DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2026.01.09

Пасічник Г. С.

ПОХІДНА ЛІ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ, ПОРОДЖЕНОГО ФУНДАМЕНТАЛЬНИМ РОЗВ'ЯЗКОМ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Для ультрапараболічного рівняння другого порядку з двома групами змінних виродження і зростаючими коефіцієнтами, які залежать від часової змінної та параметричної змінної основної групи просторових змінних, знайдено оцінки фундаментального розв'язку задачі Коші. Установлено формули для похідної Лі об'ємного потенціалу, породженого цим фундаментальним розв'язком задачі Коші. Отримані вирази можуть бути використані при побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічного рівняння другого порядку з двома групами змінних виродження рівняння та зростаючими коефіцієнтами.

Ключові слова і фрази: ультрапараболічне рівняння, фундаментальний розв'язок задачі Коші, зростаючі коефіцієнти, об'ємнний потенціал.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна (Пасічник Г. С.)
e-mail: *pasichnyk.gs@gmail.com*

Вступ

Для виродженого диференціального рівняння типу Колмогорова поряд з класичним фундаментальним розв'язком задачі Коші (ФРЗК) використовується Лі-ФРЗК. Лі-ФРЗК для різних вироджених рівнянь будувались у ряді праць італійських математиків [1], монографії [2] для рівнянь типу Колмогорова з залежними лише від часової змінної та з обмеженими гельдеровими коефіцієнтами, в [3] для вироджених рівнянь блочної структури з з обмеженими гельдеровими коефіцієнтами. У працях С.Д. Івасишена та І.П. Мединського [4], [5] для рівнянь типу Колмогорова з обмеженими коефіцієнтами досліджуються і сильніші – класичні ФРЗК. У роботах [6] та [7] будується Лі-ФРЗК для рівняння типу Колмогорова зі зростаючими і незалежними від змінної виродження рівняння коефіцієнтами. При цьому просторова змінна складається з двох груп змінних, а коефіцієнти рівняння задовольняють дві серії умов.

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70, 35A08, 35C15.
Information on some grant ...

У цій статті розглядається ультрапараболічне рівнянн другого порядку з трьома групами просторових змінних і коефіцієнтами, залежними від часової та параметричної змінних основної групи. Коефіцієнти при цьо цьому можуть зростати. Для такого рівняння будується ФРЗК і знайдено вирази для похідної Лі об'ємного потенціалу, породженого цим ФРЗК.

1 Постановка задачі

Нехай n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$. Для кожної фіксованої точки $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ в шарі $\Pi_{(0,T]} := \{(t, x) | t \in (0, T],\ x \in \mathbb{R}^n\}$ скінченної товщини $T > 0$ розглядається рівняння

$$\left(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, y_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y_1)\partial_{x_{1j}} - a_0(t, x_1)\right) u(t, x) = 0, \tag{1}$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}. \tag{2}$$

Припускається, що виконуються наступні умови на коефіцієнти рівняння (1).

1. Існує неперервна функція $D : \mathbb{R}^{n_1} \to [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

1) $D(x_1) \to \infty$ при $|x_1| \to \infty$;

2) функції $a_{js}(t, x_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, $a_j(t, x_1)D(x_1)^{-1}$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $a_0(t, x_1)D(x_1)^{-2}$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $0 \leq t \leq T$, обмежені;

3) для рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1)D(x_1)^{-1}\partial_{x_{1j}}\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right) - \right.$$
$$\left. - a_0(t, x_1)D(x_1)^{-2}\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right)^2\right) v(t, x) = 0,$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} виконується умова параболічності.

