

Голові разової спеціалізованої
вченої ради PhD 12748
Чернівецького національного
університету
імені Юрія Федьковича
доктору фізико-математичних наук,
професору Ігорю ЧЕРЕВКУ

РЕЦЕНЗІЯ

рецензента

на дисертаційну роботу Українця Олега Захаровича
*«Математичне моделювання природничих процесів
та економічних систем під дією збурень»*
подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 113 – «Прикладна математика»

Актуальність теми та зв'язок з науковими планами та програмами

Математичне моделювання нелінійних природничих процесів залишається одним із найбільш актуальних напрямів сучасної прикладної математичної науки. Завдяки впровадженню нових факторів, застосуванню методу усереднення, числового моделювання вдається отримати нові результати у медицині, імунології та соціоекономічній області. Дисертація Олега Українця присвячена поглибленому вивченню систем із запізненням, багаточастотними збуреннями, що відображають природні процеси в екології та біології. Особливу увагу в роботі приділено інтеграції екологічних чинників у класичні математичні моделі типу Вольтерри-Лотки епідемій, які ґрунтуються на SIR-моделі, та моделі імунної відповіді організму людини. Здобувач також розширив класичний апарат моделей Ерроу-Дебре побудови ринкової рівноваги за допомогою лінійних функціоналів і застосуванням ортогонально адитивних функціоналів, щоб врахувати сучасні ринкові явища, такі як вплив оптових цін та цілочисельності товарних запасів. Цей

напрямок активно розвивається в останні роки і відображає актуальність дисертації із застосуванням сучасного нелінійного функціонального аналізу.

Отже, напрямки досліджень дисертації відповідають актуальним аспектам сучасної прикладної математики, математичному моделюванню процесів у різних, важливих для науки і суспільства галузях. Дана робота поєднує класичні аналітичні методи з новітніми обчислювальними підходами, у ній вдало застосовано методи нелінійної механіки, диференціально-функціональних рівнянь, функціонального аналізу для економічних систем.

Дисертаційна робота відповідає за змістом і цілями науково-дослідній темі «Математичне моделювання і числово-аналітичні методи дослідження динамічних та інформаційних процесів» кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (державний реєстраційний номер 0121U100117).

Загальна характеристика роботи

Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел (115 найменувань) і додатків (А, А(2), Б). Загальний обсяг роботи 166 сторінок.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, висвітлено зв'язок роботи з науковими програмами, сформульовано мету і завдання дослідження, наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, особистий внесок автора та апробацію роботи.

Перший розділ містить ґрунтовний огляд літератури за тематикою дисертації. Висвітлено сучасний стан моделювання впливу екологічного фактору, описано класичні та узагальнені рівняння Гатчінсона, що використовуються для опису динаміки забруднення довкілля. Наведено огляд методу усереднення А.М. Самойленка та Р.І. Петришина, його розвиток у

працях Я.Й. Бігуна для систем із запізненням аргументу. Окремо проаналізовано класичні та сучасні моделі епідеміології (SIR-, SEIR-моделі), моделі імунної відповіді, започатковані Г.І. Марчуком, та їх подальші модифікації. Завершує розділ огляд праць, присвячених моделі економіки Ерроу-Дебре, її модифікаціям з урахуванням різних умов на товари, ціни та відношення переваги.

У другому розділі методом усереднення за фазовими змінними досліджено вплив багаточастотних збурень із запізненням аргументу на динаміку нелінійних систем диференціальних рівнянь, у яких запізнення задається лінійно. Доведено існування і єдиність розв'язку, обґрунтовано метод усереднення, отримано оцінку похибки методу, яка явно залежить від малого параметра. Метод проілюстровано на модельному прикладі.

У третьому розділі побудовано та досліджено дві математичні моделі з урахуванням впливу екологічного фактору $E(t)$, який інтерпретується як зважений показник забруднення довкілля та чинників соціально-психологічного характеру. Динаміка $E(t)$ моделюється узагальненим рівнянням Гатчінсона із запізненням. Досліджено модель імунної відповіді організму людини на вірусну інфекцію (узагальнення моделі Г.І. Марчука) і SIR-модель епідемії з урахуванням втрати імунітету, народжуваності, смертності та екологічного фактору. Доведено невід'ємність, існування і єдиність розв'язків, знайдено стаціонарні стани та зроблені відповідні галузеві інтерпретації. Обґрунтовані математичні моделі, їх якісні і кількісні результати продемонстровано комп'ютерним моделюванням у системі Wolfram Mathematica.

