існування нарізно неперервної функції із одноточковою множиною розривів.

Теорема 3. *Нехай $n \geq 2$, $X_1, ..., X_n$ – цілком регулярні простори, x_{i0} неізольована G_δ-точка у просторі X_i для кожного $i \leq n$, і для довільних n P-фільтрів з $\mathcal{F}$ існують два, які є майже когерентними.*

Тоді існує нарізно неперервна функція $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$.

Доведення. Згідно із твердженням 5.3.7 [11] для кожного $i \leq n$ існує неперервна функція $\varphi_i : X_i \to [0, 1]$ така, що $\{x_{i0}\} = \varphi_i^{-1}(0)$.

Спочатку розглянемо випадок, коли існує хоча б один номер i такий, що для довільного окілу U_i точки x_{i0} множина $\varphi_i(U_i)$ є околом 0 в $[0, 1]$. Візьмемо $j \neq i$ і розглянемо функцію $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$, визначену наступним чином

$$g(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{2\varphi_i(x_i)\varphi_j(x_j)}{\varphi_i^2(x_i)+\varphi_j^2(x_j)} & , (x_i, x_j) \neq (x_{i0}, x_{j0}), \\ 0 & , (x_i, x_j) = (x_{i0}, x_{j0}). \end{cases}$$

Доволі легко зрозуміти, що g є нарізно неперервною функцією із $D(g) = \{(x_{i0}, x_{j0})\}$. Тоді згідно із твердженням 7 маємо, що існує нарізно неперервна функція $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$.

Тепер розглянемо випадок, коли не існує такого i, що для довільного околу U_i точки x_{i0} множина $\varphi_i(U_i)$ є околом 0 в $[0, 1]$, тобто для кожного $1 \leq i \leq n$ існує відкритий окіл U_{i0} точки x_{i0} такий, що $\varphi_i(U_{i0})$ не є околом нуля в $[0, 1]$. Тоді згідно із лемою 5.3.9 [11] для кожного $1 \leq i \leq n$ існує спадна послідновність $(F_{im})_{m=1}^{\infty}$ відкрито-замкнених

множин F_{im} в просторі U_{i0} така, що $F_{i1} = U_{i0}$ і $\{x_{i0}\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_{im}$ причому, оскільки x_{i0} не є ізольованою, то послідовність можна обрати строго спадною.

Тепер для кожного $1 \leq i \leq n$ розглянемо сюр'єктивне відображення $\psi_i : U_{i0} \setminus \{x_{i0}\} \to \mathbb{N}$, означене формулою: $\psi_i(F_{im} \setminus F_{i,m+1}) = \{m\}$. Також для кожного $1 \leq i \leq n$ розглянемо системи $u_i = \{\psi_i(U \setminus \{x_{i0}\}) : U-$ окіл точки $x_{i0}\}$, які утворюють фільтри із $\mathcal{F}$.

Для кожного $1 \leq i \leq n$ довизначимо відображення ψ_i наступним чином: $\psi_i(x_{i0}) = u_i$. Отримали відображення $\psi_i : U_{i0} \to \mathbb{N}_{u_i}$, яке за побудовою неперервне в точці x_{i0}. Крім того, оскільки $F_{im} \setminus F_{i,m+1}$ відкрито замкнені, то відображення ψ_i неперервне у всіх точках множини $U_{i0} \setminus \{x_{i0}\}$.

Згідно із умовою для довільних n P-фільтрів із $\mathcal{F}$ існують два, які є майже когерентні. Тому згідно із теоремою 2 існує нарізно неперервна функція $s : \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{u_i} \to \mathbb{R}$ така, що $D(s) = \{(u_1, ..., u_n)\}$.

Розглянемо функцію $\varphi_0 : \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0} \to [0, 1]$, означену наступним чином

$$\varphi_0(x_1, ..., x_n) = s(\psi_1(x_1), ..., \psi_n(x_n)).$$

Оскільки функція s є нарізно неперервною, то φ_0 також є нарізно неперервною. Крім того, φ_0 неперервна в кожній точці множини $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}\right) \setminus \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$ як композиція неперервних функцій.

Разом із тим, для кожного $1 \leq i \leq n$ для довільного околу U_i точки x_{i0} множина $\psi_i(U_i)$ є околом точки u_i в просторі $\mathbb{N}_{u_i}$. Звідси маємо, що

$$\omega_{\varphi_0}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right) = \omega_s\left(\prod_{i=1}^{n} \psi_i(U_i)\right) \geq \omega_s(u_1, ..., u_n)$$

.

Тому φ_0 розривна в точці $(x_{10}, ..., x_{n0})$ і $D(\varphi_0) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$.

Використовуючи цілковиту регулярність простору $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, виберемо неперервну функцію $\theta : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to [0, 1]$ таку, що $\theta(x_{10}, ..., x_{n0}) = 1$ і $\theta(x_1, ..., x_n) = 0$, якщо $(x_1, ..., x_n) \notin \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}$.

Тепер розглянемо функцію $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \theta(x_1, ..., x_n)\varphi_0(x_1, ..., x_n) & , (x_1, ..., x_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}, \\ 0 & , (x_1, ..., x_n) \notin \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}. \end{cases}$$

Згідно із твердженням 5.3.10 [11] $D(f) = D(\varphi_0) \cap \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}$, а, отже, функція f є нарізно неперервною і $D(f) = \{(x_{i0}, ..., x_{n0})\}$. Тобто f шукана функція. □

Із теорем 2 і 3 отримуємо теорему, яка є основним результатом.

Теорема 4. *Для кожного натурального $n \geq 2$ наступні умови рівносильні:*
(i) для довільних цілком регулярних просторів $X_1, ..., X_n$ з неізольованими G_δ-точками x_{i0} у відповідних просторах X_i існує нарізно неперервна функція $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$;
(ii) для довільних n P-фільтрів з $\mathcal{F}$ існують два, які є майже когерентними.

Список літератури

1. Baire R. *Sur les fonctions de variables reélles*, Ann. Mat. Pura Appl. 1899, ser. 3. (3), 105-126.
2. Maslyuchenko O.V., Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Paracompactness and separately continuous mappings*, General topology in Banach spaces. 2001, 147-169.
3. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V *Characterization of sets of discontinuity points of separately continuous functions of several variables on products of metrizable spaces*, . Ukrainian Math. J. 2000, **52** (6), 740-747. doi:10.1007/BF02591779 (In Ukrainian).
4. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V. *Separately continuous functions of many variables on product spaces which are products of metrizable multipliers*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2004, **1**, 77-84. doi:10.48550/arXiv.1512.08606 (In Ukrainian).
5. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Inverse problems in the theory of separately continuous images* Ukrainian Math. J. 1992, **44** (9), 1209-1220. doi:10.1007/BF01058371 (In Ukrainian).
6. Mykhaylyuk V.V. *One-point discontinuities of separately continuous functions on the product of two compact spaces*, Ukrainian Math. J. 2005, **57** (1), 94-101. (In Ukrainian)
7. Kozlovskyi, M. *One-point discontinuity of separately continuous functions of several variables on a product of compact spaces*, Proceedings of the International Geometry Center 2023, **16** (2), 105-115. doi:10.15673/pigc.v16i2.2451 (In Ukrainian).
8. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. Investigations on separately continuous mapppings. Proc. of the Intern. Sci. Conf Dedicated to Hans Hahn memory, Chernivtsi, Ukraine, Ruta Chernivtsi, 1995, 192-246. (In Ukrainian)
9. T. O. Banakh. O. V. Maslyuchenko. V. V. Mykhaylyuk. *Discontinuous Separately Continuous Functions and Near Coherence of P-Filters.* Real Anal. Exchange 2007, **32** (2) 335 - 348.
10. Kozlovskyi, M. *Discontinuous strongly separately continuous function of several variable and near coherence of two P-filters*, Carpathian Mathematical Publications (Accepted to publish)
11. Mykhaylyuk V.V. Set of discontinuity points of separately continuous functions for two variables: monograph, Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2021, 156 c. (In Ukrainian).

Надійшло 06.09.2024

Kozlovskyi M.R. *Characterization of one-point set of discontinuous of separately continuous functions of several variable*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 63–73.

Investigations of the discontinuity points set of separately continuous functions of two or many variables (i.e. functions that are continuous with respect to each variable) were started in Rene Baire's dissertation [1] and these investigations have been continued and developed by many mathematicians. Investigations of separately continuous functions and their analogs with one-point set of points of discontinuity are of particular interest. It was proved in [9] that the

existence of separately continuous functions with given one-point set of points of discontinuity of G_δ type is closely related to the properties of P-filter, and the answer to this question is independent of ZFC. It was proved in the [10] that the existence of a strongly separately continuous function $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{R}$ on the product of arbitrary completely regular spaces X_k with an one-point set $\{(x_1, ..., x_n)\}$ of points of discontinuity where x_k is non-isolated G_δ-point in X_k, is equivalent to NCPF (Near Coherence of P-filters). Strongly separately continuous function of n variables is a function that for any fixed one variable is continuous with respect to other variables. It is clear that for the function of two variables strong separate continuity is equivalent to the separate continuity. In general each strongly separately continuous functions is separately continuous. But the existence of strongly separately continuous function is stronger than the existence of separately continuous function. In this paper we consider question what is necessity and sufficiency for existence a separately continuous function on the product of arbitrary completely regular spaces X_k with an one-point set $\{(x_1, ..., x_n)\}$ of points of discontinuity where x_k is non-isolated G_δ-point in X_k. First we prove that for We prove that the existence of such function is equivalent to the fact that for any n P-filters there exist two that are near coherent.

Маценко В.Г.

АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ СКЕЛЛАМА ІЗ ЖОРСТКОЮ СТРАТЕГІЄЮ ЗБОРУ ВРОЖАЮ

Розглянуто дискретні моделі Скеллама із жорсткою інтенсивністю збору врожаю. Досліджено існування стаціонарних і періодичних розв'язків та їх стійкість. Наведено комп'ютерні розрахунки розв'язків дискретних рівнянь.

Ключові слова і фрази: модель Скеллама, модель збору врожаю, стійкість стаціонарних розв'язів.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *v.matsenko@chnu.edu.ua*

Вступ

Значна кількість математичних моделей в екології формулюється у вигляді дискретних рівнянь [1, 2, 3, 4, 5]. Зокрема, вони виникають при описі динаміки чисельності біологічних популяцій, у яких послідовні покоління не перекриваються (хоча можуть і перекриватися) і ріст їх чисельності відбувається в дискретні моменти часу (народжуваність має дискретний характер). До таких популяцій можна віднести багато видів комах з однорічною генерацією. Їх дорослі особини живуть недовго й до появи на світ нового покоління припиняють своє існування.

У простішому випадку дискретні моделі задаються рівнянням вигляду

$$N_{t+1} = F(N_t),\ t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

де $F(\cdot)$ – гладка функція дійсного аргументу, яка відображає простір R^+ в R^+, $R^+ = [0, \infty)$.

Задача полягає в знаходженні розв'язку N_1, N_2, ... при заданому $N_0 > 0$. В аналітичному вигляді, як правило, не вдається знайти розв'язки рівняння (1). Проте можна відшуковувати стаціонарні та періодичні розв'язки і досліджувати їх на стійкість.

Серед таких рівнянь в екології найвідоміші дискретна логістична модель, модель Рікера, модель Скеллама та її узагальнення.

УДК 519.87:574.3
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

© Маценко В.Г., 2024

У дискретних моделях знання про характер процесів вимирання й народжування виражається в єдиному популяційному показнику – коефіцієнті природного відтворення (або коефіцієнті розмноження)

$$f_t = \frac{N_{t+1}}{N_t},$$

де N_t – чисельність популяції в момент часу t, при цьому $F(N_t) = f_t \cdot N_t$.

Коефіцієнт природного відтворення чисельно дорівнює середній кількості потомків, яка припадає на одну особину, що існувала в момент часу t.

Якщо припустити, що вплив саморегулюючих внутріпопуляційних механізмів із ростом чисельності N_t тільки посилюється, то коефіцієнт розмноження f_t вибирають у вигляді монотонних функцій. У дискретній логістичній моделі коефіцієнт розмноження являє собою спадну лінійну функцію, в моделі Рікера – монотонно спадну експоненту. Ці моделі володіють досить різноманітним набором динамічних режимів. Окрім режимів із монотонною стабілізацією чисельності популяції можуть виникати циклічні й хаотичні режими [1, 5].

Якщо коефіцієнт розмноження вибрати у вигляді монотонно спадної гіперболічної функції, то одержуємо модель Скеллама. Модель Скеллама була запропонована в 1951 р. в праці [2] і відтоді широко використовується для опису динаміки чисельності популяцій із дискретною народжуваністю [3, 4].

Оскільки людина в своїй діяльності використовує різні природні ресурси, важливо, щоб експлуатація популяцій не призводила до їх знищення, а відбувалося відновлення природного ресурсу.

При жорсткій стратегії збору врожаю за одиницю часу відбирається постійна кількість особин або біомаси. Тоді рівняння, які описують динаміку популяцій з такою стратегією відбору, мають вигляд

$$N_{t+1} = F(N_t) - c(\alpha), \tag{2}$$

де $c(\alpha)$ – інтенсивність відбору, а параметр α характеризує цю інтенсивність.

Задача моделювання полягає в тому, щоб установити таку швидкість збору врожаю, яка буде підтримувати популяцію в стані приросту.

У [5] розглянута стратегія збору постійного врожаю для дискретної логістичної моделі та моделі Рікера. У цій праці вивчаються моделі збору врожаю в популяціях, динаміка чисельності яких описується рівняннями Скеллама. На початку наведемо необхідний аналіз моделі Скеллама та її узагальнень.

1 Аналітичний аналіз моделей Скеллама

Модель Скеллама має вигляд [2]

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t},\ a, b > 0,\ t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Параметр a тут відіграє роль найбільшого значення коефіцієнта розмноження, а коефіцієнт b описує вплив саморегулюючих механізмів на популяційну динаміку.

Для рівняння (3) при $a < 1$ маємо лише тривіальний стаціонарний розв'язок $N_1^* = 0$, а при $a > 1$ з'являється ще й нетривіальний додатний розв'язок $N_2^* = (a-1)/b$.

За лінеаризацією в околі N^* встановлюємо умови стійкості. Для цього знайдемо мультиплікатор нерухомої точки динамічної системи з дискретним часом $\lambda = \left.\dfrac{dF}{dN}\right|_{N^*}$. Якщо $|\lambda| < 1$, то N^* – стійкий (асимптотично), якщо $|\lambda| > 1$, то – нестійкий.

Маємо

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} = a, \quad \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} = \frac{1}{a}.$$

Тому при $a < 1$, $N_1^* = 0$ стійкий і популяція асимптотично вироджується, а при $a > 1$ нульовий розв'язок стає нестійким, проте стає стійким ненульовий розв'язок N_2^* і чисельність популяції прямує до деякого додатного значення (рис. 1).

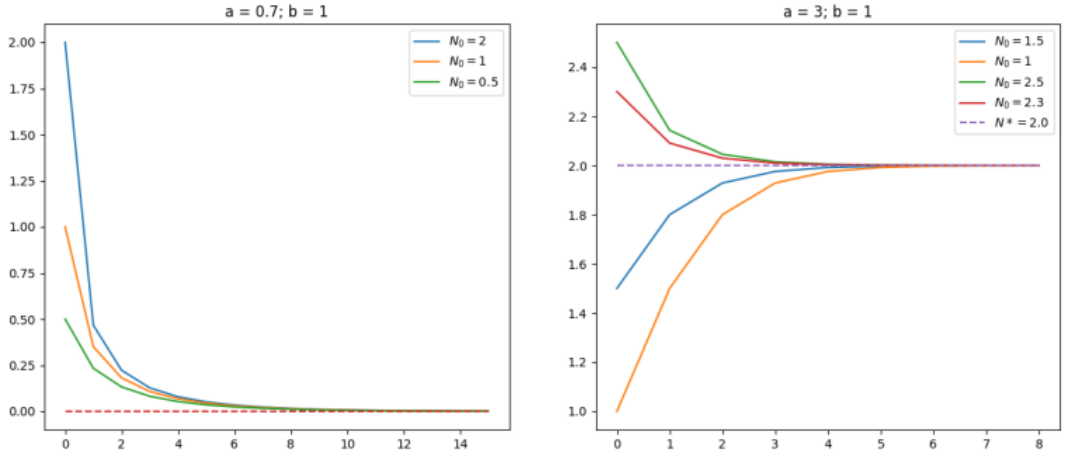


Рис. 1. Графіки розв'язків рівняння (3)

Періодичних розв'язків з періодом $T = 2$ не існує, оскільки з умови $N_{t+2} = N_t$ знаходимо $N_t = \dfrac{a-1}{b}$, що співпадає зі стаціонарним значенням N_2^*. А, отже, за теоремою Шарковського [6] не існує періодичних розв'язків і інших періодів.

Розглянемо ще деякі узагальнення моделі Скеллама. Модифікація моделі Скеллама, що враховує ефект Оллі [1], має вигляд

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b^2 + N_t^2}, \ a, b > 0, \ t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Тут коефіцієнт розмноження $N_t/(b^2 + N_t^2)$ є немонотонною функцією. Немонотонні залежності зустрічаються в популяціях з яскраво вираженою груповою поведінкою і взаємодопомогою, наприклад, у колоніях птахів і тварин, у яких існують групові форми захисту від нападу хижаків та сумісне народжування потомства. Тут при деяких значеннях N_t коефіцієнт розмноження зростає, а далі при зростанні N_t через нестачу ресурсів цей коефіцієнт спадає. Такий тип залежностей називається кривими Оллі.

Стаціонарні стани рівняння (4) знаходимо зі співвідношення $N = aN^2/(b^2 + N^2)$. Звідки одержуємо $N_1^* = 0$, $N_2^* = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, $N_3^* = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Ненульові додатні точки спокою існують за умови $a > 2b$.

Якщо $a < 2b$, то маємо лише тривіальний стаціонарний стан $N_1^* = 0$. Мультиплікатор тривіальної точки $|\lambda| < 1$, тому нульовий розв'язок стійкий (рис. 2). Для нерухомої точки N_2^* маємо

$$0 < \lambda = \frac{2ab^2 N_2^*}{(b^2 + N_2^*)^2} = \frac{4b^2}{a\left(a + \sqrt{a^2 - 4b^2}\right)} < \frac{4b^2}{a^2} = \left(\frac{2b}{a}\right)^2 < 1,$$

що означає стійкість рівноваги N_2^* (рис. 2).

Для рівноваги N_3^* $\lambda > 1$, тобто наявна нестійкість розв'язку N_3^* (рис. 2).

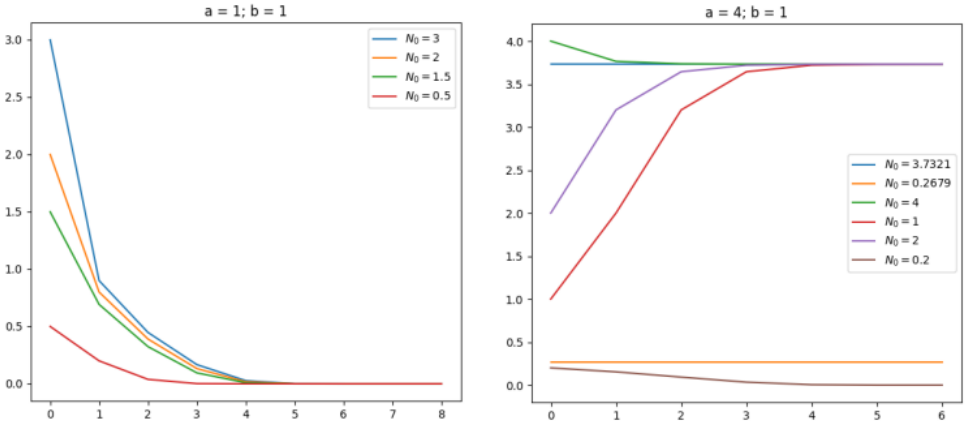


Рис. 2. Графіки розв'язків рівняння (4)

Наявність періодичних розв'язків у рівнянні (4) з періодом $T = 2$ (умова $N_{t+2} = N_t$) зводиться до аналізу існування додатних коренів рівняння

$$(a^2 + b^2)N^2 + ab^2 N + b^4 = 0,$$

яке не має дійсних коренів, оскільки дискримінант $D = -3b^4a^2 - 4b^2 < 0$.

Отже, рівняння (4) не має періодичних розв'язків із періодом $T = 2$, а отже, і періодичних розв'язків будь-якого іншого періоду.

Розглянемо ще один варіант узагальнення моделі Скеллама у вигляді

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t^2}, \ a, b > 0, \ t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Ця модель володіє стаціонарним станом $N_1^* = 0$, а при $a > 1$ з'являється ще ненульовий розв'язок $N_2^* = \sqrt{\dfrac{a-1}{b}}$.

Нульовий розв'язок стійкий при $a < 1$, а при $a > 1$ стійким стає розв'язок N_2^*, тоді як N_1^* перестає бути стійким (рис. 3).

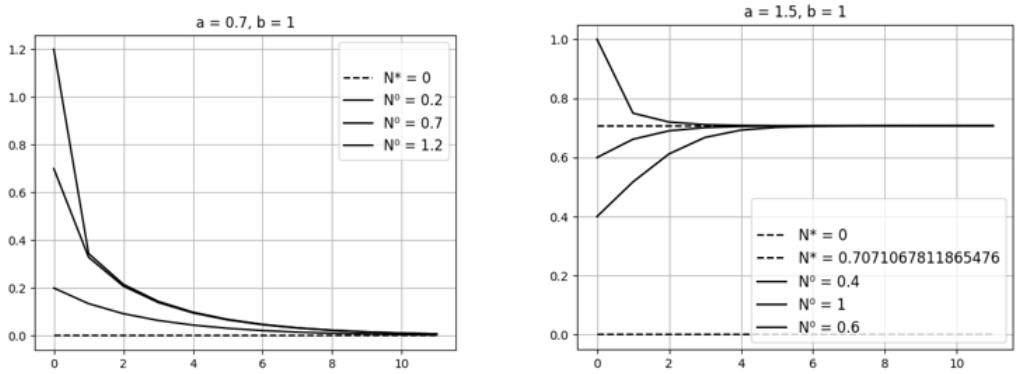


Рис. 3. Графіки розв'язків рівняння (5)

Рівняння (5) теж не має періодичних розв'язків, оскільки з умови $N_{t+2} = N_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ для знаходження значень, що складають періодичні розв'язки, одержуємо рівняння

$$b^2 N^2 + a + 1 = 0,$$

яке не має дійсних коренів.

Розглянемо моделі збору врожаю з жорсткою стратегією в популяціях, динаміка чисельності яких описується рівняннями Скеллама.

2 Аналіз моделей Скеллама зі збором урожаю

Модель (3) зі збором урожаю з постійною інтенсивністю c має вигляд

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t} - c, \;\; a, b, c > 0, \;\; t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Звідси знаходимо стаціонарні розв'язки

$$N^*_{1,2} = \frac{-(1 - a + cb) \pm \sqrt{(1 - a + cb)^2 - 4bc}}{2b}.$$

Додатні стаціонарні стани $N^*_{1,2}$ існують при умові $a > 1 + cb + 2\sqrt{bc}$.

Стійкість $N^*_{1,2}$ перевіряється з умови

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*} = \frac{a}{(1 + bN^*)^2} < 1.$$

Зокрема, при $a = 4$, $b = 1$, $c = 0,5$ маємо

$$N^*_1 = 2,2808, \quad N^*_2 = 0,2192, \quad \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*_1} = 0,34997 < 1, \quad \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*_2} = 2,69098 > 1,$$

тобто N^*_1 – стійкий, а N^*_2 – нестійкий.

