Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Факультет математики та інформатики
Кафедра алгебри та інформатики

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Декан факультету
математики та інформатики
________ Ольга МАРТИНЮК
"25" червня 2025 року

РОБОЧА ПРОГРАМА
навчальної дисципліни

Лінійна алгебра

(обов'язкова)

Освітньо-професійна програма	Математика
Спеціальність	E7 – Математика
Галузь знань	E – Природничі науки, математика та статистика
Рівень вищої освіти	перший (бакалаврський)
Факультет	математики та інформатики
Мова навчання	українська

Чернівці 2025 рік

Робоча програма навчальної дисципліни ***«Лінійна алгебра»*** складена відповідно до освітньо-професійної програми «Математика».

Розробник: Сікора Віра Степанівна,
доцент кафедри алгебри та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук

Викладачі, що забезпечують читання даної навчальної дисципліни:
Сікора Віра Степанівна, доцент кафедри алгебри та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук,
Шевчук Наталія Михайлівна, асистент кафедри алгебри та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук

Погоджено з гарантом ОП ________________ Олена КАРЛОВА

Затверджено на засіданні кафедри алгебри та інформатики
Протокол № 12 від 25 червня 2025 року.
Завідувач кафедри ______________________ Руслана КОЛІСНИК

Схвалено методичною радою факультету математики та інформатики
Протокол № 12 від 25 червня 2025 року.
Голова методичної ради ________________ Віра СІКОРА

МЕТА ОСВІТНЬОГО КОМПОНЕНТА (НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ)

Забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичних та практичних розділів курсу лінійної алгебри, опанування студентом понять лінійності та нелінійності, розуміння їх положення та ролі в загальній системі математичних знань та вміння їх застосовувати, сприяння формування навичок у застосуванні основних методів лінійної алгебри.

Знання, які студент повинен отримати в результаті вивчення даного курсу, відіграватимуть важливу роль у процесі його подальшого навчання в університеті; вони закладають основи для вивчення інших обов'язкових та вибіркових навчальних дисциплін; при цьому окремі теми (наприклад, визначники другого та третього порядків, многочлени від однієї чи декількох змінних) розширюють та поглиблюють ті знання, які студенти отримали під час навчання в ЗЗСО, і надалі зможуть вико ристовуватися у їх подальшій професійній діяльності як вчителя математики.

ПРЕРЕКВІЗИТИ

Навчальні дисципліни шкільного курсу математики («Математика», «Алгебра», «Геометрія», «Алгебра і початки аналізу»).

РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Під час вивчення дисципліни, відповідно до освітньо-професійної програми, формуються наступні

ЗАГАЛЬНІ КОМПЕТЕНТНОСТІ (ЗК):

ЗК1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК-2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК-3. Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.

ЗК-7. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

ЗК-8. Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел.

ЗК-12. Здатність працювати автономно.

ЗК-13. Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків.

ФАХОВІ КОМПЕТЕНТНОСТІ (ФК):

ФК1. Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК-2. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

ФК-3. Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

ФК-4. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних.

ФК-5. Спроможність виражати терміни специфічної предметної області мовою математики.

ФК-6. Здатність до кількісного мислення.

ФК-7. Спроможність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси.

ФК-8. Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.

ФК-9. Здатність застосовувати чисельні методи для дослідження математичних моделей.

ФК-10. Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

ФК-11. Здатність пояснювати в математичних термінах результати, отримані під час підрахунків.

ФК-13. Здатність використовувати обчислювальні інструменти для чисельних і символьних розрахунків.

ФК-14. Готовність розв'язувати нові проблеми у нових галузях.

Після успішного завершення курсу «Лінійна алгебра» студент повинен продемонструвати заплановані ***ПРОГРАМНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ (ПРН)***, відповідно до ОП:

ПРН-З-1. Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці, описувати нерозв'язані математичні задачі.

ПРН-З-3. Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.

ПРН-З-4. Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

ПРН-З-6. Знати методи математичного моделювання природничих та/ або соціальних процесів.

ПРН-З-7. Володіти основними математичними методами аналізу, прогнозування та оцінки параметрів моделей, базовими математичними способами інтерпретації числових даних та основними принципами функціонування природничих процесів.

ПРН-У-1. Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики.

ПРН-У-5. Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями.

ПРН-У-6. Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей.

ПРН-У-8. Знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв'язування професійних задач.

ПРН-У-9. Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур.

ПРН-У-10. Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

ПРН-У-11. Знати теоретичні основи і застосовувати основні методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів і математичної статистики для дослідження випадкових явищ, перевірки гіпотез, обробки реальних даних та аналізу тривалих випадкових явищ.

ПРН-У-12. Знати теоретичні основи і застосовувати методи теорії функцій комплексної змінної.

ПРН-У-13. Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ.

ПРН-У-14. Розв'язувати основні математичні задачі аналізу даних; застосовувати базові загальні математичні моделі для специфічних ситуацій, мати навички управління інформацією і застосування комп'ютерних засобів статистичного аналізу даних.

ПРН-У-15. Розв'язувати типові задачі математичного аналізу, алгебри, диферентціальних та інтегральних рівнянь, оптимізації за допомогою чисельних методів.

Зокрема, після вивчення даного предмету студент повинен ***знати:*** основні поняття та твердження з програмного матеріалу (системи лінійних рівнянь; визначники; матриці; комплексні числа; многочлени; квадратичні форми; n-вимірні векторні простори; евклідові простори; лінійні оператори; поліноміальні матриці); ***вміти:*** розпізнавати вказані алгебраїчні структури, перевіряти їх стандартні властивості, використовувати вивчений теоретичний матеріал при розв'язуванні конкретних задач. ***Навички***, які студент повинен одержати в результаті вивчення курсу лінійної алгебри, відіграватимуть важливу роль у процесі його подальшого навчання у вузі; вони є основою для вивчення загальнотеоретичних і спеціальних дисциплін.

ОПИС ОСВІТНЬОГО КОМПОНЕНТА (НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ)

Форма навчання	Рік підготовки	Семестр	Кількість		Кількість годин на різні види навчальних занять			Вид підсумкового контролю
			кредитів	годин	лекції	практичні	самостійна робота	
Денна	1	1	5	150	30	44	76	іспит
		2	5	150	30	46	74	іспит
		Разом	**10**	**300**	**60**	**90**	**150**	**-**

СТРУКТУРА ЗМІСТУ ОСВІТНЬОГО КОМПОНЕНТА (НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ)

I СЕМЕСТР

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин			
	Денна форма			
	усього	у тому числі		
		Лекції	Практика	Самостійна робота
Змістовий модуль 1. *«Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса. Визначники»*				
Тема 1.1. Системи лін. рівнянь. Метод Гаусса.	**10**	2	3	5
Тема 1.2. Визначники 2-го та 3-го порядків. Формули Крамера. Зауваж. щодо використання визначників до розв'яз. СЛР в ЗЗСО.	**10**	2	3	5
Тема 1.3. Перестановки і підстановки.	**10**	2	2	6
Контрольна робота № 1 — 6 балів				
Тема 1.4. Визначники *n*-го порядку, їх власт.	**10**	2	3	5
Тема 1.5. Мінори та їх алгебраїчні доповнення.	**11**	2	3	6
Тема 1.6. Т-ма Крамера. Порівняння з алгоритмом Гаусса.	**10**	2	3	5
Контрольна робота № 2 – 6 балів				
Теоретичне опитування №1 – 8 балів				
Разом за змістовим модулем 1	**61**	12	17	32
Змістовий модуль 2. *«Векторний простір. Алгебра матриць»*				
Тема 2.1. Скінченновим. векторний простір. Аксіоми та їх наслідки. Лін. залежність векторів.	**14**	3	5	6
Тема 2.2. Ранг матриці, способи його обчисл. Т-ма Кронекера-Капеллі.	**14**	3	5	6
Контрольна робота № 3 — 7 балів				
Тема 2.3. Системи лін. однорідних рівнянь.	**11**	2	3	6
Тема 2.4. Дії над матрицями та їх властивості. Обернена матриця.	**18**	5	7	6
Контрольна робота № 4 — 8 балів				
Теоретичне опитування №2 – 10 балів				
Разом за змістовим модулем 2	**57**	13	20	24
Змістовий модуль 3. *«Комплексні числа. Дії над ними»*				
Тема 3.1. Алгебраїчна форма запису комплексних чисел.	**8**	1	2	5
Тема 3.2. Модуль і аргумент, тригон. форма запису компл.числа. Формула Муавра.	**9**	2	2	5
Тема 3.3. Добування кореня із компл. числа.	**8**	1	2	5
Тема 3.4. Числові кільця та поля. Узагальнення поняття про числові множини.	**7**	1	1	5
Контрольна робота № 5 — 7 балів				
Теоретичне опитування №3 – 8 балів				
Разом за змістовим модулем 3	**32**	5	7	20
Разом за I СЕМЕСТР	**150**	**30**	**44**	**76**

