DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.03

Пастула М.О.

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ ІЗ ЗАЛЕЖНІСТЮ ЧАСТОТ ВІД ПОВІЛЬНИХ ЗМІННИХ

У роботі розглядається багаточастотна система із багатоточковими умовами на відрізку [0,L]. У системі рівнянь усереднення здійснено за швидкими змінними. За умови наявності явища резонансу застосовано метод оцінки осциляційних інтегралів і доведено існування та єдиність розв'язку точної задачі. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежна від малого параметра. Побудовано приклад двочастотної системи з крайовими умовами, на якому проілюстровано отриманий результат.

Ключові слова і фрази: метод усереднення, багаточастотна система, осциляційний інтеграл, резонанс.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна (Пастула М.О.)
e-mail: *pastula.mykhailo@chnu.edu.ua (Пастула М.О.)*

Вступ

Багаточастотні системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X_0(\tau, a) + \varepsilon X_1(\tau, a, \varphi), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y_1(\tau, a, \varphi), \tag{2}$$

де вектор–функції X_0, X_1, Y_1 і ω визначені при $\tau \in [0, L]$ і належать певним класам гладких і 2π-періодичних по φ функцій, $a \in D$ - обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$, досліджувалися у монографії А.М. Самойленка і Р.І. Петришина [1] та в багатьох інших працях.

Проблема обґрунтування методу усереднення для двочастотних систем досліджувалася в працях А.М. Самойленка, Р.І. Петришина [1] та інших вчених. Результати для багаточастотних систем із запізненням та додатковими умовами отримано в працях Я.Й. Бігуна, І.Д. Скутара, І.В. Краснокутської [2, 3, 4] та інших. Зокрема, у них обґрунтувано метод усереднення для багаточастотних систем із початковими, багатоточковими та інтегральними умовами.

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39A12.

Складністю дослідження багаточастотних систем є притаманні для них явища резонансу, які полягають у раціональній чи майже раціональній співвимірності частот [1], умова яких

$$(k, \omega) := k_1\omega_1 + ... + k_m\omega_m \ \simeq 0, k \neq 0.$$

У даній статті метод усереднення застосований для дослідження існування розв'язку на відрізку [0, L] багаточастотних систем вигляду (1),(2) із багатоточковими умовами для повільних і швидких змінних. При накладених умовах отримано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра.

1 Формулювання задачі

Задамо для системи рівнянь (1),(2) багатоточкові умови

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i a\big|_{\tau=\tau_i} = d_1, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{q} \beta_i \varphi\big|_{\tau=\tau_i} = d_2, \tag{4}$$

де α_i, β_i - задані числа, $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_q \leq L$, $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{q} \beta_i \neq 0$, $d_1 \in \mathbb{R}^n, d_2 \in \mathbb{R}^m$, $q > 0$.

Відповідна (1), (2) усереднена система рівнянь за швидкими змінними $\varphi_1, ..., \varphi_m$ набуває значно простішого вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{a}) + \varepsilon X_{10}(\tau, \overline{a}), \tag{5}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, \overline{a})}{\varepsilon} + Y_{10}(\tau, \overline{a}), \tag{6}$$

розв'язок якої задовільняє багатоточкові умови

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i \overline{a}\big|_{\tau=\tau_i} = d_1, \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{q} \beta_i \overline{\varphi}\big|_{\tau=\tau_i} = d_2, \tag{8}$$

Тепер можна окремо розв'язувати задачу (5),(7) для знаходження розв'язку $\overline{a} = \overline{a}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)$, $\overline{a}(0, \overline{y}, \varepsilon) = \overline{y}$, після чого розв'язати задачу (6),(8) для знаходження розв'язку $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon), \overline{\varphi}(0, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) = \overline{\psi}$.