Комп'ютерний аналіз розв'язків рівняння (6) наведений на рис. 4. Як видно з графіків, при зборі урожаю з'являється критичне значення чисельності, перейшовши яке популяція приречена на вимирання. При збільшенні квот збору урожаю ($c = 1, 2$) популяція буде знищена за скінченний час.

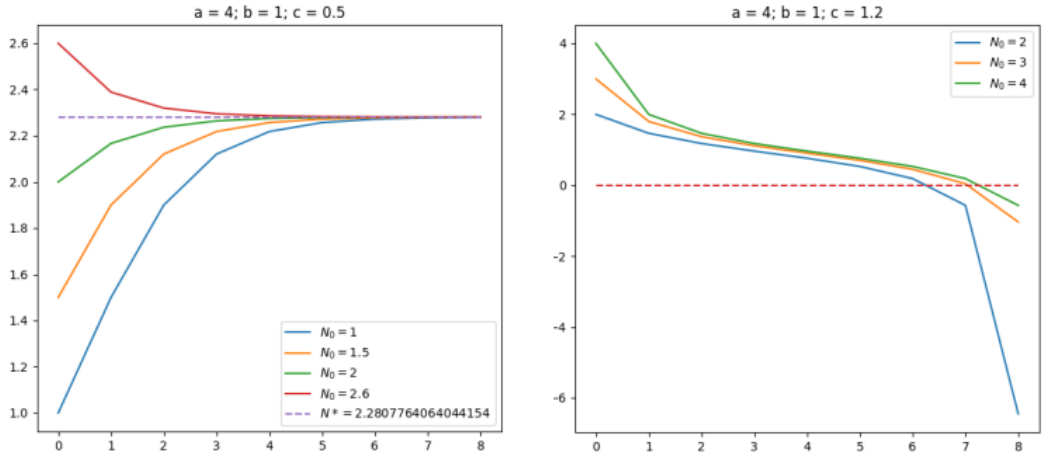


Рис. 4. Поведінка розв'язків моделі Скеллама (6) зі збором урожаю

У випадку збору урожаю в рамках моделі (4) маємо

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b^2 + N_t^2} - c, \;\; a, b, c > 0, \;\; t = 0, 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Для знаходження стаціонарних станів одержуємо рівняння

$$g(N) \equiv N^3 + (c - a)N^2 + b^2 N + cb^2 = 0, \tag{8}$$

корені якого знаходимо числовими методами. Умову стійкості теж перевіряємо через обчислення мультиплікатора в стаціонарних станах.

Зокрема, при $a = 4$, $b = 1$, $c = 0,8$ знаходимо $N_1^* = 2,7254$, $N_2^* = 0,8288$. У цьому випадку мультиплікатори $\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} = 0,307 < 1$, $\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} = 2.33 > 1$, що означає стійкість N_1^* і нестійкість N_2^*.

Проведемо ще аналітичне дослідження розв'язків рівняння (8).

Рівняння (8) має хоча б один від'ємний корінь, оскільки $g(-\infty) = -\infty$, $g(0) = cb^2 > 0$. При $a < c$ додатних коренів не існує, бо всі доданки лівої частини рівняння (8) додатні. Додатні корені можуть існувати лише при $c < a$ $(c - a < 0)$. Тоді, згідно з теоремою Декарта, кількість додатних коренів многочлена дорівнює кількості змін знаків у послідовності його коефіцієнтів, або на парну кількість менша. Оскільки многочлен $g(N)$ при $c < a$ має дві знакозміни в послідовності коефіцієнтів, то існує або два додатних корені або додатних коренів немає. Іноді всі корені будуть від'ємні (або від'ємні їх дійсні частини).

Корені будуть від'ємні, якщо виконані умови критерію Гауса–Гурвіца.

Оскільки головні мінори матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} c - a & 1 & 0 \\ cb^2 & b^2 N & c - a \\ 0 & 0 & cb^2 \end{pmatrix}$$

не є додатніми, то рівняння (8) не може мати усі від'ємні корені.

Залишається ще лише виписати умови, щоб три корені рівняння (8) були дійсними. Це можна зробити, використовуючи формули Кардано–Тарталя.

Рівняння (8) шляхом заміни $N = y - \dfrac{c-a}{3}$ зводимо до канонічного рівняння виду $y^3 + py + q = 0$, де

$$p = \frac{3b^2 - (c-a)^2}{3}, \quad q = \frac{2(c-a)^3 - 9(c-a)b^2 + 27cb^2}{27}.$$

Вираз $\Delta = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^2$ є дискримінантом кубічного рівняння. Якщо $\Delta < 0$, то кубічне рівняння має три дійсних корені.

Зокрема, при $a = 4$, $b = 1$, $c = 0,8$ дискримінант $\Delta = -0,4418 < 0$, що означає існування трьох дійсних коренів і, враховуючи вищесказане, одержуємо існування двох дійсних додатних коренів рівняння (8).

У результаті комп'ютерних експериментів одержали графіки розв'язків рівняння (7) при різних значеннях параметра c (рис. 5).

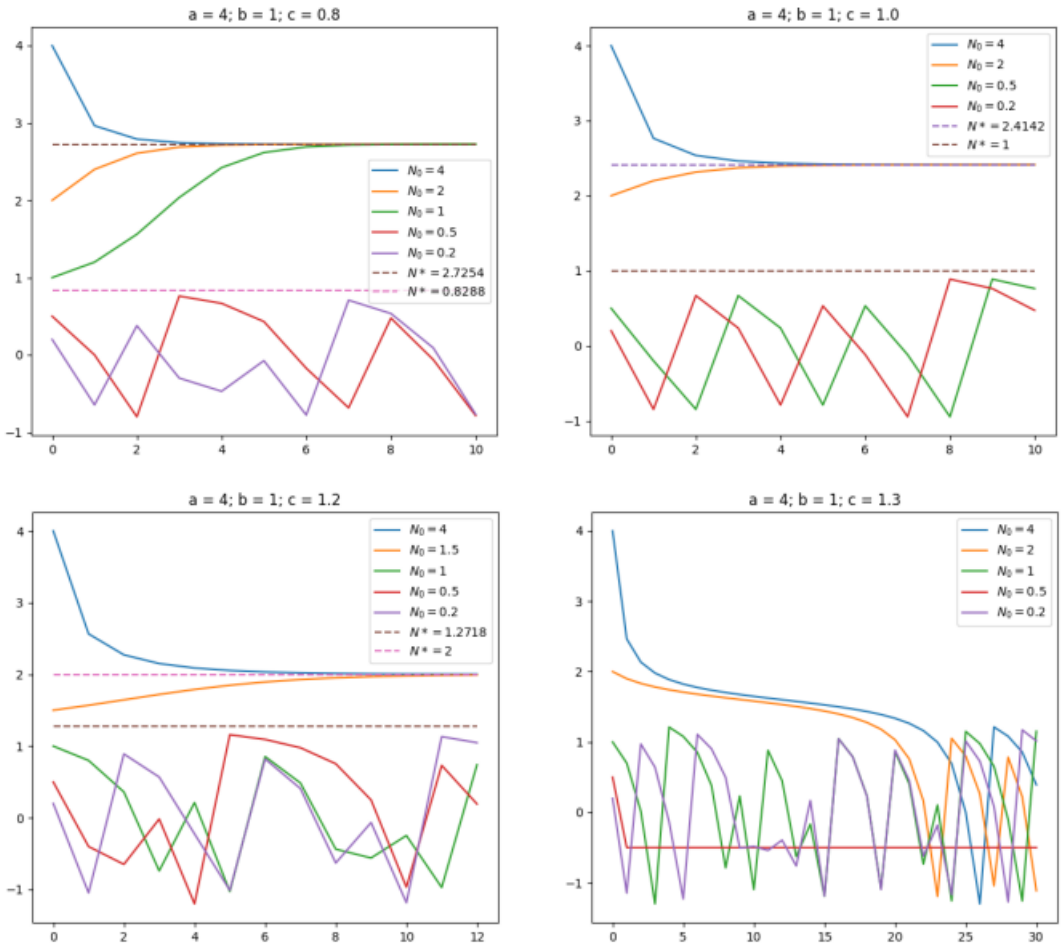


Рис. 5. Поведінка розв'язків рівняння (7) при різних квотах збору врожаю

Розглянемо ще варіант збору врожаю для моделі (5).

Маємо

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t^2} - c, \;\; a, b, c > 0, \;\; t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Стаціонарні стани (9) знаходимо з рівняння

$$bN^3 + bcN^2 + (1-a)N + c = 0, \tag{10}$$

яке при $a < 1$ має тільки від'ємні корені. Додатні корені рівняння (10) при $a = 4$, $b = 1$ різних c знаходилися числовим методом.

Одержані результати оформлені у вигляді нижченаведеної таблиці.

c	N_1^*	N_2^*	$\frac{dF}{dN}\Big\vert_{N_1^*}$	$\frac{dF}{dN}\Big\vert_{N_2^*}$
0,1	0,0334	1,665	3,9867	0,4982
0,5	0,1734	1,3943	3,6563	0,4356
0,8	0,2995	1,1744	3,0665	0,2679
1	0,4142	1,0	2,4143	0

Як бачимо, в цьому випадку N_1^* нестійкий, тобто існує нижня межа чисельності, перейшовши яку знищуємо популяцію. Комп'ютерний аналіз розв'язків рівняння (9) наведений на рис. 6.

Періодичних розв'язків з періодом два, а отже, і будь-яких інших періодичних розв'язків для моделей зі збором урожаю, як і для моделей без збору врожаю, не існує.

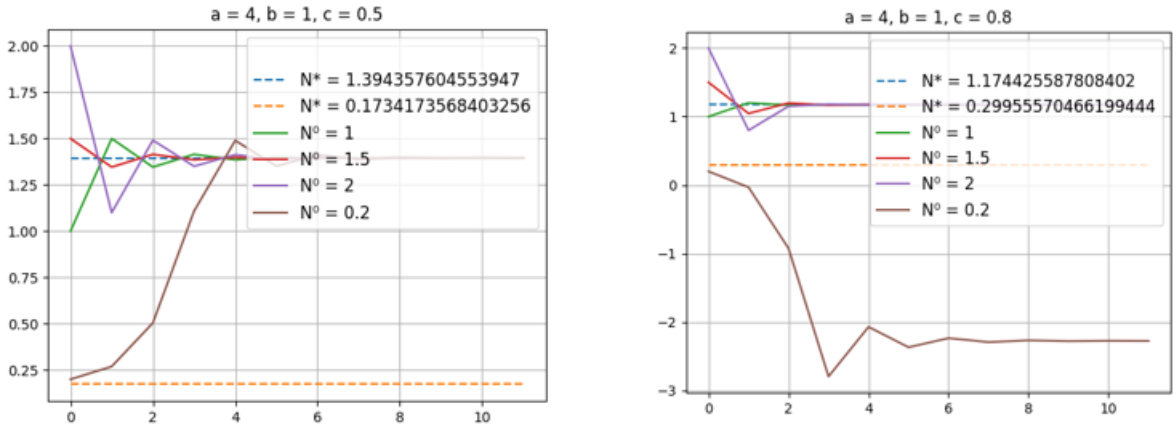


Рис. 6. Графіки розв'язків рівняння (9) при різних значеннях c

Отже, з усіх моделей Скеллама зі збором урожаю можна зробити висновок, що при експлуатації популяцій надзвичайно важливий екологічно обгрунтований підхід до раціонального використання природного ресурсу. Якщо внаслідок деяких причин розмір популяції впаде нижче критичного рівня, то надалі популяція буде повністю знищена, тобто збільшення квоти збору врожаю призводить до повного винищення популяції. Щоб уникнути цієї катастрофи на практиці, потрібно знати допустимі значення для квот збору врожаю і враховувати об'єм максимально гарантованого врожаю.

Список літератури

[1] Маценко В. Г. Математичне моделювання екологічних процесів : навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т імені Юрія Федьковича, 2019. 376.

[2] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica, 1951. **38**. 196-218.

[3] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model.* Population Ecology. Online Version, 2023. https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169.

[4] Eskola HTM, Geritr SAH. *On the mechanistic derivation of various discrete-time population models.* Bulletin of Math. Biology. 2007. **69**. 329-346.

[5] Маценко В.Г. *Моделювання процесів збору врожаю для популяцій із неперекривними поколіннями.* Буковинський матем. журнал. 2022. **10**(2). 165-175.

[6] Шарковський А.Н. *Сосуществованиє циклов непрерывного преобразования прямой в себя.* Украинский матем. журнал. 1964. **XVI**(1). 61-71.

Список літератури

[1] Matsenko V. G. Mathematical modeling of ecological processes : study guide. Chernivtsi : Yury Fedkovich Chernivtsi National University, 2019. 376 p. (in Ukrainian)

[2] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica, 1951. **38**. 196-218.

[3] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model.* Population Ecology. Online Version, 2023. https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169.

[4] Eskola HTM, Geritr SAH. *On the mechanistic derivation of various discrete-time population models.* Bulletin of Math. Biology. 2007. **69**. 329-346.

[5] Matsenko V.G. *Modeling harvesting processes for populations with non-overlapping generations.* Bukovinian Math. Journal. **10**(2). 2022. 165–175. (in Ukrainian)

[6] Sharkovskii A. N. *Coexistence of cycles of continuous transformation straight into itself.* Ukrainian Mathematical Journal, 1964. **XVI**(1). P. 61-71. (in Russian)

Надійшло 01.05.2024

Matsenko V.G. *Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 74–83.

Difference equations are used in order to model the dynamics of populations with non-overlapping generations, since the growth of such populations occurs only at discrete points in time.

In the simplest case such equations have form $N_{t+1} = F(N_t)$, where $N_t > 0$ is the population size at a moment of time t, and F is a smooth function.

Among such equations the discrete Skellam model are most often used in practice.

In the given paper the Skellam model of the form $N_{t+1} = aN_t/(1+bN_t)$, $N_{t+1} = aN_t^2/(b^2+N_t^2)$, $N_{t+1} = aN_t/(1+bN_t^2)$ is considered, where the parameters $a, b > 0$ with taking an effect of harvesting.

Positive equilibrium points and conditions for their stability for these equations were found.

It is shown in analytical form that these equations do not have periodic solutions with period $T = 2$, which means, according by the Sharkovskii theorem, periodic solutions of any periods.

In the model with harvesting, only regimes with monotonic stabilization of the population size are observed.

Therefore, in all models of Skellam with harvesting, the existence of a critical conception is show, beyond which the population will be completely destroyed. For practice it is important to know the permissible limits of harvesting intensity, which are found in this paper.

Пасічник Г. С.

РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО РОДУ

Основним об'єктом дослідження є інтегральні рівняння другого роду, які виникають при побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова. Рівняння може містити також виродження на початковій гіперплощині. Коефіцієнти цього рівняння є обмеженими в групі старших і зростаючими функціями в групі молодших членів. Розглянені класи ядер інтегральних рівнянь дозволяють в оцінці резольвенти зберегти функцію, яка присутня в оцінках ядер визначає ріст коефіцієнтів параболічного рівняння.

Ключові слова і фрази: інтегральне рівняння другого роду, резольвента, вироджене рівняння типу Колмогорова, фундаментальний розв'язок задачі Коші.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
e-mail: *pasichnyk.gs@gmail.com*

Вступ

Важливим поняттям для параболічних рівнянь є фундаментальний розв'язок задачі Коші, детальна інформація про який дозволяє одержувати досить точні результати в теорії задачі Коші та навіть крайових задач. Фундаментальний розв'язок задачі Коші згідно з методом Леві шукається у вигляді суми фундаментального розв'язку задачі Коші для деякого рівняння та об'ємного потенціалу, породженого добутком цього фундаментального розв'язку та невідомої функції φ. При цьому невідома функція φ є резольвентою інтегрального рівняння другого роду.

У [1, 2, 3] навелено класи ядер, які виникають при побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для загальних параболічних за І.Г. Петровським і за С.Д. Ейдельманом рівнянь з обмеженими та зростаючими в групі молодших членів при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами. В [3] також наводяться леми про резольвенту інтегрального рівняння, які використовувались в [3, 4, 5] для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з обмеженими і незалежними від змінних виродження коефіцієнтами.

У цій статті наводиться клас ядер, які виникають при побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з коефіцієнтами, які можуть зростати при $|x| \to \infty$.

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 45B05, 35A08.

© Пасічник Г. С., 2024

1 Постановка задачі

Нехай $\Pi_{[t_0,T]} := [t_0,T]\times\mathbb{R}^n$, $t_0\in[0,T]$, $T>0$ і $P^{\delta_1}_{[t_0,T]} := \{(t,x;\tau,\xi)\in(\Pi_{[t_0,T]}\times\Pi_{[t_0,T]})|\, t-\tau>\delta_1\}$, $\delta_1>0$. Розглядаються інтегральні рівняння вигляду

$$u(t,x)=f(t,x)+\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy,\quad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]},\tag{1}$$

і для неперервної на $[0,T]$ функції $\alpha>0$

$$u(t,x)=f(t,x)+\int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy,\quad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]},\tag{2}$$

ядрами яких є неперервна функція K. Відомо, що при відповідних умовах на ядро K існує єдиний розв'язок рівняння (1) та (2) для довільної допустимої функції f і він визначається відповідно формулою

$$u(t,x)=f(t,x)+\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}R(t,x;\theta,y)\,f(\theta,y)\,dy,\quad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]},\tag{3}$$

та

$$u(t,x)=f(t,x)+\int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}R(t,x;\theta,y)\,f(\theta,y)\,dy,\quad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]},\tag{4}$$

Тут

$$R(t,x;\tau,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(t,x;\tau,\xi),\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},\tag{5}$$

де $K_1\equiv K$, а для $m\geq 2$ відповідно

$$K_m(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)K_{m-1}(\theta,y;\tau,\xi)dy,\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},\tag{6}$$

та

$$K_m(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)K_{m-1}(\theta,y;\tau,\xi)dy,\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},\tag{7}$$

При дослідження виродженого рівняння Колмогорова з коефіцієнтами, які зростають при $|x|\to\infty$ залежно від росту деякої зростаючої функції виникає питання збереження в оцінках ядер K_m цієї функції.

Для нище визначених класів ядер рял (5) збігається абсолютно і рівномірно в $P^{\delta_1}_{[t_0,T]}$ для довільного $\delta_1\in(0,T-t_0)$. Тому існує резольвента (5) рівняння (1) або (2) і розв'язок відповідного рівняння визначається відповідно формулою (3) або (4) відповідно.

2 Основний результат

Нехай n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_2 \le n_1$; $n := n_1 + n_2$; $M := n_1/2 + 3n_2/2$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. Будемо використовувати позначення: $x_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, \dots, x_{1n_2})$, $x_1'' := (x_{1(n_2+1)}, \dots, x_{1n_1})$; $X_1(t) = x_1$, $X_2(t) = x_2 + tx_1'$.

Використовуватимемо оцінні функції

$$E_c(t, x, \xi) = E_c^1(t, x_1 - \xi_1)\, E_c^2(t, X_2(t) - \xi_2) = \exp\Big\{-c\Big(\frac{|X_1(t) - \xi_1|^2}{t} + \frac{|X_2(t) - \xi_2|^2}{t^3}\Big)\Big\},$$
$$t > 0,\ \{x,\, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

Зазначимо, що функцій E_c володіють такими властивостями [3]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_c(t, x, \xi) d\xi = C, \tag{8}$$

$$\forall\, \delta \in (0, 1)\ \ \exists\, C_\delta\ \ \forall\, \{t, \theta, \tau\} \subset \mathbb{R},\ t_0 \le \tau < \theta < t \le T,\ \ \forall\, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n :$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t - \theta, x, y) E_c(\theta - \tau, y, \xi) \Big((t - \theta)(\theta - \tau)\Big)^{-M} dy \le C_\delta (t - \tau)^{-M} E_{c(1-\delta)/4}(t - \tau, x, \xi). \tag{9}$$

Відомі [3] результати про ряд (5), коли, наприклад,

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \le C_1 (t - \tau)^{-M-1+\chi} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{10}$$

де $\chi \in (0; 1)$. Такі ядра виникають при побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з обмеженими і зростаючими гладкими коефіцієнтами.

Нехай неперервна функція $D : \mathbb{R}^{n_1} \to [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

1) $D(x_1) \to \infty$ при $|x_1| \to \infty$;

2) $\exists\, C > 0\ \ \forall\, \{x_1, y_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1},\ |x_1 - y_1| \le 1 :\ D(x_1) \le C D(y_1)$.

Теорема 1. *Якщо ядро неперервне і задовольняє нерівність*

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \le C_1 (t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c_1 (t - \tau)(D(\xi_1))^2\},$$
$$(t, x; \tau, \xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{11}$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ та функцією D, яка задовольняє умови 1) і 2), то існує резольвента, яка є неперервною функцією і для неї справджується оцінка

$$|R(t, x; \tau, \xi)| \le C (t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} \exp\{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} E_{2c}(t - \tau, x, \xi) +$$
$$+ C (D(\xi_1))^{-l} E_c^1(t - \tau, x_1 - \xi_1) \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\hat{C}\Gamma(\frac{\lambda}{2})(t - \tau)^{\lambda/2}\Big)^k \Big(\Gamma(\frac{k\lambda}{2} + 1)\Big)^{-1} E_{cq^k}(t - \tau, x, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{12}$$

де C, $\hat{C}$ і c – деякі додатні сталі, $c < c_1$, Γ – гама-функція Ейлера, $q = 1/4$.