II СЕМЕСТР

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин			
	Денна форма			
	усього	у тому числі		
		Лекції	Практика	Самостійна робота
Змістовий модуль 4. *«Многочлени від однієї змінної, їх корені»*				
Тема 4.1. Мн-ни від однієї змінної, дії над ними. Подільність мн-нів. НСД та НСК многочленів. Алгоритм Евкліда. Взаємно прості многочлени. Заув. щодо використання НСД та НСК до скорочення дробів та знаходження спільного знаменника кількох дробів під час вивчення дробово-раціональних функцій в ЗЗСО.	**8**	2	2	4
Тема 4.2. Звідність многочленів над довільним числовим полем.	**4**	1	1	2
Тема 4.3. Розклад дробово-раціональної функції на елементарні дроби.	**4**	1	1	2
Контрольна робота № 6 — 6 балів				
Тема 4.4. Корені многочленів. Теорема Безу. Схема Горнера. Основна теорема алгебри комплексних чисел та наслідки з неї.	**8**	2	2	4
Тема 4.5. Розв'язування рівнянь в радикалах. Раціональні корені многочленів з раціональними коефіцієнтами. Зауваження щодо алгоритмів знаходження коренів многочленів третього та вищого степенів у ЗЗСО.	**8**	2	2	4
Тема 4.6. Межі дійсних коренів поліномів з дійсними коефіцієнтами. Теорема Штурма та інші теореми про кількість коренів мн-на від однієї змінної.	**8**	2	2	4
Контрольна робота № 7 — 6 балів				
Теоретичне опитування № 4 – 8 балів				
Разом за змістовим модулем 4	**40**	10	10	20
Змістовий модуль 5. *«Многочлени від багатьох змінних. Квадратичні форми»*				
Тема 5.1. Многочлени від декількох змінних. Симетричні мн-ни. Застосування симетричних многочленів до знищення ірраціональності в знаменнику.	**8**	2	2	4
Тема 5.2. Квадратичні форми. Їх канонічний вигляд. Закон інерції для дійсних кв. форм. Додатно визначені та розпадні кв. форми. Зауваження щодо зведення рівняння кола та рівняння сфери від загального до канонічного вигляду.	**16**	4	4	8
Контрольна робота № 8 — 10 балів				
Теоретичне опитування № 5 – 5 балів				
Разом за змістовим модулем 5	**24**	6	6	12
Змістовий модуль 6. *«Лінійні простори. Лінійні оператори»*				
Тема 6.1. Лінійний простір. Аксіоми. Ізоморфізм лінійних просторів.	**8**	2	2	4
Тема 6.2. Скінченновимірні лінійні простори. Базис. Перетворення базису.	**8**	2	2	4
Тема 6.3. Підпростори лінійного простору. Їх сума та перетин.	**8**	2	2	4
Контрольна робота № 9 — 5 балів				
Тема 6.4. Лінійні оператори.	**4**	1	1	2

Тема 6.5. Область значень та ядро лінійного оператора. Невироджені лінійні оператори.	**4**	1	1	2
Тема 6.6. Власні значення і власні вектори лінійного оператора.	**8**	2	2	4
Тема 6.7. Евклідові векторні простори. Ортонормований базис. Процес ортогоналізації.	**8**	2	2	4
Тема 6.8. Ортогональні та симетричні оператори евклідового простору. Ортогональні та симетричні матриці, їх властивості. Зведення дійсної кв.форми до головних осей. Пари форм.	**8**	2	2	4
Контрольна робота № 8 — 10 балів				
Теоретичне опитування № 6 – 5 балів				
Разом за змістовим модулем 6	**56**	14	14	28
Разом за II СЕМЕСТР	**120**	**30**	**30**	**60**

ТЕМАТИКА ТА ПИТАННЯ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ

І СЕМЕСТР[1]

Змістовий модуль 1. *«Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса. Визначники»*

Тема 1.1. Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса.

1. Система лінійних рівнянь з n змінними.
2. Розв'язок системи. Сумісна, несумісна, означена, неозначена системи.
3. Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь. Еквівалентні системи.
4. Матриця та розширена матриця системи лінійних рівнянь.
5. Метод Гаусса.

Тема 1.2. Визначники 2-го та 3-го порядків. Формули Крамера. Зауваження щодо використання визначників до розв'язування СЛР в ЗЗСО.

6. Визначник другого порядку (означення та формула для обчислення).
7. Властивості визначників другого порядку.
8. Теорема Крамера для системи із двох рівнянь з двома змінними.
9. Визначник третього порядку (означення та формула для обчислення).
10. Властивості визначників третього порядку.
11. Теорема Крамера для системи трьох рівнянь з трьома змінними.

Тема 1.3. Перестановки і підстановки.

12. Перестановка з n символів. Теорема про кількість різних перестановок з n символів.
13. Інверсії в перестановці. Парна та непарна перестановки.
14. Транспозиція в перестановці та наслідки її виконання.
15. Підстановка n-го степеня (означення та властивості). Твердження про кількість всіх підстановок n-го степеня.
16. Інверсія в підстановці. Парні та непарні підстановки. Твердження про кількість парних та непарних підстановок.
17. Множення підстановок. Властивості дії множення підстановок.

Тема 1.4. Визначники n-го порядку, їх властивості.

18. Визначник n-го порядку (означення та властивості).
19. Трикутні визначники — означення та формули для обчислення.

[1] Детальні презентації до кожної лекції наведено на сайті електронного навчання на сторінці курсу [Курс: Лінійна алгебра (1 семестр) | Електронне навчання]

20. Кососиметричний визначник — означення та формули для обчислення.
Тема 1.5. Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Теорема Лапласа. **21.** Мінор, доповняльний мінор, алгебраїчне доповнення. **22.** Теорема про добуток мінора та відповідного алгебраїчного доповнення. **23.** Теорема Лапласа. **24.** Наслідок теореми Лапласа про розклад визначника за елементами рядка (стовпця). **25.** Теорема про "фальшивий" розклад визначника. **26.** Визначники Вандермонда.
Тема 1.6. Теорема Крамера. Порівняння з алгоритмом Гаусса. **27.** Теорема Крамера (загальний випадок). Наслідки з неї. **28.** Зауваження про однорідні системи лінійних рівнянь.
Змістовий модуль 2. *«Векторний простір. Алгебра матриць»*
Тема 2.1. Скінченновим. векторний простір. Аксіоми та їх наслідки. Лінійна залежність векторів. **29.** Означення n-вимірного вектора, нульового вектора, протилежного вектора. Дії над векторами, їх властивості. **30.** Означення скінченновимірного векторного простору. Аксіоми n-вимірного векторного простору. **31.** Пропорційні вектори. Лінійна комбінація векторів. **32.** Лінійна залежність векторів скінченновимірного простору (два означення, їх рівносильність). **33.** Лінійно незалежна система векторів скінченновимірного простору. **34.** Властивості лінійно залежних та незалежних систем векторів, їх наслідки. **35.** Максимальна лінійно незалежна система векторів, її властивості. **36.** Еквівалентні системи векторів. **37.** Основна теорема про дві системи векторів, її наслідки. **38.** Максимальна підсистема системи векторів. Базис. **39.** Ранг системи векторів. Розмірність простору.
Тема 2.2. Ранг матриці, способи його обчисл. Теоремама Кронекера-Капеллі. **40.** Ранг матриці. Теорема про ранг матриці, наслідок. **41.** Методи охоплення мінорів та елементарних перетворень обчислення рангу матриці. **42.** Теорема Кронекера-Капеллі. Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь за допомогою теореми Кронекера-Капеллі.
Тема 2.3. Системи лінійних однорідних рівнянь. **43.** Однорідна система лінійних рівнянь (СЛОР), її сумісність. Означення та властивості розв'язків лінійної однорідної системи. **44.** Фундаментальна система розв'язків для СЛОР. Теорема про кількість розв'язків у фундаментальній системі СЛОР. **45.** Зв'язок між розв'язками неоднорідної та приєднаної однорідної систем лінійних рівнянь.
Тема 2.4. Дії над матрицями та їх властивості. Обернена матриця **46.** Множення та додавання прямокутних матриць. Множення довільної прямокутної матриці на число. Властивості цих дій. **47.** Множення та додавання квадратних матриць. Множення квадратної матриці на число. **48.** Визначник добутку квадратних матриць. **49.** Невироджена матриця. Обернена матриця. **50.** Розв'язування матричних рівнянь. **51.** Теорема про ранг добутку матриць.
Змістовий модуль 3. *«Комплексні числа. Дії над ними»*
Тема 3.1. Алгебраїчна форма запису комплексних чисел.

52. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі, властивості цих дій. **53.** Спряжені числа. Властивості спряженості. **54.** Геометричний зміст комплексного числа.
Тема 3.2. Модуль і аргумент, тригонометрична форма запису комплексного числа. Формула Муавра. **55.** Модуль і аргумент комплексного числа. Тригонометрична форма запису комплексного числа. **56.** Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. **57.** Формула Муавра та її застосування.
Тема 3.3. Добування кореня із комплексного числа. **58.** Обчислення кореня натурального степеня з комплексного числа. **59.** Корені *n*-го степеня з одиниці. Їх властивості. **60.** Первісні корені *n*-го степеня з одиниці. Їх властивості.
Тема 3.4. Числові кільця та поля. Узагальнення поняття про числові множини. **61.** Означення на основні властивості числового кільця. **62.** Означення на основні властивості числового поля.

II СЕМЕСТР[2]

Змістовий модуль 4. «Многочлени від однієї змінної, їх корені»
Тема 4.1. Многочлени від однієї змінної, дії над ними. Подільність многочленів. НСД та НСК многочленів. Алгоритм Евкліда. Взаємно прості многочлени. Зауваження щодо використання НСД та НСК до скорочення дробів та знаходження спільного знаменника кількох дробів під час вивчення дробово-раціональних функцій в ЗЗСО. 1. Числові кільця та поля — означення, властивості, приклади. 2. Многочлени від однієї змінної. Додавання, віднімання та множення многочленів. Властивості цих дій. 3. Ділення многочленів. Теорема про ділення многочленів з остачею. 4. Подільність многочленів. Властивості подільності. 5. Дільники многочлена. Спільні дільники двох многочленів. Найбільший спільний дільник двох многочленів. Алгоритм Евкліда. Зауваження про НСД кількох многочленів. 6. Найменше спільне кратне двох многочленів. Зауваження про НСК кількох многочленів. 7. Зауваження щодо використання НСД та НСК до скорочення дробів та знаходження спільного знаменника кількох дробів під час вивчення дробово-раціональних функцій в ЗЗСО.
Тема 4.2. Звідність многочленів над довільним числовим полем. 8. Звідні та незвідні многочлени над довільним числовим полем. 9. Звідність поліномів: над полем раціональних чисел; над полем комплексних чисел.
Тема 4.3. Розклад дробово-раціональної функції на елементарні дроби. 10. Алгебраїчні дроби (дробово-раціональні функції). Дії над ними. Властивості цих дій. 11. Правильні, неправильні, скоротні та нескоротні алгебраїчні дроби. 12. Прості дроби 1-го та 2-го типу. Основна теорема про алгебраїчні дроби.
Тема 4.4. Корені многочленів. Теорема Безу. Схема Горнера. Основна теорема алгебри комплексних чисел та наслідки з неї. 13. Корінь многочлена. Теорема Безу. Кратні корені. 14. Схема Горнера та її застосування: до знаходження значення многочлена та його похідних в

[2] Детальні презентації до кожної лекції наведено на сайті електронного навчання на сторінці курсу [Курс: Лінійна алгебра (2 семестр) | Електронне навчання]

точці, до розкладу многочлена за степенями (*x-a*); до встановлення кратності кореня.

15. Основна теорема алгебри (ОТА) про існування коренів многочлена від однієї змінної.
16. Наслідок з ОТА про розклад многочлена на множники.
17. Наслідок з ОТА: формули Вієта.
18. Наслідок з ОТА про задання многочлена своїми значеннями в декількох точках; інтерполяційна формула Лагранжа *(самостійно)* .

Тема 4.5. Розв'язування рівнянь в радикалах. Раціональні корені многочленів з раціональними коефіцієнтами. Зауваження щодо алгоритмів знаходження коренів многочленів третього та вищого степенів у ЗЗСО.

19. Алгебраїчні методи знаходження коренів многочленів через їх коефіцієнти. Формули Кардано. Метод Феррарі *(самостійно*).
20. Знаходження раціональних коренів многочленів з раціональними коефіцієнтами.
21. Зауваження щодо алгоритмів знаходження коренів многочленів третього та вищого степенів у ЗЗСО.

Тема 4.6. Межі дійсних коренів поліномів з дійсними коефіцієнтами. Теорема Штурма та інші теореми про кількість коренів многочлена від однієї змінної.

22. Означення та формули для обчислення верхньої та нижньої меж додатних і верхньої та нижньої меж від'ємних коренів многочлена від однієї змінної.
23. Система многочленів Штурма. Теорема Штурма про кількість на відрізку коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами.
24. Теореми Бюдано-Фур'є та Декарта про кількість на відрізку коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами *(самостійно*)

Змістовий модуль 5. *«Многочлени від багатьох змінних. Квадратичні форми»*

Тема 5.1. Многочлени від декількох змінних. Симетричні многочлени. Застосування симетричних многочленів до знищення ірраціональності в знаменнику.

25. Одночлен, многочлен від декількох змінних над деяким полем. Дії над многочленами та їх властивості.
26. Степінь многочлена від багатьох змінних. Лексикографічний запис многочлена. Старший член многочлена.
27. Теорема про старший член добутку многочленів від багатьох змінних.
28. Симетричні многочлени. Означення та властивості. Елементарні симетричні многочлени.
29. Основна теорема про симетричні многочлени та наслідки з неї.
30. Степеневі суми та симетричні раціональні дроби *(самостійно*).

Тема 5.2. Квадратичні форми. Їх канонічний вигляд. Закон інерції для дійсних кв. форм. Додатно визначені та розпадні квадратичні форми. Зауваження щодо зведення рівняння кола та рівняння сфери від загального до канонічного вигляду.

31. Квадратична форма. Дійсна та комплексна квадратичні форми. Канонічний та нормальний вигляди квадратичної форми. Невироджене лінійне перетворення квадратичної форми.
32. Теорема Лагранжа про існування невиродженого лінійного перетворення, яке приводить квадратичну форму до канонічного вигляду.
33. Ранг, сигнатура, додатний та від'ємний індекси інерції. Закон інерції. Еквівалентність квадратичних форм. Класи еквівалентності.
34. Додатно визначена квадратична форма. Означення та властивості. Критерій Сильвестра.
35. Квадратичні форми, що розкладаються на добуток лінійних форм − критерій розкладу.
36. Зауваження щодо зведення рівняння кола та рівняння сфери від загального до канонічного вигляду.

Змістовий модуль 6. *«Лінійні простори. Лінійні оператори»*

Тема 6.1. Лінійний простір. Аксіоми. Ізоморфізм лінійних просторів.

37. Лінійний простір. Означення та аксіоми.
38. Ізоморфізм лінійних просторів. Означення та властивості.

Тема 6.2. Скінченновимірні лінійні простори. Базис. Перетворення базису.