У праці [1] введено матрицю розмірності $p \times m$ вигляду

$$W_p(\tau, a) = \left(\frac{d^{j-1}}{d\tau^{j-1}} \omega_v(\tau, a)\right)_{j,v=1}^{p,m}, p \geq m. \tag{9}$$

Якщо $p = m$, то $det\ W_m(\tau, a)$ - визначник Вронського. Похідні в елементах матриці $W_p(\tau, a)$ обчислюються згідно з рівнянням першого наближення

$$\frac{da}{d\tau} = X_0(\tau, a). \tag{10}$$

2 Технічна лема

Лема 1. *Нехай виконуються умови*

1) функції $\omega(\tau,a)$ і $X_0(\tau,a)$ мають неперервні частинні похідні по τ до порядку p, $p \geq m$.

2) Для матриці $(W_p^T(\tau,a)W_p(\tau,a))$ при всіх значеннях $(\tau,a) \in [0,L] \times D_\rho$ існує обернена матриця і $||(W_p^T(\tau,a)W_p(\tau,a))^{-1}W_p^T(\tau,a)||$ рівномірно обмежена сталою σ_1. Тут D_ρ - замикання множини точок, які належать D разом із своїм ρ-околом, $W_p^T(\tau,a)$ - транспонована матриця.

3) вектор-функція $f(\tau)=(f_1(\tau),...,f_n(\tau)) \in C^1_{[0,L]}$.

Тоді для осциляційного інтеграла

$$I_k(\tau,\varepsilon)=\int_0^\tau f(s)exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s(k,\omega(z,a(z)))dz\}ds, \tag{11}$$

можна вказати такі сталі $\overline{\varepsilon}_1>0$ і $\sigma_2>0$, не залежні від k,τ,ε, що для всіх $k \in Z^m, k \neq 0, \tau \in [0,L]$ і $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon_1}]$ правильна оцінка

$$||I_k(\tau,\varepsilon)|| \leq \sigma_2\varepsilon^{\frac{1}{p}}[\max_{[0,L]}||f(y)||+\frac{1}{||k||}\max_{[0,L]}||\frac{df(y)}{dy}||]. \tag{12}$$

Доведення. Для довільного ненульового вектора $k=(k_1,...,k_m)$ з цілочисельними координатами розглянемо рівність $W_p(\tau,a)k=\Omega$, в якій

$$\Omega=(\Omega_0,...,\Omega_{p-1}),\Omega_j=(k,\omega_v^{(j)}(\tau,a)), j=\overline{0,p-1}.$$

За умови $a \in D_{\rho/2}$ одержимо нерівність

$$||\Omega|| \geq ||k||\ ||(W_p^T(\tau,a)W_p(\tau,a))^{-1}W_p^T(\tau,a)||^{-1} \geq \frac{||k||}{\sigma_1},$$

з якої випливає, що для кожного $\overline{y} \in R$ і $k \neq 0$ існує таке ціле число $r=r(\overline{y},k), 0 \leq r \leq p-1$, для якого

$$|(k,\omega^{(r)}(\overline{y},a))|=\max_{0\leq j\leq p-1}|(k,\omega^{(j)}(\overline{y},a))| \geq \frac{||k||}{p\sigma_1}. \tag{13}$$

Оскільки функції $\omega_v^{(j)}(\tau,a), v=\overline{1,m}, j=\overline{0,p-1}$, рівномірно неперервні на $[0,L]\times D_{\rho/2}$, тоді можна вибрати таку сталу $\delta>0$, не залежну від $\overline{y},k,j$ і a, що для всіх $y \in [\overline{y}-\delta,\overline{y}+\delta]$, $j=\overline{0,p-1}$ і $a \in D_{\rho/2}$ виконуються нерівності

$$|(k,\omega^{(r)}(y,a))| \geq \frac{k}{2p\sigma_1}, |(k,\omega^{(j)}(y,a))| \leq 4|(k,\omega^{(r)}(y,a))|. \tag{14}$$

Крім того, для кожних $v=\overline{1,m}$ і $j=\overline{0,p-1}$ існує таке $\delta_v^{(j)}>0$, що для довільних $y',y'' \in [0,L]$, які задовольняють нерівність $|y'-y''|<\delta_v^{(j)}$, правильна оцінка

$$|\omega_v^{(j)}(y',a)-\omega_v^{(j)}(y'',a)|<\overline{\sigma}_1 \equiv \frac{1}{2p\sigma_1}. \tag{15}$$

