

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.16>

Сидоров М.В., Янбеков Р.Я.

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЇ ГРІНА У АНАЛІЗІ ДВО- ТА ТРИВИМІРНИХ СТАЦІОНАРНИХ ТЕРМОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У роботі розглядається перша крайова задача (задача Діріхле) для напівлінійного еліптичного рівняння, що є математичною моделлю термохімічного процесу з кінетикою Арреніуса. При цьому нелінійність у рівнянні є експоненціальною з насиченням. За допомогою функції Гріна розглядувана крайова задача замінена еквівалентним інтегральним рівнянням Гаммерштейна. Це рівняння покладено в основу означення узагальненого розв'язку задачі та проаналізовано методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах, а саме інтегральне рівняння подане як рівняння з нелінійним оператором, що діє у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Досліджено властивості нелінійного оператора такі, як додатність, монотонність, ліпшиць-неперервність, існування інваріантного конусного відрізка тощо. Для чисельного аналізу інтегрального рівняння (а отже, і розглядуваної крайової задачі) запропоновано ітераційну схему методу двобічних наближень, причому початковими наближеннями обираються кінці інваріантного конусного відрізка. Отримано умови збіжності ітерацій і умови існування додатного розв'язку крайової задачі. Також для розв'язку виписано двосторонню апіорну оцінку. Обчислювальні експерименти були проведені для різних значень параметрів у одиничному крузі та одиничній кулі, зроблено висновки про ефективність запропонованого чисельного методу та фізичні властивості розв'язку задачі в залежності від параметрів. Перевагою двосторонніх ітерацій є наявність гарантованої апостеріорної оцінки точності наближеного розв'язку та зручний критерій закінчення процесу обчислень.

Ключові слова і фрази: математичне моделювання, термохімічні процеси, закон Арреніуса, метод двобічних наближень, функція Гріна, перша крайова задача, напівлінійне еліптичне рівняння.

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна (Сидоров М.В., Янбеков Р.Я.)

e-mail: maxim.sidorov@nure.ua (Сидоров М.В.), ravil.yanbekov@nure.ua (Янбеков Р.Я.)

ВСТУП

Термохімічні процеси відіграють ключову роль у сучасній енергетиці, хімічній інженерії та матеріалознавстві (горіння, газифікація, термохімічне зберігання енергії тощо). Особливий інтерес до них зумовлений потребою ефективного зберігання енергії, розвитком екологічно

УДК 519.632.4:517.988.63

2010 *Mathematics Subject Classification*: 35J91, 47H07, 47H10.

чистих технологій та декарбонізації, складною нелінійною природою процесів. Крім того, більшість сучасних систем є мультифізичними, де одночасно взаємодіють теплоперенос, масоперенос, хімічна кінетика та механічні ефекти. Саме тому необхідним інструментом для прогнозування режимів, аналізу стійкості, оптимізації технологій стає математичне моделювання.

Термохімічні процеси зазвичай описуються системами рівнянь типу «реакція-дифузія», від яких у стаціонарному випадку за певних умов можна перейти до одного напівлінійного еліптичного рівняння [9]. Якщо при цьому для опису кінетики реакції використовується закон Арреніуса, то матимемо задачу з експоненціальною нелінійністю.

Через складність математичних моделей термохімії їх аналітичні розв'язки відомі лише у деяких поодиноких випадках, а тому на перший план тут виходить використання чисельних методів. До найбільш розповсюджених методів відносяться метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, різні гібридні методи, а також методи машинного навчання [4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15].

Проте часто при їх застосуванні залишається невирішеною проблема фактичного оцінювання похибки. Зручним у цьому плані є метод двобічних наближень, який дозволяє будувати дві послідовності функцій, що знизу та зверху оцінюють шуканий розв'язок, а при обґрунтуванні цього методу для конкретної задачі маємо також можливість дослідити питання існування та єдиності розв'язку. Для першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна було розроблено у [2, 3], використовуючи при цьому методи нелінійного функціонального аналізу у напівупорядкованих банахових просторах [5, 8, 1].

Отже, актуальною науковою задачею є розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь, що є математичними моделями термохімічних процесів.

Метою роботи є подальший розвиток ітераційних методів розв'язування дво- та тривимірних крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь, що є математичними моделями деяких термохімічних процесів. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- для задачі Діріхле відносно безрозмірної температури побудувати ітераційний метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна та теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах;
- провести обчислювальні експерименти для тестових задач.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай в області Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ відбувається екзотермічна хімічна реакція. Відповідно до кінетики Арреніуса, вважаючи, що межа $\partial\Omega$ є ізотермічною і підтримується при температурі навколишнього середовища T_0 , отримаємо таку крайову задачу:

$$-\kappa \Delta T = A Q e^{-\frac{E}{RT}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ T|_{\partial\Omega} = T_0,$$

де $T(\mathbf{x})$ — температура, К; $\mathbf{x}$ — вектор просторових змінних, м; κ — коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); A — передекспоненціальний множник закону Арреніуса (частота ефективних зіткнень молекул), 1/с; Q — тепловий ефект хімічної реакції, віднесений до одиниці об'єму, Дж/м³; E — енергія активації, Дж/моль; R — універсальна газова стала, Дж/(моль·К); Δ — оператор Лапласа, м⁻².

Формулою $u = \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0)$ введемо безрозмірну надлишкову температуру u , що показує відхилення від температури навколишнього середовища. Тоді $T = \frac{RT_0^2}{E} u + T_0$. Нехай L — характерний розмір області Ω . Зробивши заміну $\mathbf{x} = L\mathbf{x}'$ для функції $u = u(\mathbf{x}')$, отримаємо задачу

$$-\Delta' u = \frac{AEQL^2}{RT_0^2 \kappa} e^{-\frac{E}{RT_0}} e^{\frac{u}{1+\frac{RT_0}{E}u}}, \quad \mathbf{x}' \in \Omega',$$

$$u|_{\partial\Omega'} = 0,$$

де Δ' — безрозмірний оператор Лапласа, Ω' — область в безрозмірних просторових змінних $\mathbf{x}'$, а $\partial\Omega'$ — її межа.