У четвертому розділі запропоновано і досліджено дві модифікації класичної моделі загальної ринкової рівноваги типу Ерроу-Дебре з урахуванням дискретної природи товарних запасів та існування оптових цін

та доведено існування економічної рівноваги та досліджено її основні властивості. Введення поняття ортогонально адитивних функціоналів для цін дозволило адекватно описати ринки з довільною ґратковою структурою набору товарів, а побудована загальна конструкція комплементарного простору, на якому визначаються заряди, може інтерпретуватися як узагальнені цінові вектори.

Автору роботи вдалося отримати результати, які узагальнюють теорію і методи дослідження рівноваги для ринків дискретними ресурсами та впливом оптових ціноутворень. Отримані результати важливі для подальшого математичного моделювання ринкових систем сучасної економіки.

Основні наукові результати роботи

У дисертації для нелінійної математичної моделі із лінійним запізненням аргументу, яка знаходиться під дією багаточастотних збурень із запізненнями, доведено існування та єдиність розв'язку та обґрунтовано метод усереднення, отримано оцінку похибки методу усереднення, що явно залежить від малого параметра ε .

Базову модель Г.І. Марчука імунної відповіді при вірусних інфекційних захворюваннях модифіковано з урахуванням впливу екологічного фактору $E(t)$. Доведено невід'ємність, існування та єдиність розв'язку початкової задачі. Встановлено достатні умови асимптотичної стійкості стаціонарного розв'язку, що відповідає стану здорового організму. У моделі імунної відповіді з впливом екологічного фактору розв'язано такі ж задачі, побудовано оцінку для початкової величини інфікування V^* – імунологічний бар'єр.

Запропоновано модифікацію SIR-моделі з урахуванням впливу екологічного фактору, заданого як відхилення узагальненого показника

забруднення від нормативного значення K , отримано базове репродуктивне число R_0 та достатні коефіцієнтні умови стійкості стаціонарного розв'язку, що відповідає відсутності спалаху епідемії.

Побудовано версію класичної моделі Ерроу-Дебре, в якій розглядаються лише цілочисленні кількості товарів, що є природним обмеженням для багатьох задач прикладного характеру. Доведено, що одноагентна неокласична економіка обміну з цілочисельними товарними запасами та строго монотонним і строго опуклим відношенням переваги має рівноважний вектор цін, що важливо в задачах мікроекономіки.

Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків та рекомендацій, сформульованих у дисертації, їх достовірність та новизна

Обґрунтованість наукових положень та результатів дисертації забезпечена застосуванням сучасного апарату якісної та аналітичної теорії диференціальних рівнянь (методу кроків, методу мажорантних рівнянь, принципу стискаючих відображень, теорем Хартмана та Хопфа), методу усереднення А.М. Самойленка – Р.І. Петришина та його розвитку для систем із запізненням, методів функціонального аналізу і топології (теореми Гана-Банаха, Рісса-Канторовича, теорії впорядкованих векторних просторів і векторних ґраток). Робота характеризується логічною послідовністю викладу та системним підходом до розв'язання поставлених завдань. Ґрунтовний аналіз фахової літератури забезпечує глибокий контекст дослідження, а числове моделювання і комп'ютерна симуляція результатів підтверджують ефективність запропонованих підходів. Достовірність одержаних результатів підтверджується строгими математичними доведеннями всіх сформульованих теорем, лем і наслідків з посиланнями на існуючі загальновідомі результати та природним переходом одержаних узагальнень у

відомі класичні результати у моделюванні природничих і економічних процесів.

Достовірність результатів підтверджено апробацією результатів на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях і їх обговоренням з провідними фахівцями.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів

Теоретичне значення роботи полягає у розширенні застосування математичного апарату для моделювання складних процесів із фактором запізнення й екологічним впливом. Також отримано нові фундаментальні результати в теорії рівноважної економіки Ерроу-Дебре з урахуванням дискретної природи товарних запасів та існування оптових цін, що узагальнюють низку класичних теорем і відкривають перспективи для досліджень у впорядкованих просторах.