Доведення. Оцінимо ядра K_m, $m \geq 2$. Спробуємо зберегти в оцінках ядер K_m характеристику дисипації. Маємо

$$K_2(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dy_2 \int\limits_{Q(\xi_1,1)} K(t,x;\theta,y)K(\theta,y;\tau,\xi)dy_1 +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dy_2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}\setminus Q(\xi_1,1)} K(t,x;\theta,y)K(\theta,y;\tau,\xi)dy_1 \equiv L_1 + L_2, \tag{13}$$

де $Q(\xi_1,1) := \{y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \Big| |\xi_1 - y_1| \leq 1\}$ Використавши оцінку (11), умову 2) на функцію D та нерівність (9), одержимо

$$|L_1| \leq C_1^2 \int\limits_{\tau}^{t} \Big((t-\theta)(\theta-\tau)\Big)^{\lambda/2-1} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\theta,x,y)E_{c_1}(\theta-\tau,y,\xi)\times$$

$$\times \Big((t-\theta)(\theta-\tau)\Big)^{-M} dy \, \exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\} \leq C_2(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})\times$$

$$\times (t-\tau)^{-M+\lambda-1} E_{c_1(1-\delta)/4}(t-\tau,x,\xi)\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\},$$

$$t_0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

де $0 < c_2 < c_1$, $C_2(\delta) > 0$, δ – довільно фіксоване число з проміжку $(0,1)$, $\mathcal{B}$ – бета-функція Ейлера. Для оцінювання L_2 скористаємося такою оцінкою:

$$|K(\theta,y;\tau,\xi)| \leq C_{1l}(D(\xi_1))^{-l} E_{c_1(1-\delta)}(\theta-\tau,y,\xi),$$

$$t_0 \leq \tau < \theta \leq T, \quad \xi \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus Q(\xi_1,1), \quad y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{15}$$

де l – довільно фіксоване додатне число. Якщо $\theta - \tau \geq 1$, то оцінка (15) випливає відразу з (11):

$$|K(\theta,y;\tau,\xi)| \leq C_1 E_{c_1}(\theta-\tau,y,\xi)\exp\{-c_1(D(\xi_1))^2\} \leq$$

$$\leq C_l E_{c_1}(\theta-\tau,y,\xi)(D(\xi_1))^{-l}.$$

У випадку, коли $\theta - \tau < 1$, за допомогою оцінки (11) і того, що $|y_1 - \xi_1| > 1$, маємо

$$|K(\theta,y;\tau,\xi)| \leq C_l(D(\xi))^{-l} E_{c_1(1-\delta)}(\theta-\tau,y,\xi)\Big((\theta-\tau)^{-M-1+(\lambda-l)/2}\exp\{-c_1\delta(\theta-\tau)^{-1}\}\Big) \leq$$

$$\leq C_l(D(\xi))^{-l} E_{c_1(1-\delta)}(\theta-\tau,y,\xi).$$

З оцінок (11) і (15), рівності (8) та нерівності

$$E_c(t-\theta,x,y)\, E_c(\theta-\tau,y,\xi) \leq E_{c/4}(t-\tau,x,\xi), \quad \tau < \theta < t, \quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

одержимо

$$|L_2| \leq C_1 C_{1l}(D(\xi_1))^{-l} E_{c_1(1-\delta)/4}(t-\tau,x,\xi) \int\limits_{\tau}^{t} (t-\theta)^{\lambda/2-1} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\theta)^{-M} \times$$

$$\times E_{c_1\delta}(t-\theta,x,y)dy \leq C_{2l}\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},1)(D(\xi_1))^{-l}(t-\tau)^{\lambda/2} E_{c_1(1-\delta)/4}(t-\tau,x,\xi),$$

$$t_0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

З (13) та оцінок (14) і (17) випливає оцінка

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le \Big(C_2(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})(t-\tau)^{-M-1+\lambda}\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+$$
$$+C_{2l}\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},1)(t-\tau)^{\lambda/2}(D(\xi_1))^{-l}\Big)E_{c_1(1-\delta)/4}(t-\tau,x,\xi),\ t_0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \quad (18)$$

Оцінимо K_3. За допомогою формули (6) запишемо

$$K_3(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}dy_2\int\limits_{Q(\xi_1,1)}K(t,x;\theta,y)K_2(\theta,y;\tau,\xi)dy_1+$$
$$+\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}dy_2\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}\setminus Q(\xi_1,1)}K(t,x;\theta,y)K_2(\theta,y;\tau,\xi)dy_1. \quad (19)$$

Для одержання оцінки першого доданка K_3 оцінимо окремо за допомогою оцінок (11), (18) та нерівностей (8), (9) і (16) інтеграли

$$\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}dy_2\int\limits_{Q(\xi_1,1)}(t-\theta)^{-M-1+\lambda/2}(\theta-\tau)^{-M-1+\lambda}E_{c_1}(t-\theta,x,y)\times$$
$$\times E_{c_1(1-\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi)\exp\{-c_1(t-\theta)(D(y_1))^2-c_2(\theta-\tau)(D(\xi_1))^2\}dy_1\le$$
$$\le C(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{2\lambda}{2})(t-\tau)^{-M-1+3\lambda/2}E_{c_1(1-2\delta)/4}(t-\tau,x,\xi)\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}, \quad (20)$$

і

$$\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}dy_2\int\limits_{Q(\xi_1,1)}(t-\theta)^{-M-1+\lambda/2}(\theta-\tau)^{\lambda/2}E_{c_1}(t-\theta,x,y)E_{c_1(1-\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi)dy_1\le$$
$$\le C\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}+1)(t-\tau)^{\lambda}E_{c_1(1-\delta)/4^2}(t-\tau,x,\xi), \quad (21)$$
$$t_0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Так само, як була одержана оцінка (15), маємо

$$C_2(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})(\theta-\tau)^{-M-1+\lambda}E_{c_1(1-\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi)\exp\{-c_2(\theta-\tau)(D(\xi_1))^2\}\le$$
$$\le C_{2l}(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})(D(\xi))^{-l}(\theta-\tau)^{\lambda/2}E_{c_1(1-2\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi),$$
$$t_0\le\tau<\theta\le T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad y_1\in\mathbb{R}^{n_1}\setminus Q(\xi_1,1),\quad y_2\in\mathbb{R}^{n_2}. \quad (22)$$

Тоді з (19), використовуючи оцінки (11), (18), (20)–(22), одержуємо

$$|K_3(t,x;\tau,\xi)|\le C_3(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{2\lambda}{2})(t-\tau)^{-M-1+3\lambda/2}E_{c_1(1-2\delta)/4}(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+C_1C_{2l}(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},1)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}+1)(D(\xi_1))^{-l}(t-\tau)^{\lambda}\times$$

$$\times E_{c_1(1-\delta)/4^2}(t-\tau,x,\xi)+C_1C_{2l}(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})(D(\xi_1))^{-l}\int\limits_{\tau}^{t}(t-\theta)^{-1+\lambda/2}(\theta-\tau)^{\lambda/2}d\theta\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q(\xi_1,1)}E_{c_1}(t-\theta,x,y)E_{c(1-2\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi)(t-\theta)^{-M}\exp\{-c_1(t-\theta)(D(y_1))^2\}dy\le$$

$$\le\Big(C_3(\delta)(t-\tau)^{-M-1+3\lambda/2}\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+C_{3l}(\delta)(t-\tau)^{\lambda}(D(\xi_1))^{-l}\Big)\times$$

$$\times\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{2\lambda}{2})E_{c_1(1-2\delta)/4^2}(t-\tau,x,\xi),\quad t_0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Тут було використано властивість

$$\mathcal{B}\Big(\frac{\lambda}{2},\frac{k\lambda}{2}+1\Big)\le\mathcal{B}\Big(\frac{\lambda}{2},\frac{(k+1)\lambda}{2}\Big)=\mathcal{B}\Big(\frac{(k+1)\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\Big),\ \ k\ge 0.$$

Методом математичної індукції доводиться оцінка

$$|K_m(t,x;\tau,\xi)|\le C_{ml}(\delta)\prod_{j=1}^{m-1}\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{j\lambda}{2})E_{c_1(1-(m-1)\delta)/4^{m-1}}(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times\Big((t-\tau)^{-M-1+m\lambda/2}\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+(t-\tau)^{(m-1)\lambda/2}(D(\xi_1))^{-l}\Big),$$

$$t_0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad m\ge 2.\tag{23}$$

Виберемо натуральне число m_0 так, щоб $M+1+(l-m_0\lambda)/2\le 0$. Тоді з (23) матимемо

$$|K_{m_0}(t,x;\tau,\xi)|\le C_{m_0l}(\delta)(D(\xi_1))^{-l}E_{c_1(1-(m_0-1)\delta)/4^{m_0-1}}(t-\tau,x,\xi).$$

Візьмемо $\delta_0\in(0,1/2)$ і покладемо $\delta\equiv\delta_0/(m_0-1)$, $2c\equiv c_1(1-\delta_0)/4^{m_0-1}$, $C_*\equiv C_{m_0l}(\delta)$. Тоді одержимо

$$|K_{m_0}(t,x;\tau,\xi)|\le C_*(D(\xi_1))^{-l}E_{2c}(t-\tau,x,\xi),\quad t_0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.\tag{24}$$

Щоб оцінити ядра K_m з $m>m_0$, спочатку за допомогою (11), (24) та нерівностей [3]

$$E_{2c}(t-\tau,x,\xi)\le E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\,E_c(t-\tau,x,\xi),\tag{25}$$

$$E_c^1(t-\theta,x_1-y_1)E_c^1(\theta-\tau,y_1-\xi_1)\le E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1),\tag{26}$$

$$E_c(t-\theta,x,y)E_{c/4^{j-1}}(\theta-\tau,y,\xi)\le E_{c/4^j}(t-\tau,x,\xi),\ \ j\ge 1,\tag{27}$$

маємо

$$|K_{m_0+1}(t,x;\tau,\xi)|\le C_1C_*(D(\xi))^{-l}\int\limits_{\tau}^{t}(t-\theta)^{-1+\lambda/2}d\theta\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}(t-\theta,x,y)E_{2c}(\theta-\tau,y,\xi)(t-\theta)^{-M}\exp\{-c_1(t-\theta)(D(y_1))^2\}dy\le$$

$$\le C_1C_*L\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},1)(D(\xi_1))^{-l}E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)(t-\tau)^{\lambda/2}E_{c/4}(t-\tau,x,\xi),$$

$$t_0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\tag{28}$$

де

$$L := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-(c_1-2c)(|\eta_1|^2)+|\eta_2|^2)\}.$$

Далі, нехай для деякого $k>1$ виконується оцінка

$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)| \le (C_1L)^k C_* \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{j\lambda}{2}+1)(D(\xi_1))^{-l}(t-\tau)^{k\lambda/2}\times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c/4^k}(t-\tau,x,\xi), \quad t_0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{29}$$

Тоді з (11), (29) і (25)–(27) одержуємо

$$|K_{m_0+k+1}(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(C_1L)^k C_* \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{j\lambda}{2}+1)(D(\xi_1))^{-l}\times$$
$$\times \int\limits_\tau^t (t-\theta)^{\lambda(2-1}(\theta-\tau)^{k\lambda/2}d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\theta)^{-M}E_{c_1-2c}(t-\theta,x,y)\times$$
$$\times\Big(E_c^1(t-\theta,x_1-y_1)\,E_c(t-\theta,x,y)\Big)E_c^1(\theta-\tau,y_1-\xi_1)E_{c/4^k}(\theta-\tau,y,\xi)\times$$
$$\times\exp\{-c_1(t-\theta)(D(y_1))^2\}dy \le$$
$$\le (C_1L)^{k+1}C_*\prod_{j=0}^{k}\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{j\lambda}{2}+1)(D(\xi_1))^{-l}(t-\tau)^{(k+1)\lambda/2}\times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c/4^{(k+1)}}(t-\tau,x,\xi), \qquad t_0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Отже, оцінка (29) справджується для довільного $k\ge 1$ і, скориставшись формулою зв'язку бета-функції з гама-функцією, одержимо

$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)| \le C_*\Big(CL\Gamma(\frac{\lambda}{2})(t-\tau)^{\lambda/2}\Big)^k\Big(\Gamma(\frac{k\lambda}{2}+1)\Big)^{-1}(D(\xi_1))^{-l}\times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c/4^k}(t-\tau,x,\xi), \qquad t_0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

З одержаних оцінок ядер K_m випливає, що ряд (5) мажорується збіжним рядом

$$\hat{C}_0\Big(\sum_{m=1}^{m_0}(t-\tau)^{-M-1+m\lambda/2}\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+$$
$$+\sum_{m=2}^{m_0}(t-\tau)^{(m-1)\lambda/2}(D(\xi_1))^{-l}\Big)E_{2c}(t-\tau,x,\xi)+\hat{C}_0E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\Big(CL\Gamma(\frac{\lambda}{2})(t-\tau)^{\lambda/2}\Big)^k\Big(\Gamma(\frac{k\lambda}{2}+1)\Big)^{-1}(D(\xi_1))^{-l}E_{c/4^k}(t-\tau,x,\xi),$$
$$t_0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

Отже, ряд (5) при t, τ, x, ξ, таких, що $0<\delta_1\le t-\tau\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, де δ_1 – довільна досить мала додатна стала, збігається абсолютно й рівномірно і для його суми правильна оцінка (12).

□

Розглянемо випадок трьох груп просторових змінних. Нехай $n_3 \le n_2 \le n_1$ $n := n_1+n_2+n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$; $x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, ..., x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, ..., x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, ..., x_{1n_1})$; $x_2 := (x_2', x_2'')$, де $x_2' := (x_{21}, ..., x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, ..., x_{2n_2})$; $M := n_1/2 + 3n_2/2 + 5n_3/2$; $X_1(t) = x_1$, $X_2(t) = x_2 + t\hat{x}_1$, $X_3(t) = x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2x_1'$. Виклристовуватимемо оцінні функції

$$\bar{E}_c(t,x,\xi) = E_c^1(t, x_1-\xi_1)\, E_c^2(t, X_2(t)-\xi_2) E_c^3(t, X_3(t)-\xi_3) =$$
$$= \exp\Big\{-c\Big(\frac{|X_1(t)-\xi_1|^2}{t} + \frac{|X_2(t)-\xi_2|^2}{t^3} + \frac{|X_3(t)-\xi_3|^2}{t^5}\Big)\Big\}, \quad t>0,\ \{x,\,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2. *Якщо ядро неперервне і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau))^{-M-1+\lambda/2} \bar{E}_{c_1}(t-\tau, x, \xi) \exp\{-c_1(t-\tau)(D(\xi_1))^2\},$$
$$(t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]},$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda \in (0,1)$ та функцією D, яка задовольняє умови 1) і 2), то існує резольвента, яка є неперервною функцією і для неї справджується оцінка (12), *в якій E_c замінена на $\bar{E}_c$, а $q = 1/8$.*

Доведення. Використовуються інтеграли

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} \bar{E}_c(t,x,\xi) d\xi = C,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{E}_c(t-\theta, x, y) \bar{E}_c(\theta-\tau, y, \xi) \Big((t-\theta)(\theta-\tau)\Big)^{-M} dy \le C_\delta (t-\tau)^{-M} \bar{E}_{c(1-\delta)/8}(t-\tau, x, \xi).$$

а замість (16) –

$$\bar{E}_c(t-\theta, x, y)\, \bar{E}_c(\theta-\tau, y, \xi) \le \bar{E}_{c/8}(t-\tau, x, \xi), \quad \tau < \theta < t, \quad \{x, \xi, y\} \subset \mathbb{R}^n,$$

□

Нехай α і β – неперервні на $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна,

$$A(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \quad B(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\, d\theta, \quad E_{c,d}(t,\tau;x,\xi) := \exp\{aA(t,\tau)\} \bar{E}_c(B(t,\tau), x, \xi),$$

Теорема 3. *Якщо ядро неперервне і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\lambda/2} E_{c_1,d}(B(t,\tau), x, \xi) \exp\{-c_1 B(t,\tau)(D(\xi_1))^2\},$$
$$(t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]},$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda \in (0,1)$ та функцією D, яка задовольняє умови 1) і 2), то існує резольвента, яка є неперервною функцією і для неї справджується оцінка

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)\Big(B(t,\tau))^{-M-1+\lambda/2}\exp\{-c(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}E_{2c,d}(B(t,\tau),x,\xi)+$$
$$+C(D(\xi_1))^{-l}E_c^1(B(t,\tau),x_1-\xi_1)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\hat{C}\Gamma(\frac{\lambda}{2})(B(t,\tau))^{\lambda/2}\Big)^k\Big(\Gamma(\frac{k\lambda}{2}+1)\Big)^{-1}E_{c/8^k,d}(B(t,\tau),x,\xi)\Big),\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},$$

де C, $\hat{C}$ і $c <{}_1$ – еякі додатні сталі.

Розглянемо функцію

$$F_c(t,x,\xi) := \exp\Big\{-c\Big(\frac{|x_1-\xi_1|^2}{4t}+\frac{3|x_2+2^{-1}t(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2|^2}{t^3}+$$
$$+\frac{180|x_3+2^{-1}t(x_2'+\xi_2')+(12)^{-1}t^2(x_1'-\xi_1')-\xi_3|^2}{t^5}\Big)\Big\},\quad t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Функція $F_c(t-\tau,x,\xi)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, є з точністю до сталого множника фундаментальним розв'язком для модельного рівняння типу Колмогорова з сталими коефіцієнтами. Аналогічно функція

$$F_{c,d}((t,\tau,x,\xi) = F_c(B(t,\tau),x,\xi)\exp\{aA(t,\tau)\},\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

є з точністю до сталого множника фундаментальним розв'язком модельного рівняння типу Колмогорова з сталими коефіцієнтами та виродженням на початковій гіперплощині.

Теорема 4. *Якщо ядро неперервне і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\lambda/2}F_{c_1,d}((t,\tau,x,\xi)\exp\{-c_1B(t,\tau)(D(\xi_1))^2\},$$
$$(t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda \in (0,1)$ та функцією D, яка задовольняє умови 1) і 2), то існує резольвента, яка є неперервною функцією і для неї справджується оцінка

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \le C\Big((B(t,\tau))^{-M-1+\lambda/2}\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi_1))^2\}+(B(t,\tau))^{\lambda/2}(D(\xi_1))^{-l}\Big)\times$$
$$\times F_{c,d}(t,\tau,x,\xi),\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]}.$$

Доведення. Використовуються інтеграли

$$\int_{\mathbb{R}^n}F_c(B(t,\theta),x,y)F_c(B(\theta,\tau),y,\xi)\Big(B(t,\theta)B(\theta,\tau)\Big)^{-M}dy =$$

$$= C(B(t-\tau))^{-M}F_c(B(t,\tau),x,\xi),$$

$$\int_\tau^t(B(t,\theta))^{-1+a}(B(\theta,\tau))^{-1+b}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta = \mathcal{B}(a,b)(B(t,\tau))^{a+b-1},\ \ a>0,\ \ b>0,$$

та властивості F_c як фундаментального розв'язку модельного рівняння. □

3 Висновки

Наводені класи ядер інтегральних рівнянь дозволяють в оцінці резольвенти зберегти зростаючу функцію D. Це важливо при реалізації методу Леві побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для вироджених рінянь Колмогорова з гельдеровими коефіцієнтами, незалежних від змінних виродження, і зростаючими, не швидше функції D. При цьому рівняння може містити ще виродження на початковій гіперплощині $t = 0$.

Список літератури

[1] Eidelman S. D. Parabolic systems. North-Holland, Amsterdam, 1969.

[2] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *On fundamental matrix of solutions of Cauchy problem for dissipative $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems with the degeneration on the initial hyperplane.* Dop. NAN Ukr. 1999. (6), 18–22. (in Ukrainian)

[3] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**).

[4] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *The classical fundamental solution of a degenerate Kolmogorov's equation with coefficients indepedent on variables of degeneration.* Bukovinian. Mat. J. 2014. **2** (2–3), 94–106.(in Ukrainian)

[5] Voznyak O., Ivasyshen S., Medynsky I. *Fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane.* Visnyk of the Lviv university. Ser. mechan. and math. 2019. **88**, 107–127. https://dx.doi.org/10.30570/vmm.2019.88.107-127. (in Ukrainian)

Надійшло 01.09.2024

Pasichnyk H. S. *Solutions of some integral equations of the second kind*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 84–93.

The article examines the solutions of some integral equations of the second kind. Such equations arise when using Levi's method to construct a fundamental solution of the Cauchy problem for a degenerate equation of the Kolmogorov type. The equation may also contain a degeneracy on the initial hyperplane. The coefficients of this equation are bounded in the group of principal terms and ones are increasing functions in the group of lowest terms. The considered classes of kernels of integral equations make it possible to preserve the function that determines the growth of the coefficients of the parabolic equation when evaluating the resolvent. In the evalutions of the kernels of integral equations, there are evaluation functions that arise when constructing the corresponding fundamental solution, and fundamental solution of the Cauchy problem of the model equation with constant coefficients.

Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ $2B$-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Досліджується загальна багатоточкова крайова задача для нерівномірно $2b$-параболічних рівнянь з виродженням. Коефіцієнти параболічних рівнянь і крайових умов допускають степеневі виродження довільного порядку за часовою змінною та просторовими змінними на деякій множині точок. Для розв'язання поставленої багатоточкової крайової задачі вивчаються розв'язки задач з гладкими коефіцієнтами в гельдерових просторах з відповідною нормою. За допомогою інтерполяційних нерівностей та апріорних оцінок встановлюються оцінки розв'язку допоміжних задач та їх похідних у спеціальних гельдерових просторах. Використовуючи теореми Ріcса й Арчела з компактної послідовності розв'язків допоміжних задач виділяється збіжна послідовність, граничне значення якої є розв'язком багатоточкової за часом крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння з виродженням. Оцінки розв'язку поставленої задачі встановлені в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається порядком особливостей коефіцієнтів рівнянь і крайових умов. При певних обмеженнях на праві частини рівняння і крайових умов одержано інтегральне зображення поставленої задачі.

Ключові слова і фрази: крайова задача, степеневі особливості, апріорні оцінки, інтерполяційні нерівності, борелівська міра, теорема Арчела, норма елементів простору, умова параболічності.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), b.yashan@chnu.edu.ua (Яшан Б.О.)*

Вступ

Одним з найважливіших питань загальної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є встановлення розв'язності крайових задач. Серед крайових задач для рівнянь з частинними похідними важливе місце посідають задачі з нелокальними крайовими умовами. Такий інтерес до таких задач зумовлений як багатим їх практичним застосуванням (процес дифузії, вологоперекосу в грунтах, фізика плазми тощо), так і потребами загальної теорії крайових задач. У роботах школи Б.Й. Пташкина та його учнів [1], [2], [3] використано метричний підхід для дослідження умовно коректних задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для лінійних гіперболічних та

УДК .....
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.
Information on some grant ...

© Пукальський І.Д., Яшан Б.О., 2024

безтипових рівнянь, а також деяких класів параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У монографії [4] досліджено розв'язки задачі Коші і крайових задач для лінійних і квазілінійних параболічних систем, коефіцієнти яких мають степеневі особливості певного порядку, та побудовано фундаментальні розв'язки еліптичних систем у просторах Діні.

У роботах [5], [6] вивчено задачі з нелокальними та імпульсними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайових умов за будь-якими змінними на деякій множині точок.

Задачі Коші для 2b-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок присвячено праці [7], [8].

У даній статті розглядається загальна багатоточкова задача для параболічного рівняння порядку $2b$ ($b > 1$) зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння і крайових умов довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині. За допомогою теорем Арчела і Рісса встановлено існування, інтегральне зображення єдиного розв'язку поставленої задачі та оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

1 Постановка задачі та основний результат

Нехай D обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \le n-1$, $t_0, t_1, ..., t_{N+1}, \tau$ фіксовані додатні числа, $0 \le t_0 < t_1 < ... < t_{N+1}$, $\tau \in (t_0, t_{N+1})$, $Q_0 = \{(t,x)|\ t \in (t_0, t_{N+1}), x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(t,x), t = \tau, x \in \overline{D}\}$.

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in Q \setminus Q_0$ рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} A_p(t,x)\partial_x^p\right] u(t,x) = f_0(t,x), \tag{1}$$

умови за змінною t

$$u(t_\lambda + 0, x) = \varphi_\lambda(x), \quad x \in D \setminus \overline{\Omega}, \tag{2}$$

а на межі області $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$ крайові умови

$$\lim_{x \to \xi \in \partial D} \left[\sum_{|k|=r_\mu} B_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k u + \sum_{|p|\le r_\mu - 1} B_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u - f_\mu(t,x)\right] = 0, \tag{3}$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $\lambda \in \{0, ..., N\}$, $0 \le r_\mu \le 2b-1$, $\mu \in \{1, ..., b\}$.

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайових умов (3) у точці $P(t,x) \in Q \setminus Q_0$ характеризуватимуть функції $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right)$ і $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right)$: $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right) = |t-\tau|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\tau| \le 1$, $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right) = 1$ при $|t-\tau| \ge 1$; $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \le 1$,

$s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)=1$ при $\rho(x)\geq 1$, $\rho(x)=\inf\limits_{z\in\partial\Omega}|x-z|$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\nu\in\{1,2\}$, $\beta^{(\nu)}=\left(\beta_1^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)}\right)$, $\beta=\left(\beta^{(1)},\beta^{(2)}\right)$, $Q^{(\lambda)}=[t_\lambda,t_{\lambda+1})\times D$, $\alpha\in(0,1)$, $\Gamma^{(\lambda)}=[t_\lambda,t_{\lambda+1})\times\partial D$.