Позначимо $\lambda = \frac{AEQL^2}{RT_0^2 \kappa} e^{-\frac{E}{RT_0}}$, $\gamma = \frac{RT_0}{E}$ і повернемося до позначень без штрихів. Тоді матимемо наступну першу крайову задачу (задачу Діріхле) для напівлінійного еліптичного рівняння:

$$-\Delta u = \lambda e^{\frac{u}{1+\gamma u}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Тут λ — безрозмірний параметр Франк-Каменецького, що вимірює відношення генерації тепла до його відведення, а γ — безрозмірний параметр температурної чутливості Арреніуса, що вимірює відношення теплової енергії молекул до енергії активації реакції.

2 МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Для дослідження питання розв'язності крайової задачі (1)–(3) та фактичного знаходження її розв'язку застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [2, 3].

Нехай $C(\bar{\Omega})$ — банахів простір неперервних у $\bar{\Omega}$ функцій. Норма у цьому просторі задається рівністю $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$. У просторі $C(\bar{\Omega})$ розглянемо конус K_+ невід'ємних функцій:

$$K_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}.$$

Напівупорядкуємо простір $C(\bar{\Omega})$ конусом K_+ , тобто вважатимемо, що $v \leq w$, якщо $w - v \in K_+$. Введена у такий спосіб напівупорядкованість означає, що

$$v(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Нехай $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ — функція Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа. Тоді крайова задача (1)–(3) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{\frac{u(\mathbf{s})}{1+\gamma u(\mathbf{s})}} d\mathbf{s}. \quad (4)$$

Відомо [8], що функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ неперервна при $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$, і мають місце оцінки

$$0 \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq k_0 \left| \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right| \quad \text{у } \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

$$0 \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq \frac{k_0}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \quad \text{у } \mathbb{R}^3, \quad (6)$$

де $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}} = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|$ — відстань між точками $\mathbf{x}$ і $\mathbf{s}$.

Якщо існує $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, що є розв'язком крайової задачі (1)–(3), то ця функція задовольнятиме також і рівняння (4). У іншому випадку рівняння (4) можна використати для введення поняття узагальненого розв'язку розглядуваної крайової задачі.

Означення 1. Узагальненим розв'язком u^* крайової задачі (1)–(3) назовемо розв'язок рівняння (4), що належить конусу K_+ .

У сенсі цього означення і розумітимемо еквівалентність крайової задачі (1)–(3) та інтегрального рівняння (4).

Введемо у розгляд нелінійний оператор T , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{\frac{u(\mathbf{s})}{1+\gamma u}} d\mathbf{s}, \quad (7)$$

і дослідимо його властивості.

Властивості оператора (7) суттєво пов'язані з поведінкою функції $f(u) = e^{\frac{u}{1+\gamma u}}$. Очевидно, що функція $f(u)$ неперервна та додатна при $u \geq 0$. Оскільки $f'(u) = e^{\frac{u}{1+\gamma u}} \frac{1}{(1+\gamma u)^2} > 0$, то функція $f(u)$ монотонно зростає при $u \geq 0$ від $f(0) = \lim_{u \rightarrow +0} f(u) = 1$ до $f(+\infty) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = e^{\frac{1}{\gamma}}$. Отже, $1 \leq f(u) < e^{\frac{1}{\gamma}}$ для всіх $u \in [0; +\infty)$. Функція $f(u)$ є також ліпшищ-неперервною при $u \in [0; +\infty)$:

$$|f(v) - f(w)| \leq L|v - w|, \quad (8)$$

де $L = \sup_{u \in [0; +\infty)} f'(u)$. При цьому, оскільки $f''(u) = e^{\frac{u}{1+\gamma u}} \frac{1-2\gamma-2\gamma^2 u}{(1+\gamma u)^4}$ і $f''(u) = 0$ при $u = \frac{1-2\gamma}{\gamma^2}$, маємо наступні випадки:

$$L = \begin{cases} f'\left(\frac{1-2\gamma}{\gamma^2}\right) = 4\gamma^2 e^{\frac{1}{\gamma}-2}, & 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \\ f'(0) = 1, & \gamma \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Через невід'ємність функції Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ та додатність функції $f(u)$ оператор T залишає інваріантним конус K_+ : з $u \in K_+$ випливає, що $T(u) \in K_+$. Отже, T — додатний оператор.

Позначимо $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$. Зрозуміло, що $u_0(\mathbf{x}) \neq 0$. Тоді оператор T є u_0 -додатним оператором, тобто для будь-якого ненульового $u \in K_+$ знайдуться такі $\alpha = \alpha(u) > 0$ і $\beta = \beta(u) > 0$, що $\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0$. Дійсно, для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$T(u)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{\frac{u(\mathbf{s})}{1+\gamma u}} d\mathbf{s} < \lambda e^{\frac{1}{\gamma}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \lambda e^{\frac{1}{\gamma}} u_0(\mathbf{x}).$$

З іншого боку, відомо [8], що якщо Ω_0 — деяка підобласть області Ω , причому $\mu(\Omega_0) > 0$, то знайдеться таке $\delta = \delta(\Omega_0) > 0$, що матиме місце нерівність

$$\delta \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Тоді для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(u)(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{\frac{u(\mathbf{s})}{1+\gamma u}} d\mathbf{s} \geq \lambda \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{\frac{u(\mathbf{s})}{1+\gamma u}} d\mathbf{s} \\ &\geq \lambda \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq \delta \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \delta \lambda u_0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

і $\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0$, де $\alpha = \delta\lambda > 0$, $\beta = \lambda e^{\frac{1}{\gamma}} > 0$.

Отже, оператор T переводить ненульові елементи конуса K_+ в елементи з $K(u_0)$, де $K(u_0)$ — множина елементів $u \in K_+$, для яких можна вказати такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що $\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0$.

Неперервність та повна неперервність оператора T безпосередньо випливають з оцінок (5) і (6), властивостей функції $f(u)$ та неперервності функції u .

Оскільки функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ є невід'ємною, а функція $f(u)$ є монотонно зростаючою, то оператор T є ізотонним оператором, тобто з нерівності $v \leq w$ випливає нерівність $T(v) \leq T(w)$.