Позначимо $\delta=\min_{v,j}\delta_v^{(j)}$. Тоді оцінка (15) має місце при $||y'-y''||<\delta$, $0\leq j\leq p-1, 1\leq v\leq m$, а співвідношення

$$|(k,\omega^{(j)}(y,a)-\omega^{(j)}(\overline{y},a))| \leq \sum_{v=1}^m|k_v||\omega^{(j)}(y,a)-\omega^{(j)}(\overline{y},a)|<\overline{\sigma}_1||k||,$$

які правильні при $|y'-y''|<\delta_v$, $a\in D_{\rho/2}$ і $j=\overline{0,p-1}$, ведуть до нерівностей (14).

Позначимо через s цілу частину числа $\frac{\tau}{2\delta}$, $s\le\frac{L}{2\delta}$, і подамо інтеграл (11) у вигляді суми

$$I_k(t,\bar t,\tau,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{s-1}\int_{t+2\delta n}^{t+2\delta(n+1)}Fdy+\int_{t+2\delta s}^{t+2\tau}Fdy, \tag{16}$$

де $F=f(y)\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar t}^{y}(k,\omega(z,a)dz)\}$. Для оцінки інтеграла

$$P_n=\int_{t+2\delta n}^{t+2\delta(n+1)}Fdy \tag{17}$$

скористаємось методикою, запропонованою в [1] і нерівностями (14) за умови $a\in D_{\rho/2}$. У підсумку, при $r(t+2\delta n+\delta,k)\ge 1$ і $0<\mu<\min\{1,\delta\}$ матимемо

$$||P_n||=[(2^p-2)\mu+\frac{2^{p+1}}{\overline{\sigma}_1||k||}\varepsilon\mu^{1-p}]\max_{[t,t+L]}||f(y)||+\frac{2\sigma}{\overline{\sigma}_1||k||}\varepsilon\mu^{1-p}\max_{[t,t+L]}||f^{(1)}(y)||. \tag{18}$$

Якщо ж $r(t+2\delta n+\delta,k)=0$, то, інтегруючи частинами, отримаємо

$$||P_n||=\frac{2}{\overline{\sigma}_1||k||}(1+4\delta)\varepsilon\max_{t,t+L}||f(y)||+\frac{2\delta}{\overline{\sigma}_1||k||}\varepsilon\max_{t,t+L}||f^{(1)}(y)||. \tag{19}$$

З аналізу (17) і (18) випливає, що при $\mu^{p-1}\le 2^p(1+4\delta^{-1})$ інтеграл (17) задовольняє нерівність (19) для всіх $r(t+2\delta n+\delta,k)\ge 0$. Таку ж нерівність задовольняє останній з інтегралів у правій частині (16), тому при

$$\varepsilon=\mu^p,0<\varepsilon\le\overline{\varepsilon}_1=min\{\varepsilon_0;(\frac{1}{2}\delta)^p;(\frac{2^p}{1+4\delta})^{\frac{p}{p-1}}\}$$

з (17) дістанемо нерівність (12) із сталою

$$\sigma_2=(2^p-2+\frac{2^{p+1}}{\overline{\sigma}_1}+\frac{2\delta}{\overline{\sigma}_1})(1+\frac{L}{2\delta}).$$

Лему доведено. □

3 Обґрунтування методу усереднення

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

1) вектор–функції X_0,X_1,Y_1,ω визначені і неперервні разом із частинними похідними до порядку $p+1$ в області $[0,L]\times D\times\mathbb{R}^m$, $p\ge m$, обмежені сталою $\sigma>0$;

2) існує розв'язок $\overline{a}(\tau,y,\varepsilon)$ усередненої задачі (5), (7), який лежить в D разом із ρ-околом для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$;