Позначимо через l, q, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\delta_{p_i,\mu}^{(\nu)}$, $i\in\{1,...,n\}$, $\mu_0^{(\nu)}$, $\delta_\mu^{(\nu)}$ – дійсні додатні числа, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\}=l-[l]$, $P(t,x)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(1)}\right)$, $R_r\left(t^{(2)},x^{(2)}\right)$ – довільні точки із Q, $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, $x^{(2)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3). $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ – множина функцій $u(t,x)$, які мають неперервні частинні похідні в $Q^{(\lambda)}\backslash Q_0$ при $t\neq t_\lambda$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\leq[l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l=\sup_\lambda\left\{\sum_{2bj+|k|\leq[l]}\left\|u;\gamma;\beta;q;Q^{(\lambda)}\right\|_{2bj+|k|}+\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(\lambda)}\rangle_l\right\},$$

де

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|=\sup_\lambda\left\{\sup_{\overline{Q}^{(\lambda)}}|u|\right\}\equiv\sup_\lambda\left\|u;Q^{(\lambda)}\right\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{2bj+|k|}=\sup_\lambda\left\{\sup_{P\in\overline{Q}^{(\lambda)}}S\left(q;s_1,s_2;2bj+|k|;t,x\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P)\right|\right\},$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_l=\sup_\lambda\left\{\sum_{2bj+|k|=[l]}\left\{\sum_{i=1}^n\sup_{P_1,R_i\in\overline{Q}^{(\lambda)}}\left[S\left(q;s_1,s_2;[l],t^{(1)},\tilde{x}\right)\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\{l\}}\times\right.\right.\right.$$

$$\times s_1\left(\{l\}\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}\right),t^{(1)}\right)s_2\left(\{l\}\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\times$$

$$\left.\left.\left.\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u\left(R_i\right)\right|\right]+\sup_{P_1,P_2\in\overline{Q}^{(\lambda)}}\left[S\left(q;s_1,s_2;[l],\tilde{t},x^{(1)}\right)s_1\left(\{l\}\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times s_2\left(\{l\}\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\left\{\frac{l}{2b}\right\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_2\right)\right|\right]\right\}\right\}.$$

Тут позначено $s_1\left(a,\tilde{t}\right)=\min\left(s_1\left(a,t^{(1)}\right),s_1\left(a,t^{(2)}\right)\right)$, $S\left(q;s_1,s_2;[l];t,x\right)\equiv s_1\left(q^{(1)}+[l]\gamma^{(1)},t\right)\times$ $\times s_2\left(q^{(2)}+[l]\gamma^{(2)},x\right)\prod\limits_{i=1}^n s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right)$, $s_2(a,\tilde{x})=\min\left(s_2\left(a,x^{(1)}\right),s_2\left(a,x^{(2)}\right)\right)$.

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t,x)\prod\limits_{i=1}^n s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$,

$A_p(t,x)\prod\limits_{i=1}^n s_1\left(\rho_i\mu_{p_i}^{(1)},t\right)s_2\left(\rho_i\mu_{p_i}^{(2)},x\right)\in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $1\leq|p|\leq 2b-1$, $A_0(t,x)s_1\left(\mu_0^{(1)},t\right)\times$ $\times s_2\left(\mu_0^{(2)},x\right)\in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $A_0(t,x)\leq K<\infty$ і задачі

$$\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}A_k(t,x)\prod_{i=1}^n s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\partial_x^k\right]u(t,x)=\tilde{f}(t,x),$$

$$u(t_\lambda + 0, x) = \tilde{\varphi}_\lambda(x),$$

$$\lim_{x \to \xi \in \partial D} \left[\sum_{|k|=r_\mu} B_k^{(\mu)}(t,x) \prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i \beta_i^{(1)}, t\right) s_2\left(k_i \beta_i^{(2)}, x\right) \partial_x^k u(t,x) - \tilde{f}_\mu(t,x) \right] = 0$$

задовольняють в областях $Q^{(\lambda)}$ рівномірну умову параболічності та умову Я.Б. Лопатинського [4];

б) коефіцієнти крайових умов $B_k^{(\mu)}(t,x) \prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i \beta_i^{(1)}, t\right) s_2\left(k_i \beta_i^{(2)}, x\right) \in H^{2b-r_\mu+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $B_p^{(\mu)}(t,x) \prod_{i=1}^{n} s_1\left(\rho_i \delta_{p_i,\mu}^{(1)}, t\right) s_2\left(\rho_i \delta_{p_i,\mu}^{(2)}, x\right) \in H^{2b-r_\mu+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $B_0^{(\mu)}(t,x) s_1\left(\delta_\mu^{(1)}, t\right) \times s_2\left(\delta_\mu^{(2)}, x\right) \in H^{2b-r_i+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$;

в) функції $f_0(t,x) \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 2b\gamma; Q)$, $f_\lambda(t,x) \in H^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma; \beta; r_\lambda \gamma; Q)$, $\partial D \in C^{2b+\alpha}$, $\varphi_\lambda(x) \in H^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; Q^{(\lambda)} \cap \{t = t_\lambda\}\right)$, $\tilde{\beta} = \left(0, \beta^{(2)}\right)$, $\tilde{\gamma} = \left(0, \gamma^{(2)}\right)$, $\gamma^{(\nu)} = \max\left\{ \max_i \beta_i^{(\nu)}, \right.$ $\left. \max_{i,p_i} \dfrac{p_i\left(\mu_{p_i}^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}\right)}{2b - |p|}, \max_{i,\mu,p_i} \dfrac{p_i\left(\delta_{p_i,\mu}^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}\right)}{r_\mu - |p|}, \dfrac{\mu_0^{(\nu)}}{2b}, \max_\mu \dfrac{\delta_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}, \right\}$, $\nu \in \{1, 2\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконані умови а)–в). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *із простору* $H^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2b+\alpha} \le C \sup_\lambda \left(\left\| f; \gamma; \beta; 2b\gamma; Q^{(\lambda)} \right\|_\alpha + \left\| \varphi_\lambda; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; Q^{(\lambda)} \cap \{t = t_\lambda\} \right\|_{2b+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=1}^{b} \left\| f_\mu; \gamma; \beta; r_\mu \gamma; \Gamma^{(\lambda)} \right\|_{2b-r_\mu+\alpha} \right). \tag{4}$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку роз'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(3).

2 Оцінка розв'язків допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами

Нехай $Q_m^{(\lambda)} = Q^{(\lambda)} \cap \left\{(t,x) \in Q^{(\lambda)} \mid s_1(1,t) \ge m_1^{-1}, s_2(1,x) \ge m_2^{-1}\right\}$, $m_1 \ge 1$, $m_2 \ge 1$, $m = (m_1, m_2)$ послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до $Q^{(\lambda)}$.

Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$\left(L_1 u_m\right)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x) \partial_x^k + \sum_{|p| \le 2b-1} a_p(t,x) \partial_x^p \right] u_m(t,x) = F_m(t,x), \tag{5}$$

які задовольняють умови за змінною t

$$u_m(t_\lambda + 0, x) = \varphi_m^{(\lambda)}(x), \tag{6}$$

а на межі області Γ крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k u_m + \sum_{|p|\le r_\mu-1} b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u_m - f_m^{(\mu)}(t,x)\right]=0. \tag{7}$$

Тут коефіцієнти a_k, a_p, $b_k^{(\mu)}$, $b_p^{(\mu)}$, функції F_m, $\varphi_m^{(\lambda)}$, $f_m^{(\mu)}$ в області $Q_m^{(\lambda)}$ співпадають з A_k, A_p, $B_k^{(\mu)}$, $B_p^{(\mu)}$, f, φ_λ, f_μ відповідно, а в області $Q\backslash Q_m^{(\lambda)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_k, A_p, $B_k^{(\mu)}$, $B_p^{(\mu)}$, функцій f, φ_λ, f_μ із області $Q_m^{(\lambda)}$ в область $Q\backslash Q_m^{(\lambda)}$ із збереженням гладкості і норм ([9], с. 82).

Позначимо через $C^l(\gamma;\beta;q;Q)$ сукупність функцій простору $C^l(Q)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_l$, еквівалентну при кожному m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l$, тільки замість функцій $s_1\left(a^{(1)},t\right)$, $s_2\left(a^{(2)},x\right)$ беремо відповідно $e_1\left(a^{(1)},t\right)$, $e_2\left(a^{(2)},x\right)$, де $e_1\left(a^{(1)},t\right)=\max\left(s_1\left(a^{(1)},t\right),m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)}\ge 0$ і $e_1\left(a^{(1)},t\right)=\min\left(s_1\left(a^{(1)},t\right),m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)}\le 0$; $e_2\left(a^{(2)},x\right)=\max\left(s_2\left(a^{(2)},x\right),m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)}\ge 0$ і $e_2\left(a^{(2)},x\right)=\min\left(s_2\left(a^{(2)},x\right),m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)}\le 0$.

Для норм $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_l$ правильні інтерполяційні нерівності [7].

Встановимо оцінку норми $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_{2b+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови а)–в), то для розв'язку задачі* (5)–(7) *правильна оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le\sup_\lambda\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}, \tag{8}$$

де

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}=c\left(\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha}+\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0+\right.$$

$$\left.+\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|f_m^{(\mu)};\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\right).$$

Стала c не залежить від m.

Доведення. В області $Q^{(\lambda)}$ розглянемо задачу

$$\left(L_1u_m\right)(t,x)=F_m(t,x),\quad u_m(t_\lambda+0,x)=\varphi_m^{(\lambda)}(x),$$

$$\left[\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k u_m+\sum_{|p|\le r_\mu-1} b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u_m-f_m^{(\mu)}(t,x)\right]_{\Gamma^{(\lambda)}}=0. \tag{9}$$

При виконанні умов а)–в) існує єдиний класичний розв'язок задачі (9) в просторі $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)})$ [4]. Знайдемо його оцінку. Використовуючи інтерполяційні нерівності [7], маємо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}\le(1+\varepsilon^\alpha)\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\rangle_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0.$$

Тому досить оцінити півнорму $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\rangle_{2b+\alpha}$. Із визначення $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\rangle_{2b+\alpha}$ випливає існування в $Q^{(\lambda)}$ точок P_1, P_2, R_i, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}\le E_1+E_2, \tag{10}$$

де

$$E_1=\sum_{2bj+|k|=2b}\sum_{r=1}^{n}\Big[e_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)S_1\left(e_1,e_2;t^{(1)},\tilde{x}\right)\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$

$$\times e_1\left(\alpha\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}\right),t^{(1)}\right)e_2\left(\alpha\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(R_i\right)\right|\Big],$$

$$E_2=\sum_{2bj+|k|=2b}e_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)S_1\left(e_1,e_2;\tilde{t},x^{(2)}\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2b}}\times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_2\right)-\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_1\right)\right|;$$

де $S_1(e_1,e_2;t,x)\equiv\prod_{i=1}^{n}e_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)e_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right)$.

Нехай $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\le\frac{\varepsilon}{2n}e_1\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_1$, ε – довільне дійсне число із $(0,1)$, або $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\le\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)^{2b}e_1\left(2b\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_2$. Будемо вважати, що $e_1\left(\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)=e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)=\min\left(e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right),e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(2)}\right)\right)$, $e_2\left(\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)=e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)=\min\left(e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right),e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)\right)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)\in Q^{(\lambda)}$. Нехай $\left|x_n^{(1)}-\xi_n\right|\le 2N_1$, $\xi\in\partial D$, або $\left|x^{(1)}-\xi\right|\le 2N_1 n$. Розглянемо кулю $K(a,P)$ радіуса a, $a>\max(8N_1n,4N_2)$, що містить точки P_1, P_2, R_i з центром в деякій точці $P\in\Gamma^{(\lambda)}$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(a,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\Psi(y)$ ([9, с.55]), в результаті якого область $\Pi_{(0)}^{(\lambda)}=Q^{(\lambda)}\cap K(a,P)$ переходить в область $\Pi^{(\lambda)}$, для точок якої $y_n\ge 0$, $t\ge t_\lambda$.

Покладемо $u_m(t,x)=v_m(t,y)$. Вважаємо, що P_1, P_2, R_i, E_1, E_2, $e_1\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)$ переходять при цьому перетворенні в H_1, H_2, M_i, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $h_2\left(\gamma^{(2)},y^{(1)}\right)$. Позначимо коефіцієнти рівняння (6) і крайових умов (7) в області $\Pi^{(\lambda)}$ через d_k, d_p, $l_k^{(\mu)}$, $l_p^{(\mu)}$. Тоді $v_m(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t v_m-\sum_{|k|=2b}d_k\left(H_1\right)\partial_y^k v_m=\sum_{|k|=2b}\left[d_k(t,y)-d_k\left(H_1\right)\right]\partial_y^k v_m+$$

$$+\sum_{|p|\le 2b-1}d_p(t,y)\partial_y^p v_m+F_m\left(t,\psi(y)\right)\equiv F_m^{(0)}\left(t,y;v_m\right), \tag{11}$$

$$v_m(t_\lambda+0,y)=\varphi_m^\lambda\left(\psi(y)\right)=\Phi_m^\lambda(y), \tag{12}$$

$$\sum_{|k|=r_\mu}l_k^\mu\left(H_1\right)\partial_y^k v_m\big|_{y_n=0}=\Bigg\{\sum_{|k|=r_\mu}\left[l_k^\mu\left(H_1\right)-l_k^\mu\left(t,y\right)\right]\partial_y^k v_m-$$

$$- \sum_{|p|\le r_\mu - 1} l_p^\mu(t,y)\partial_y^p v_m + f_m\left(t,\psi(y)\right)\Bigg\}\Bigg|_{y_n=0} \equiv \Psi_m^\mu\left(t,y;v_m\right)\big|_{y_n=0}. \tag{13}$$

У задачі (11)–(13) зробимо заміну $v_m(t,y)=\omega_m(t,z)$, де $z_i = e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right)y_i$. Позначимо через Π_1^λ область визначення $\omega_m(t,z)$. Тоді $\omega_m(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t\omega_m - \sum_{|k|=2b} d_k\left(H_1\right) S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k\omega_m = F_m^{(0)}(t,\tilde z;\omega_m), \tag{14}$$

$$\omega_m(t_\lambda+0,z) = \Phi_m^{(\lambda)}(\tilde z), \tag{15}$$

$$\sum_{|k|=r_\mu} l_k^{(\mu)}\left(H_1\right) S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k\omega_m\Big|_{z_n=0} = \Psi_m^{(\mu)}(t,\tilde z;\omega_m)\big|_{z_n=0}, \tag{16}$$

де $S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right) = \prod\limits_{i=1}^n e_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(k_i\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right)$,

$\tilde z = \left(e_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right)h_2^{-1}\left(\beta_1^{(2)},y^{(1)}\right)z_1,\ldots,e_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right)h_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},y^{(1)}\right)z_n\right)$.

Позначимо через $z_i^{(1)} = e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right)y_i^{(1)}$, $K_\delta = \Big\{(t,z)\in\Pi_1^{(\lambda)}\Big|z_i - z_i^{(1)}\Big| \le$

$\le \dfrac{\delta\varepsilon_1}{n}e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(\gamma^{(2)},y^{(1)}\right), i\in\{1,\ldots,n\}, \left|t^{(1)}-t\right| \le (\delta\varepsilon_1)^{2b}e_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(2b\gamma^{(2)},y^{(1)}\right)\Big\}$.

Візьмемо функцію $\eta(t,z)$, яка має другі неперервні частинні похідні за змінною t і неперервні частинні похідні порядку $(2b+1)$ за змінним z_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$ і задовольняє умови

$$\eta(t,z) = \begin{cases} 1, (t,z)\in K_{1/2},\ 0\le\eta(t,z)\le 1; \\ 0, (t,z)\notin K_{3/4},\ \left|\partial_t^j\partial_z^k\eta\right| \le c_{kj}e_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},y^{(1)}\right). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m(t,z)=\omega_m(t,z)\eta(t,z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\partial_t V_m - \sum_{|k|=2b} d_k\left(H_1\right) S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k V_m = \omega_m\partial_t\eta + \eta F_m^{(0)}(t,\tilde z;\omega_m) +$$

$$+ \sum_{|k|=2b} d_k\left(H_1\right) S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}\omega_m\partial_z^p\eta\right) \equiv F_m^{(1)}(t,z;\omega_m), \tag{17}$$

$$V_m(t_\lambda+0,z) = \eta(t_\lambda+0,z)\Phi_m^{(\lambda)}(\tilde z), \tag{18}$$

$$\sum_{|k|=r_\mu} l_k^{(\mu)}\left(H_1\right) S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k V_m\Big|_{z_n=0} = \Bigg\{\eta\Psi_m^{(\mu)}(t,\tilde z;\omega_m) + \sum_{|k|=r_\mu} l_k^\mu\left(H_1\right)\times$$

$$\times S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}\omega_m\partial_z^p\eta\right)\Bigg\}\Bigg|_{z_n=0} \equiv G_m^{(\mu)}(t,z;\omega_m)\big|_{z_n=0}. \tag{19}$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (17) і крайових умов (19) обмежені сталими, незалежними від точки $H_1\left(t^{(1)}, y^{(1)}\right)$. Тому, використовуючи теорему 7.1 [10, с. 83], для довільних точок $M_1 \in K_{1/2}$, $M_2 \in K_{1/2}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)\left|\partial_t^j \partial_z^k \omega_m(M_1) - \partial_t^j \partial_z^k \omega_m(M_2)\right| \le c\left(\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^\alpha\left(K_{3/4}\right)} + \right.$$

$$\left. + \left\|\eta\Phi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(K_{3/4}\cap(t=t_\lambda)\right)} + \sum_{\mu=1}^{b}\left\|G_m^{(\mu)}\right\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}\left(K_{3/4}\right)}\right), \tag{20}$$

$d(M_1, M_2)$ – параболічна відстань між M_1, M_2, $2bj + |k| = 2b$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t, z)$, інтерполяційні нерівності [7], одержимо

$$\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^\alpha\left(K_{3/4}\right)} \le cW(e_1, h_2)\left(\left\|\omega_m; K_{3/4}\right\|_0 + \left\|F_m^{(0)}; \gamma; 0; 2b\gamma; K_{3/4}\right\|_\alpha + \right.$$

$$\left. + \left\|\omega_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4}\right\|_{2b}\right); \tag{21}$$

$$\left\|\eta\Phi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(K_{3/4}\cap(t=t_\lambda)\right)} \le cW(e_1, h_2)\left\|\Phi_m^{(\lambda)}; \tilde{\gamma}; 0; 0; K_{3/4}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha}, \tag{22}$$

$$\left\|G_m^{(\mu)}\right\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}\left(K_{3/4}\right)} \le cW(e_1, h_2)\left(\left\|\omega_m; K_{3/4}\right\|_0 + \left\|\omega_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4}\right\|_{2b} + \right.$$

$$\left. + \left\|\Psi_m^{(\mu)}; \gamma; 0; r_\mu\gamma; K_{3/4}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\right), \tag{23}$$

де $W(e_1, h_2) = e_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}\right) h_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)}, y^{(1)}\right)$.

Із визначення простору $C^l\left(\gamma; \beta; q; Q^{(\lambda)}\right)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_1\left\|\omega_m; \gamma; 0; q; K_{3/4}\right\|_l \le \left\|v_m; \gamma; \beta; q; T_{3/4}\right\|_l \le c_2\left\|\omega_m; \gamma; 0; q; K_{3/4}\right\|_l,$$

$$T_\delta = \left\{(t, y) \in \Pi^{(\lambda)}, \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \le \delta\frac{\varepsilon_1}{2n} e_1\left(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t^{(1)}\right) h_2\left(\gamma^{(2)} - \beta^{(2)}, y^{(1)}\right), i \in \{1, \dots, n\},\right.$$

$$\left.\left|t - t^{(1)}\right| \le \delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)^{2b} e_1\left(2b\gamma^{(1)}, t^{(1)}\right) h_2\left(2b\gamma^{(2)}, y^{(1)}\right)\right\}.$$

Підставляючи (21)–(23) в (20), знаходимо, що

$$E_1 + E_2 \le C_2\left(\left\|F_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_{(0)}^{(\lambda)}\right\|_\alpha + \sum_{i=1}^{b}\left\|f_m^{(\mu)}; \gamma; \beta; r_\mu\gamma; \Pi_{(0)}^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_{\mu+\alpha}} + \left\|u_m; \Pi_{(0)}^{(\lambda)}\right\|_0 + \right.$$

$$\left. + \left\|\varphi_m^{(\lambda)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi_{(0)}^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha}\right) + \varepsilon_2\left\|u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi_{(0)}^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}. \tag{24}$$

Розглянемо випадок, коли $\left|x_n^{(1)} - \xi_n\right| > 2N_1$, або $\left|x^{(1)} - \xi\right| > 2N_1 n$, $\xi \in \partial D$.

Запишемо задачу (9) у вигляді

$$\partial_t u_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1)\,\partial_x^k u_m = F_m(t, x) + \sum_{|p|=2b-1} a_p(t, x)\partial_x^p u_m +$$

$$+ \sum_{|k|=2b}\left[a_k(t, x) - a_k(P_1)\right]\partial_x^k u_m \equiv F_m^{(2)}(t, x; u_m), \tag{25}$$

$$u_m\left(t_\lambda+0,x\right)=\varphi_m^{(\lambda)}(x), \tag{26}$$

$$\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{(\mu)}\left(P_1\right)\partial_x^k u_m\Big|_{\Gamma^{(\lambda)}}=\left\{\sum_{|k|=r_\mu}\left[b_k^{(\mu)}\left(P_1\right)-b_k^{(\mu)}(t,x)\right]\partial_x^k u_m-\right.$$

$$\left.-\sum_{|p|=r_\mu-1} b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u_m+f_m^{(\mu)}(t,x)\right\}\Bigg|_{\Gamma^{(\lambda)}}\equiv G_{m,1}^{(\mu)}\left(t,x;u_m\right)\Big|_{\Gamma^{(\lambda)}}. \tag{27}$$

В задачі (25)–(27) зробимо заміну $u_m(t,x)=v_m^{(1)}(t,z)$, де $z_i=e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i$, $i=\{1,\ldots,n\}$. Тоді функція $V_m^{(1)}(t,z)=\eta_1(t,z)v_m(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t V_m^{(1)}-\sum_{|k|=2b} a_k\left(P_1\right)S_2\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\partial_z^k V_m^{(1)}=v_m^{(1)}\partial_t\eta_1+\eta_1 F_m^{(2)}\left(t,\tilde{z};v_m^{(1)}\right)+$$

$$+\sum_{|k|=2b} a_k\left(P_1\right)S_2\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}v_m^{(1)}\partial_z^p\eta_1\right)\equiv F_m^{(3)}\left(t,z;v_m^{(1)}\right), \tag{28}$$

$$V_m^{(1)}(t_\lambda+0,z)=\eta_1(t_\lambda+0,z)\varphi_m^{(\lambda)}(\tilde{z}), \tag{29}$$

$$\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{(\mu)}\left(P_1\right)S_2\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\partial_z^k V_m^{(1)}\Big|_{\Gamma^{(\lambda)}}=\left\{\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{\mu}\left(P_1\right)S_2\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}v_m^{(1)}\partial_z^p\eta_1\right)+\eta_1 G_{m,1}^{(\mu)}\left(t,\tilde{z};v_m^{(1)}\right)\right\}\Bigg|_{\Gamma^{(\lambda)}}\equiv G_{m,2}^{(\mu)}\left(t,z;v_m^{(1)}\right)\Big|_{\Gamma^{(\lambda)}}, \tag{30}$$

де $\tilde{z}=\left(e_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left(\beta_1^{(2)},x^{(1)}\right)z_1,\ldots,e_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},x^{(1)}\right)z_n\right)$;

$$\eta_1(t,z)=\begin{cases}1,(t,z)\in T_{1/2}^{(1)},\ 0\le\eta_1(t,z)\le 1;\\ 0,(t,z)\notin T_{3/4}^{(1)},\ \left|\partial_t^j\partial_x^k\eta_1\right|\le c_{kj}e_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right);\end{cases}$$

$$T_\delta^{(1)}=\left\{(t,z)\Big|\left|t^{(1)}-t\right|\le 2\delta N_2,\left|z_i-z_i^{(1)}\right|\le 2\delta e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right),\right.$$

$$\left.z_i^{(1)}=e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i^{(1)}\right\}.$$

Коефіцієнти рівняння (28) і крайових умов (30) обмежені сталими, незалежними від точки $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$. Тому, використовуючи теорему 4.1 із [10, с. 41], для довільних точок $M_1\in T_{1/2}^{(1)}$, $M_2\in T_{1/2}^{(1)}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}\left(M_1,M_2\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m^{(1)}\left(M_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k v_m^{(1)}\left(M_2\right)\right|\le C_3\left(\left\|F_m^{(3)}\right\|_{C^\alpha\left(T_{3/4}^{(1)}\right)}+\right.$$

$$\left.+\left\|\eta_1\varphi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(T_{3/4}^{(1)}\cap(t=t_\lambda)\right)}+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|G_{m,2}^{(\mu)}\right\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}\left(T_{3/4}^{(1)}\right)}\right).$$

Враховуючи властивості функції $\eta_1(t,z)$, означення простору $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;q;Q)$ і повторюючи міркування при встановленні оцінки (24), знаходимо

$$E_1+E_2\le C_4\left(\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|f_m^{(\mu)};\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}+\right.$$

$$\left.+\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0+\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha}\right). \tag{31}$$

У випадках $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\ge N_2$, або $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\ge N_1$, маємо

$$E_1+E_2\le\varepsilon^\alpha\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0. \tag{32}$$

Враховуючи нерівності (24), (31), (32), (10) і вибираючи ε_1, ε, ε_2 достатньо малими, одержимо оцінку (8). □

Знайдемо оцінку норми $\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0$.