Конусним відрізком $\langle v_0, w_0 \rangle$ у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ назвемо множину $\langle v_0, w_0 \rangle = \{u \in C(\bar{\Omega}) : v_0 \leq u \leq w_0\}$. Цей відрізок буде інваріантним для ізотонного оператора T , якщо $T(v_0) \geq v_0$ і $T(w_0) \leq w_0$, тобто $T(\langle v_0, w_0 \rangle) \subset \langle v_0, w_0 \rangle$.

Для оператора T , що діє за правилом (7), інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$, де $\beta > 0$. Тоді умови, що визначають інваріантний конусний відрізок, набудуть вигляду: для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq 0, \quad \lambda e^{\frac{\beta}{1+\gamma\beta}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta,$$

або

$$\lambda u_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \lambda e^{\frac{\beta}{1+\gamma\beta}} u_0(\mathbf{x}) \leq \beta.$$

Перша з цих нерівностей виконуватиметься при $\lambda > 0$, а другу нерівність можна записати у вигляді

$$\lambda M \leq \beta e^{-\frac{\beta}{1+\gamma\beta}}, \quad (9)$$

де $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$, $M > 0$.

При $\beta > 0$ для функції $g(\beta) = \beta e^{-\frac{\beta}{1+\gamma\beta}}$ маємо, що $\inf_{\beta > 0} g(\beta) = 0$, $\sup_{\beta > 0} g(\beta) = +\infty$, а отже, нерівність (9) завжди матиме розв'язок.

Таким чином, ізотонний оператор T , що діє за правилом (7), для будь-яких $\lambda > 0$ і $\gamma > 0$ має інваріантний конусний відрізок $\langle 0, \beta \rangle$, де β — розв'язок нерівності (9).

Нехай $v, w \in K_+$ і розглянемо $\|T(v) - T(w)\|$. З огляду на оцінку (8) матимемо

$$\begin{aligned} \|T(v) - T(w)\| &= \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |T(v)(\mathbf{x}) - T(w)(\mathbf{x})| \leq \\ &\leq \lambda \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left| e^{\frac{v(\mathbf{s})}{1+\gamma v(\mathbf{s})}} - e^{\frac{w(\mathbf{s})}{1+\gamma w(\mathbf{s})}} \right| d\mathbf{s} \leq \lambda L \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |v(\mathbf{s}) - w(\mathbf{s})| d\mathbf{s} \leq \\ &\leq \lambda L M \|v - w\|, \end{aligned} \quad (10)$$

тобто оператор T є ліпшиц-неперервним.

Отже, має місце наступне твердження.

Лема 1. Оператор T , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом (7):

- а) є додатним і u_0 -додатним оператором;
- б) є неперервним і цілком неперервним оператором;
- в) є ізотонним оператором;
- г) має інваріантний конусний відрізок $\langle 0, \beta \rangle$, де $\beta > 0$ — розв'язок нерівності (9);
- д) є ліпшиц-неперервним оператором.

Для ізотонного оператора T сформуємо дві незалежні ітераційні послідовності $\{v^{(k)}\}$ і $\{w^{(k)}\}$ за правилами $v^{(k+1)} = T(v^{(k)})$, $w^{(k+1)} = T(w^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, починаючи з кінців інваріантного конусного відрізка: $v^{(0)} = v_0$, $w^{(0)} = w_0$. Отже, задамо наступний ітераційний процес:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{\frac{v^{(k)}(\mathbf{s})}{1+\gamma v^{(k)}(\mathbf{s})}} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{\frac{w^{(k)}(\mathbf{s})}{1+\gamma w^{(k)}(\mathbf{s})}} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta. \quad (13)$$

Через ізотонність оператора T отримаємо, що для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$0 = v^{(0)}(\mathbf{x}) \leq v^{(1)}(\mathbf{x}) \leq \dots \leq v^{(k)}(\mathbf{x}) \leq \dots \leq w^{(k)}(\mathbf{x}) \leq \dots \leq w^{(1)}(\mathbf{x}) \leq w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta.$$

Оскільки конус K_+ у $C(\bar{\Omega})$ є нормальним, а оператор T є цілком неперервним, то у $C(\bar{\Omega})$ існують границі $v^* = \lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}$, $w^* = \lim_{k \rightarrow \infty} w^{(k)}$.

З огляду на оцінку (10) маємо наступний ланцюг нерівностей:

$$\begin{aligned} \|w^{(k)} - v^{(k)}\| &= \|T(w^{(k-1)}) - T(v^{(k-1)})\| \leq \lambda LM \|v^{(k-1)} - w^{(k-1)}\| \\ &\leq (\lambda LM)^2 \|v^{(k-2)} - w^{(k-2)}\| \leq \dots \leq (\lambda LM)^k \|v^{(0)} - w^{(0)}\| = (\lambda LM)^k \beta. \end{aligned}$$

Тоді, якщо $\lambda LM < 1$, то $v^* = w^* = u^*$, де u^* — узагальнений розв'язок крайової задачі (1)–(3).

Для найшвидшої збіжності ітераційного процесу (11)–(13) слід взяти найменше можливе значення β , що отримується при побудові інваріантного відрізка $\langle 0, \beta \rangle$.

Отже, нехай β_* — найменший корінь рівняння $\beta e^{-\frac{\beta}{1+\gamma\beta}} = \lambda M$. Уточнимо значення сталої L з урахуванням того, що $0 \leq v^{(k)}, w^{(k)} \leq \beta$ для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$, а тому в умові $\lambda LM < 1$ слід брати $L = \max_{u \in [0; \beta_*]} f'(u)$.

Якщо $\gamma \geq \frac{1}{2}$, то, як і раніше, $L = 1$. Якщо ж $\gamma < \frac{1}{2}$, то значення L оцінюватиметься по різному в залежності від того, більше чи менше за β_* значення $\frac{1-2\gamma}{\gamma^2}$. Якщо $0 < \frac{1-2\gamma}{\gamma^2} < \beta_*$,

то $L = 4\gamma^2 e^{\frac{1}{\gamma}-2}$, а якщо $\frac{1-2\gamma}{\gamma^2} \geq \beta_*$, то $L = f'(\beta_*) = \frac{e^{\frac{\beta_*}{1+\gamma\beta_*}}}{(1+\gamma\beta_*)^2} = \frac{\beta_*}{\lambda M(1+\gamma\beta_*)^2}$.