3) для всіх $(a,\tau)\in D_\rho\times[0,L]$ і деякого p, $m\le p$, виконується нерівність

$$det((W_p^T(\tau,a)W_p(\tau,a))\ne 0;$$

4) для $y\in D_{\rho/2}$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ матриця

$$Q_1(\overline{y},\varepsilon)=\alpha_0I+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}},$$

невироджена і

$$||Q_1^{-1}(\overline{y},\varepsilon)|| \le M_1.$$

Тоді можна вказати таке $\varepsilon^* \le \varepsilon_0$, *що для всіх* $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*]$ *існує єдиний розв'язок* $(a(\tau,y,\psi,\varepsilon),\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon))$ *задачі* (1)-(4), *який лежить в* $\rho/2$ *околі розв'язку усередненої задачі* (5)-(8) *і цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$\|a(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)\|+\varepsilon\|\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{\alpha}, \tag{20}$$

де стала $c>0$ *і не залежить від* ε, $\alpha = 1+\frac{1}{p}$, $\overline{a}(0,\overline{y},\varepsilon)=\overline{y}, y=\overline{y}+\mu, \varphi(0,\overline{\psi},\varepsilon)=\overline{\psi}, \psi=\overline{\psi}+\xi$.

Доведення. Нехай $\overline{a}=\overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)$ - розв'язок задачі (5),(7). Із рівняння (5) на підставі нерівності Беллмана одержимо

$$||\overline{a}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)|| \le c_1||\mu|| \le \frac{\rho}{2},$$

якщо $||\mu|| \le \frac{\rho}{2c_1}$. Стала $c_1=\exp(\overline{c}_1 L)\ge 0$ і визначається оцінками частинних похідних векторфункцій X_0 і X_{10}.

Із (3),(7) отримаємо

$$\alpha_0(a(0,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{a}(0,\overline{y},\varepsilon))+\sum_{i=1}^{q}(\alpha_i(a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)))=0. \tag{21}$$

Маємо

$$a(0,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{a}(0,\overline{y},\varepsilon)=\overline{y}+\mu-\overline{y}=\mu.$$

Далі

$$a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)=(a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu))+$$
$$(\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon))=(a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu))+$$
$$(\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)+\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}}\mu)-\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}}\mu.$$

Тут $\tilde{a}(\tau,y)$ - розв'язок рівняння (10), який задовольняє умову $\tilde{a}(0,y)=y$. Тоді, рівність (21) набуває вигляду

$$(\alpha_0+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}})\mu=-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)$$
$$+\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)-\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}}\mu).$$

Із умови 5 теореми одержимо

$$\mu=\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon),$$

де

$$\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i Q_1^{-1}(\overline{y},\varepsilon)(R_{1,i}+R_{2,i}),$$
$$R_{1,i}=\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu)-\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)-\frac{\partial\overline{a}(\tau_i,\overline{y},\varepsilon)}{\partial y}\mu,$$
$$R_{2,i}=a(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{a}(\tau_i,\overline{y}+\mu).$$

Для оцінки $R_{1,i}$ скористаємось нерівністю

$$||h(b) - h(a) - \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial h(a)}{\partial x_v}(b_v - a_v)|| \le c_2 ||b - a||^2, \ c_2 \text{ - стала,}$$

якщо для $x \in D \subset R^n, h(x) \in C^2(D)$. Тоді

$$||R_{1,i}(\overline{y}, \varepsilon)|| = ||\tilde{a}(\tau_i, \overline{y} + \mu) - \overline{a}(\tau_i, \overline{y}, \varepsilon) - \mu \frac{\partial \overline{a}(\tau_i, \overline{y}, \varepsilon)}{\partial y}|| \le c_3 ||\mu||^2,$$

де c_3 - додатна стала.

Застосувавши оцінку відхилення розв'язків $a(\tau, y, \varepsilon) - \tilde{a}(\tau, y)$ із монографії [1] та умову 1 теореми, що дозволяє використати оцінку осциляційних інтегралів, у підсумку одержимо

$$||R_{2,i}|| \le c_4 \varepsilon^{\alpha}, \alpha = 1 + \frac{1}{p},$$

де c_4 - стала.