2. Існують неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} a_{js}$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, $\partial_{x_1}^{k_1} a_j$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $\partial_x^{k_1} a_0$, $|k_1| \leq 2$, для яких справджуються оцінки

$|\partial_{x_1}^{k_1} a_{js}(t, x_1)| \leq C(D(x_1))^{|k_1|(1-\varepsilon)}$,

$|\partial_{x_1}^{k_1} a_j(t, x_1)| \leq C(D(x_1))^{1+|k_1|(1-\varepsilon)}$,

$|\partial_{x_1}^{k_1} a_0(t, x_1)| \leq C(D(x_1))^{2+|k_1|(1-\varepsilon)}$, $t \in [0, T]$, $\quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$,

де $C > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$; функції $b_{js}(t, x_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, $b_j(t, x_1)$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $b_0(t, x_1)$ як функції t є неперервними рівномірно щодо $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

Використовуватимемо ще позначення: $X(t) := (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$, де $X_1(t) := x_1$ $X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1$, $X_3(t) := x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2x_1'$, $t > 0$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, а $x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, \ldots, x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, \ldots, x_{1n_1})$; $x_2 := (x_2', x_2'')$, де $x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, \ldots, x_{2n_2})$.

2 ФРЗК рівняння (1)

Проводячи міркування, як в [6] для випадку однієї групи змінних виродження рівняння, за умови **1** для ФРЗК $\hat{G}$ рівняння (1) отримуємо

$$\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1) = F^{-1}_{\sigma\to X(t-\tau)-\xi}[V_0(t,\tau,\sigma,y_1)](t,\tau,x,\xi,y_1),$$
$$0\le\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ y_1\in\mathbb{R}^{n_1},$$

де $V_0(t,\tau,\sigma,y_1) = V(t,\tau,\sigma,D(y_1),y_1)$ є розв'язком рівняння

$$\Big[\partial_t - \Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,y_1)\big([\sigma_{1j}+(t-\tau)\sigma_{2j}+2^{-1}(t-\tau)^2\sigma_{3j}]\varsigma'_j+[\sigma_{1j}+(t-\tau)\sigma_{2j}]\varsigma''_j+$$
$$+\sigma_{1j}\varsigma'''_j\big)\big([\sigma_{1s}+(t-\tau)\sigma_{2s}+2^{-1}(t-\tau)^2\sigma_{3s}]\varsigma'_s+[\sigma_{1s}+(t-\tau)\sigma_{2s}]\varsigma''_s+\sigma_{1s}\varsigma'''_s\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,y_1)\big([\sigma_{1j}+(t-\tau)\sigma_{2j}+2^{-1}(t-\tau)^2\sigma_{3j}]\varsigma'_j+[\sigma_{1j}+(t-\tau)\sigma_{2j}]\varsigma''_j+\sigma_{1j}\varsigma'''_j\big)-$$
$$-a_0(t,y_1)\Big)\Big]V_0(t,\tau,\sigma,y_1)=0,\quad 0\le\tau<t\le T,\ \sigma\in\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \tag{3}$$

де

$$\zeta'_j := \begin{cases} 1,\ j\in\{1,...,n_3\},\\ 0,\ j\in\{n_3+1,...,n_1\};\end{cases}\quad \zeta''_j := \begin{cases} 1,\ j\in\{n_3+1,...,n_2\},\\ 0,\ j\in\{1,...,n_3,n_2+1,...,n_1\};\end{cases}$$
$$\zeta'''_j := \begin{cases} 1,\ j\in\{n_2+1,...,n_1\},\\ 0,\ j\in\{1,...,n_2\};\end{cases}$$

Для функції V отримуємо оцінку

$$|V(t,\tau,\sigma+i\gamma,\eta,y_1)|\le C\exp\{(-\delta_1|\sigma_1|^2+c_1|\gamma_1|^2)(t-\tau)+$$
$$+(-\delta_1|\sigma_2|^2+c_1|\gamma_2|^2)(t-\tau)^3+(-\delta_1|\sigma_3|^2+c_1|\gamma_3|^2)(t-\tau)^5-\delta|\eta|^2(t-\tau)\},$$
$$0\le\tau<t\le T,\ \ \{\sigma,\gamma\}\subset\mathbb{R}^n,\ \eta\in\mathbb{R},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \tag{4}$$

в якій $C>0$, $\delta_1>0$, $c_1>0$, $\delta>0$.

Доведення оцінок (4) здійснюється за методикою з [2, 6] з використанням (3).