Підсумовуючи викладене, сформулюємо достатні умови збіжності ітераційного процесу (11)–(13) та умови існування узагальненого розв'язку крайової задачі (1)–(3).

Теорема 1. Якщо $\lambda LM < 1$, то крайова задача (1)–(3) має на $\langle 0, \beta \rangle$, де β — найменший корінь рівняння $\beta e^{-\frac{\beta}{1+\gamma\beta}} = \lambda M$, єдиний узагальнений розв'язок u^* , до якого двобічно збігається ітераційний процес (11)–(13).

Двобічна збіжність ітераційного процесу (11)–(13) дає наступні оцінки для точного розв'язку u^* крайової задачі (1)–(3):

$$0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = \beta.$$

Тоді на кожному кроці ітераційного процесу ми маємо гарантовану оцінку $v^{(k)} \leq u^* \leq w^{(k)}$, а якщо за наближений розв'язок на k -й ітерації обрати $u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{v^{(k)}(\mathbf{x}) + w^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$, то похибка цього наближення оцінюватиметься нерівністю

$$\|u^{(k)} - u^*\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})].$$

З останньої оцінки маємо зручний критерій закінчення ітерацій, а саме: можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$ з точністю ε , якщо

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})] \leq 2\varepsilon. \quad (14)$$

Інваріантний конусний відрізок $\langle 0, \beta \rangle$ можна також розглядати як апіорну оцінку розв'язку крайової задачі (1)–(3), але через сталість його кінців ця оцінка є певною мірою тривіальною. За апіорну оцінку розв'язку також можна взяти будь-який з конусних відрізків $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$, наприклад, при $k = 1$. Тоді для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\lambda u_0(\mathbf{x}) \leq u^*(\mathbf{x}) \leq \lambda e^{\frac{\beta}{1+\gamma\beta}} u_0(\mathbf{x}).$$

3 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Обчислювальний експеримент у задачі (1)–(3) було проведено в одиничному крузі $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ та в одиничній кулі $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ для різних значень параметрів γ і λ .

Функція Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа в одиничному крузі має вигляд

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi) + 1}{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2},$$

де полярні координати (r, φ) , (ρ, ψ) та декартові $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ пов'язані співвідношеннями $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, $s_1 = \rho \cos \psi$, $s_2 = \rho \sin \psi$. При цьому $M = \frac{1}{4}$.

Ітераційний процес (11)–(13) проводився до виконання нерівності (14) при $\varepsilon = 10^{-4}$. В табл. 1 наведено значення параметрів γ і λ , значення β_* , значення λLM , кількість зроблених ітерацій k , норму наближеного розв'язку $\|u^{(k)}\| = u^{(k)}(0, 0)$ та оцінку точності $\varepsilon_{\text{оц.}} = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})]$.

Для $\gamma = 0,25$ і $\lambda = 1,5$ ітераційний процес з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ зійшовся за вісім ітерацій. На рис. 1 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень до $u^*(\mathbf{x})$ у перерізі $x_2 = 0$, на рис. 2 — поверхню наближеного розв'язку $u^{(8)}(\mathbf{x})$, а на рис. 3 — її лінії рівня.

В табл. 2 наведено інформацію про те, як залежно від номера ітерації k змінювалася оцінка похибки

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})].$$

Як бачимо, один знак після коми у наближеному розв'язку встановлюється приблизно за дві ітерації і швидкість збіжності є геометричною з показником $\approx 0,310$.

В табл. 3 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(8)}(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x}_i = (0, 1i; 0)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$, тобто вздовж радіуса круга при $\varphi = 0$ (зауважимо, що розв'язок є вісесиметричним).

Функція Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа в одиничній кулі має вигляд

$$G(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \mu + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 \rho^2 - 2r\rho \cos \mu + 1}} \right),$$

де $\cos \mu = \cos \theta \cos \vartheta + \sin \theta \sin \vartheta \cos(\varphi - \psi)$, а сферичні координати (r, θ, φ) , (ρ, ϑ, ψ) та декартові $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ пов'язані співвідношеннями $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$, $x_3 = r \cos \theta$, $s_1 = \rho \sin \vartheta \cos \psi$, $s_2 = \rho \sin \vartheta \sin \psi$, $s_3 = \rho \cos \vartheta$. При цьому $M = \frac{1}{6}$.

Ітераційний процес (11)–(13) проводився до виконання нерівності (14) при $\varepsilon = 10^{-4}$. В табл. 4 наведено значення параметрів γ і λ , значення β_* , значення λLM , кількість зроблених

Таблиця 1. Результати обчислювального експерименту для задачі (1)–(3) в одиничному крузі

	$\gamma = 0,25$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
β_*	0,143584	0,342826	0,661557	1,446761	14,092921	22,270814
λLM	0,134	0,291	0,487	0,780	1,155	1,385
k	3	5	8	12	28	106
$\ u^{(k)}\ $	0,138211	0,311086	0,538663	0,864671	1,417506	3,149442
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,85 \cdot 10^{-4}$	$0,71 \cdot 10^{-4}$	$0,44 \cdot 10^{-4}$	$0,82 \cdot 10^{-4}$	$0,83 \cdot 10^{-4}$	$0,91 \cdot 10^{-4}$
	$\gamma = 0,5$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
β_*	0,142825	0,332466	0,592192	0,953743	1,447210	2,078162
λLM	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750
k	3	5	7	8	10	12
$\ u^{(k)}\ $	0,137809	0,306522	0,515780	0,777932	1,107300	1,517513
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,73 \cdot 10^{-4}$	$0,39 \cdot 10^{-4}$	$0,30 \cdot 10^{-4}$	$0,95 \cdot 10^{-4}$	$0,88 \cdot 10^{-4}$	$0,76 \cdot 10^{-4}$
	$\gamma = 0,75$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
β_*	0,142132	0,324565	0,554876	0,835766	1,163298	1,528871
λLM	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750
k	3	5	6	7	8	9
$\ u^{(k)}\ $	0,137433	0,302700	0,499578	0,730570	0,996116	1,294467
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,63 \cdot 10^{-4}$	$0,22 \cdot 10^{-4}$	$0,42 \cdot 10^{-4}$	$0,52 \cdot 10^{-4}$	$0,49 \cdot 10^{-4}$	$0,35 \cdot 10^{-4}$
	$\gamma = 1$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
β_*	0,141496	0,318266	0,530311	0,773321	1,040804	1,326401
λLM	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750
k	3	4	5	6	7	7
$\ u^{(k)}\ $	0,137081	0,299406	0,487265	0,699248	0,932696	1,184350
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,55 \cdot 10^{-4}$	$0,99 \cdot 10^{-4}$	$0,93 \cdot 10^{-4}$	$0,63 \cdot 10^{-4}$	$0,33 \cdot 10^{-4}$	$0,58 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 2. Значення оцінки похибки $\varepsilon^{(k)}$ залежно від номера ітерації k для ітераційної схеми (11)–(13) в одиничному крузі при $\gamma = 0,25$, $\lambda = 1,5$