39. Скінченновимірний лінійний простір. Базис. Розмірність простору.
40. Координати вектора в даному базисі.
41. Зв'язок між базами. Матриця переходу від бази до бази.
42. Зв'язок між координатами вектора в різних базисах.

Тема 6.3. Підпростори лінійного простору. Їх сума та перетин.

43. Підпростори лінійного простору.
44. Лінійна оболонка, натягнута на систему векторів.
45. Сума та перетин підпросторів лінійного простору.
46. Теорема про зв'язок між розмірностями суми та перетину підпросторів лінійного простору.

Тема 6.4. Лінійні оператори.

47. Лінійний оператор, означення та властивості. Матриця лінійного оператора в деякому базисі.
48. Координати образу вектора.
49. Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах.

Тема 6.5. Область значень та ядро лінійного оператора. Невироджені лінійні оператори.

50. Область значень та ядро лінійного оператора. Ранг та дефект лінійного оператора, теорема про зв'язок між ними.
51. Невироджений лінійний оператор. Його властивості *(самостійно)*.

Тема 6.6. Власні значення і власні вектори лінійного оператора.

52. Характеристична матриця, характеристичний многочлен, характеристичне рівняння та характеристичні корені матриці лінійного оператора.
53. Власний вектор та власне значення лінійного оператора. Теорема про зв'язок характеристичних коренів лінійного оператора з його власними значеннями.
54. Лінійний оператор з простим спектром *(самостійно)*.

Тема 6.7. Евклідові векторні простори. Ортонормований базис. Процес ортогоналізації.

55. Скалярний добуток векторів лінійного простору. Властивості. Евклідів векторний простір.
56. Ортогональність елементів (векторів) евклідового простору. Довжина вектора. Кут між векторами.
57. Ортогональна система елементів (векторів) евклідового простору. Процес ортогоналізації. Нормування векторів. Ортонормовані системи векторів.
58. Ізоморфізм евклідових просторів.

Тема 6.8. Ортогональні та симетричні оператори евклідового простору. Ортогональні та симетричні матриці, їх властивості та застосування. Зведення дійсної квадратичної форми до головних осей. Пари форм.

59. Ортогональний оператор евклідового простору, його властивості. Ортогональна матриця, її властивості.
60. Симетричний оператори евклідового простору, його властивості. Симетрична матриця, її властивості.
61. Існування невиродженого ортогонального перетворення невідомих, яке приводить дійсну квадратичну форму до канонічного вигляду. Зведення двох квадратичних форм до канонічного вигляду за допомогою одного невиродженого перетворення невідомих.
62. Зведення загального рівняння поверхні 2-го порядку в трьохвимірному евклідовому просторі до канонічного вигляду *(самостійно)*.

ТЕМАТИКА ТА ПИТАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№	Назва теми	Кількість годин
	І СЕМЕСТР[3]	
	Змістовий модуль 1. *«Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса. Визначники»*	
1.	**Тема 1.1.** Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса.	3
2.	**Тема 1.2.** Визначники 2-го та 3-го порядків. Формули Крамера. Зауваження щодо використання визначників до розв'язування СЛР в ЗЗСО.	3
3.	**Тема 1.3.** Перестановки і підстановки.	2
4.	**Тема 1.4.** Визначники *n*-го порядку, їх властивості	3
5.	**Тема 1.5.** Мінори та їх алгебраїчні доповнення.	3
6.	**Тема 1.6.** Теорема Крамера. Порівняння з алгоритмом Гаусса.	3
	Змістовий модуль 2. *«Векторний простір. Алгебра матриць»*	
7.	**Тема 2.1.** Скінченновимірний векторний простір. Аксіоми та їх наслідки. Лінійна залежність векторів.	5
8.	**Тема 2.2.** Ранг матриці, способи його обчислення.Теорема Кронекера-Капеллі.	5
9.	**Тема 2.3.** Системи лінійних однорідних рівнянь.	3
10.	**Тема 2.4.** Дії над матрицями та їх властивості. Обернена матриця. Кільце та алгебра матриць.	7
	Змістовий модуль 3. *«Комплексні числа. Дії над ними»*	
11.	**Тема 3.1.** Алгебраїчна форма запису комплексних чисел.	2
12.	**Тема 3.2.** Модуль і аргумент, тригонометрична форма запису комплексного числа. Формула Муавра.	2
13.	**Тема 3.3.** Добування кореня із комплексного числа.	2
14.	**Тема 3.4.** Числові кільця та поля. Узагальнення поняття про числові множини. Застосування комплексних чисел в ЗЗСО	1
	ІІ СЕМЕСТР[4]	
	Змістовий модуль 4. *«Многочлени від однієї змінної, їх корені»*	
15.	**Тема 4.1.** Многочленини від однієї змінної, дії над ними. Подільність многочленів. НСД та НСК многочленів. Алгоритм Евкліда. Взаємно прості многочлени. Використання НСД та НСК до скорочення дробів та знаходження спільного знаменника кількох дробів під час вивчення з дробово-раціональних функцій в ЗЗСО.	2
16.	**Тема 4.2.** Звідність многочленів над довільним числовим полем.	1
17.	**Тема 4.3.** Розклад дробово-раціональної функції на елементарні дроби.	1
18.	**Тема 4.4.** Корені многочленів. Теорема Безу. Схема Горнера. Основна теорема алгебри комплексних чисел та наслідки з неї. Застосування в ЗЗСО.	2
19.	**Тема 4.5.** Розв'язування рівнянь в радикалах. Раціональні корені многочленів з раціональними коефіцієнтами. Зауваження щодо алгоритмів знаходження ко-	2

[3] Завдання до кожного практичного заняття наведено на сайті електронного навчання на сторінці курсу [Курс: Лінійна алгебра (1 семестр) | Електронне навчання]

[4] Завдання до кожного практичного заняття наведено на сайті електронного навчання на сторінці курсу [Курс: Лінійна алгебра (2 семестр) | Електронне навчання]

	ренів многочленів третього та вищого степенів у ЗЗСО.	
20.	**Тема 4.6.** Межі дійсних коренів поліномів з дійсними коефіцієнтами. Теорема Штурма та інші теореми про кількість коренів многочлена від однієї змінної.	2
Змістовий модуль 5. *«Многочлени від багатьох змінних. Квадратичні форми»*		
21.	**Тема 5.1.** Многочлени від декількох змінних. Симетричні многочлени. Застосування симетричних многочленів до позбування ірраціональності в знаменнику.	2
22.	**Тема 5.2.** Квадратичні форми. Їх канонічний вигляд. Закон інерції для дійсних кв. форм. Додатно визначені та розпадні квадратичні форми. Зауваження щодо зведення рівняння кола та рівняння сфери від загального до канонічного вигляду. Застосування квадратичних форм в ЗЗСО.	4
Змістовий модуль 6. *«Лінійні простори. Лінійні оператори»*		
23.	**Тема 6.1.** Лінійний простір. Аксіоми. Ізоморфізм лінійних просторів.	2
24.	**Тема 6.2.** Скінченновимірні лінійні простори. Базис. Перетворення базису.	2
25.	**Тема 6.3.** Підпростори лінійного простору. Їх сума та перетин.	2
26.	**Тема 6.4.** Лінійні оператори.	1
27.	**Тема 6.5.** Область значень та ядро лінійного оператора. Невироджені лінійні оператори.	1
28.	**Тема 6.6.** Власні значення і власні вектори лінійного оператора.	2
29.	**Тема 6.7.** Евклідові векторні простори. Ортонормований базис. Процес ортогоналізації.	2
30.	**Тема 6.8.** Ортогональні та симетричні оператори евклідового простору. Ортогональні та симетричні матриці, їх властивості. Зведення дійсної квадратичної форми до головних осей. Пари форм. Застосування до зведення рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду.	2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота студента складається з опрацювання матеріалу, засвоєного на лекціях та практичних заняттях, самостійного опанування частини теоретичного та практичного матеріалу, виконання домашніх завдань, роботи з контрольними запитаннями та завданнями. Матеріали для самостійної роботи студента наведено на сайті електронного навчання на сторінках курсу Курс: Лінійна алгебра (1 семестр) | Електронне навчання та Курс: Лінійна алгебра (2 семестр) | Електронне навчання.