За умов **1** на коефіцієнти рівняння (1) для ФРЗК $\hat{G}$ справджуються оцінки

$$\Big|\partial_x^k\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)\Big|\le C_k(t-\tau)^{-M-M_k}E_c(t-\tau,x,\xi)\exp\{-c(t-\tau)(D(y_1))^2\},$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \tag{5}$$

де $k\in\mathbb{Z}^n_+$, $C_k>0$, $c>0$. де C_k і $c>0$ – деякі сталі, $M_k:=\sum\limits_{l=1}^{3}|k_l|m_l$, $m_1=1/2$, $m_2=3/2$, $m_3=5/2$, а

$$E_c(t,x,\xi):=\prod_{l=1}^{3}E^l_c(t,X_l(t)-\xi_l),\quad E^l_c(t,x_l):=\exp\Big\{-ct^{1-2l}|x_l|^2\Big\},$$

Зазначимо, для довільних $k\in\mathbb{Z}^n_+\setminus\{0\}$, $0\le\tau<t\le T$ і $x\in\mathbb{R}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$

$$\partial_x^k\int_{\mathbb{R}^n}\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=0. \tag{6}$$

3 Похідна Лі об'много потенціалу, породженого ФРЗК рівняння (1)

Наведемо означення, аналогічне наведеному в праці [1] і яке використавувалось у працях С.Д. Івасишена, В.В. Лаюка, І.П. Мединського.

Похідною Лі функції u в точці (t,x) відносно векторного поля, заданого диференціальним виразом (2) називається границя

$$(S_L u)(t,x) := \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(u(\gamma(t,x,h)) - u(\gamma(t,x,0))),$$

де $\gamma(t,x,h) := (t+h, X(h))$, $h \in \mathbb{R}^n$, – інтегральна лінія заданого векторного поля, яка проходить через точку (t,x).

Відомо, якщо існують похідні $\partial_t u$, $\partial_{x_{2j}} u$, $\partial_{x_{3j}} u$, то $(S_L u)(t,x) = (Su)(t,x)$

Розглянемо об'мний потенціал, породжений ФРЗК $\hat{G}$,

$$w(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t,x;\theta,y,x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Використовуватимемо такі властивості з [2] функцій E_c:

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_c(t,x,\xi)d\xi = C, \tag{7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\theta,x,y)E_c(\theta-\tau,y,\xi)\Big((t-\theta)(\theta-\tau)\Big)^{-M} dy \le C(t-\tau)^{-M}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi), \tag{8}$$

де $0 < c_1 < c$.

Зазначимо, що

$$E_c(\theta-\tau, X(t-\theta),\xi) \le E_c(t-\tau,x,\xi), \quad 0 \le \tau < \theta < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n \tag{9}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (t-\theta)^{-M} E_{c_0}(t-\theta,x,y)E_c(\theta-\tau,(y_1,X_2(t-\theta),X_3(t-\theta)),\xi)dy \le CE_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi), \tag{10}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (t-\theta)^{-M} E_{c_0}(t-\theta,x,y)E_c(\theta-\tau,(y_1,y_2,X_3(t-\theta)),\xi)dy \le CE_{c_0/12}(t-\tau,x,\xi), \tag{11}$$

$$0 \le \tau < (t+\tau)/2 < \theta < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c_0 < c.$$

Використовуватимемо далі ще такі позначення: $B_R^1 := \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \,||x_1| \le R\}$, $R > 0$; $\Delta_{x_p}^{z_p} f(\cdot,x,\cdot) := \Delta_x^{z^{(p)}} f(\cdot,x,\cdot)$, $p \in \{1,2,3\}$, де $z^{(1)} := (z_1,x_2,x_3)$, $z^{(2)} := (x_1,z_2,x_3)$, $z^{(2)} := (x_1,x_2,z_3)$.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* **1** *і* **2**, *а непрервна функція* $\varphi(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *задовольняє умови*

$$|\varphi(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1+\gamma/2}E_c(t-\tau,x,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \gamma \in (0,1]; \tag{12}$$

$$\forall R > 0 \quad \exists \lambda_1^p \in (0,1), \ \lambda_1^p < \frac{\gamma}{2m_p} \quad \forall \{x_1,z_1\} \subset B_R^1 :$$

$$|\Delta_{x_p}^{z_p}\varphi(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_p - z_p|^{\lambda_1^p}(t-\tau)^{-M-1+\lambda_2^p m_p}\Big(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(p)},\xi)\Big),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_2^p := \frac{\gamma}{2m_p} - \lambda_1^p, \quad p \in \{1,2,3\}. \tag{13}$$