k	0	1	2	3	4
$\varepsilon^{(k)}$	$0,33 \cdot 10^0$	$0,14 \cdot 10^0$	$0,48 \cdot 10^{-1}$	$0,15 \cdot 10^{-1}$	$0,47 \cdot 10^{-2}$
k	5	6	7	8	
$\varepsilon^{(k)}$	$0,15 \cdot 10^{-2}$	$0,45 \cdot 10^{-3}$	$0,14 \cdot 10^{-3}$	$0,44 \cdot 10^{-4}$	

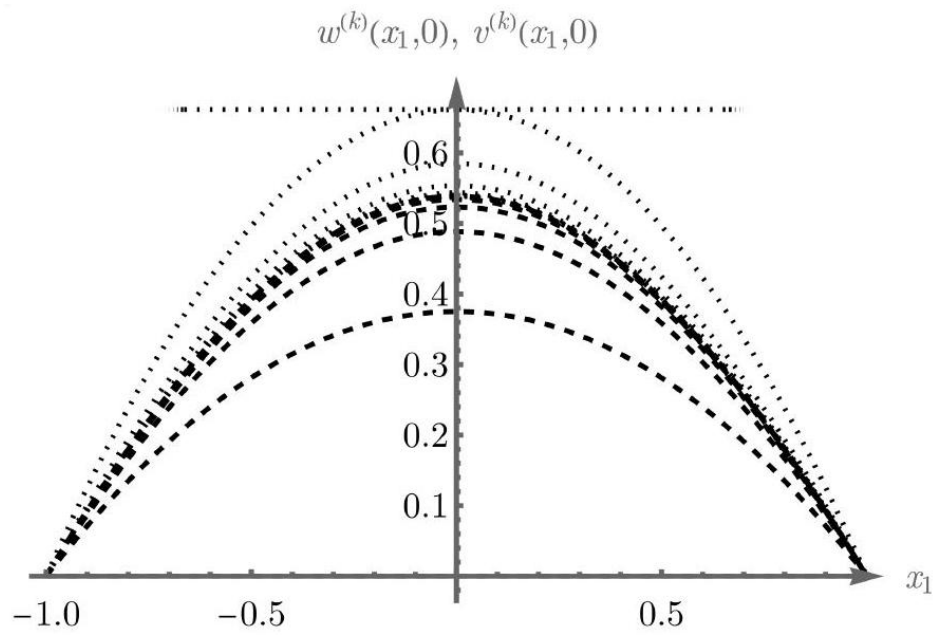


Рис. 1. Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (точкова лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихова лінія) наближень у перерізі $x_2 = 0$ для $k = 0, 1, 2, \dots, 8$

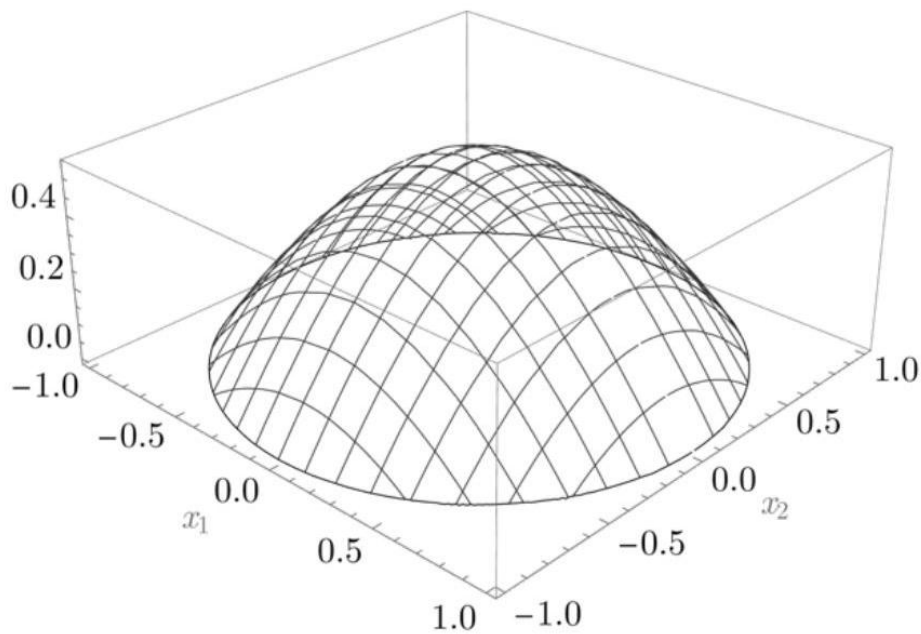
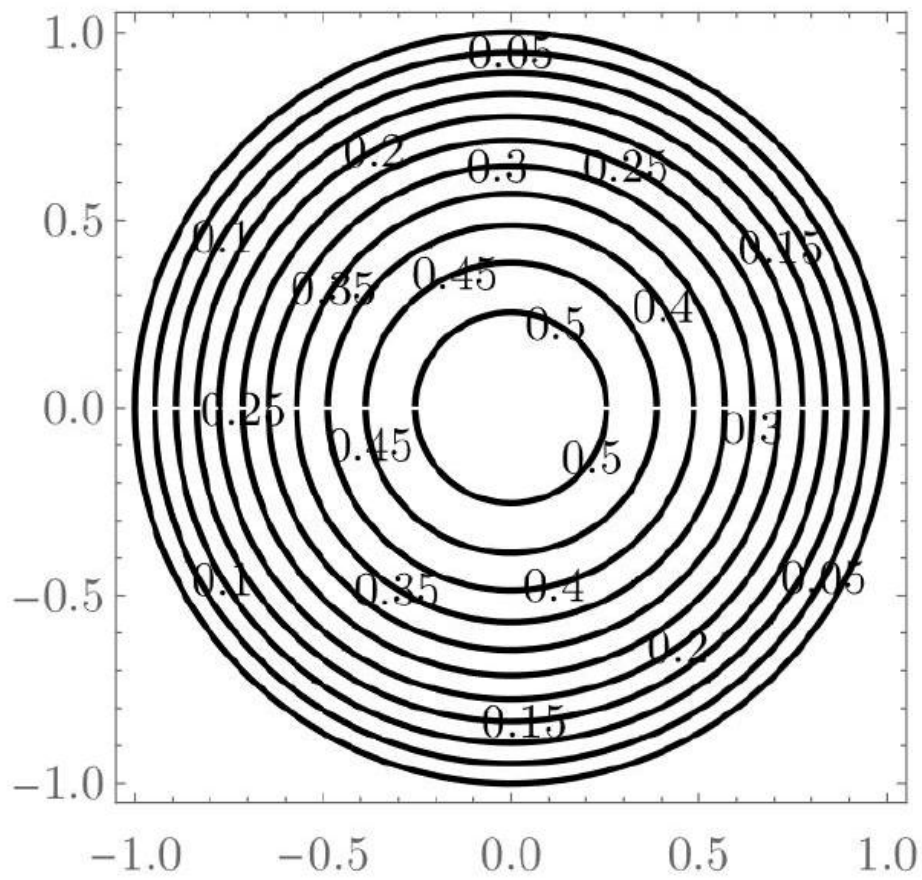