МЕТОДИ НАВЧАННЯ

У процесі вивчення навчальної дисципліни використовуються інноваційні освітні технології: інформаційно-комунікаційні, технології студентоцентрованого навчання. При цьому впроваджуються традиційні та інтерактивні форми і методи навчання, серед яких методи формування професійної компетентності (розповідь, пояснення, бесіда, ілюстрація, демонстрація, візуалізація, дискусія тощо); та методи формування практичних умінь та навичок (виконання практичних завдань, розв'язування задач).

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ПОТОЧНОГО ТА ПІДСУМКОВОГОТ КОНТРОЛЮ

Рівень володіння матеріалом дисципліни студенти виявляють при виконанні контрольних робіт та теоретичних опитувань (колоквіумів, тестувань). Сумарний максимальний бал за ці види робіт (60 балів) доповнюється 40 балами за екзамен.

Загальна підсумкова оцінка з навчальної дисципліни враховує результати поточного та підсумкового контролю.

РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

1 семестр

Модульний контроль	Практика	Теорія	ВСЬОГО
МОДУЛЬ 1	КР № 1 — 6 балів КР № 2 — 6 балів	ТО № 1 – 8 балів	20 балів
МОДУЛЬ 2	КР № 3 — 7 балів КР № 4 — 8 балів	ТО № 2 – 10 балів	25 балів
МОДУЛЬ 3	КР № 5 — 7 балів	ТО № 3 – 8 балів	15 балів
Екзамен	20 балів	20 балів	40 балів
		РАЗОМ ЗА І-й семестр:	**100 балів**

2 семестр

Модульний контроль:	Практика	Теорія	ВСЬОГО
МОДУЛЬ 4	КР № 6 — 6 балів КР № 7 — 6 балів	ТО № 4 – 8 балів	20 балів
МОДУЛЬ 5	КР № 8 — 10 балів	ТО № 5 – 5 балів	15 балів
МОДУЛЬ 6	КР № 9 — 5 балів КР № 9 — 10 балів	ТО № 6 – 10 балів	25 балів
Екзамен	20 балів	20 балів	40 балів
		РАЗОМ ЗА ІІ-й семестр:	**100 балів**

Іспит з курсу «Лінійна алгебра» є семестровим контролем знань студентів та охоплює всі теми, які вивчалися протягом семестру. Іспит проводиться у письмово-усній формі.

Письмова частина включає самостійну роботу студентів над завданнями екзаменаційного білету. Для отримання найвищої оцінки за кожне завдання відповідь має бути максимально розгорнутою.

Тривалість роботи над письмовою частиною іспиту складає орієнтовно 90 хв.

Під час проведення іспиту забороняється використовувати будь-які допоміжні засоби (калькулятори, конспекти, підручники, посібники, інтернет-ресурси тощо), мобільні телефони повинні бути вимкнені. Студенти, які помічені у списуванні або використанні допоміжних засобів, можуть бути відсторонені екзаменатором від подальшого складання іспиту та отримують нуль балів із можливих 40 балів, які виносяться на іспит. Тобто у відомість, за умови списування, виставляється лише результат балів, отриманий за семестр.

Усна частина іспиту проходить у формі діалогу між студентом та екзаменатором і включає відповіді студента на питання у межах білета. Остаточна оцінка за кожне завдання екзаменаційного білету виставляється після усної частини іспиту.

Екзаменаційна робота оцінюється в 40 балів. Критерії оцінювання кожного із завдань екзаменаційної роботи доводяться до відома студентів на останньому лекційному занятті семестру.

ШКАЛА ОЦІНЮВАННЯ: НАЦІОНАЛЬНА ТА ЄКТС

Оцінка за національною шкалою	**Оцінка за шкалою ECTS**	
	Оцінка (бали)	**Пояснення за розширеною шкалою**
Відмінно	A (90-100)	відмінно
Добре	B (80-89)	дуже добре
	C (70-79)	добре
Задовільно	D (60-69)	задовільно
	E (50-59)	достатньо
Незадовільно	FX (35-49)	(незадовільно) з можливістю повторного складання
	F (1-34)	(незадовільно) з обов’язковим самостійним опрацюванням освітнього компоненту до перескладання

ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ СТУДЕНТІВ

I СЕМЕСТР

Модуль 1. Системи лінійних рівнянь. Визначники.

1. Система лінійних рівнянь з n змінними. Розв'язок системи. Сумісна, несумісна, означена, неозначена системи.
2. Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь. Еквівалентні системи.
3. Матриця та розширена матриця системи лінійних рівнянь.
4. Метод Гаусса.
5. Визначник 2-го порядку (означення та формула для обчислення). Властивості таких визначників. Теорема Крамера для системи із двох рівнянь з двома змінними.
6. Визначник 3-го порядку (означення та формула для обчислення). Властивості таких визначників. Теорема Крамера для системи трьох рівнянь з трьома змінними.
7. Визначник n-го порядку (означення та властивості).
8. Трикутні визначники — означення та формули для обчислення. *(додатково, самостійно)*
9. Кососиметричний визначник — означення та формули для обчислення. *(додатково, самостійно)*
10. Мінор, доповняльний мінор, алгебраїчне доповнення.
11. Теорема про добуток мінора та відповідного алгебраїчного доповнення.
12. Теорема Лапласа. Наслідок теореми Лапласа про розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Теорема про "фальшивий" розклад визначника.
13. Визначники Вандермонда. *(додатково, самостійно)*
14. Теорема Крамера. Наслідки. Зауваження про однорідні системи лінійних рівнянь.

Модуль 2. Векторний простір. Алгебра матриць.

15. Означення n-вимірного вектора, нульового вектора, протилежного вектора. Дії над векторами, їх властивості.
16. Означення скінченновимірного векторного простору. Аксіоми n-вимірного векторного простору.
17. Пропорційні вектори. Лінійна комбінація векторів.
18. Лінійна залежність векторів скінченновимірного простору (два означення, їх рівносильність).
19. Лінійно незалежна система векторів скінченновимірного простору.
20. Властивості лінійно залежних та незалежних систем векторів, їх наслідки.
21. Максимальна лінійно незалежна система векторів, її властивості.
22. Еквівалентні системи векторів.
23. Основна теорема про дві системи векторів, її наслідки.
24. Максимальна підсистема системи векторів. Базис.
25. Ранг системи векторів. Розмірність простору.
26. Ранг матриці. Теорема про ранг матриці, наслідок.
27. Методи охоплення мінорів та елементарних перетворень обчислення рангу матриці.
28. Теорема Кронекера-Капеллі. Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь за допомогою теореми Кронекера-Капеллі.
29. Однорідна система лінійних рівнянь (СЛОР), її сумісність. Означення та властивості розв'язків лінійної однорідної системи.
30. Фундаментальна система розв'язків для СЛОР. Теорема про кількість розв'язків у фундаментальній системі СЛОР.

31. Зв'язок між розв'язками неоднорідної та приєднаної однорідної систем лінійних рівнянь.
32. Множення та додавання прямокутних матриць. Множення довільної прямокутної матриці на число. Властивості цих дій.
33. Множення та додавання квадратних матриць. Множення квадратної матриці на число.
34. Визначник добутку квадратних матриць.
35. Невироджена матриця. Обернена матриця.
36. Розв'язування матричних рівнянь.
37. Теорема про ранг добутку матриць.

Модуль 3. Комплексні числа.
38. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі, властивості цих дій.
39. Спряжені числа. Властивості спряженості.
40. Геометричний зміст комплексного числа.
41. Модуль і аргумент комплексного числа. Тригонометрична форма запису комплексного числа.
42. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Формула Муавра.
43. Обчислення кореня натурального степеня з комплексного числа.
44. Корені n-го степеня з одиниці. Їх властивості.
45. Первісні корені n-го степеня з одиниці. Їх властивості.
46. Означення на основні властивості числового кільця.
47. Означення на основні властивості числового поля.