В задачі (9) зробимо заміну $u_m(t,x)=\varphi_m^{(\lambda)}(x)+\omega_m^{(1)}(t,x)$. Одержимо крайову задачу

$$\left(L\omega_m^{(1)}\right)(t,x)=F_m(t,x)-\left(L_1\varphi_m^{(\lambda)}\right)(x),\quad \omega_m^{(1)}(t_\lambda+0,x)=0,$$

$$\left[\sum_{|k|=r_\mu}b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k\omega_m^{(1)}+\sum_{|p|\le r_\mu-1}b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p\omega_m^{(1)}+\sum_{|k|=r_\mu}b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k\varphi_m^{(\lambda)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{|p|\le r_\mu-1}b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p\varphi_m^{(\lambda)}-f_m^{(\mu)}(t,x)\right]_{\Gamma^{(\lambda)}}=0. \tag{33}$$

Правильна така теорема.

Теорема 3. *Якщо $\omega_m^{(1)}(t,x)$ – єдиний класичний розв'язок задачі* (33) *і виконані умови а) – в), то для $\omega_m^{(1)}(t,x)$ справджується нерівність*

$$\left\|\omega_m^{(1)};Q^{(\lambda)}\right\|_0\le C_5\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{b}\left\|f_m^{(\mu)};\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\right), \tag{34}$$

де стала C_5 не залежить від m.

За умов накладених на гладкість коефіцієнтів рівняння (5), крайових умов (7) і функцій F_m, $\varphi_m^{(\lambda)}$, $f_m^{(\mu)}$ існує єдиний розв'язок задачі (33), який належить простору $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)})$ і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму [10].

Скориставшись методикою доведення зауваження 2 ([11, с. 79]), встановлюємо нерівність (34).

Доведення теореми 1. Оскільки

$$\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha\le c\left\|f_0;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha,$$

$$\left\|f_m^{(\mu)};\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\le c\left\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha},$$
$$\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha}\le c\left\|\varphi_\lambda;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha},$$

то, використовуючи нерівності (8), (34), одержимо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}\le c\left(\left\|f_0;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\left\|\varphi_\lambda;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap\{t=t_\lambda\}\right\|_{2b+\alpha}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\right).\tag{35}$$

Права частина (35) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\left\{W_m^{(j,k)}\right\}=\left\{e_1\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t\right)e_2\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x\right)\partial_t^j\partial_x^k u_m(t,x)S_1(e_1,e_2;t,x)\right\},$$
$$2bj+|k|\le 2b,$$

рівномірно обмежені і рівносторонньо неперервні в $Q^{(\lambda)}$. За теоремою Арчела існують послідовності $\left\{W_{m(l)}^{(j,k)}\right\}$ рівномірно збіжні при $m(l)\to\infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи до границі при $m(l)\to\infty$ в задачі (5)–(7), одержимо, що $u(t,x)=W^{(j,k)}$ єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u\in H^{2b+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right)$ і правильна оцінка (4).

Теорема 4. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконані умови а)–в) і* $f_0\in H^\alpha\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right)$, $f_\mu\in H^{2b-r_\mu+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right)$. *Тоді єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *в областях* $Q^{(\lambda)}$ *визначається формулою*

$$u(t,x)=\iint\limits_{Q^{(\lambda)}}G_0(t,x;d\tau;d\xi)f_0(\tau,\xi)+\iint\limits_{Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)}G_0(t,x;0;d\xi)\varphi_\lambda(\xi)+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{b}\iint\limits_{\Gamma^{(\lambda)}}G_\mu(t,x;d\tau;d\xi)f_\mu(\tau,\xi).\tag{36}$$

Доведення. Оскільки $H^\alpha\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right)\subset H^\alpha\left(\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right)$, $H^{2b-r_\mu+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right)\subset H^{2b-r_\mu+\alpha}\left(\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right)$, то для $f_0\in H^\alpha\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right)$ і $f_\mu\in H^{2b-r_\mu+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right)$ виконуються нерівності

$$\left\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha\le c\left\|f;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha,\quad\left\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\le$$
$$\le c\left\|f_\mu;\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha},\ \mu\in\{1,\dots,b\},\lambda\in\{0,1,\dots,N\}.$$

Тому, враховуючи теорему 1, для розв'язку задачі (1)–(3) в областях $Q^{(\lambda)}$ має місце нерівність

$$\left\|u;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}\le c\left(\left\|f_0;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|f_\mu;\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}+\right.$$
$$\left.+\left\|\varphi_\lambda;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap\{t=t_\lambda\}\right\|_{2b+\alpha}\right).\tag{37}$$

□

Зазначимо, що простір $H_\alpha = H^\alpha\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right)\times H^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right)\times$ $\times H^{2b-r_1+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right)\times\ldots\times H^{2b-r_b+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right)$ вкладається в простір $C\left(Q^{(\lambda)}\right)$. $H_\alpha\subset C\left(Q^{(\lambda)}\right)$. Тому, використовуючи теорему Рісса, можна вважати, що при $(t,x)\in Q^{(\lambda)}$ лінійний неперервний функціонал $u(t,x)$ породжує борелівську міру $G_\mu\left(t,x;Z_\lambda\right)$, яка визначена на σ-алгебрі підмножин $Z_\lambda\subset Q^{(\lambda)}$ включаючи $Q^{(\lambda)}$ і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (36).

Список літератури

[1] Ptashnyk B. Y., Il'kiv V. S., Kmit' I. Y., Polishchuk V. M. Nonlocal boundary value problems for equations with partial derivatives. Kyiv : Scientific thought, 2002. 416 p.

[2] Ptashnyk B. Y., Tymkiv I. R. *A multipoint problem for a parabolic equation with variable coefficients.* Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2008. № 12. P. 42-48.

[3] Klyus I. S., Ptashnyk B. Y. *A multipoint problem for equations with partial derivatives that are not solvable with respect to the highest time derivative.* Ukrainian Mathematical Journal 1999. **51**, № 12. P. 1604-1613.

[4] Matiychuk M. I. Parabolic and elliptic boundary value problems with singularities. Chernivtsi : Prut, 2003. 248 p.

[5] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *A boundary value problem with impulse action for a parabolic equation with degeneration.* Ukrainian Mathematical Journal 2019. **71**, № 5. P. 645-655.

[6] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *A nonlocal multipoint time problem for parabolic equations with degeneration.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2017. **60**, № 2. P. 32-40.

[7] Pukal'skii I.D. *The Cauchy problem for non-uniformly parabolic equations with power singularities.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2021. **64**, № 2. P. 31-41.

[8] PukalskyyI.D.,YashanB.O. A multipoint in-time problem for the $2b$-parabolic equation with degeneration. Bukovinian Math. Journal. **10**, №2 (2022), 229-239.

[9] Friedman A. Partial differential equations of paraboloc type. Englewood Clifts; Prentice Hall, 1964. 347 p.

[10] Matiychuk M. I. Parabolic singular boundary value problems. Kyiv : Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1999. 176 p.

[11] Agmon S., Douglas A., Nirenberg L. Estimates noar the boundary of solutions of elliptic equations in partial derivatives under common boundary conditions. M.: JL, 1962. 205 p.

Надійшло 13.02.2024

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. *A multipoint boundary value problem in time for a $2b$-parabolic equation with degeneracy*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 94–106.

One of the most important issues in the general theory of differential equations with partial derivatives is establishing the solvability of boundary value problems. Among the boundary value problems for equations with partial derivatives, problems with nonlocal boundary conditions occupy an important place. Such interest in such problems is caused both by their rich practical application (the process of diffusion, moisture distortion in soils, plasma physics, etc.), and by the needs of the general theory of boundary value problems.

A general multipoint boundary value problem for nonuniformly $2b$-parabolic equations with degeneracy is studied. The coefficients of parabolic equations and boundary conditions allow power degeneracy of arbitrary order in terms of time variable and spatial variables at some set of points. To solve the given multipoint boundary value problem, solutions of problems with smooth coefficients in Hölder spaces with the appropriate norm are studied. With the help of interpolation inequalities and a priori estimates, estimates of the solution of auxiliary problems and their derivatives in special Gelder spaces are established. Using the theorems of Ross and Archel, a convergent sequence is distinguished from the compact sequence of solutions of the auxiliary problems, the limiting value of which is the solution of the multipoint boundary value problem in time for the $2b$-parabolic equation with degeneracy. Estimates of the solution of the given problem are established in Helder spaces with power-law weights. The order of the power weight is determined by the order of features of the coefficients of the equations and the boundary conditions. With certain restrictions on the right-hand side of the equation and boundary conditions, an integral image of the given problem is obtained.

Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 1, 107–119 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 107–119

Філіпчук М.П., Філіпчук О.І.

ПРО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів у випадку інтегральних крайових умов.

Запропоновано як традиційну схему методу з визначальним рівнянням, так і модифіковану схему без визначального рівняння.

Отримано умови існування розв'язку розглядуваної крайової задачі та оцінку похибки побудованих послідовних наближень.

Ключові слова і фрази: чисельно-аналітичний метод, система диференціальних рівнянь, перетворений аргумент, крайова задача, інтегральні крайові умови.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *m.filipchuk@chnu.edu.ua, o.filipchuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Одним із доволі ефективних та універсальних методів дослідження різноманітних крайових задач для систем диференціальних рівнянь є чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка [1, 2, 3]. Поширення цього методу на нові класи крайових задач, зокрема, для рівнянь з відхиленим аргументом, залишається актуальною задачею [4].

Суть чисельно-аналітичного методу в його класичному варіанті полягає у побудові спеціальним чином послідовності функцій $x_m(t, x_0)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, де x_0 – невідомий параметр, кожна з яких задовольнятиме розглядувані крайові умови. При певних умовах доводиться рівномірна збіжність цієї послідовності до граничної функції $x^*(t, x_0)$, яка, природно, задовольнятиме крайові умови, а також «збурену» вихідну систему. Тоді, вибираючи параметр x_0 нулем «збурення», тобто розв'язком так званого визначального рівняння, отримуємо точний розв'язок $x^*(t, x_0)$ вихідної крайової задачі.

Пізніше у праці [5] вперше було продемонстровано можливість реалізації таких модифікацій чисельно-аналітичного методу, де взагалі не виникатиме визначальне рівняння. Було показано, як будувати послідовність функцій $x_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, яка

УДК 517.929.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K10.

© Філіпчук М.П., Філіпчук О.І., 2024

задовольнятиме крайові умови і рівномірно збігатиметься до єдиного розв'язку $x^*(t)$ розглядуваної крайової задачі.

У даній праці за допомогою стандартної та модифікованої схем чисельно-аналітичного методу досліджуватимемо питання існування та наближеної побудови розв'язку крайової задачі з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \ldots, x(\lambda_k(t))), \tag{1}$$

$$\int_0^T x(t)dt = d, \tag{2}$$

де $t \in [0, T]$, $T = const > 0$; $x, f \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_i : [0, T] \to [0, T]$ $(i = \overline{1, k})$ – довільні неперервні відображення, d – сталий n-вимірний вектор. Зауважимо, що часткові випадки $k = 0$ (відсутність перетворених аргументів в системі) та $k = 1$ (наявність лише одного перетвореного аргументу в системі) раніше були вивчені в працях [6] і [7, 8] відповідно. Випадок лінійних двоточкових крайових умов для системи (1) розглядався в [9, 10].

Функцію $f(t, x, y_1, \ldots, y_k)$ вважатимемо визначеною та неперервною в області

$$(t, x, y_1, \ldots, y_k) \in [0, T] \times D^{k+1},$$

де D – замкнена обмежена область в $\mathbb{R}^n$, обмеженою вектором $M \in \mathbb{R}^n$, $M_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$, і задовольняючою умову Ліпшіца по $x, y_1, \ldots, y_k$ з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0;\ i, j = \overline{1, n}\}$:

$$|f(t, x, y_1, \ldots, y_k)| \leq M, \tag{3}$$

$$|f(t, \overline{x}, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_k}) - f(t, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y_1}}, \ldots, \overline{\overline{y_k}})| \leq K \left(|\overline{x} - \overline{\overline{x}}| + \sum_{i=1}^{k} |\overline{y_i} - \overline{\overline{y_i}}| \right). \tag{4}$$

Тут

$$|f(t, x, y_1, \ldots, y_k)| = (|f_1(t, x, y_1, \ldots, y_k)|, \ldots, |f_n(t, x, y_1, \ldots, y_k)|)$$

і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

1 Класична схема чисельно-аналітичного методу

Позначимо через D_β множину точок $x_0 \in \mathbb{R}^n$, які містяться в області D разом зі своїм β-околом, де

$$\beta = \frac{7}{6} TM + 2 \left| \frac{1}{T} d - x_0 \right|.$$

Нехай

$$D_\beta \neq \varnothing \tag{5}$$

і найбільше власне значення матриці $Q = \dfrac{7(k+1)}{6} TK$ не перевищує одиниці:

$$\lambda_{max}(Q) < 1. \tag{6}$$

Розглянемо послідовність функцій, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$x_0(t,x_0)=x_0,\quad x_m(t,x_0)=x_0+\int\limits_0^t\left[g_{m-1}(z,x_0)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g_{m-1}(s,x_0)ds\right]dz+$$

$$+\frac{2t}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d-\int\limits_0^T\int\limits_0^t\left[g_{m-1}(z,x_0)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g_{m-1}(s,x_0)ds\right]dzdt\right)-x_0\right],\ m=1,2,\ldots, \tag{7}$$

де

$$g_{m-1}(t,x_0)\equiv f(t,x_{m-1}(t,x_0),x_{m-1}(\lambda_1(t),x_0),\ldots,x_{m-1}(\lambda_k(t),x_0)),$$

а параметр $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що для довільних x_0 всі функції цієї послідовності задовольняють крайові умови (2).

Має місце наступне твердження про збіжність послідовних наближень $x_m(t,x_0)$ вигляду (7).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (3)-(6). *Тоді послідовність функцій* $x_m(t,x_0)$ *вигляду* (7) *рівномірно збігається при* $m\to\infty$ *в області* $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ *до граничної функції* $x^*(t,x_0)$, *яка задовольняє крайові умови* (2) *і є розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t)=x_0+\int\limits_0^t\left[g(z)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)ds\right]dz+$$

$$+\frac{2t}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d-\int\limits_0^T\int\limits_0^t\left[g(z)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)ds\right]dzdt\right)-x_0\right], \tag{8}$$

де

$$g(t)\equiv f(t,x(t),x(\lambda_1(t)),\ldots,x(\lambda_k(t))),$$

який при $t=0$ *проходить через точку* $x^*(0,x_0)=x_0$. *Крім цього,* $x^*(t,x_0)$ *є розв'язком крайової задачі*

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(\lambda_1(t)),\ldots,x(\lambda_k(t)))+\Delta(x_0),\quad \int\limits_0^T x(t)dt=d, \tag{9}$$

де

$$\Delta(x_0)=\frac{2}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d-\int\limits_0^T\int\limits_0^t\left[g(z)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)ds\right]dzdt\right)-x_0\right]-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)ds.$$

Для відхилення $x^*(t,x_0)$ *від* $x_m(t,x_0)$ *при всіх* $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ *і* $m=1,2,\ldots$ *вірна оцінка*

$$|x^*(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\le W_m(x_0),\quad W_m(x_0)\equiv Q^m(E-Q)^{-1}\beta. \tag{10}$$

Доведення. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (7) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що при $x_0 \in D_\beta$ всі функції $x_m(t, x_0)$ містяться в області D. На підставі (7) із врахуванням (3) та леми 2.1[2] знаходимо:

$$|x_1(t,x_0) - x_0| \le 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right)M + 2\left|\frac{1}{T}d - x_0\right| + \frac{2}{T}M\int\limits_0^T 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right)dt \le$$

$$\le \frac{T}{2}M + 2\left|\frac{1}{T}d - x_0\right| + \frac{2}{T}M\cdot\frac{1}{3}T^2 = \frac{7}{6}TM + 2\left|\frac{1}{T}d - x_0\right| = \beta. \tag{11}$$

Тому $x_1(t,x_0) \in D$, як тільки $x_0 \in D_\beta$. Індукцією легко показати, що для всіх $m = 1, 2, \ldots,\ t \in [0,T]$ і будь-якого $x_0 \in D_\beta$ функції $x_m(t,x_0)$ вигляду (7) не виходять за межі області D.

Покладаючи $r_{m+1}(t,x_0) = |x_{m+1}(t,x_0) - x_m(t,x_0)|$, на підставі (7) із врахуванням (4) отримуємо:

$$r_{m+1}(t,x_0) \le K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t \omega_m(s,x_0)ds + \frac{t}{T}\int\limits_t^T \omega_m(s,x_0)ds\right] +$$

$$+\frac{2}{T}K\int\limits_0^T\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t \omega_m(s,x_0)ds + \frac{t}{T}\int\limits_t^T \omega_m(s,x_0)ds\right]dt, \tag{12}$$

де

$$\omega_m(s,x_0) = r_m(s,x_0) + \sum_{i=1}^{k} r_m(\lambda_i(s),x_0).$$

Згідно з (11), $r_1(t,x_0) = |x_1(t,x_0) - x_0| \le \beta$, тому із (12) при $m = 1$ знаходимо:

$$r_2(t,x_0) \le (k+1)K\beta\cdot 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \frac{2}{T}(k+1)K\beta\int\limits_0^T 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right)dt \le$$

$$\le (k+1)K\beta\frac{T}{2} + \frac{2}{T}(k+1)K\beta\cdot\frac{1}{3}T^2 = \frac{7}{6}(k+1)TK\beta = Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $(t,x_0) \in [0,T]\times D_\beta$

$$r_{m+1}(t,x_0) \le Q^m\beta,\ m = 0,1,\ldots.$$

Тому для $j \ge 1$ маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t,x_0) - x_m(t,x_0)| \le \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t,x_0) \le \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\right)\beta = Q^m\left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right)\beta. \tag{13}$$

Умова (6) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m\to\infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \le (E-Q)^{-1}. \tag{14}$$

Тоді із (13) та (14) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t, x_0)$ вигляду (7) рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ і

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0). \tag{15}$$

Оскільки всі послідовні наближення $x_m(t, x_0)$ задовольняють крайові умови (2), то й гранична функція $x^*(t, x_0)$ також їх задовольняє. При $j \to \infty$ із (13), враховуючи (15) та (14), для всіх $m = 1, 2, \ldots,\ (t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ отримуємо оцінку (10). Крім цього, переходячи із врахуванням (15) у (7) до границі при $m \to \infty$, бачимо, що функція $x^*(t, x_0)$ є розв'язком інтегрального рівняння (8), який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, x_0) = x_0$. Отже, гранична функція $x^*(t, x_0)$ справді є розв'язком крайової задачі (9). Теорему доведено. □

На підставі теореми 1, використовуючи стандартну техніку обгрунтування чисельно-аналітичного методу [2, 3], нескладно отримати наведені далі твердження.

Необхідні і достатні умови для того, щоб гранична функція $x^*(t, x_0)$ послідовності (7) була розв'язком крайової задачі (1), (2), дає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок $x^*(t)$ початкової задачі*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \ldots, x(\lambda_k(t))), \quad x(0) = x_0,$$

був одночасно розв'язком крайової задачі (1), (2), *необхідно і досить, щоб x_0 було розв'язком визначального рівняння*

$$\Delta(x_0) = 0, \tag{16}$$

де

$$\Delta(x_0) = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d - \int_0^T \int_0^t \left[g^*(z, x_0) - \frac{1}{T}\int_0^T g^*(s, x_0)ds\right] dzdt\right) - x_0\right] - \\ - \frac{1}{T}\int_0^T g^*(s, x_0)ds, \tag{17}$$

$$g^*(t, x_0) \equiv f(t, x^*(t, x_0), x^*(\lambda_1(t), x_0), \ldots, x^*(\lambda_k(t), x_0)).$$

При цьому $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ і для всіх $m = 1, 2, \ldots,\ t \in [0, T]$ щодо відхилення точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ крайової задачі (1), (2) *від її наближеного розв'язку $x_m(t, x_0)$ вигляду* (7) *вірна оцінка* (10).

На підставі теореми 2 отримуємо наступний чисельно-аналітичний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (1), (2):

а) при $x_0 \in D_\beta$ згідно з (7) будуємо послідовність функцій $x_m(t, x_0)$, залежну від x_0 як від параметра;

б) знаходимо граничну функцію $x^*(t, x_0)$ цієї послідовності;

в) складаємо визначальну функцію $\Delta(x_0)$ вигляду (17) і яким-небудь чисельним методом знаходимо розв'язок $x_0 = x_0^*$ визначального рівняння (16);

г) шукаємо розв'язок початкової задачі $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \ldots, x(\lambda_k(t))),\ x(0) = x_0^*$, або, що те саме, граничну функцію $x^*(t, x_0^*)$ послідовності $x_m(t, x_0^*)$.

Отримана функція і буде точним розв'язком крайової задачі (1), (2), а за її наближений розв'язок, який дає похибку, що не перевищує $W_m(x_0^*)$, можна взяти функцію $x_m(t, x_0^*)$ вигляду (7).

Головною проблемою при реалізації наведеного алгоритму є побудова в аналітичному вигляді функції $x^*(t, x_0)$. Крім цього, з точки зору практичного застосування, важливо вміти зробити висновок про існування розв'язку крайової задачі (1), (2) не за граничною функцією $x^*(t, x_0)$, а за її m-тим наближенням $x_m(t, x_0)$.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:*

1) існує опукла замкнена область $D_1 \subset D_\beta$, в якій наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_0) = 0, \tag{18}$$

де

$$\Delta_m(x_0) = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d - \int_0^T \int_0^t \left[g_m(z, x_0) - \frac{1}{T}\int_0^T g_m(s, x_0)ds\right] dzdt\right) - x_0\right] - \\ - \frac{1}{T}\int_0^T g_m(s, x_0)ds, \tag{19}$$

$$g_m(t, x_0) \equiv f(t, x_m(t, x_0), x_m(\lambda_1(t), x_0), \ldots, x_m(\lambda_k(t), x_0)),$$

має для деякого фіксованого $m \geq 1$ єдиний розв'язок $x_0 = x_{0m}$ ненульового індексу;

2) на межі S_1 області D_1 виконується нерівність

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > \frac{5}{3}(k+1)KW_m(x_0).$$

Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язок $x^*(t)$, початкове значення

$$x^*(0) = x_0^* \tag{20}$$

якого визначається таким x_0^*, яке належить області D_1.