Рис. 2. Поверхня наближеного розв'язку $u^{(8)}(\mathbf{x})$

Рис. 3. Лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(8)}(\mathbf{x})$ Таблиця 3. Значення наближеного розв'язку $u^{(8)}(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x}_i = (0,1i; 0)$, $i = 0, 1, \dots, 10$

$\mathbf{x}_i$	(0; 0)	(0,1; 0)	(0,2; 0)	(0,3; 0)	(0,4; 0)	(0,5; 0)
$u^{(8)}(\mathbf{x}_i)$	0,538663	0,532641	0,514662	0,484974	0,443987	0,392257
$\mathbf{x}_i$	(0,6; 0)	(0,7; 0)	(0,8; 0)	(0,9; 0)	(1; 0)	
$u^{(8)}(\mathbf{x}_i)$	0,330473	0,259434	0,180031	0,093220	0	

Таблиця 4. Результати обчислювального експерименту для задачі (1)–(3) в одиничній кулі

	$\gamma = 0,25$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
β_*	0,091096	0,202004	0,342826	0,533867	0,826605	1,446761
λLM	0,087	0,183	0,291	0,416	0,568	0,780
k	3	4	5	6	8	11
$\ u^{(k)}\ $	0,088554	0,189261	0,305436	0,441895	0,605959	0,809564
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,13 \cdot 10^{-4}$	$0,27 \cdot 10^{-4}$	$0,45 \cdot 10^{-4}$	$0,84 \cdot 10^{-4}$	$0,61 \cdot 10^{-4}$	$0,41 \cdot 10^{-4}$
	$\gamma = 0,5$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
β_*	0,090904	0,199879	0,332466	0,496002	0,699687	0,953743
λLM	0,083	0,167	0,250	0,333	0,417	0,500
k	3	4	5	6	7	8
$\ u^{(k)}\ $	0,088460	0,188351	0,301670	0,430759	0,578322	0,747391
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,12 \cdot 10^{-4}$	$0,21 \cdot 10^{-4}$	$0,26 \cdot 10^{-4}$	$0,30 \cdot 10^{-4}$	$0,37 \cdot 10^{-4}$	$0,46 \cdot 10^{-4}$
	$\gamma = 0,75$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
β_*	0,090721	0,198030	0,324565	0,472484	0,642947	0,835766
λLM	0,083	0,167	0,250	0,333	0,417	0,500
k	3	4	5	5	6	7
$\ u^{(k)}\ $	0,088370	0,187522	0,298461	0,422064	0,559034	0,709784
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,11 \cdot 10^{-4}$	$0,16 \cdot 10^{-4}$	$0,15 \cdot 10^{-4}$	$0,75 \cdot 10^{-4}$	$0,49 \cdot 10^{-4}$	$0,32 \cdot 10^{-4}$
	$\gamma = 1$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
β_*	0,090548	0,196400	0,318266	0,455905	0,608176	0,773321
λLM	0,083	0,167	0,250	0,333	0,417	0,500
k	3	4	4	5	6	6
$\ u^{(k)}\ $	0,088283	0,186762	0,295672	0,415029	0,544541	0,683707
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,97 \cdot 10^{-5}$	$0,12 \cdot 10^{-4}$	$0,77 \cdot 10^{-4}$	$0,40 \cdot 10^{-4}$	$0,19 \cdot 10^{-4}$	$0,45 \cdot 10^{-4}$

ітерацій k , норму наближеного розв'язку $\|u^{(k)}\| = u^{(k)}(0,0,0)$ та оцінку точності $\varepsilon_{\text{оц.}} = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})]$.

Для $\gamma = 0,25$ і $\lambda = 1,5$ ітераційний процес з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ зійшовся за п'ять ітерацій. На рис. 4 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень до $u^*(\mathbf{x})$ у перерізі $x_2 = 0, x_3 = 0$ ($x_1 \geq 0$), а на рис. 5 — поверхні рівня наближеного розв'язку $u^{(5)}(\mathbf{x})$ (з кроком 0,1 від 0 до 0,3).