Тоді

$$||\Phi_1(\mu, \xi, \varepsilon)|| \le \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| \ ||Q_1^{-1}(\overline{y}, \varepsilon)||(||R_{1,i}|| + ||R_{2,i}||) \le \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| M_1 (c_3 ||\mu||^2 + c_4 \varepsilon^{\alpha}).$$

Виберемо $\mu \in R^n$ так, що

$$||\mu|| \le c_5 \varepsilon^{\alpha},$$

де стала $c_5 = 2\sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| c_4 M_1$, а параметр $\varepsilon \le \varepsilon_1 = min(\varepsilon_0, (\frac{c_4}{2c_3})^{-1/\alpha})$. Тоді $\Phi_1(\mu, \xi, \varepsilon)$ відображає кулю радіуса $c_5 \varepsilon^{\alpha}$ в себе для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ і $\xi \in R^m$.

Покажемо, що відображення Φ_1 є стискаюче, якщо $||\mu|| \le c_5 \varepsilon^{\alpha}$ і ε - досить мале. Побудуємо для цього оцінку норми

$$\frac{\partial \Phi_1(\mu, \xi, \varepsilon)}{\partial \mu} = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_i {Q_1}^{-1}(\overline{y}, \varepsilon)(\frac{\partial}{\partial \mu} R_{1,i}(\mu, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \mu} R_{2,i}(\mu, \xi, \varepsilon))$$

Оскільки $||R_{1,i}(\mu)|| = O(||\mu||^2)$, то

$$||\frac{\partial R_{1,i}(\mu, \varepsilon)}{\partial \mu}|| \le c_6 ||\mu||$$

для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2], \varepsilon_2 = (2c_5 c_6)^{-1/\alpha}$. Тут c_6 - стала.

Відповідна оцінка для $\frac{\partial R_{2,i}}{\partial \mu}$ випливає з оцінки відхилення розв'язків рівнянь (1) і (5) з однаковими початковими умовами [1]:

$$||\frac{\partial R_{2,i}(\mu, \xi, \varepsilon)}{\partial \mu}|| \le c_7 \varepsilon^{\alpha},$$

коли $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3], \varepsilon_3 = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \xi \in R^m$. Тут c_7 - додатна стала.

У підсумку маємо

$$||\frac{\partial \Phi_1(\mu, \xi, \varepsilon)}{\partial \mu}|| \le \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| M_1 (c_6 ||\mu|| + c_7 \varepsilon^{\alpha}) \le \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| M_1 (c_5 c_6 + c_7) \varepsilon^{\alpha} = c_8 \varepsilon^{\alpha} \le \frac{1}{2},$$

якшо $\varepsilon \le \varepsilon^* = min(\varepsilon_3, (2c_8)^{-1/\alpha})$.

Отже, відображення Φ_1 - стискаюче і в кулі $||\mu|| \le c_5 \varepsilon^{\alpha}$ існує єдина нерухома точка μ^*, звідки випливає існування єдиного розв'язку крайової задачі (1) - (4).

Із рівняння (6) на підставі нерівності Беллмана одержимо

$$||\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)||\leq c_8||\xi||\leq\frac{\rho}{2},$$

якщо $||\xi||\leq\frac{\rho}{2c_8}$. Стала $c_8=\exp(\overline{c}_2L)\geq 0$ і визначається оцінками частинних похідних вектор-функцій Y_1 і Y_{10}.

Із (4),(8) отримаємо

$$\beta_0(\varphi(0,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(0,\overline{\psi},\varepsilon))+\sum_{i=1}^{q}(\beta_i(\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{\psi},\varepsilon)))=0. \qquad (22)$$

Маємо

$$\varphi(0,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(0,\overline{\psi},\varepsilon)=\overline{\psi}+\xi-\overline{\psi}=\xi.$$

Крім того,

$$\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)=(\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon))$$
$$+(\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon))=(\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon))$$
$$+(\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)+\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\overline{\psi}}\xi)-\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\overline{\psi}}\xi.$$