Практичне значення отриманих результатів визначається їхньою придатністю для:

- Охорони здоров'я: прогнозування епідемій та перебігу захворювань у несприятливих екологічних умовах, а також оцінки індивідуальних ризиків інфікування.
- Економічного аналізу: моделювання складних ринків (нерухомість, важка промисловість), де діють цілочисельні обмеження на обсяги товарів та системи оптових знижок.
- Освітнього процесу: оновлення змісту дисциплін з математичної біології, економіки та теорії диференціальних рівнянь.

Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях

Основні наукові результати дисертації достатньо повно відображені у наукових публікаціях здобувача. Результати роботи апробовано на наступних наукових конференціях: VIII Міжнародній науково-практичній конференції в

Софії (Болгарія, 2024), Міжнародній конференції IMCS-60 у Кишиневі (Молдова, 2024), XXX Національній конференції "Applications of mathematics in biology and medicine" у Вікно (Польща, 2025) та інших.

Дисертаційна робота Олега Українця повністю відповідає встановленим вимогам щодо кількості та якості публікацій у фахових виданнях, апробації на конференціях, а також нормативним критеріям обсягу та оформлення наукових досліджень рівня доктора філософії.

Зауваження.

Дисертаційна робота оформлена добре. Вона містить невелику кількість друкарських описок. Крім того, є декілька зауважень, які стосуються наповнення роботи.

1. Описки:

- на сторінці 23, 10 рядок зверху *Фотієм О.Г.* потрібно замінити на *Фотій О.Г.*;
- на сторінці 37, 5 рядок зверху *модель* потрібно замінити на *моделей*;
- на сторінці 42, 2 рядок зверху *унікальна* потрібно замінити на *єдина*;
- на сторінці 54, 16 рядок знизу знак = зайвий;
- на сторінці 106, 3 рядок знизу *E* потрібно замінити на *G*;
- часто автор використовує різні за написанням літери (прямі і курсивні) для позначення одного об'єкту (наприклад, літери *F* і *F* у формулюванні умови 4 на сторінці 47);
- на сторінці 112 у формулюванні умови (1) *of* потрібно замінити на *ціни*;

2. Посилання [9] на сторінці 66 і [95] на сторінці 79 потребують уточнення з вказанням твердження або сторінки з відповідного першоджерела.

3. Останній абзац доведення теореми 4.7 на сторінці 99 викладений надто лаконічно і виглядає перенасиченим логічними імплікаціями. Цей блок міркувань варто було б розбити на кілька частин.
4. Доведення неперервності відображення T у теоремі 4.24 на сторінці 122 проводиться для фіксованої точки x і збіжної до неї послідовності точок x_n . При цьому встановлюється властивість (4.25), яка формулюється у термінах довільної підпослідовності точок y_n і виділеної з неї рідшої підпослідовності точок z_n . Зауважимо, що термін «рідша підпослідовність» як заміник терміну «підпослідовність підпослідовності» не є загальноприйнятим. Крім того, варто було б здійснювати доведення за допомогою аналогу властивості (4.25), сформульованого у такому вигляді: *з довільної збіжної послідовності точок y_n можна виділити підпослідовність точок z_n таку, що* Такий спосіб міркувань не потребував би використання підпослідовностей послідовностей чи рідший підпослідовностей.

Зазначені вище зауваження не применшують позитивного враження від роботи і не впливають на високу оцінку наукового рівня дисертаційної роботи.

Загальний висновок

Дисертаційна робота Українця Олега Захаровича «Математичне моделювання природничих процесів та економічних систем під дією збурень», подана на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – Математика та статистика за спеціальністю 113 – Прикладна математика за її актуальністю, науково-теоретичним рівнем, новизною розв'язання поставлених завдань та практичним значенням отриманих результатів цілком відповідає пунктам 6, 7, 8, 9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої

вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. №44 (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 341 від 21.03.2022, № 502 від 19.05.2023, № 507 від 03.05.2024). Вважаю, що автор дисертаційної роботи Українець Олег Захарович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – Математика та статистика за спеціальністю 113 – Прикладна математика.

Рецензент

доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри математичного аналізу
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Володимир МИХАЙЛЮК