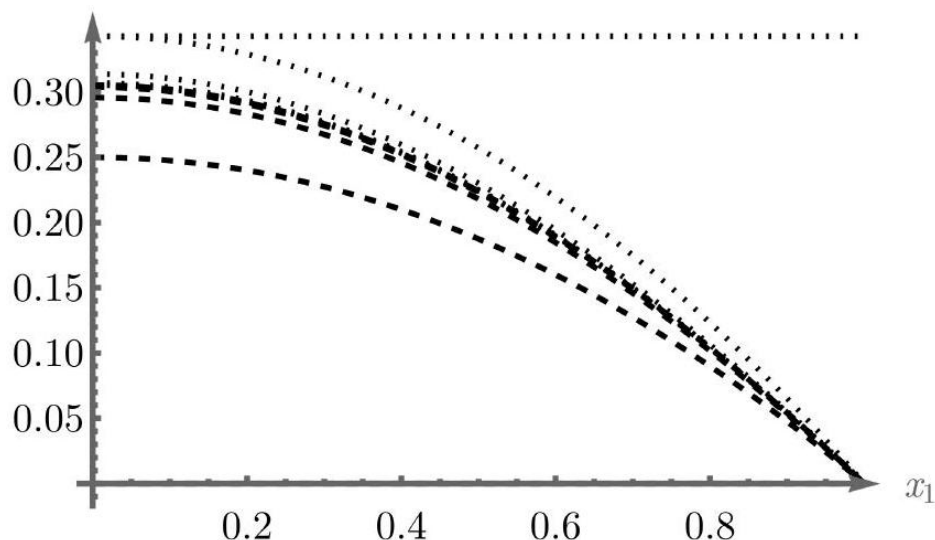


Рис. 4. Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (точкова лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихова лінія) наближень у перерізі $x_2 = 0, x_3 = 0$ ($x_1 \geq 0$) для $k = 0, 1, 2, \dots, 5$

В табл. 5 наведено інформацію про те, як залежно від номера ітерації k змінювалася оцінка похибки $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})]$.

Таблиця 5. Значення оцінки похибки $\varepsilon^{(k)}$ залежно від номера ітерації k для ітераційної схеми (11)–(13) в одиничній кулі при $\gamma = 0,25, \lambda = 1,5$

k	0	1	2	3	4	5
$\varepsilon^{(k)}$	$0,17 \cdot 10^0$	$0,46 \cdot 10^{-1}$	$0,90 \cdot 10^{-2}$	$0,16 \cdot 10^{-2}$	$0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,45 \cdot 10^{-4}$

Як бачимо, один знак після коми у наближеному розв'язку встановлюється приблизно за одну ітерацію і швидкість збіжності є геометричною з показником $\approx 0,175$.

В табл. 6 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(5)}(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x}_i = (0,1i; 0; 0)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$, тобто вздовж радіуса кулі при $\varphi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ (зауважимо, що розв'язок є радіально симетричним).

Аналіз результатів, наведених у табл. 1 і 4, показує, що як у дво-, так і у тривимірному випадку норма розв'язку задачі (1)–(3) при фіксованому γ збільшується зі зростанням λ і, навпаки, зменшується зі зростанням γ при фіксованому λ .

Це повністю узгоджується з термохімічною природою модельованої задачею (1)–(3) процесу: параметр λ відповідає інтенсивності тепловиділення реакції, а тому його зростання призводить до підвищення температури (норми розв'язку), тоді як γ описує ефект насичення або гальмування реакції, отже, його збільшення обмежує тепловиділення та знижує температуру в системі.

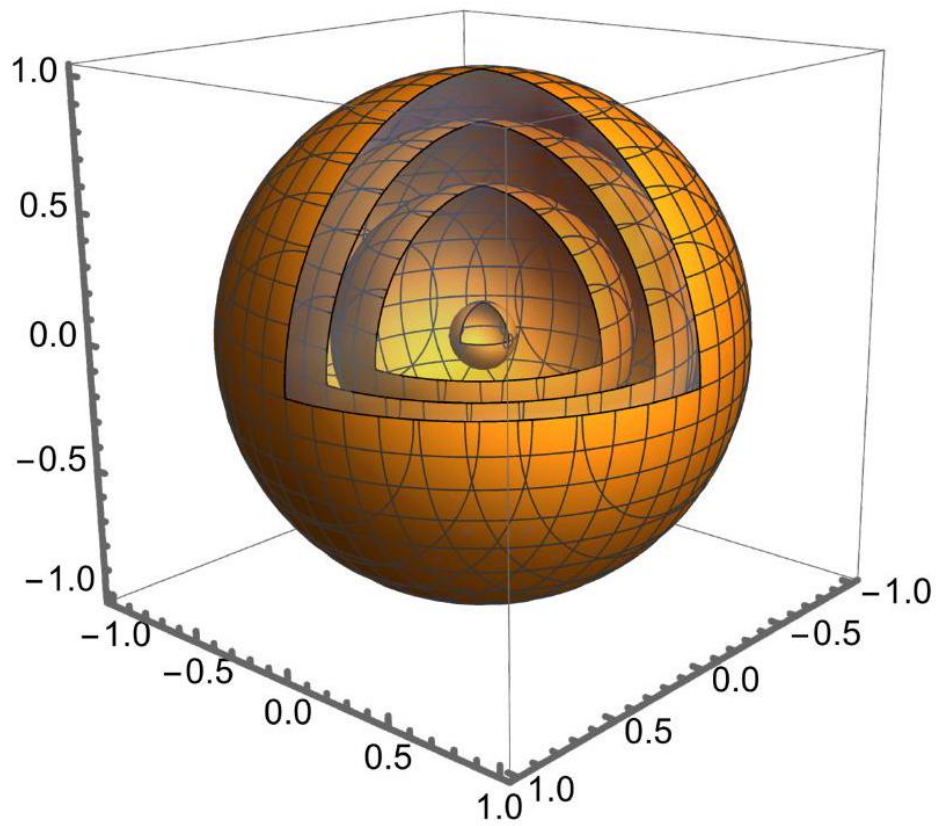


Рис. 5. Поверхні рівня наближеного розв'язку $u^{(5)}(\mathbf{x})$

Таблиця 6. Значення наближеного розв'язку $u^{(5)}(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x}_i = (0,1i; 0; 0)$, $i = 0, 1, \dots, 10$

$\mathbf{x}_i$	(0; 0; 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)
$u^{(5)}(\mathbf{x}_i)$	0,305436	0,302119	0,292201	0,275783	0,253034	0,224181
$\mathbf{x}_i$	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)	
$u^{(5)}(\mathbf{x}_i)$	0,189511	0,149359	0,104107	0,054172	0	

При $\gamma = 0$ задача (1)–(3) перетворюється на класичну задачу Брату, що відповідає експоненціальному наближенню закону Арреніуса за Франк-Каменецьким [6, 12, 13, 14, 15]. Ця задача досліджується в теорії горіння та теплового вибуху і залежно від λ вона має два розв'язки, один розв'язок чи взагалі не є розв'язною.