Тут $\tilde{\psi}$ - розв'язок $\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau,\overline{a})}{\varepsilon}$, для якого виконується умова $\tilde{\psi}(0,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)=\overline{\psi}+\xi$. Тоді, рівність (22) набуває вигляду

$$(\beta_0+\sum_{i=1}^{q}\beta_i\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\overline{\xi}})\xi=-\sum_{i=1}^{q}\beta_i(\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)$$
$$+\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\overline{\psi}}\xi).$$

Із умови 5 теореми одержимо

$$\xi=\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon),$$

де вектор-фунція

$$\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{q}\beta_iQ_2^{-1}(\overline{\psi},\varepsilon)(R_{3,i}+R_{4,i}),$$

$$R_{3,i}=\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\psi}\xi,$$

$$R_{4,i}=\varphi(\tau_i,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon).$$

Для оцінки $R_{3,i}$ скористаємось аналогічними міркуваннями знаходження оцінки $R_{1,i}$. Тоді

$$||R_{3,i}(\mu,\xi,\varepsilon)||=||\tilde{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\xi\frac{\partial\varphi(\tau_i,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial\psi}||\leq c_9||\xi||,$$

де стала $c_9>0$ і залежить від оцінки других похідних вектор-функції Y_1.

Аналогічно міркуванням відносно $R_{2,i}$ для $R_{4,i}$ одержимо

$$||R_{4,i}||\leq c_{10}\varepsilon^{\alpha},$$

де c_{10} - стала.

Тоді

$$||\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)|| \le \sum_{i=1}^{q} |\beta_i|\ ||Q_2^{-1}(\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)||(||R_{3,i}|| + ||R_{4,i}||) \le \sum_{i=1}^{q} |\beta_i| M_2(c_9||\xi|| + c_{10}\varepsilon^{\alpha}).$$

Виберемо $\xi \in R^n$ так, що

$$||\xi|| \le c_{11}\varepsilon^{\alpha},$$

де стала $c_{11} = 2\sum_{i=1}^{q} |\beta_i| c_{10} M_2$, а параметр $\varepsilon \le \varepsilon_4 = min(\varepsilon_3, (\frac{c_{10}}{2c_9})^{-1/\alpha})$. Тоді $\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)$ відображає кулю радіуса $c_{11}\varepsilon^{\alpha}$ в себе для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_4]$ і $\xi \in R^m$.

Покажемо, що відображення Φ_2 є стискаюче, якщо $||\xi|| \le c_{11}\varepsilon^{\alpha}, \varepsilon \in (0,\varepsilon^*]$. Побудуємо для цього оцінку норми

$$\frac{\partial \Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \xi} = -\sum_{i=1}^{q} \beta_i Q_2^{-1}(\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial \xi} R_{3,i}(\mu,\xi,\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \xi} R_{4,i}(\mu,\xi,\varepsilon))$$

Оскільки $||R_{3,i}(\xi)|| = O(||\xi||)$, то

$$||\frac{\partial R_{3,i}(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \xi}|| \le c_{12}$$

для $\varepsilon \in (0,\varepsilon_5], \varepsilon_5 = (2c_{11}c_{12})^{-1/\alpha}$. Тут c_{12} - стала.

Відповідна оцінка для $\frac{\partial R_{4,i}}{\partial \xi}$ випливає з оцінки відхилення розв'язків рівнянь (2) і (6) з однаковими початковими умовами [1]:

$$||\frac{\partial R_{4,i}(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \xi}|| \le c_{13}\varepsilon^{\alpha},$$

коли $\varepsilon \in (0,\varepsilon_6], \varepsilon_6 = min(\varepsilon_5,\varepsilon_4), \xi \in R^m$. Тут c_{13} - додатна стала.

У підсумку маємо

$$||\frac{\partial \Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)}{\partial \xi}|| \le \sum_{i=1}^{q} |\beta_i| M_2(c_{12} + c_{13}\varepsilon^{\alpha}) \le \sum_{i=1}^{q} |\beta_i| M_2(c_{11}c_{12} + c_{13})\varepsilon^{\alpha-1} = c_{14}\varepsilon^{\alpha-1} \le \frac{1}{2},$$

якшо $\varepsilon \le \varepsilon^* = min(\varepsilon_6, (2c_{14})^{-1/\alpha-1})$.