Оцінку близькості граничних функцій $x^*(t, x_0')$ і $x^*(t, x_0'')$ для точок $x_0', x_0'' \in D_\beta$ дає наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для будь-яких точок $x_0', x_0'' \in D_\beta$ щодо відхилення граничних функцій $x^*(t, x_0')$ і $x^*(t, x_0'')$ послідовностей $x_m(t, x_0')$ і $x_m(t, x_0'')$ вигляду (7) відповідно вірна оцінка*

$$|x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')| \leq 3(E - Q)^{-1}\,|x_0' - x_0''|.$$

Неперервну залежність визначальної функції $\Delta(x_0)$ вигляду (17) від x_0 дає наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді функція $\Delta(x_0)$ вигляду (17) визначена, неперервна в області D_β і для всіх $x_0', x_0'' \in D_\beta$ задовольняє оцінку*

$$|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')| \le \left[\frac{2}{T}E + 5(k+1)K(E-Q)^{-1}\right]|x_0' - x_0''|.$$

Необхідні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб деяка область $D_2 \subset D_\beta$ містила точку x_0^*, яка визначає при $t = 0$ початкове значення (20) розв'язку $x^*(t)$ крайової задачі (1), (2), необхідно, щоб для всіх m і довільного $\overline{x}_0 \in D_2$ виконувалась нерівність*

$$|\Delta_m(\overline{x}_0)| \le \sup_{x_0 \in D_2}\left[\frac{2}{T}E + 5(k+1)K(E-Q)^{-1}\right]|x_0 - \overline{x}_0| + \frac{5}{3}(k+1)KW_m(\overline{x}_0).$$

Оцінку відхилення наближеного розв'язку $x_m(t, x_{0m})$, де x_{0m} – розв'язок наближеного визначального рівняння (18), від точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$ крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді для відхилення наближеного розв'язку $x_m(t, x_{0m})$, де x_{0m} – розв'язок наближеного визначального рівняння (18), від точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$ крайової задачі (1), (2) вірна оцінка*

$$|x^*(t, x_0^*) - x_m(t, x_{0m})| \le 3(E-Q)^{-1}|x_0^* - x_{0m}| + W_m(x_{0m}).$$

Аналогічно [2, 3], при деяких додаткових умовах гладкості правої частини системи (1) можна показати, що $|x_0^* - x_{0m}| \to 0$ при $m \to \infty$ та довести рівномірну збіжність наближеного розв'язку $x_m(t, x_{0m})$ до точного $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$.

2 Модифікована схема чисельно-аналітичного методу

Наведемо тепер для крайової задачі (1), (2) модифіковану схему чисельно-аналітичного методу, де не виникатиме визначальне рівняння, тобто метод матиме лише аналітичну складову.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови:*

1) вектор $w_0 = \frac{1}{T}d$ лежить в області D разом зі своїм $\beta = \frac{3}{2}TM$-околом;

2) найбільше власне значення матриці $Q = \frac{3(k+1)}{2}TK$ не перевищує одиниці:

$$\lambda_{max}(Q) < 1.$$

Тоді крайова задача (1), (2) *має в області* D *єдиний розв'язок* $x^*(t)$, *який є рівномірною границею послідовних наближень*

$$x_0(t) = w_0, \quad x_m(t) = w_0 + \int\limits_0^t f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda_1(s)), \ldots, x_{m-1}(\lambda_k(s)))ds -$$

$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^T \int\limits_0^t f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda_1(s)), \ldots, x_{m-1}(\lambda_k(s)))dsdt, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

причому

$$|x^*(t) - x_m(t)| \le Q^m(E - Q)^{-1}\beta \tag{22}$$

для всіх $m = 1, 2, \ldots$ *і* $t \in [0, T]$.

Доведення. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (21) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що всі функції $x_m(t)$ містяться в області D. На підставі (21), враховуючи (3), маємо:

$$|x_1(t) - w_0| \le Mt + \frac{1}{T}M\int\limits_0^T \int\limits_0^t dsdt \le MT + \frac{1}{T}M\frac{T^2}{2} = \frac{3}{2}TM = \beta. \tag{23}$$

Тому, з врахуванням умови 1), $x_1(t) \in D$. Індукцією нескладно показати, що для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і $t \in [0, T]$ функції $x_m(t)$ вигляду (21) не виходять за межі області D.

Покладаючи $r_{m+1}(t) = |x_{m+1}(t) - x_m(t)|$, на підставі (21) із врахуванням (4) маємо:

$$r_{m+1}(t) \le K\int\limits_0^t \omega_m(s)ds + \frac{1}{T}K\int\limits_0^T \int\limits_0^t \omega_m(s)dsdt. \tag{24}$$

де $\omega_m(s) = r_m(s) + \sum\limits_{i=1}^{k} r_m(\lambda_i(s))$.

Згідно з (23),

$$r_1(t) = |x_1(t) - w_0| \le \beta,$$

тому з (24) при $m = 1$ знаходимо:

$$r_2(t) \le K(k+1)\beta t + \frac{1}{T}K(k+1)\beta\int\limits_0^T \int\limits_0^t dsdt \le$$

$$\le (k+1)TK\beta + (k+1)\frac{1}{T}K\beta\frac{T^2}{2} = \frac{3(k+1)}{2}TK\beta = Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $t \in [0, T]$

$$r_{m+1}(t) \le Q^m\beta, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Тому для $j \geq 1$ маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t) - x_m(t)| \leq \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t) \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\right) \beta = Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right) \beta. \tag{25}$$

Умова 2) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m\to\infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}. \tag{26}$$

Тоді з (25) та (26) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t)$ вигляду (21) рівномірно збігається при $m \to \infty$ для всіх $t \in [0, T]$ і

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t) = x^*(t). \tag{27}$$

Оскільки, в чому нескладно переконатися безпосередньою перевіркою, всі послідовні наближення $x_m(t)$ задовольняють крайові умови (2), то і гранична функція $x^*(t)$ також їх задовольняє.

При $j \to \infty$ із (25), враховуючи (26) та (27), для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і $t \in [0, T]$ отримуємо оцінку (22).

Крім цього, переходячи з врахуванням (27) у (21) до границі при $m \to \infty$, бачимо, що функція $x^*(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = w_0 + \int_0^t f(s, x(s), x(\lambda_1(s)), \ldots, x(\lambda_k(s)))ds -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t f(s, x(s), x(\lambda_1(s)), \ldots, x(\lambda_k(s)))dsdt.$$

Отже, гранична функція $x^*(t)$ справді є розв'язком крайової задачі (1), (2). Доведемо тепер єдиність цього розв'язку.

Нехай $y(t)$ – довільний розв'язок крайової задачі (1), (2). Тоді, як нескладно перевірити, він є розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = w_0 + \int_0^t f(s, y(s), y(\lambda_1(s)), \ldots, y(\lambda_k(s)))ds -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t f(s, y(s), y(\lambda_1(s)), \ldots, y(\lambda_k(s)))dsdt.$$

Аналогічно, як і вище, нескладно встановити, що для всіх $t \in [0, T]$

$$|y(t) - x_0(t)| = |y(t) - w_0| \leq \frac{3}{2}TM = \beta,$$

$$|y(t) - x_1(t)| \le \frac{3(k+1)}{2} TK\beta = Q\beta,$$

і, за індукцією,

$$|y(t) - x_m(t)| \le Q^m\beta, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Таким чином, $x_m(t) \to y(t)$ при $m \to \infty$ рівномірно на $[0, T]$. З єдиності границі послідовності випливає, що $y(t) = x^*(t)$ для всіх $t \in [0, T]$. Єдиність розв'язку $x^*(t)$ доведено. Теорему доведено. □

Зауваження. *Усі результати, наведені в секціях 1 та 2, при $k = 1$ повторюють результати з [7, 8], а при $k = 0$ – аналогічні результатам із [6].*

Приклади

Проілюструємо використання розроблених схем чисельно-аналітичного методу на конкретних прикладах. Для простоти та компактності обмежимося розглядом модифікованої схеми в скалярному випадку.

Приклад 1. *Розглянемо крайову задачу*

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3}x(t) - \frac{1}{3}x(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2}x(\frac{t}{3}) + 6, \qquad \int_0^{\frac{1}{3}} x(t)dt = \frac{1}{3},$$

де $t \in [0, \frac{1}{3}]$, $D = [-6, 9]$.

В цьому випадку

$$k = 2,\ T = \frac{1}{3},\ d = \frac{1}{3},\ M = 14,\ K = \frac{1}{2},\ w_0 = 1,\ \beta = 7,\ Q = \frac{3}{4},$$

а тому виконуються всі умови теореми 8.

Послідовні наближення, знайдені згідно з (21), мають вигляд:

$$x_0(t) = 1,$$

$$x_1(t) = \frac{11}{2}\,t + \frac{1}{12} = 5.5\,t + 0.08(3),$$

$$x_2(t) = \frac{143}{24}\,t + \frac{1}{144} = 5.958(3)\,t + 0.0069(4),$$

$$x_3(t) = \frac{1727}{288}\,t + \frac{1}{1728} = 5.99652(7)\,t + 0.000578(703),$$

$$x_4(t) = \frac{20735}{3456}\,t + \frac{1}{20736} = 5.9997106(481)\,t + 0.00004822(530864197),$$

$$x_5(t) = \frac{248831}{41472}\,t + \frac{1}{248832} = 5.999975887(345679012)\,t +$$

$$+0.0000040187(757201646090534979423868312),$$

$$\dots$$
$$x_m(t) = \frac{12^m - 1}{2 \cdot 12^{m-1}}\, t + \frac{1}{12^m} = \frac{6(12^m - 1)}{12^m}\, t + \frac{1}{12^m} = 6\, t \left(1 - \frac{1}{12^m}\right) + \frac{1}{12^m},$$
$$\dots.$$

Дана послідовність рівномірно збігається в області D до граничної функції $x^*(t) = 6\, t$, яка і є точним розв'язком розглядуваної крайової задачі.

Приклад 2. *Розглянемо крайову задачу*

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{5}x(t) - \frac{1}{5}x(t^2) + \frac{1}{5}x(t^3) - 1, \qquad \int_0^1 x(t)dt = 5,$$

де $t \in [0, 1]$, $D = [0, 10]$.

В цьому випадку

$$k = 2,\ T = 1,\ d = 5,\ M = 3,\ K = \frac{1}{5},\ w_0 = 5,\ \beta = \frac{9}{2},\ Q = \frac{9}{10},$$

а тому виконуються всі умови теореми 8.

Послідовні наближення, знайдені згідно з (21), мають вигляд:

$$x_0(t) = 5, \qquad x_m(t) = 5,\ m = 1, 2, \dots.$$

Дана послідовність рівномірно збігається в області D до граничної функції $x^*(t) = 5$, яка і є точним розв'язком розглядуваної крайової задачі.

Список літератури

[1] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Наукова думка, Киев, 1985.

[2] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Наукова думка, Киев, 1992.

[3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. DOI: https://doi.org/10.1142/3962

[4] Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И. *Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III.* Укр. мат. журн. 1998, **50** (7), 960–979. https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4876

[5] Трофимчук Е.П., Коваленко А.В. *Численно-аналитический метод А.М. Самойленко без определяющего уравнения.* Укр. мат. журн. 1995, **47** (1), 138–140. http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/5396

[6] Самойленко А.М., Мартынюк С.В. *Обоснование численно-аналитического метода последовательных приближений для задач с интегральными краевыми условиями.* Укр. мат. журн. 1991, **43** (9), 1231–1239. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/153085

[7] Філіпчук М.П. Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Чернівці, 1999.

[8] Філіпчук М.П. *Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь. 2001, **7**, 243–250.

[9] Філіпчук М.П. *Двоточкова крайова задача для системи з багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2017, **5** (1-2), 139–143. http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/243

[10] Філіпчук М.П. *Про одну двоточкову крайову задачу для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2021, **9** (1), 284–290. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.24

Список літератури

[1] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods for the Investigation of Solutions of Boundary-Value Problems. Naukova Dumka, Kiev, 1985. (in Russian)

[2] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 1992. (in Russian)

[3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. DOI: https://doi.org/10.1142/3962

[4] Ronto M.I., Samoilenko A.M., Trofimchuk S.I. *The theory of the numerical-analytic method: Achievements and new trends of development. III.* Ukr. Math. J. 1998, **50** (7), 960–979. https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4876 (in Russian)

[5] Trofimchuk E.P., Kovalenko A.V. *A.M. Samoilenko's numerical-analytic method without determining equation.* Ukr. Math. J. 1995, **47** (1), 138–140. http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/5396 (in Russian)

[6] Samoilenko A.M., Martynyuk S.V. *Justification of a numerical-analytic method of successive approximations for problems with integral boundary conditions.* Ukr. Math. J. 1991, **43** (9), 1231–1239. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/153085 (in Russian)

[7] Filipchuk M.P. Averaging Method in Boundary-Value Problems for Differential Equations with Deviated Argument. Candidate-Degree Thesis. Chernivtsi, 1999. (in Ukrainian)

[8] Filipchuk M.P. *A problem with integral boundary conditions for a system of differential equations with a transformed argument.* Boundary value problems for differential equations. 2001, **7**, 243–250. (in Ukrainian)

[9] Filipchuk M.P. *Two-point boundary value problem for a system with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2017, **5** (1-2), 139–143. http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/243 (in Ukrainian)

[10] Filipchuk M.P. *On a two-point boundary value problem for a system of differential equations with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2021, **9** (1), 284–290. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.24 (in Ukrainian)

Надійшло 19.01.2024

Filipchuk M.P., Filipchuk O.I. *On a boundary value problem with integral conditions for a system of differential equations with many transformed arguments*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 107–119.

A.M. Samoilenko's numerical-analytic method is well-known and effective research method of solvability and approximate construction of the solutions of various boundary value problems for systems of differential equations. The investigation of boundary value problems for new classes of systems of functional-differential equations by this method is still an actual problem.

A boundary value problem for a system of differential equations with finite quantity of transformed arguments in the case of integral boundary conditions is considered at this paper.

To investigate the existence and approximate construction of the solution of such boundary value problem it is proposed a traditional scheme of the numerical-analytic method with a determining equation, as well as a modified scheme without a determining equation.

In the case of a traditional scheme it is constructed a recurrent sequence of functions that depend on parameter, each of which satisfies given boundary conditions. It is shown that under typical for numerical-analytic method assumptions, this sequence uniformly convergences to the limit function. It is established the value of the parameter at which the limit function will be an exact solution of the original boundary value problem. Approximate determining function and approximate determining equation put into consideration, and on the basis of them sufficient conditions for the solvability of this boundary value problem are obtained. The necessary conditions for the solvability of the considered boundary value problem and an estimation of the deviation of the approximate solution from the exact solution were also obtained.

In the case of the modified scheme it is constructed a recurrent sequence of functions, each of which satisfies the specified boundary conditions. Under the typical for the numerical-analytic method assumptions, the uniform convergence of this sequence to the limit function, which is the exact solution of the considered boundary value problem, is proved. It is established the uniqueness of this solution and it is obtained an estimation of the deviation of the approximate solution from the exact solution.

The proposed modified scheme of the numerical-analytic method is illustrated by concrete examples.

Петрина Г.О., Станжицький А.О.

АПРОКСИМАЦІЯ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ СТОХАСТИЧНОЮ СИСТЕМОЮ БЕЗ ЗАПІЗНЕННЯ

У даній роботі запропоновано схему апроксимації у середньому квадратичному розв'язків стохастичної системи диференціальних рівнянь із запізненням розв'язками системи стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення. Стохастичні диференціальні рівняння із запізненням відіграють важливу роль у моделюванні реальних процесів з пам'яттю, але їх дослідження ускладнюється нескінченновимірністю фазового простору. Для подолання цих труднощів ми розвиваємо підхід, заснований на апроксимації системи із запізненням системою звичайних диференціальних рівнянь збільшеної розмірності. Основний результат полягає у доведенні того, що за певних умов розв'язки апроксимуючої системи збігаються у середньому квадратичному до розв'язків вихідної системи із запізненням. Цей підхід дозволяє ефективно аналізувати та моделювати стохастичні системи із запізненням за допомогою скінченновимірних стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення.

Ключові слова і фрази: стохастичні диференціальні рівняння із запізненням, апроксимація, збіжність у середньому квадратичному, стохастичні диференціальні рівняння без запізнення.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
e-mail: *grpetryna@gmail.com, a.stanzhytskyi@imath.kiev.ua*

Вступ

Диференціальні рівняння із запізненням відіграють надзвичайно важливу роль при моделюванні поведінки реальних процесів із пам'яттю, тобто еволюція яких залежить від минулих станів. Численні приклади таких моделей можна знайти, наприклад, у [3]. Оскільки в ролі початкових даних тут виступають (неперервні чи інтегровні) функції, то фазовий простір таких рівнянь нескінченновимірний, що значно ускладнює дослідження. Одним із можливих варіантів вивчення тут може виступати розвинута в

УДК 517.925
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E05.
Дослідження Андрія Станжицького частково підтримано грантом Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України ЗМ-2024 "Якісний аналіз і керування у нелінійних інтегро-диференціальних рівняннях із імпульсними та стохастичними збуреннями", державний реєстраційний номер 0124U002140

© Петрина Г.О., Станжицький А.О., 2024

роботах І.М. Черевка та його учнів [10, 11, 12] схема апроксимації початкової задачі для системи рівнянь із запізненням задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Із зростанням розмірності таких систем її розв'язки наближаються до розв'язку вихідної початкової задачі для системи із запізненням. Дана схема базується на давній ідеї М.М. Красовського, пов'язаної із розкладом системи з запізненням за формулою Тейлора. Подібний метод застосовано в [4] до задачі оптимального керування системами із нескінченним запізненням.

Щодо інших підходів, то відзначимо роботу [1], де напівгрупа, породжена лінійною частиною рівняння, апроксимується напівгрупою скінченновимірних операторів, що у свою чергу приводить до заміни вихідної функціонально-диференціальної системи її скінченновимірними апроксимаціями. У роботі [5] до лінійної системи функціонально-диференціальних рівнянь застосовано метод асимптотичної еквівалентності, згідно з яким асимптотична поведінка ($t \to \infty$) розв'язків вихідної задачі аналогічна поведінці розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь.

Ще один підхід вивчення асимптотичної поведінки розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь шляхом зведення до поведінки розв'язків систем звичайних рівнянь розвинуто в [9]. Там побудовано глобальний атрактор, що складається із розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь, до якого притягуються всі розв'язки функціонально-диференціальної системи.

Потрібно також згадати тонкий результат А.М. Самойленка [6], де дослідження існування глобальних розв'язків системи із запізненням зведено до побудови системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої є розв'язками вихідної системи рівнянь із запізненням.

Щодо подібних питань для систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, то відзначимо роботи [7], де для дослідження асимптотики застосовано підхід з [9], та [8], де подібні питання вивчаються шляхом методу асимптотичної еквівалентності.

У даній роботі побудовано схему апроксимації у середньому квадратичному системи стохастичних диференціальних рівнянь системою стохастичних рівнянь без запізнення з використанням підходу робіт [10, 11, 12].

1 Постановка задачі, формулювання основного результату

В просторі $\mathbb{R}^d$ розглядається наступна початкова задача для системи стохастичних диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом

$$dx(t) = f(t, x(t), x(t-h))\,dt + \sigma(t, x(t), x(t-h))\,dW(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0],$$

Тут функції $f, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ визначені, неперервні за сукупністю змінних, та задовільняють наступні умови:

Існує стала $L > 0$, що виконано:

1) Лінійний ріст:

$$|f(t, x, y)|^2 + |\sigma(t, x, y)|^2 \le L(1 + |x|^2 + |y|^2) \tag{2}$$

для довільних $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$;

2) умова Ліпшиця:

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)|^2 + |\sigma(t,x_1,y_1) - g(t,x_2,y_2)|^2 \le L(|x_1-x_2|^2 + |y_1-y_2|^2). \quad (3)$$

Вважаємо також, що задано повний ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, потік σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, з яким узгоджено процес Вінера $W(t)$. Не втрачаючи загальності, але спрощуючи викладку, будемо вважати, що він одновимірний. Стала $h > 0$ характеризує інтервал запізнення $[-h, 0]$, на якому задана початкова, неперервна детермінована функція $\varphi(t)$. Через $C = ([-h,0]); \mathbb{R}^2)$- позначимо клас неперервних d-вимірних вектор-функцій $\varphi(t) : [-h,0] \to \mathbb{R}^d$ із супремумною нормною

$$|||\varphi||| = \sup_{t\in[-h,0]} |\varphi(t)|.$$

Тут $|\cdot|$- звичайна евклідова норма вектора в просторі $\mathbb{R}^d$. Розв'язок рівняння (1) будемо розуміти в стандартному сенсі [2]

Означення 1. *Скажемо, що $\mathcal{F}_t$-вимірний випадковий процес із неперервними траєкторіями є сильним розв'язком початкової задачі на $[0,T]$ якщо*

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]$$

та

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s-h))\, ds + \int_0^t \sigma(s, x(s), x(s-h))\, dW(s)$$

при $t \in [0,T]$ з ймовірністю 1.

Добре відомо, що умови (2) та (3) забезпечують існування та єдиність сильного розв'язку задачі (1) на $[0,T]$, при цьому $\mathbb{E}|x(t)|^2$- обмежений.

За системою (1) побудуємо наступну систему стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення, яку назвемо апроксимуючою. А саме, зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і розіб'ємо відрізок $[-h, 0]$ точками $\frac{h}{m}j$, $j = \overline{0,m}$ на m частин. Визначимо функції $z_j(t) \in \mathbb{R}^d$, як розв'язки наступних задач Коші

$$\begin{cases} dz_0 = f(t, z_0(t), z_m(t))\, dt + \sigma(t, z_0(t), z_m(t))\, dW(t), & \\ dz_j(t) = \frac{m}{h}\left(z_{j-1}(t) - z_j(t)\right), & t \in [0,T], \\ z_j(0) = \varphi\left(-\frac{hj}{m}\right), & j = \overline{0,m}. \end{cases} \quad (4)$$

Означення 2. *Система (4) називається апроксимуючою для системи (1) у середньому квадратичному, якщо*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|x(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)|^2 \to 0,\ m \to \infty,\ j = \overline{0,m}$$

Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *За виконання умов* (2) *та* (3) *система* (4) *є апроксимуючою у середньому квадратичному для початкової задачі* (1) *рівномірно по* $j = \overline{0,m}$, *тобто*

$$\sup_{j=\overline{0,m}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|x(t-\frac{h}{m}j) - z_j(t)|^2 \to 0,\ m \to 0. \tag{5}$$

Для подальших міркувань важливою є лема, яка у середньому квадратичному оцінює модуль неперервності розв'язку початкової задачі на $[-h,T]$.