При малих γ маємо, що $f(u) \approx e^u$ і, як бачимо з результатів обчислювальних експериментів, відбувається сильніше зростання норми розв'язку, ніж для більших значень γ . При цьому було помічено, що невиконання умови $\lambda LM < 1$ з теореми 1 не призводило до розбіжності ітераційного процесу (11)–(13), хоча і сильно уповільнювало його збіжність. Це може бути пояснено достатністю умови $\lambda LM < 1$ і тим, що розв'язок задачі (1)–(3) все ж існує, а сама ця умова виконується, починаючи з якогось з конусних відрізків $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$.

Висновки

У даній роботі отримали подальший розвиток методи двобічних наближень на основі використання функції Гріна в частині їх застосування до чисельного аналізу дво- та тривимірних крайових задач, що є математичними моделями термохімічних процесів: отримано умови розв'язності відповідної крайової задачі з експоненціальною нелінійністю з насиченням та умови отримання її розв'язку з двобічною оцінкою точності. Перевагою запропонованої обчислювальної схеми є наявність гарантованої оцінки похибки на кожному кроці ітераційного процесу. Результати роботи можуть бути використані як у математичному моделюванні конкретних прикладних задач термохімії, так і для оцінювання точності інших наближених методів розв'язання крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих у роботі результатів.

Наступні дослідження в цьому напрямку доцільно зосередити на формуванні та обґрунтуванні обчислювальних схем методу двобічних наближень стосовно багатовимірних задач моделювання термохімічних процесів, використовуючи метод квазіфункцій Гріна-Рвачова [11].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Opoytsev V.Y., Khurodze T.A. *Nonlinear operators in spaces with a cone*. Tbilisi : Publishing House of Tbilisi University, 1984. 246 p.
- [2] Sidorov M.V. Two-sided iterative methods for numerical analysis of the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation. *Radio electronics and computer science*. 2018. № 3 (82). P. 50–56.
- [3] Sidorov M.V. Application of Green's function methods and Green-Rvachev quasifunctions to construct two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems. *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 2017. № 2. P. 250–259.
- [4] Alnashri Y., Alzubaidi H. A unified analysis for reaction-diffusion models. *Arabian Journal of Mathematics*. 2023. Vol. 12. P. 445–465. DOI: 10.1007/s40065-023-00423-2.
- [5] Amann H. Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces. *SIAM Review*. 1976. Vol. 18, № 4. P. 620–709. DOI: 10.1137/1018114.
- [6] El-Asri E.-H., Tri A., Braikat B., Zahrouni H. High-order meshless approach for solving the 3D nonlinear Bratu problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2026. Vol. 184. Art. 106651. DOI: 10.1016/j.enganabound.2026.106651.
- [7] Hamza M. M., Ojmeri G., Ahmad S. K. Insights into an analytical simulation of a natural convection flow controlled by Arrhenius kinetics. *Heliyon*. 2023. Vol. 9, No. 7. Art. e17628. DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e17628.
- [8] Krasnoselskii M. A. *Positive solutions of operator equations*. Groningen : P. Noordhoff, 1964. 379 p.
- [9] Pao C. V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. New York : Plenum Press, 1992. 794 p.

- [10] Saleh M., Kovács E., Barna I. F. Analytical and numerical results for diffusion equations. *Algorithms*. 2023. Vol. 16, No. 4. Art. 184. DOI: 10.3390/a16040184.
- [11] Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10, № 2. P. 360–375. DOI: 10.15330/cmp.10.2.360-375.
- [12] Temimi H., Ben-Romdhane M., Baccouch M. An efficient accurate scheme for solving the three-dimensional Bratu-type problem. *Applied Mathematics and Computation*. 2024. Vol. 461. Art. 128316. DOI: 10.1016/j.amc.2023.128316.
- [13] Temimi H., Ben-Romdhane M., Baccouch M., Musa M. O. A two-branched numerical solution of the two-dimensional Bratu's problem. *Applied Numerical Mathematics*. 2020. Vol. 153. P. 202–216. DOI: 10.1016/j.apnum.2020.02.010.
- [14] Tomar S., Pandey R. K. An efficient iterative method for solving Bratu-type equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2019. Vol. 357. P. 71–84. DOI: 10.1016/j.cam.2019.02.025.
- [15] Yadav N., Yadav A., Deep K. Artificial neural network technique for solution of nonlinear elliptic boundary value problems. *Proceedings of Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving*. New Delhi : Springer, 2015. P. 113–121.

Надійшло 12.05.2026

Sidorov M.V., Yanbekov R.Y. *A two-sided approximation method based on green's function for the analysis of 2d and 3d stationary thermochemical processes*, Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 175–189.

This paper considers the first boundary value problem (Dirichlet problem) for a semilinear elliptic equation that serves as a mathematical model of a thermochemical process with Arrhenius kinetics. The nonlinearity in the equation is exponential with saturation. By means of Green's function, the considered boundary value problem is reduced to an equivalent Hammerstein integral equation. This equation is used to define a generalized solution and is analyzed using methods of nonlinear operator theory in semiordered Banach spaces. In particular, the integral equation is represented as an equation with a nonlinear operator acting in the space of continuous functions partially ordered by the cone of nonnegative functions. The properties of the nonlinear operator are studied, including positivity, monotonicity, Lipschitz continuity, and the existence of an invariant cone segment. For the numerical analysis of the integral equation (and hence the original boundary value problem), an iterative scheme based on the method of two-sided approximations is proposed, where the endpoints of the invariant conical segment are chosen as initial approximations. Conditions for the convergence of the iterations and for the existence of a positive solution to the boundary value problem are established. In addition, a two-sided a priori estimate for the solution is obtained. Computational experiments are carried out for various parameter values in the unit disk and the unit ball. Conclusions are drawn regarding the efficiency of the proposed numerical method and the physical properties of the solution depending on the parameters. An advantage of the two-sided iteration method is the availability of a guaranteed a posteriori error estimate for the approximate solution, as well as a convenient stopping criterion for the computational process.