Перелік типових задач

***Модуль 1.** Системи лінійних рівнянь. Визначники*

1. Дослідити на сумісність, знайти загальний розв'язок і один частковий розв'язок системи лінійних рівнянь, використовуючи метод Гаусса (послідовного виключення невідомих):

$$\text{а) } \begin{cases} 2x-3y=4, \\ 4x-5y=10; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x+3y+5z=10, \\ 3x+7y+4z=3, \\ x+2y+2z=3; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3x_1+3x_2+4x_3-5x_4=9, \\ 5x_1-7x_2+8x_3+2x_4=18, \\ 4x_1+5x_2-7x_3-3x_4=-5, \\ 7x_1+8x_2+3x_3+4x_4=-2. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-8x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=1, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=-1, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=-2, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=4. \end{cases}$$

2. Дослідити на сумісність, знайти розв'язок систем лінійних рівнянь із прикладу 7, використовуючи, коли це можливо, формули Крамера.
3. Дослідити систему в залежності від параметра:

$$\text{а) } \begin{cases} ax+4y=2, \\ 9x+ay=3. \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x+3y=2+kx, \\ 7x+5y=1+ky. \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x+y+\lambda z=-1, \\ x+\lambda y+z=\lambda, \\ \lambda x+y+z=-\lambda^2. \end{cases}$$

8. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 12 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ (порядок визначника n); д) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 4 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 6 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 2n \end{vmatrix}$.

Модуль 2. *Векторний простір. Алгебра матриць*

9. Знайти вектор $\overline{x}$ із рівняння $2\overline{\alpha_1} + 3\overline{\alpha_2} - 3\overline{\alpha_3} + 4\overline{\alpha_4} - 3\overline{x} = \overline{0}$, де

$$\overline{\alpha_1} = (1;3;-4;2;1),\quad \overline{\alpha_2} = (3;-1;-5;1;0),\quad \overline{\alpha_3} = (2;-1;0;1;-3),\quad \overline{\alpha_4} = (1;2;-1;2;-1).$$

10. Дослідити на лінійну залежність вказану систему векторів. Чому дорівнює ранг цієї системи векторів? Виписати приклад її максимальної лінійно незалежної підсистеми (бази). Вектори, які не входять до виписаної бази, виразити через вектори бази.

а) $\overline{\alpha_1} = (4,-2,6),\quad \overline{\alpha_2} = (6,-3,9)$;

б) $\overline{\alpha_1} = (2;-3;4;1),\quad \overline{\alpha_2} = (4;-2;3;2)$;

в) $\overline{\alpha_1} = (7;-5;-2;-4),\quad \overline{\alpha_2} = (-3;2;1;2),\quad \overline{\alpha_3} = (2;-1;-1;-2)$;

г) $\overline{\alpha_1} = (3;4;-1;5;-2),\quad \overline{\alpha_2} = (1;5;-2;3;4),\quad \overline{\alpha_3} = (2;-1;1;2;3),\quad \overline{\alpha_4} = (3;-7;4;1;-7)$.

11. Знайти ранг матриці методом охоплення мінорів або методом елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -2 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{pmatrix}$.

12. Дослідити на сумісність, знайти загальний розв'язок і один частковий розв'язок системи лінійних рівнянь за допомогою: 1) теореми Кронекера-Капеллі; 2) використовуючи зв’язок між розв’язками неоднорідної та приєднаної однорідної систем:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$

13. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

14. Дослідити на сумісність, знайти загальний розв'язок і один частковий розв'язок систем лінійних рівнянь із прикладів 1 та 12, використовуючи зв’язок між розв’язками неоднорідної та приєднаної однорідної систем.

15. Обчислити: а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$;

в) добуток матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ на транспоновану до неї;

г) $f(A)$, якщо $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $f(A)$, якщо $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ та $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Обчислити обернені до матриць (методом алгебраїчних доповнень та методом елементарних перетворень): $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

17. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним способом: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

18.Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; б) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

***Модуль 3.** Комплексні числа*

19. Обчислити: а) $\dfrac{(2-3i)^3-(1+i)^2(5-i)}{(4-3i)^2-i(1+2i)^3}$; б) . $\dfrac{(1-i)^{17}}{\left(-i+\sqrt{3}\right)^{25}}$.; г) $\left(\dfrac{-1-i}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{2015}$.

20. Знайти всі значення: а) $\sqrt{4-3i}$; б) $\sqrt[4]{-2-i}$; в) $\sqrt[3]{3-3i}$; г) $\sqrt[6]{-64}$.

21. Розв'язати рівняння: а) $z^2=5-12i$; б) $|z|+z=8+4i$; в) $z^2-5z+4+10i=0$.

22. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} (1-2i)z_1+(2-i)z_2=1-3i, \\ (-i+1)z_1-(i+2)z_2=-1-i. \end{cases}$

23. Зобразити на комплексній площині точки z , які задовольняють умови:

а) $1 \le |z-1+2i| \le 2$; б) $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg z < \dfrac{\pi}{3}$; в) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z - 3$; г) $\left(\operatorname{Re} z\right)^2 - 5 = \operatorname{Im} z$.

24. Використовуючи комплексні числа, зобразити у вигляді многочлена від $\sin x$ та $\cos x$ функції: а) $\sin 6x$; б) $\sin 7x$; г) $\cos 6x$; г) $\cos 7x$.

25. Виписати всі корені та всі первісні корені 12-го степеня з одиниці.

II СЕМЕСТР

. ***Модуль 4.*** *Многочлени від однієї змінної, їх корені*

1. Многочлени від однієї змінної. Додавання, віднімання та множення многочленів. Властивості цих дій.
2. Ділення многочленів. Теорема про ділення многочленів з остачею.
3. Подільність многочленів. Властивості подільності.
4. Дільники многочлена. Спільні дільники двох многочленів. Найбільший спільний дільник двох многочленів. Алгоритм Евкліда. Зауваження про НСД кількох многочленів.
5. Найменше спільне кратне двох многочленів. Зауваження про НСК кількох многочленів.
6. Звідні та незвідні многочлени над полем. Звідність поліномів: над полем раціональних чисел; над полем комплексних чисел.
7. Алгебраїчні дроби (дробово-раціональні функції). Дії над ними. Властивості цих дій.
8. Правильні, неправильні, скоротні та нескоротні алгебраїчні дроби.
9. Прості дроби 1-го та 2-го типу. Основна теорема про алгебраїчні дроби.
10. Корінь многочлена. Теорема Безу. Кратні корені.
11. Схема Горнера та її застосування: до знаходження значення многочлена та його похідних в точці, до розкладу многочлена за степенями (*x-a*); до встановлення кратності кореня.
12. Основна теорема алгебри (ОТА) про існування коренів многочлена від однієї змінної.
13. Наслідок з ОТА про розклад многочлена на множники.
14. Наслідок з ОТА: формули Вієта.
15. Наслідок з ОТА про задання многочлена своїми значеннями в декількох точках; інтерполяційна формула Лагранжа.
16. *(На практиці)* Алгебраїчні методи знаходження коренів многочленів через їх

коефіцієнти. Формули Кардано. Метод Феррарі.

17. Знаходження раціональних коренів многочленів з раціональними коефіцієнтами.
18. Означення та формули для обчислення верхньої та нижньої меж додатних і верхньої та нижньої меж від'ємних коренів многочлена від однієї змінної.
19. Система многочленів Штурма. Теорема Штурма про кількість на відрізку коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами.
20. (*самостійно*) Теореми Бюдано-Фур'є та Декарта про кількість на відрізку коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами.

<u>Модуль 5.</u> *Многочлени від декількох змінних. Квадратичні форми*

21. Одночлен, многочлен від декількох змінних над деяким полем. Дії над многочленами та їх властивості.
22. Степінь многочлена від багатьох змінних. Лексикографічний запис многочлена. Старший член многочлена.
23. Теорема про старший член добутку многочленів від багатьох змінних.
24. Симетричні многочлени. Означення та властивості. Елементарні симетричні многочлени.
25. Основна теорема про симетричні многочлени та наслідки з неї.
26. Степеневі суми та симетричні раціональні дроби (*На практиці*).
27. Квадратична форма. Дійсна та комплексна квадратичні форми. Канонічний та нормальний вигляди квадратичної форми. Невироджене лінійне перетворення квадратичної форми.
28. Теорема Лагранжа про існування невиродженого лінійного перетворення, яке приводить квадратичну форму до канонічного вигляду.
29. Ранг, сигнатура, додатний та від'ємний індекси інерції. Закон інерції. Еквівалентність квадратичних форм. Класи еквівалентності.
30. Додатно визначена квадратична форма. Означення та властивості. Критерій Сильвестра.
31. Квадратичні форми, що розкладаються на добуток лінійних форм − критерій розкладу.