Отже, відображення Φ_2 - стискаюче і в кулі $||\xi|| \le c_{10}\varepsilon^{\alpha}$ існує єдина нерухома точка ξ^*, звідки випливає існування єдиного розв'язку крайової задачі (2) - (5).

Оцінка (20) випливає з нерівностей

$$||a(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)|| \le ||a(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,y,\varepsilon)|| + ||\overline{a}(\tau,y,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)|| \le$$

$$c_7\varepsilon^{\alpha} + c_1||\mu|| \le (c_7 + c_1c_5)\varepsilon^{\alpha} = \tilde{c}_1\varepsilon^{\alpha},$$

$$||\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)|| \le ||\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\psi,\varepsilon)|| + ||\overline{\varphi}(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)|| \le$$

$$c_8\varepsilon^{\alpha} + c_8||\mu|| \le (c_{14} + c_8c_{10})\varepsilon^{\alpha-1} = \tilde{c}_2\varepsilon^{\alpha-1},$$

$$||a(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\overline{y},\varepsilon)|| + \varepsilon||\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)|| \le \tilde{c}_1\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon \cdot \tilde{c}_2 \cdot \varepsilon^{\alpha-1} \le c\varepsilon^{\alpha}$$

для всіх $\tau \in [0,L]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*]$.

□

4 Ілюстративний приклад

Приклад 1. *Розглянемо двочастотну систему рівнянь*

$$\frac{da}{d\tau} = -3 + \varepsilon\cos(2\varphi_1 - \varphi_2), \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{a + 3\tau + 2}{\varepsilon}, \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \frac{2a+4}{\varepsilon}, \ 0 \le \tau \le 1. \tag{23}$$

Для системи (23) задані крайові умови

$$5a(0) + a(1) = -3, \varphi_1(0) + \varphi_1(1) = 2, \varphi_2(0) - 3\varphi_2(1) = -1. \tag{24}$$

Відповідна усереднена система набуває вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = -3, \frac{d\overline{\varphi}_1}{d\tau} = \frac{\overline{a} + 3\tau + 2}{\varepsilon}, \frac{d\overline{\varphi}_2}{d\tau} = \frac{2\overline{a}+4}{\varepsilon}, \tag{25}$$

$$5\overline{a}(0) + \overline{a}(1) = -3, \overline{\varphi}_1(0) + \overline{\varphi}_1(1) = 2, \overline{\varphi}_2(0) - 3\overline{\varphi}_2(1) = -1. \tag{26}$$

Розв'язок усередненої задачі, який задовольняє крайові умови (26) набуває вигляду

$$\overline{a}(\tau) = -3\tau, \overline{\varphi}_1(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(2\tau + \varepsilon - 1), \overline{\varphi}_2(\tau, \varepsilon) = \frac{\tau(4-3\tau)}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon - 3}{2\varepsilon}.$$

Умова резонансу частот виконується:

$$2\omega_1 - \omega_2 = 2\tau = 0$$

при $\tau = 0$.

Визначник Вронського вздовж розв'язку рівняння першого наближення

$$W(\tau, a) = \begin{bmatrix} a + 3\tau + 2 & 2a + 4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = -6(a + 3\tau + 2).$$

Якщо $\rho \le 1/\sqrt{10}$, *то в* ρ*-околі розв'язку* $a(\tau) = -3\tau$ *маємо* $|W(\tau, a)| \ge 6$, *тобто умова 4 виконується.*

Розглянемо відхилення повільних зміних для $\tau \in [0, 1]$. *Маємо*

$$u(\tau, \varepsilon) = a(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y}) = \mu + \varepsilon \int_0^\tau \cos(\frac{3s^2}{\varepsilon} + 2\varphi_1 - \varphi_2) ds =$$

$$\mu + \varepsilon(\int_0^\tau \cos(\frac{3s^2}{\varepsilon}) ds) \cos(2\psi_1 - \psi_2) + \varepsilon(\int_0^\tau \sin(\frac{3s^2}{\varepsilon}) ds) \sin(2\psi_1 - \psi_2)$$