Лема 1 (Про модуль неперервності)**.** *За виконання умов* (2) *та* (3) *для розв'язку початкової задачі справедлива нерівність*

$$\sup_{t_1\in[-h,T]} \mathbb{E} \sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]} |x(t_2)-x(t_1)|^2 \le C(T,||\varphi||,l) \to 0,\ l\to 0$$

Доведення. Оскільки розв'язок початкової задачі $x(t)$ існує на $[0,T]$ і має там обмежений другий момент, то в силу умови лінійного росту, матимемо

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 \le 3|\varphi(0)|^2 &+ 3\int_0^t |f(s,x(s),x(s-h))|^2\,ds \\ &+ 3\int_0^t |\sigma(s,x(s),x(s-h))|^2\,dW(s). \end{aligned}$$

Звідси, в силу нерівності Коші-Буняковського, матимемо

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &\le 3|\varphi(0)|^2 + 3T\int_0^t L(1+|x(s)|^2+|x(s-h)|^2)\,ds \\ &\quad + 3\sup_{s\in[0,t]}\left(\int_0^t |\sigma(\tau,x(\tau),x(\tau-h))|\,dW(\tau)\right)^2 \\ &\le 3|\varphi(0)|^2 + 3T\int_0^t L\left(1+\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau)|^2+\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau-h)|^2\right)ds \\ &\quad + 3\sup_{s\in[0,t]}\left(\int_0^s |\sigma(\tau,x(\tau),x(\tau-h))|\,dW(\tau)\right)^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидною є наступна нерівність

$$\sup_{s\in[0,t]} |x(s-h)|^2 \le ||\varphi||^2 + \sup_{s\in[0,t]} |x(s)|^2 \tag{7}$$

Враховуючи (7) та максимальну мартингальну нерівність для стохастичного інтеграла, із (6) отримаємо

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}|x(s)|^2 \le 3|\varphi(0)|^2 + 3T^2L||\varphi||^2 + 3T^2L + 6T\int_0^t L\mathbb{E}\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau)|^2\,d\tau + 12\int_0^t L\left(1+||\varphi||^2+2\mathbb{E}\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau)|^2\right)d\tau \le C_1(T,||\varphi||) + C_2(T,||\varphi||)\int_0^t L\mathbb{E}\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau)|^2\,d\tau.$$

Звідси в силу нерівності Гронуолла, матимемо оцінку

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}|x(s)|^2 \le C_1e^{C_2T} = C_3(T,||\varphi||).$$

Якщо $t \ge t_0$ то отримуємо

$$x(t_2)-x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t,x(t),x(t-h))\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\sigma(t,x(t),x(t-h))\,dW(t).$$

Тоді

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[t_1,t_1+l]}|x(t_2)-x(t_1)|^2 \le 2\left(l\int_{t_1}^{t_1+l} L\left(1+\mathbb{E}|x(t)|^2+\mathbb{E}|x(t-h)|^2\right)dt + \mathbb{E}\sup_{t\in[t_1,t_1+l]}\left|\int_{t_1}^{t}\sigma(s,x(s),x(s-h))\,dW(s)\right|^2\right).$$

Далі в силу останньої нерівності матимемо:

$$\mathbb{E}\sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}|x(t_2)-x(t_1)|^2 \le 2\left(l^2LC_3(T,\|\varphi\|)+\int_{t_1}^{t_1+l}L\cdot 2C_3(T,\|\varphi\|)\,dt\right) = C(T,\|\varphi\|,l)\to 0,\quad l\to 0.$$

Якщо t_1 та $t_1+l\in[-h,0]$ то тоді, в силу означення розв'язку маємо, що

$$\mathbb{E}\sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}|x(t_2)-x(t_1)|^2 = \sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|^2\to 0,\quad l\to 0,$$

В силу рівномірності неперервності на $[-h,0]$ функції φ. Якщо ж $t\in[-h,0]$,а $t_2>0$,то

$$|x(t_2)-x(t_1)| \le |x(t_2)-\varphi(0)| + |\varphi(t_1)-\varphi(0)|.$$

Очевидно, що $t_1\to 0$ і $t_2\to 0$, якщо $l\to 0$. Тоді, за доведеним вище

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t_1+l]}|x(t_2)-\varphi(0)|^2\to 0,\quad l\to 0$$

Останнє і доводить Лему. □

2 Доведення основного результату

Оскільки випадковий процес $x(t)$ має недиференційовні траєкторії (а лише неперервні з ймовірністю 1) то введемо наступний згладжений випадковий процес $x_\mu(t)$, побудований для кожного малого $\mu > 0$ наступним чином:

$$x_\mu(t) = \frac{1}{\mu}\int_t^{t+\mu} x(s)ds, \quad t \in [-h, T].$$

При цьому для $t \geq T$ процес $x(s)$ продовжимо як сталу випадкову величину за неперервністю. Очевидно, що процес $x_\mu(t)$ має гладкі траєкторії і

$$\dot{x}_\mu(t) = \frac{1}{\mu}\left[x(t+\mu) - x(t)\right].$$

Оцінимо різницю в середньому квадратичному між $x(t)$ і $x_\mu(t)$. Маємо

$$\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}|x(t) - x_\mu(t)|^2 = \sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}|x(t) - x(\theta)|^2. \tag{8}$$

При отриманні (8) використана теорема про середнє значення інтегралу, тут $\theta = \theta(\omega)$ випадкова величина і $\theta \in [t, t+\mu]$. Тому

$$\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}|x(t) - x(\theta)|^2 \leq \sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E} \sup_{s\in[t,t+\mu]} |x(t) - x(s)|^2 \leq C(T, ||\varphi||, \mu) \to 0, \quad \mu \to 0, \tag{9}$$

В силу леми про модуль неперервності. Отже

$$\sup_{t\in[-h,0]} \mathbb{E}|x(t) - x_\mu(t)| \leq C(T, ||\varphi||, \mu) \to 0, \quad \mu \to 0$$

Для структурності читання далі опишему схему доведення. Позначимо $y_j(t) = x(t - \frac{hj}{m})$ та введемо різниці $N_j(t) = \mathbb{E}|y_j(t) - z_j(t)|^2$, $j = \overline{0,m}$, де $z_j(t)$ розв'язки системи (4). Зазначимо, що в силу класичних теорем існування та єдиності розв'язку задачі Коші для систем стохастичних рівнянь, за виконання умов (2), (3) система (4) для кожного натурального m має єдиний сильний розв'язок, визначений на $[0, T]$. Розглянемо систему (4), починаючи з другого рівняння.Далі доведення розбивається на кілька кроків.

Крок 1. Використовуючи лінійність системи (4) (починаючи з другого рівняння) розіб'ємо її на дві системи і представимо $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$ де відповідно $z_j^{(1)}$ розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m}\dot{z}_1^{(1)} = x(t) - z_1^{(1)} \\ \frac{h}{m}\dot{z}_j^{(1)} = z_{j-1}^{(1)} - z_j^{(1)}, \quad j = \overline{1,m}, \\ z_j^{(1)}(0) = x(-\frac{hj}{m}). \end{cases} \tag{10}$$

а $z_j^{(2)}$ розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot{z}_1^{(2)} = -z_1^{(2)} + (z_0 - x) \\ \dfrac{h}{m}\dot{z}_j^{(2)} = z_{j-1}^{(2)} - z_j^{(2)}, \quad j = \overline{1,m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left| x\left(t - \frac{hj}{m}\right) - z_j(t)\right|^2 &= \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|y_j(t) - z_j(t)\right|^2 \\ &\le 2\left(\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\right|^2 + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|z_j^{(2)}(t)\right|^2\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Крок 2. На цьому кроці проводимо оцінку першого доданку в (12). Для цього $x(t)$ подаємо у вигляді $x(t) = x_\mu(t) + (x(t) - x_\mu(t)) = x_\mu(t) - x_1(t)$, а $y_j(t) = y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t)$. Тут $y_j^{(1)}(t) = x_\mu(t - \frac{hj}{m})$, а $y_j^{(2)}(t) = x_1(t - \frac{hj}{m})$. Тоді система (10) розпадається на дві системи $z_j^{(1)}(t) = u_j(t) + v_j(t)$ де відповідне $u_j(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot{u}_1 = -u_1 + x_\mu \\ \dfrac{h}{m}\dot{u}_j = u_{j-1} - u_j, \quad j = \overline{2,m}, \\ u_j(0) = y_j^{(1)}(0) = x_\mu(-\dfrac{hj}{m}), \end{cases} \tag{13}$$

а $v_j(t)$ є розв'язком задачі Коші для системи

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot{v}_1 = -v_1 + x_1 \\ \dfrac{h}{m}\dot{v}_j = v_{j-1} - v_j, \quad j = \overline{2,m}, \\ v_j(0) = y_j^{(2)}(0) = x_1(-\dfrac{hj}{m}) - x_\mu(-\dfrac{hj}{m}). \end{cases} \tag{14}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\ \left|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\right|^2} &\le \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t) - (u_j(t) + v_j(t))\right|^2} \\ &\le 3\left(\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(1)}(t) - u_j(t)\right|^2}\right. \\ &\quad \left. + \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(2)}(t)\right|^2} + \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|v_j(t)\right|^2}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Оцінюючи кожнен доданок в (15) окремо, прийдемо до оцінки першого доданку в (12).

Крок 3. Використовуючи систему (11), оцінюємо другий доданок в (12).

Крок 4. Використовуючи оцінки кожного із доданків в (12), отримані на попередніх кроках, з нерівності (12) приходимо до оцінки (5), що і доведе теорему.

Подальше доведення теореми відбувається у послідовній реалізації кожного із кроків.

Реалізація. Оцінимо перший доданок в (15). Приведемо оцінки при $j = 1$. Позначимо $\varepsilon_1(t) = u_1(t) - y_1^{(1)}(t)$, при цьому $\varepsilon_1(0) = 0$.Тоді

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \dot{u}_1 - \dot{y}_1^{(1)} \\ &= \frac{m}{h}(x_\mu - u_1) - \dot{y}_1^{(1)} \\ &= \frac{m}{h}(-u_1 + y_1^{(1)}) + \frac{m}{h}(x_\mu - y_1^{(1)}) - \dot{y}_1^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \frac{m}{h}(x_\mu - y_1^{(1)}) - \dot{y}_1^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \psi(t).\end{aligned}$$

Таким чином, для $\varepsilon_1(t)$ отримується система рівнянь

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_1 = -\dfrac{m}{h}\varepsilon_1 + \psi(t) \\ \varepsilon_1(0) = 0.\end{cases} \tag{16}$$

Для оцінки $\psi(t)$ маємо

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{m}{h}\left(x_\mu(t) - y_1^{(1)}(t)\right) - \dot{y}_1^{(1)}(t) \\ &= \frac{m}{h}\left(x_\mu(t) - x_\mu\left(t - \frac{h}{m}\right)\right) - \dot{x}_\mu\left(t - \frac{h}{m}\right) \\ &= \dot{x}_\mu(\theta) - \dot{x}_\mu\left(t - \frac{h}{m}\right),\end{aligned}$$

тут $\theta(\omega) \in [t - \frac{h}{m}, t]$. Із визначення процесу $x_\mu(t)$ отримуємо

$$\psi(t) = \frac{1}{\mu}[x(\theta + \mu) - x(\theta)] - \frac{1}{\mu}[x(t - \frac{h}{m} + \mu) - x(t - \frac{h}{m})].$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|\psi(t)|^2}\le\frac{1}{\mu}\left[\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|x(\theta+\mu)-x\left(t-\frac{h}{m}+\mu\right)\right|^2}\right.$$
$$\left.+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|x(\theta)-x\left(t-\frac{h}{m}\right)\right|^2}\right]$$
$$\le\frac{1}{\mu}\left[\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\sup_{s\in\left[t-\frac{h}{m}+\mu,t+\mu\right]}\left|x(s)-x\left(t-\frac{h}{m}+\mu\right)\right|^2}\right.$$
$$\left.+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\sup_{s\in\left[t-\frac{h}{m}+\mu,t+\mu\right]}\left|x(s)-x\left(t-\frac{h}{m}\right)\right|^2}\right]$$
$$\le\sqrt{\frac{4}{\mu^2}C\left(T,||\varphi||,\frac{h}{m}\right)}\to 0,\quad m\to\infty.$$

Остання оцінка отрималась із використанням леми про модуль неперервності. З (16), та формули варіації довільної сталої маємо

$$\varepsilon_1(t)=\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\psi(s)ds.$$

Отже, з використанням нерівності Коші-Буняковського, звідси отримуємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\psi(s)\,ds\right|^2\le\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\,ds\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\mathbb{E}|\psi(s)|^2\,ds\right)$$
$$\le\frac{h}{m}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\,ds\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|\psi(t)|^2 \tag{17}$$
$$\le\left(\frac{h}{m}\right)^2\frac{4}{\mu^2}C\left(T,||\varphi||,\frac{h}{m}\right).$$

Таким чином для $\varepsilon_1(t)$ справедлива нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_1(t)|^2}\le\frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C\left(T,||\varphi||,\frac{h}{m}\right)} \tag{18}$$

Далі оцінимо $y_1^{(2)}(t)=x_1(t-\frac{h}{m})=x_\mu(t-\frac{h}{m})-x(t-\frac{h}{m})$.З (9) маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|y_1^{(2)}(t)|^2}=\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|x_\mu\left(t-\frac{h}{m}\right)-x\left(t-\frac{h}{m}\right)\right|}\le\sqrt{C(T,||\varphi||,\mu)}.$$

Оцінимо тепер $v_1(t)$ у системі (14). З формули варіації для лінійного рівняння маємо

$$v_1(t)=e^{-\frac{m}{h}t}v_1(0)+\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}x_1(s)ds$$

Отже

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|v_1(t)|^2}\le\sqrt{\mathbb{E}|v_1(0)|^2}+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}x_1(s)\,ds\right|^2\left(\frac{m}{h}\right)^2}. \tag{19}$$

Але $v_1(0)=x_1(-\frac{h}{m})$. Тоді з (9) отримуємо

$$\mathbb{E}|v_1(0)|^2\le C(T,||\varphi||,\mu), \tag{20}$$

а тому

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}x_1(s)\,ds\right|^2\left(\frac{m}{h}\right)^2}\le\left(\frac{h}{m}\right)^2 C(T,||\varphi||,\mu)\left(\frac{m}{h}\right)^2. \tag{21}$$

Оцінка інтеграла в (21) проводиться аналогічною оцінці (17) з використанням нерівності Коші–Буняковського. Отже, з (19)-(21) маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|v_1(t)|^2}\le 2\left(\sqrt{C(T,||\varphi||,\mu)}+\sqrt{C(T,||\varphi||,\mu)}\right)=2\sqrt{C(T,||\varphi||,\mu)}. \tag{22}$$

Значить з (15), (18) і (22) маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|y_1(t)-z_1^{(1)}(t)|^2}\le\frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})}+2\sqrt{C(T,||\varphi||,\mu)}.$$

Приведемо тепер оцінку для $j=2$.Аналогічно випадку $j=1$ потрібно оцінити

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_2(t)-z_2^{(1)}(t)\right|^2}\le&\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_2^{(1)}(t)-u_2(t)\right|^2}\\&+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_2^{(2)}(t)\right|^2}\\&+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\,|v_2(t)|^2}.\end{aligned} \tag{23}$$

Позначимо $\varepsilon_2(t)=u_2(t)-y_2^{(1)}(t)$. Друга система в (10) знову в силу лінійності розпадеться на дві системи. А саме, представимо $u_2(t)=u_2^{(1)}(t)+u_2^{(2)}(t)$.Тоді маємо

$$\begin{cases}\dfrac{h}{m}\dot{u}_2^{(1)}=-u_2^{(1)}+y_1^{(1)}\\ u_2^{(1)}(0)=y_2^{(1)}(0).\end{cases}$$

та

$$\begin{cases}\dfrac{h}{m}\dot{u}_2^{(2)}=-u_2^{(2)}+\varepsilon_1\\ u_2^{(2)}(0)=0.\end{cases} \tag{24}$$

Тепер

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2(t)|^2}\le\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|u_2^{(1)}(t)-y_2^{(1)}(t)|^2}+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|u_2^{(2)}(t)|^2}. \tag{25}$$

Позначимо $\varepsilon_2^{(2)} = u_2^{(1)} - y_2^{(1)}$, очевидно, що $\varepsilon_2(0) = 0$. Тоді

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_2^{(2)} &= \dot{u}_2^{(1)} - \dot{y}_2^{(1)} \\ &= \frac{m}{h}\left(-u_2^{(1)} + y_1^{(1)}\right) - \dot{y}_2^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h}\varepsilon_2^{(2)} + \frac{m}{h}\left(y_1^{(1)} - y_2^{(1)}\right) - \dot{y}_2^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h}\varepsilon_2^{(2)} + \psi_1(t).\end{aligned}$$

Таким чином отримуємо наступну систему

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_2^{(2)} = -\dfrac{m}{h}\varepsilon_2^{(2)} + \psi_1(t) \\ \quad \varepsilon_2^{(2)}(0) = 0.\end{cases}$$

Аналогічно поередньому, звідси маємо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2^{(2)}(t)|^2} \le \frac{h}{m} \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\psi_1(t)|^2} \tag{26}$$

Також аналогічно оцінці виразу $\psi(t)$, для процесу $\psi_1(t)$ справедлива нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\psi_1(t)|^2} \le \frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} \tag{27}$$

Тоді з (26) та (27) маємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2^{(2)}(t)|^2} \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} \tag{28}$$

Оцінимо тепер $u_2^{(2)}(t)$. З системи (24) отримуємо

$$u_2^{(2)} = \frac{m}{h}\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\varepsilon_1(s)ds$$

Із останнього представлення тепер приходимо до оцінки

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|u_2^{(2)}(t)|^2} \le \frac{h}{m}\frac{m}{h} \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_1(t)|^2} \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})}, \tag{29}$$

при цьому врахована нерівність (18).

З (25), (28) та (29) отримується нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|u_2(t) - y_2^{(1)}(t)|^2} \le \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2(t)|^2} \le \frac{h}{m}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} \tag{30}$$

Оцінимо тепер $y_2(t)$. Маємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_2^{(2)}(t)|^2} = \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|x_1(t - \frac{h2}{m})|^2} \le \sqrt{C(T, ||\varphi||, \mu)} \tag{31}$$

як випливає із (9).

Залишилося оцінити останній доданок в (23). Для цього проведемо у системі (14) оцінки відразу для всіх $j = \overline{1,m}$. Розглянемо цб систему покоординатно. Отримаємо

$$\begin{cases} \dot{v}_{j,i} = -\dfrac{m}{h}v_{j,i} + \dfrac{m}{h}v_{j-1,i} \\ v_{j,i}(0) = x_{1,i}(-\dfrac{hj}{m}), \quad j = \overline{2,m}, \quad i = \overline{1,d} \end{cases}$$

Очевидно, що

$$\mathbb{E}v_{j,i}^2(0) \le C(T, ||\varphi||, \mu).$$

Далі також маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_{j,i}^2 &= 2v_{j,i}\dot{v}_{j,i} \\ &= 2v_{j,i}\left(-\frac{m}{h}v_{j,i} + \frac{m}{h}v_{j-1,i}\right) \\ &= -2\frac{m}{h}v_{j,i}^2 + \frac{m}{h}2v_{j,i}v_{j-1,i} \\ &\le -2\frac{m}{h}v_{j,i}^2 + \frac{m}{h}v_{j,i}^2 + \frac{m}{h}v_{j-1,i}^2. \end{aligned}$$

Отже

$$\frac{d}{dy}v_{j,i}^2 \le -\frac{m}{h}v_{j,i}^2 + \frac{m}{h}v_{j-1,i}^2, \quad j = \overline{2,m}, \quad i = \overline{1,d} \tag{32}$$

У нерівностях (32) проведемо заміни.

$$v_{j,i}^2(t) = e^{-\frac{m}{h}t}a_{j,i}(t), \quad a_{j,i}(t) = e^{\frac{m}{h}t}v_{j,i}^2(t) \tag{33}$$

При цьому $v_{j,i}^2(0) = a_{j,i}(0)$, а тому

$$\mathbb{E}a_{j,i}(0) \le C(T, ||\varphi||, \mu).$$

Тоді із (32) врахувавши заміну (33) матимемо

$$\frac{d}{dt}a_{j,i} \le \frac{m}{h}a_{j-1,i}, \quad j = \overline{2,m} \tag{34}$$

Але

$$\mathbb{E}a_{1,i}(t) = e^{\frac{m}{h}t}\mathbb{E}v_{1,i}^2(t) \le 4C(T, ||\varphi||, \mu)e^{\frac{m}{h}t}$$

в силу (22). Тоді із (34) отримуємо

$$a_{2,i}(t) \le a_{2,i}(0) + \frac{m}{h}\int_0^t a_{1,i}(s)ds$$

Отже

$$\begin{aligned} \mathbb{E}a_{2,i}(t) &\le \mathbb{E}a_{2,i}(0) + \frac{m}{h}\int_0^t \mathbb{E}a_{1,i}(s)\,ds \\ &\le C(T, ||\varphi||, \mu) + 4\frac{m}{h}C(T, ||\varphi||, \mu)\int_0^t e^{\frac{m}{h}s}\,ds \\ &= C(T, ||\varphi||, \mu) + 4C(T, ||\varphi||, \mu)\left(e^{\frac{m}{h}t} - 1\right) \\ &\le 4C(T, ||\varphi||, \mu)e^{\frac{m}{h}t}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}\mathbb{E}a_{3,i}(t) &\le \mathbb{E}a_{3,i}(0) + \frac{m}{h}\int_0^t \mathbb{E}a_{2,i}(s)\,ds \\ &\le C(T,||\varphi||,\mu) + 4\frac{m}{h}C(T,||\varphi||,\mu)\int_0^t e^{\frac{m}{h}s}\,ds \\ &= C(T,||\varphi||,\mu) + 4C(T,||\varphi||,\mu)\left(e^{\frac{m}{h}t}-1\right) \\ &\le 4C(T,||\varphi||,\mu)e^{\frac{m}{h}t}.\end{aligned}$$

Тому для всіх $j=\overline{1,m}$ маємо оцінку

$$\mathbb{E}a_{j,i}(t) \le 4C(T,||\varphi||,\mu)e^{\frac{m}{h}t}$$

Отже із врахуванням заміни (33) отримаємо

$$\mathbb{E}v_{j,i}^2(t) = \mathbb{E}e^{-\frac{m}{h}t}a_{j,i}(t) \le 4C(T,||\varphi||,\mu),$$

а тому

$$\sqrt{\mathbb{E}|v_j(t)|^2} \le \sqrt{d4C(T,||\varphi||,\mu)}, \quad j=\overline{1,m}, \tag{35}$$

де d- розмірність простору. Тоді з (23), (30) та (31) отримуємо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|y_2(t)-z_2^{(1)}(t)|^2} \le \frac{4}{\mu}\frac{h}{m}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})} + 3\sqrt{dC(T,||\varphi||,\frac{h}{m})}$$

Тепер неважко побачити, що для кожного $j=\overline{2,m}$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right|^2} \le &\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|u_j(t)-y_j^{(1)}(t)\right|^2} \\ &+ \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(2)}(t)\right|^2} \\ &+ \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|v_j(t)\right|^2}.\end{aligned}$$

де $z_j^{(1)} = u_j + v_j$, $y_j = y_j(1)+y_j(2)$. Із введенням, аналогічно вище викладеного позначення $\varepsilon_j(t) = u_j(t) - y_j^2(t)$, остання нерівність набуває вигляду

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right|^2} \le \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j(t)\right|^2} + \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(2)}(t)\right|^2} + \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|v_j(t)\right|^2} \tag{36}$$