<u>Модуль 6.</u> *Лінійні простори. Лінійні оператори*

32. Лінійний простір. Означення та аксіоми.
33. Ізоморфізм лінійних просторів. Означення та властивості.
34. Скінченновимірний лінійний простір. Базис. Розмірність простору.
35. Координати вектора в даному базисі.
36. Зв'язок між базами. Матриця переходу від бази до бази.
37. Зв'язок між координатами вектора в різних базисах.
38. Підпростори лінійного простору.
39. Лінійна оболонка, натягнута на систему векторів.
40. Сума та перетин підпросторів лінійного простору. Теорема про зв'язок між розмірностями суми та перетину підпросторів лінійного простору.
41. Лінійний оператор, означення та властивості. Матриця лінійного оператора в деякому базисі.
42. Координати образу вектора.
43. Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах.
44. Область значень та ядро лінійного оператора. Ранг та дефект лінійного оператора, теорема про зв'язок між ними.
45. Невироджений лінійний оператор. Його властивості.

46. Характеристична матриця, характеристичний многочлен, характеристичне рівняння та характеристичні корені матриці лінійного оператора.
47. Власний вектор та власне значення лінійного оператора. Теорема про зв'язок характеристичних коренів лінійного оператора з його власними значеннями.
48. Лінійний оператор з простим спектром.
49. Скалярний добуток векторів лінійного простору. Властивості. Евклідів векторний простір.
50. Ортогональність елементів (векторів) евклідового простору. Довжина вектора. Кут між векторами.
51. Ортогональна система елементів (векторів) евклідового простору. Процес ортогоналізації. Нормування векторів. Ортонормовані системи векторів.
52. Ортогональне доповнення та ортогональна проекція вектора на підпростір в евклідовому просторі.
53. Ізоморфізм евклідових просторів.
54. Ортогональний оператор евклідового простору, його властивості. Ортогональна матриця, її властивості.
55. Симетричний оператори евклідового простору, його властивості. Симетрична матриця, її властивості.
56. Існування невиродженого ортогонального перетворення невідомих, яке приводить дійсну квадратичну форму до канонічного вигляду. Зведення двох квадратичних форм до канонічного вигляду за допомогою одного невиродженого перетворення невідомих.
57. Зведення загального рівняння поверхні 2-го порядку в трьохвимірному евклідовому просторі до канонічного вигляду (на практиці).

Перелік типових задач

Модуль 4. *Многочлени від однієї змінної, їх корені*

1. За допомогою алгоритму Евкліда обчислити найбільший спільний дільник многочленів $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+2x+2$ та $g(x)=x^3+x+2$.
2. Знайти найбільший спільний дільник многочленів
$$f(x)=(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x+4) \text{ та } g(x)=(x-1)^2(x+2)(x+5).$$
3. Для многочленів $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$ та $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$ побудувати многочлени $u(x)$ та $v(x)$, які задовольняють рівність
$$f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=d(x), \text{ де } d(x)=НСД(f(x),g(x)),$$
використовуючи: а) алгоритм Евкліда; б) метод невизначених коефіцієнтів.
4. Розкласти на суму простіших дробів І і ІІ типу дріб:
$$\text{а) } \frac{x^3-3x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}; \qquad \text{б) } \frac{2x^3-3x^2+1}{x^2(x^2-1)}; \qquad \text{в) } \frac{2x^3-1}{(x+2)^2(x+1)(x-1)}.$$
5. Розділити многочлен $f(x)=2x^5-5x^3-8x$ з остачею на $(x-x_0)$ та обчислити значення $f(x_0)$, якщо: а) $x_0=-3$; б) $x_0=1+i$.
6. Знайти значення многочлена $f(x)=3x^4-2ix^3+x^2+(1-i)x-2i$ при:
а) $x=-1$; б) $x=1-2i$.
7. Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $(x+1)$ многочлен $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$.

8. Виписати значення многочлена $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10$ та всіх його похідних при $x_0=2$.
9. Знайти значення для коефіцієнта λ так, щоб многочлен $f(x)=x^5-\lambda x^2-\lambda x+1$ мав число $x_0=-1$ коренем не нижче другої кратності.
10. *Довести, що многочлен $f(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ має число $x_0=1$ трикратним коренем.
11. Чому дорівнює кратність кореня $x_0=-1$ для многочлена
$$f(x)=3x^5+2x^4+x^3-10x-8?$$
12. Побудувати многочлен четвертого степеня зі старшим коефіцієнтом 1, який має:
   а) корені $1,\ 2,\ -3,\ -4$;
   б) трикратний корінь –1 та простий корінь i;
   в) дійсні коефіцієнти та корені $2-i$ та $1+2i$.
13. Знайти многочлен найменшого степеня за таблицею його значень:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	0	3	2

14. Знайти раціональні корені многочлена:
   а) $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+8x+3$; б) $f(x)=2x^4-x^3-14x^2+19x-6$;
   в) $f(x)=3x^4+17x^3+27x^2+7x-6$.
15. Використовуючи теорему Штурма, відокремити дійсні корені многочлена:
   а) $f(x)=x^3+3x^2-6x+1$; б) $f(x)=x^3-3x-1$.

<u>Модуль 5.</u> *Многочлени від багатьох змінних. Квадратичні форми*

16. Виразити многочлен $F(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^2-x_1^3-x_2^3-x_3^3$ через елементарні симетричні многочлени.
17. Обчислити значення многочлена
$$F(x_1,x_2,x_3)=x_1^3(x_2+x_3)+x_2^3(x_1+x_3)+x_3^3(x_1+x_2)$$
від коренів рівняння $x^3-x^2-4x+1=0$ (не обчислюючи цих коренів).
18. Обчислити значення симетричного многочлена $F(x,y)=x^3+y^3+12xy$ від коренів рівняння $2x^2+5x-4=0$ (не обчислюючи цих коренів).
19. Обчислити $2x_1^4+2x_2^4+2x_3^4-3x_1-3x_2-3x_3$, якщо відомо, що $x_1,\ x_2,\ x_3$ є коренями рівняння $x^3-4x^2+3x-11=0$.
20. Знайти суму квадратів коренів рівняння $x^3+2x-3=0$.
21. Знайти ранг, додатний та від'ємний індекси інерції, сигнатуру квадратичної форми: а) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-2x_1x_3-x_2^2-3x_3^2-x_1x_2+4x_2x_3$;
   б) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;
   в) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.
22. Методом Лагранжа звести квадратичну форму $f=x_1x_2+x_2x_3-x_3x_4+x_4x_1$ до канонічного (нормального) вигляду. Виписати лінійне невироджене перетворення, яке

приводить цю форму до канонічного (нормального) вигляду. Чому дорівнює сигнатура форми?

23. Знайти канонічний вигляд квадратичної форми $f = x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4$. Чи є ця форма додатно визначеною?

24. Знайти нормальний вигляд та перетворення, яке приводить до цього вигляду для квадратичної форми: а) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$;

 б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3$; в) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

25. Знайти всі значення параметра λ, при яких квадратична форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

є додатно визначеною.

26. З’ясувати, при якому значенні λ квадратична форма

$$f = x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_2x_3$$

розпадається на добуток комплексних (дійсних*) лінійних форм.

27. Чи є еквівалентними квадратичні форми $f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$ та $f_2 = 4x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ над полем дійсних чисел?

Модуль 6. *Лінійні простори. Лінійні оператори*

28. Довести, що сукупність усіх векторів-рядків довжини 5, у яких друга координата у три рази більша за останню, утворює дійсний лінійний простір. Знайти деякий базис і координати вектора $a = (1, -6, 4, 1, -2)$ у вибраному базисі.