Оцінимо інтеграли, застосувавши оцінки інтегралів Френеля [5]. Для цього використаємо заміну $t^2 = 3s^2/\varepsilon$. *Одержемо*

$$|u(\tau, \varepsilon)| \le |\mu| + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}} \int_0^{t_1} \cos(t^2) dt + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}} \int_0^{t_1} \sin(t^2) dt,$$

де $t_1 = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{\varepsilon}}$. *Якщо* $\tau = 1$ *і* $|\mu| \le c\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$, *то*

$$|u(1, \varepsilon)| \le (c + \frac{\pi}{2\sqrt{6}})\varepsilon\sqrt{\varepsilon} = c_9 \varepsilon^{3/2},$$

що узгоджується з висновком теореми.

Отже, для заданої двочастотної системи рівнянь відхилення розв'язків точної і усередненої системи рівнянь має порядок $\varepsilon^\alpha, \alpha = 1/p$ на відрізку $[0, 1]$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon^*$. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні складних коливальних систем у випадку резонансу, а також у мережах зв'язаних фазових осциляторів.

Список літератури

[1] Samoilenko A.M., Petryshyn R.I. Mathematical aspects of the theory of nonlinear oscillations. - K.: Scientific opinion, 2004. – 474 p.

[2] Bihun Ya.Y. Existence of solution and averaging of multipoint boundary problems for multifrequency systems with a linearly transformed argument. Nonlinear Oscillations 2008, 11(4), 462-471

[3] Bihun Ya.Y., Skutar I.D. Averaging in multi-frequency systems with delay and locally integral conditions. Bukovinsk Mathematical Journal. 2020. Vol. 8, № 2. P. 14–23.

[4] Bihun Ya.Y., Petryshyn R.I., Krasnokutska I.V. Averaging in multi-frequency systems with linearly transformed arguments and multi-point and integral conditions. Bukovinsky Mathematical Journal. 2016. T.4, No 3. C. 30-35.

[5] Harry Bateman; Arthur Erdelyi; Higher transcendental functions. New York : McGraw-Hill, 1953. Vol. II. 316 p.

Надійшло 26.01.2025

Pastula M.O. *Averaging in multifrequency systems of the first approximation with frequency dependence on slow variables*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 34–44.

The study focuses on analyzing a multi-frequency system

$$\frac{da}{d\tau} = X_0(\tau, a) + \varepsilon X_1(\tau, a, \varphi),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y_1(\tau, a, \varphi),$$

subjected to multi-point conditions within the subinterval [0, L].

The complexity of the study of multi-frequency systems is the resonance phenomena inhe rent in them, which consist in the rational or almost rational commensurability of frequencies. As a result, the solution of the system of equations averaged over fast variables in the general case may deviate from the solution of the exact problem by the amount O(1).

An asymptotic solution of a system of linear differential equations with a small parameter at some derivatives and coefficients dependent on this parameter is constructed by reducing this system to a simpler form by averaging over fast variables φ. The question of existence and construction of the global solution of systems of differential equations with a deviating argument and a small parameter are investigated. Employing the method of oscillatory integrals estimation, it was demonstrated that solutions for both the averaged and exact problems exhibit unity within small neighborhoods. An unenhanced approximation of the averaging error, the order of which i distinctly reliant on a minor parameter, has been

derived. The obtained outcome is further elucidated through the presentation of a model example.

The acquired findings and methodologies have the potential to further the understanding of multifrequency systems with delayed arguments, aiding in the formulation of theories. Additionally, they can contribute to the creation of asymptotic and comprehensive solutions for singularly perturbed sets of differential equations. These outcomes hold significance in advancing mathematical models for oscillatory processes under conditions of frequency resonance, potentially impacting various domains.