Аналогічно випадку $j=2$, представимо $u_j(t) = u_j^{(1)}(t) + u_j^{(2)}(t)$, де $u_j^{(1)}$ та $u_j^{(2)}$ розв'язки наступних задач Коші відповідно

$$\begin{cases}\dfrac{h}{m}\dot{u}_j^{(1)} = -u_j^{(1)} + y_{j-1}^{(1)} \\ \qquad u_j^{(1)}(0) = y_j^{(1)}(0).\end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot{u}_j^{(2)} = -u_j^{(2)} + \varepsilon_{j-1} \\ u_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Позначимо $e_j^\zeta = u_j^{(1)} - y_j^{(1)}, e_j^\zeta(0) = 0$. Тоді аналогічно випадку $j = 2$, для e_j^ζ отримаємо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j^{(\zeta)}(t)\right|^2} \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})}$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j(t)\right|^2} \le \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j^{(\zeta)}(t)\right|^2} + \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|u_j^{(2)}(t)\right|^2}$$

Аналогічно випадку $j = 2$, для $u_j^{(2)}$ отримаємо нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|u_j^{(2)}(t)\right|^2} \le \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_{j-1}(t)\right|^2}$$

Отже

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j(t)\right|^2} \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} + \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_{j-1}(t)\right|^2}$$

Остання нерівність із введенням позначеня $b_j = \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_j(t)|^2}$ набирає вигляду

$$b_j \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} + b_{j-1}$$

Звідси, індукцією по j легко отримати, що

$$b_j \le b_1 + j\frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})},$$

а отже для всіх $j = \overline{2, m}$ маємо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j(t)\right|^2} \le \frac{2h}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} + \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} \tag{37}$$

в силу (18). Величини $y_j^{(2)}(t)$ оцінюється аналогічно випадку $j = 2$, використанням універсальної оцінки (9), а саме

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(2)}(t)\right|^2} \le \sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} \tag{38}$$

Аналогічно для $v_j(t)$ також маємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|v_j^{(2)}(t)\right|^2} \le 2\sqrt{dC(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} \tag{39}$$

Отже з (35), (37)-(39) отримуємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right|^2}\le\frac{2h}{\mu}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})}+3\sqrt{dC(T,||\varphi||,\mu)} \tag{40}$$

Візьмемо в останній нерівності $\mu=C^{\frac{1}{4}}(T,||\varphi||,\frac{h}{m})$. Очевидно, що $\mu\to 0$, якщо $m\to\infty$. Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right|^2}\le 2hC^{\frac{1}{4}}(T,||\varphi||,\frac{h}{m})+3\sqrt{dC(T,||\varphi||,C^{\frac{1}{4}}(T,||\varphi||,\frac{h}{m}))}$$
$$=\alpha(T,||\varphi||,\frac{h}{m})\to 0,\quad m\to\infty.$$

Проведемо оцінки для системи (11). Ми мали $N_0(t)=\mathbb{E}|z_0(t)-x(t)|^2$. Для першого рівняння в (11) отримуємо.

$$z_1^{(2)}(t)=\frac{m}{h}\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}(z_0(s)-x(s))ds,$$

а тому

$$\mathbb{E}z_1^{(2)}(t)\le\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|z_0(t)-x(t)|^2=\mathbb{E}N_0(t)$$

Для інших рівнянь в (11) проведемо міркування аналогічні до оцінок $v_j(t)$, а саме розпишемо їх покоординатно. Маємо

$$\begin{cases}\dot z_{j,i}^{(2)}=-\dfrac{m}{h}z_{j,i}^{(2)}+\dfrac{m}{h}z_{j-1,i}^{(2)}\\ \quad z_{j,i}^{(2)}(0)=0,\quad j=\overline{1,m},\quad i=\overline{1,d}\end{cases}$$

Тоді для $(z_{j,i}^{(2)})^2$ отримуємо нерівність

$$\frac{d}{dt}(z_{j,i}^{(2)})^2\le-\frac{m}{h}(z_{j,i}^{(2)})^2+\frac{m}{h}(z_{j-1,i}^{(2)})^2 \tag{41}$$

З якої за допомогою заміни $(z_{j,i}^{(2)})^2=e^{-\frac{m}{h}-t}b_{j,i},\quad b_{j,i}(0)=0$, прийдемо до нерівності

$$\frac{d}{dt}b_{j,i}(t)\le\frac{m}{h}b_{j-1,i}(t),$$

інтегруючи яку на $[0,t]$, з урахуванням початкової умови $b_{j,i}(0)=0$, матимемо

$$b_{j,i}(t)\le\frac{m}{h}\int_0^t b_{j-1,i}(s)ds,$$

при цьому

$$b_{1,i}(t)=e^{\frac{m}{h}t}(z_{j,i}^{(2)})^2=e^{\frac{m}{h}t}N_0(t).$$

Отже

$$\mathbb{E}b_{2,i}(t)\le\frac{m}{h}\int_0^t e^{\frac{m}{h}s}\mathbb{E}N_0(s)ds\le e^{\frac{m}{h}t}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t).$$

Далі

$$\mathbb{E}b_{3,i}(t) \le \frac{m}{h}\int_0^t \mathbb{E}b_{2,i}(s)ds \le \frac{m}{h}\int_0^t e^{\frac{m}{h}s}\mathbb{E}N_0(s)ds \le e^{\frac{m}{h}t}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t).$$

Продовжуючи дану процедуру, у загальному випадку матимемо

$$\mathbb{E}b_{j,i}(t) \le e^{\frac{m}{h}t}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t).$$

А отже із урахуванням заміни (41), отримаємо

$$\mathbb{E}(z_{j,i}^{(2)})^2 \le \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t).$$

А отже

$$\mathbb{E}(z_{j}^{(2)})^2 \le \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t). \tag{42}$$

Тому, в результаті для $j=\overline{1,m}$ отримуємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|x(t-\frac{hj}{m})-z_j(t)|^2} \le \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|x(t-\frac{hj}{m})-z_j^{(1)}(t)|^2}+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|z_j^{(2)}(t)|^2}$$

що із урахуванням позначення $N_j(t)$, оцінок (40) та (42) приводять до нерівності

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{N_j(t)} \le \alpha(T,||\varphi||,\frac{h}{m})+\sqrt{\sup_{t\in[0,T]}N_0(t)}. \tag{43}$$

Тоді для оцінки $z_0(t)-x(t)$ маємо

$$\begin{aligned} z_0(t)-x(t) &= \int_0^t \left(f(s,z_0(s),z_m(s))-f(s,x(s),x(s-h))\right)ds \\ &\quad+\int_0^t \left(\sigma(s,z_0(s),z_m(s))-\sigma(s,x(s),x(s-h))\right)dW(s). \end{aligned}$$

звідки, з урахуванням умови (3) теореми, отримуємо

$$\begin{aligned} N_0(t) &\le 2(T+1)\int_0^t L\left(\mathbb{E}|z_0(s)-x(s)|^2+\mathbb{E}|z_m(s)-x(s-h)|^2\right)ds \\ &\le 2(T+1)\int_0^t 4L\sup_{s\in[0,s]}N_0(s)\,ds+2\alpha^2C\left(T,||\varphi||,\frac{h}{m}\right). \end{aligned}$$

Звідки, з урахуванням леми Гронуолла матимемо

$$\sup_{t\in[0,T]}N_0(t) \le 2\alpha^2C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})e^{8(T+1)LT} \to 0, \quad m\to 0.$$

Остання оцінка, з урахуванням (43) і доводить теорему.

Список літератури

[1] Banks H.T. *Approximation of delay systems with applications to control and identification.* Journal of Optimization Theory and Applications 1979, **29** (-), 383–408. https://doi.org/10.1007/BFb0064311

[2] Carkov Ye.F. Random Perturbations of Functional Differential Equations. Zinatne, Riga, 1989. p.61

[3] Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations. Springer, New York, 1977.

[4] Tobias K. S. Ritschel *Numerical optimal control for distributed delay differential equations: A simultaneous approach based on linearization of the delayed variables.* arXiv:2410.15083 2024

[5] Pituk M. *The Hartman–Wintner Theorem for Functional Differential Equations.* Journal of Differential Equations 1999, **155** (1), 1–16. https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3573

[6] Samoilenko A.M. *On the problem of studying global solutions of linear differential equations with deviating argument.* Ukrainian Mathematical Journal 2003, **55** (5), 631–640. https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000010255.55263.c1

[7] Stanzhytskyi O.M., Petryna G.O., Denysenko N.L. *Asymptotic Behavior of the Solutions of Stochastic Functional-Differential Equations.* Journal of Mathematical Sciences 2024, **278** (6), 1102–1112. 10.1007/s10958-024-06980-x

[8] Stanzhytskyi O.M., Petryna G.O., Hrysenko M.V. *On the Asymptotic Equivalence of Ordinary and Functional Stochastic Differential Equations.* Journal of Optimization Differential Equations and their Applications 2023, **31** (1), 125–142. 10.15421/142307

[9] Valeev K.G., Kulesko N.A. *Family of solutions with a finite number of parameters of a system of differential equations with deviating argument.* Ukrainian Mathematical Journal 1968, **20** (6), 739–749. https://doi.org/10.1007/BF01085232

[10] Matviy O.V., Cherevko I.M. *On the approximation of delayed systems and their stability.* Nonlinear Oscillations 2004, **7** (2), 208–216. (in Ukrainian)

[11] Matviy O.V., Cherevko I.M. *On approximation of systems of differential-difference equations of neutral type by systems of ordinary differential equations.* Nonlinear Oscillations 2007, **10** (3), 328–335. (in Ukrainian)

[12] Ilika S.A., Matviy O.V., Piddubna L.A., Cherevko I.M. *Scheme of approximation of differential-functional equations and their application.* Bukovinian Mathematical Journal 2014, **2** (2-3), 107–111. (in Ukrainian)

Надійшло 21.09.2024

Petryna G.O., Stanzhytskyi A.O. *Approximation of Stochastic Delay Differential Systems by a Stochastic System Without Delay*, Bukovinian Math. Journal. **12** (1) (2024), 120–136.

In this paper, we propose a scheme for approximating the solutions of stochastic differential equations with delay by solutions of stochastic differential equations without delay. Stochastic delay differential equations play a crucial role in modeling real-world processes where the evolution depends on past states, introducing complexities due to their infinite-dimensional phase space. To overcome these difficulties, we develop an approach based on approximating the delay system by an ordinary differential equation system of increased dimension. Our main result is to prove that, under certain conditions, the solutions of the approximating system converge in the mean square sense to the solutions of the original delay system. This approach allows for effective analysis and modeling of stochastic systems with delay using finite-dimensional stochastic differential equations without delay.

СВІТЛІЙ ПАМ'ЯТІ ВЧЕНОГО, ПЕДАГОГА, ВЧИТЕЛЯ – ПЕРЕСТЮКА МИКОЛИ ОЛЕКСІЙОВИЧА

25 січня 2024 року на 79 році життя перестало битися серце видатного вченого у галузі звичайних диференційних рівнянь та теорії нелінійних коливань, академіка НАН України, Заслуженого діяча науки і техніки України, Почесного доктора Чернівецького національного університету, члена редколегії Буковинського математичного журналу, вірного сина України Миколи Олексійовича Перестюка.

Микола Олексійович Перестюк народився в селі Плоска Славутського району Хмельницької області 1 січня 1946 року. У 1963 році він вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Тараса. Шевченка. Після закінчення навчання в університеті в 1968 році вступив до аспірантури, а з 1969 року розпочав трудову діяльність на механіко-математичному факультеті, спочатку на посаді асистента, потім доцента (1974 р.), професора (1986 р.), завідувача кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь (1988 р.). У 1987-2003 роках Перестюк М. О. очолював механіко-математичний факультет Київського університету.

Як учений Микола Олексійович формувався і зростав у всесвітньо відомій київській науковій школі з нелінійної механіки Крилова-Боголюбова-Митропольского. Його вчителем був видатний математик сучасності, академік НАН України Анатолій Михайлович Самойленко. У 1972 році Микола Олексійович захистив кандидатську дисертацію, а в 1986 році – докторську дисертацію (науковий керівник – академік НАН України Самойленко А.М.). Під його керівництвом захищено 6 докторських та 25 кандидатських дисертацій, він багато років очолював спеціалізовану Вчену раду із захисту докторських і кандидатських дисертацій при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. Микола Олексійович є автором понад 350 наукових та науково-

методичних праць. Член семи редколегій наукових періодичних видань, в тому числі двох зарубіжних.

Наукові інтереси Перестюка М. О. охоплюють широке коло складних та актуальних задач теорії диференціальних рівнянь і нелінійної механіки, які відносяться до розробки нового напряму цієї теорії, а саме – диференціальних рівнянь з імпульсною дією, їх застосування до дослідження коливних процесів. Він уперше встановив ефективні критерії стійкості розв'язків диференціальних рівнянь, які зазнають імпульсного впливу, розробив алгоритми наближеного розв'язання широкого класу імпульсних диференціальних рівнянь, запропонував метод дослідження властивостей розв'язків та інтегральних множин систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях, сформулював та обґрунтував ознаки існування важливих типів одно- та багаточастотних розривних коливань у некласичних диференціальних системах.

Микола Олексійович – лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки за цикл праць "Нові математичні методи в нелінійному аналізі" (1996 р.), премії імені М.М. Крилова НАН України за цикл праць "Сучасні методи дослідження динамічних систем" (1998 р.), лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки (2011 р.), лауреат Державної премії України в галузі освіти (2012 р.). У 2002 році указом Президента України йому присвоєно почесне звання "Заслужений діяч науки і техніки України", його також відзначено Нагородою Ярослава Мудрого АН Вищої Школи України за цикл монографій та навчальних посібників. У 2009 році Миколу Олексійовича обрано дійсним членом Національної академії наук України, а Указом Президента України від 27 жовтня 2009 року нагороджено орденом "За заслуги" ІІІ ступеня. За видатні заслуги у створенні і розвитку всесвітньо відомих національних наукових шкіл Микола Олексійович Перестюк у 2009 році нагороджений відзнакою НАН України "За наукові досягнення".

Микола Олексійович є Почесним доктором Ужгородського національного університету (2005 р.). У 2010 році йому присуджено почесне звання "Заслужений професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка", а у 2012 році – "Заслужений професор Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка". У 2010 році йому присвоєно звання Почесного доктора Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича за вагомий вклад у розвиток теорії диференціальних рівнянь і нелінійної механіки та тісну багаторічну співпрацю з університетом.

Перестюк М. О. приділяв велику увагу підготовці висококваліфікованих наукових кадрів, впродовж багатьох років сприяв талановитій молоді у набутті високої професійної кваліфікації, керував підготовкою кандидатських та докторських дисертацій, виступав опонентом кандидатських і докторських дисертацій, рецензентом ряду книг та наукових статей і монографій. У 2015 році отримав почесну відзнаку НАН України «За підготовку наукової зміни», а у 2020 році – відзнаку НАН України «За професійні здобутки». За цикл праць «Асимптотичні методи нелінійної механіки та статистичної фізики» у 2017 році Микола Олексійович став лауреатом Премії НАН України імені М. М. Боголюбова.

Микола Олексійович – взірець відданого служіння обраній справі. Він назавжди в історії української математичної науки та освіти як визначний вчений, педагог та організатор, який глибоко розумів тенденції сучасної математики та її застосувань.

Світла пам'ять про Миколу Олексійовича, видатного Математика та Вчителя назавжди збережеться в серцях його рідних і близьких, колег і учнів.

О.О. Безущак, Я.Й. Бігун, О.В. Капустян, І.І. Клевчук, І.І. Король, О.В. Мартинюк, Р.І. Петришин, О.М. Станжицький, Ю.В. Теплінський, І.М. Черевко

ПАМ’ЯТІ ВЧЕНОГО – БОЙЧУКА ОЛЕКСАНДРА АНДРІЙОВИЧА

20 червня 2024 року на 74 році життя зупинилося серце видатного українського математика, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, завідувача відділу Інституту математики НАН України, академіка НАН України Олександра Андрійовича Бойчука.

Народився Олександр Андрійович в місті Кіровограді (нині — Кропивницький) 30 червня 1950 року. Вищу освіту О.А. Бойчук здобув на механіко-математичному факультеті Київського державного університету імені Тараса Шевченка (1967-1972). У 1974 році вступив до аспірантури Інституту математики, після закінчення якої у 1978 році захистив кандидатську, а згодом, у 1992 році – докторську дисертації. З 1994 року працював в Інституті математики НАН України. У 1997 році йому було присвоєно вчене звання професора зі спеціальності «Диференціальні рівняння». У 2012 році Олександра Андрійовича обрано членом-кореспондентом НАН України за спеціальністю «Диференціальні рівняння», а у 2024 році академіком НАН України за спеціальністю «Математика».

Олександр Андрійович Бойчук є відомим спеціалістом з теорії крайових задач для систем функціонально-диференціальних рівнянь з нетеровим оператором в лінійній частині. Ним вперше проведено класифікацію резонансних та нерезонансних випадків таких задач, побудовано теорію збурення та знайдено умови біфуркації і розгалуження розв'язків крайових задач. Одним із перших О.А. Бойчук для дослідження таких задач запропонував апарат узагальнено-обернених операторів, що дозволило йому суттєво розвинути якісну теорію крайових задач для таких систем.

Уперше ним було отримано низку оригінальних результатів: знайдено критерії існування обмежених на всій осі розв'язків лінійних та нелінійних систем звичайних диференціальних та різницевих рівнянь у припущенні експоненціальної дихотомії лінеаризованої однорідної системи на півосях, запропоновано алгоритми їх побудови; отримано умови біфуркації та розгалуження розв'язків таких задач. Ці задачі тісно пов'язані з питаннями дихотомії та трихотомії системи на всій осі та на півосях. Дослідження О.А. Бойчука суттєво розвивають відомі результати Київської школи диференціальних рівнянь та результати провідних в цій галузі американських математиків Р. Сакера, Дж. Селла і К. Палмера.

Загальний науковий доробок Олександра Андрійовича становить понад 180 наукових праць, 7 монографій та 3 підручники. Монографії у співавторстві з академіком НАН України А.М. Самойленком видані в Німеччині, Нідерландах і США; у Словаччині – підручник із теорії крайових задач. Під науковим керівництвом академіка НАН України О.А. Бойчука підготовлено 4 доктори та 14 кандидатів наук.

О.А. Бойчук був членом редакційної колегії провідного в Україні «Українського математичного журналу», головним редактором наукового журналу «Нелінійні коливання», який перевидається англійською мовою видавництвом Springer, а також членом редколегії «Буковинського математичного журналу».

За багаторічну наукову, педагогічну і громадську діяльність О.А. Бойчука відзначено низкою високих нагород. У 2008 році у складі авторського колективу його було удостоєно Державної премії України в галузі науки і техніки. Олександр Андрійович є також лауреатом престижних премій НАН України імені Ю.О. Митропольського (2013) та імені М.Г. Крейна (2020). Він нагороджений пам'ятною медаллю імені М.М. Боголюбова НАН України, пам'ятною відзнакою на честь 100-річчя Національної академії наук України (2018) та відзнакою НАН України «За підготовку наукової зміни» (2020).

Олександр Андрійович завжди був сповнений творчими оригінальними ідеями та задумами, активно залучав талановиту молодь до досліджень у новітніх напрямках математичної науки, завжди вирізнявся доброзичливим відношенням до колег та учнів, був висококваліфікованим професіоналом своєї справи.

Світла пам'ять про Олександра Андрійовича Бойчука завжди буде в серцях його колег, учнів та послідовників.

Я.Й. Бігун, О.В. Капустян, О.В. Мартинюк, Р.І. Петришин, О.М. Станжицький, Ю.В. Теплінський, В.І. Ткаченко, І.М. Черевко

ПАМ’ЯТІ ВЧЕНОГО – СЛЮСАРЧУКА ВАСИЛЯ ЮХИМОВИЧА

18 лютого 2024 року на 78 році життя перестало битися серце відомого математика, вченого, член-кореспондента НАН України, Заслуженого діяча науки і техніки України Василя Юхимовича Слюсарчука.

Народився Василь Юхимович 24 вересня 1946 року в селі Демчин, що на Житомирщині. У 1970 році з відзнакою закінчив математичний факультет Чернівецького державного університету за спеціальністю «Прикладна математика». У 1972 році на другому році аспірантури під керівництвом Є.Ф. Царкова захистив кандидатську дисертацію «Стійкість розв’язків різницевих рівнянь у банаховому просторі». У 1987 році в Інституті математики АН України захистив докторську дисертацію «Обмежені розв’язки функціональних і функціонально-диференціальних рівнянь».

В.Ю. Слюсарчук у 1973-1974 роках працював на кафедрі прикладної математики і механіки у Чернівецькому університеті, в 1974-1977 – в Новополоцькому політехнічному інституті, а з 1977 року – у Національному університеті водного господарства та природокористування у м. Рівне, обіймаючи різні посади, зокрема, у 1988-1990 та 1994-1998 роках завідував кафедрою вищої математики. Вчене звання доцента отримав у 1980 році, професора – у 1989 році. З 2015 року – член-кореспондент НАН України по відділенню математики.

Василь Юхимович – Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки (2008 р.). Заслужений працівник освіти України (2009 р.), член-кореспондент НАН України (з 6.03.2015 р.), лауреат премії імені Ю.О. Митропольського НАН України (2022 р.). Один із засновників і академік Академії наук вищої школи України (1992) та лауреат нагороди Ярослава Мудрого у 2003 і 2017 роках.

Нагороджений нагрудними знаками “Відмінник освіти України” (1996) і “За наукові досягнення” (2006) МОН України, медаллю імені М.В. Остроградського (2001), Подякою Президента України (2002), пам’ятною медаллю імені М.М. Боголюбова, Грамотою Верховної Ради України (2015), а також Пам'ятною відзнакою на честь 100-річчя НАН України (2018) та відзнакою НАН України "За професійні здобутки" (2021).

Василю Юхимовичу належать наукові результати світового рівня у галузі диференціальних рівнянь і функціонального аналізу. Він спростував гіпотезу Любича про диференційовне відображення, довів щільність множини нерозв'язних задач Коші у просторі всіх задач Коші у випадку нескінченновимірного банахового простору та щільність множини задач Коші з неєдиними розв'язками у множині всіх задач Коші у випадку банахового простору довільної розмірності. Увів поняття істотно нестійких розв'язків еволюційних рівнянь і

дослідив рівняння з істотно нестійкими розв'язками, отримав нові теореми про стійкість і нестійкість за лінійним наближенням розв'язків еволюційних рівнянь. Встановив необхідні й достатні умови оборотності лінійних неавтономних с-неперервних функціонально-диференціальних операторів, необхідні й достатні умови абсолютної стійкості динамічних систем з післядією; знайшов нові умови існування майже періодичних розв’язків нелінійних диференціальних, різницевих, диференціально-різницевих та функціональних рівнянь. Отримав загальні результати про збіжність числових рядів, окремими випадками яких є відповідні класичні результати. Запропонував нову математичну модель Сонячної системи з урахуванням скінченної швидкості гравітації та довів некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинених скінченністю швидкості гравітації.

Підготував двох кандидатів фізико-математичних наук, опонував значну кількість кандидатських і докторських дисертацій, зокрема, на вченій раді по захисту кандидатських дисертацій на факультеті математики та інформатики нашого університету і дисертацій викладачів нашого факультету.

Науковий доробок Василя Юхимовича складає понад 450 наукових та науково-методичних праць, з них 11 монографій із теорії стійкості динамічних систем, теорії функціональних і функціонально-диференціальних рівнянь і два навчальних посібники з прикладного функціонального аналізу та теорії числових і операторних рядів.

Його відданість науці та розвитку математики залишила незабутній слід. Світла пам'ять про Василя Юхимовича назавжди залишиться у серцях його колег і друзів, в усіх, кому доля дарувала нагоду зустрічатися з цією чудовою людиною.

Я.Й. Бігун, О.В. Капустян, О.В. Мартинюк, Р.І. Петришин, О.М. Станжицький, Ю.В. Теплінський, В.І. Ткаченко, І.М. Черевко