29. Довести, що сукупність всіх симетричних матриць n-го порядку з дійсними елементами утворює дійсний лінійний простір. Знайти його розмірність та виписати приклад бази.

30. Довести, що множина матриць третього (четвертого) порядку, симетричних відносно обох діагоналей, з дійсними елементами, утворює дійсний лінійний простір. Знайти довільний базис і розмірність цього простору.

31. У дійсному лінійному просторі многочленів від x степеня не вище 3 знайти матрицю переходу від базису $e_1 = 1$, $e_2 = x - 4$, $e_3 = (x-4)^2$, $e_4 = (x-4)^3$ до базису $e_1' = 1$, $e_2' = x$, $e_3' = x^2$, $e_4' = x^3$.

32. У дійсному лінійному просторі знайти матрицю переходу від базису e_1, e_2, e_3, e_4 до базису: а) e_4, e_3, e_2, e_1; б) $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$, $e_3 + e_4$, $e_4 + e_1$.

33. Переконатися, що многочлени 1, $x-2$, $(x-2)^2$, $(x-2)^3$, $(x-2)^4$ утворюють базис у лінійному просторі многочленів степеня не вище 4. Знайти координати многочлена $f(x) = -2x^4 + 12x^2 - 3x + 2$ у цьому базисі.

34. Довести, що кожна з систем векторів $e_1 = (3;2)$, $e_2 = (5;3)$ та $e_1' = (1;2)$, $e_2' = (-2;1)$ є базисом лінійного простору V_2. Знайти зв’язок між координатами одного і того ж вектора відносно цих базисів.

35. Знайти розмірність суми і перетину лінійних підпросторів, натягнутих на системи векторів $a_1 = (2; -1;\ 3;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 0;\ 0;\ 1)$, $a_3 = (1; -1;\ 3;\ 0)$ та $b_1 = (2;\ 1;\ 1;\ 3)$, $b_2 = (2; -1;\ 3;\ 1)$, $b_3 = (3;\ -2;\ 6;\ 1)$.

36. Нехай φ — оператор диференціювання у лінійному просторі многочленів степеня не

вище 2 (тобто для довільного многочлена $f(x)$: $\varphi\big(f(x)\big)=f'(x)$). Знайти матрицю цього оператора у базисі $e_1(x)=1+x$, $e_2(x)=x+2x^2$, $e_3(x)=3x^2-1$.

37. У дійсному лінійному просторі многочленів *f(x)* степеня не вище 4 задано оператор $\varphi: f(x)\to 3f'(x)+2f''(x)$. Довести, що цей оператор лінійний і знайти його матрицю в базі $e_1=1$, $e_2=x$, $e_3=x^2$, $e_4=x^3$, $e_5=x^4$.

38. Задано дійсний лінійний простір $V=\left\{a=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,\middle|\,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\right\}$ і оператор $\varphi: a\to\varphi(a)=\big(\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\big)$. Довести, що φ — лінійний оператор і знайти його матрицю в базисі $e_1=(1;\ 1;\ 1)$, $e_2=(1;\ 2;\ 1)$, $e_3=(1;\ 1;\ 2)$.

39. Знайти матрицю оператора $\varphi: X\mapsto X\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ($a,b,c,d\in\mathbb{R}$) у просторі матриць другого порядку з дійсними елементами у базисі $E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

$E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

40. Лінійний оператор φ у базі $a_1=(1,2,1)$, $a_2=(1,1,-2)$, $a_3=(2,1,1)$ задано матрицею $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $b_1=(-2,-1,-3)$, $b_2=(-1,1,2)$, $b_3=(3,-1,-1)$.

41. Знайти ядро та образ лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -3 & 10\end{pmatrix}$. Чому дорівнює ранг та дефект цього оператора?

42. Знайти образ і ядро лінійного оператора:

а) $\varphi\big(f(x)\big)=f(x+1)-f(x)$, де $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$;

б) $(x_1;x_2;x_3)\mapsto(x_1;x_2;x_1+x_2+x_3)$.

43. Знайти власні значення та власні вектори лінійних операторів, що задаються в деякому базисі матрицею:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}7 & -8 & 4\\ -8 & 7 & -4\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

44. У дійсному лінійному просторі многочленів від x степеня не вище 3 введено скаляр-

не множення за правилом $\left(f_1(x), f_2(x)\right) = \int_{-1}^{1} f_1(x)\cdot f_2(x)dx$. Ортогоналізувати систему многочленів $h_1(x)=1,\ h_2(x)=x,\ h_3(x)=x^2,\ h_4(x)=x^3$.

45. Застосувавши процес ортогоналізації, побудувати ортогональний базис підпростору L, який є лінійною оболонкою векторів

$$a_1=(2,1,3,-1),\quad a_2=(7,4,3,-3),\quad a_3=(1,1,-6,0),\quad a_4=(5,7,7,8).$$

46. Знайти базис простору E_3, який складається з ортонормованих власних векторів оператора φ, заданого в деякому базисі матрицею $A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$. Який вигляд матиме матриця оператора φ у знайденому базисі?

47. Знайти ортонормований базис лінійної оболонки, натягнутої на вектори $a_1=(-1,2,1,1,1)$, $a_2=(2,-2,1,-2,-1)$, $a_3=(0,-1,-1,-1,3)$, $a_4=(1,0,0,0,-1)$.

48. Доповнити вектори $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(1,-2,1)$ до ортогонального базису евклідового простору. Побудувати відповідний ортонормований базис.

49. Знайти ортогональне перетворення, яке квадратичну форму $f(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+7x_2^2+x_3^2-16x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$ зводить до головних осей.

50. Знайти канонічний вигляд, до якого зводиться квадратична форма

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$$

ортогональним перетворенням змінних, не знаходячи цього перетворення.

51. Звести дві квадратичні форми

$$f_1(x_1,x_2)=-4x_1x_2 \text{ та } f_2(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2$$

до канонічного вигляду за допомогою одного лінійного невиродженого перетворення змінних.

ПЕРЕЗАРАХУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НЕФОРМАЛЬНОЇ ОСВІТИ

Зарахування результатів неформальної освіти проводиться у відповідності до "Порядку визнання у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича результатів навчання, здобутих шляхом неформальної та/або інформальної освіти" (затверджено Вченою радою ЧНУ протокол № 16 від 25 листопада 2024 р.)

https://www.chnu.edu.ua/media/4g5fzssb/poriadok-vyznannia-rezultativ-navchannia-zdobutykh-shliakhom-neformalnoi-ta-abo-informalnoi-osvity.pdf.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Городецький В.В., Колісник Р.С., Сікора В.С. Курс лінійної алгебри в теоремах і задачах. Частина перша: Навчальний посібник.— Чернівці, 2018.— 336 с.
2. Городецький В.В., Колісник Р.С., Сікора В.С. Лінійна алгебра в теоремах і задачах. Частина друга: Навчальний посібник.— Чернівці, 2023.— 252 с.
3. Лінійна алгебра. Контрольні питання та завдання для самостійної роботи. 1 семестр / Укл.: Р.С.Колісник, В.С.Сікора.– Чернівці: Книги –XXI, 2012.– 58 с.
4. Контрольні питання та завдання з лінійної алгебри. 2 семестр / Укл.: Р.С. Колісник, В.С. Сікора.– Чернівці: Книги – XXI, 2012.– 47 с.

Додаткова:

1. Завало С.Т. Курс алгебри.— К.: Вища школа, 1985.— 504 с.
2. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри.— К.: Рад. шк., 1964.– 511с.
3. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.
4. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри.— К.: Вища школа, 1971.— 316 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч. пособник. – К. : А.С.К., 2001. – 648с.
6. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилав В.В., Рокицький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Частина 1. – К. : Вища школа, 1983. – 232 с.
7. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилав В.В., Рокицький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Частина 2. – К. : Вища школа, 1986. – 264 с.

Інформаційні ресурси

8. Курс: Лінійна алгебра (1 семестр) | Електронне навчання
9. Курс: Лінійна алгебра (2 семестр) | Електронне навчання
10. Лінійна алгебра КНУ - YouTube