Тоді функція w має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} w$, $|k_1| \le 2$, і Sw, для яких правильні формули

$$Sw(t,x;\tau,\xi) = \varphi(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{t_1} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\Delta_y^{X(t-\theta)}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)dy\Bigg)\varphi(\theta,X(t-\theta);\tau,\xi)d\theta,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t_1 := t-(t-\tau)/2. \tag{14}$$

Доведення. Існування похіжних $\partial_{x_1}^{k_1} w$, $|k_1| \le 2$, обгрунтовується аналогічно, як для рівнянь з двома групами просторових змінних.

Доведемо для похідної Лі формулу (14). При цьому треба скористатись рівністю

$$S\hat{G}(t,x;\tau,\xi;x_1) = \Bigg(\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x_1)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x_1)\Bigg)\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)\Big|_{y_1=x_1},$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

з якої на підставі (5), умови **2** на коефіцієнти і нерівності

$$|r|^k \exp\{-c|r|^p\} \le C_k \exp\{-c_0|r|^p\}, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

в якій $k > 0$, $p > 0$, $c > 0$, $0 < c_0 < c$, $C_k > 0$, випливає оцінка

$$\Big|S\hat{G}(t,x;\tau,\xi;x_1)\Big| \le C\Big((t-\tau)^{-1} + (t-\tau)^{-1/2}(D(x_1)) + (D(x_1))^2\Big)(t-\tau)^{-M}E_c(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\exp\{-c(t-\tau)(D(x_1))^2\} \le C(t-\tau)^{-M-1}E_c(t-\tau,x,\xi)\exp\{-c_1(t-\tau)(D(x_1))^2\},$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

де $C > 0$, $0 < c_1 < c$.

Розглянемо сукупність функцій

$$u^\kappa(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t-\kappa} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy, \quad 0 < \kappa < \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Запишемо

$$h^{-1}\Big(u^\kappa(t+h,X(h);\tau,\xi) - u^\kappa(t,x;\tau,\xi)\Big) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t-\kappa} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} h^{-1}\Big(\hat{G}(t+h,X(h);\theta,y;x_1) - \hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\Big)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+$$

$$+\int\limits_{t-\kappa}^{t+h-\kappa} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} h^{-1}\hat{G}(t+h,X(h);\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy =: J_1^\kappa + J_2^\kappa.$$

Знайдемо границі цих доданків при $h \to 0$. Маємо

$$\lim_{h\to 0} J_1^\kappa = \int\limits_{\tau}^{t-\kappa} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy.$$

Зробивши в зовнішньому інтегралі J_2^κ заміну змінних інтегрування за формулою $\lambda = h^{-1}(\theta - t + \kappa)$, одержуємо

$$J_2^\kappa = \int\limits_0^1 d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t+h, X(h); \lambda h + t - \kappa, y; x_1)\varphi(\lambda h + t - \kappa, y; \tau,\xi)dy$$

і

$$\lim_{h\to 0} J_2^\kappa = \int\limits_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;t-\kappa,y;x_1)\varphi(t-\kappa,y;\tau,\xi)dy.$$

Тому

$$Su^\kappa(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;t-\kappa,y;x_1)\varphi(t-\kappa,y;\tau,\xi)dy+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t_1(\kappa)} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy + \int\limits_{t_1(\kappa)}^{t-\kappa} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy =$$

$$=: K_1^\kappa + K_2^\kappa + K_3^\kappa, \quad t_1(\kappa) := (t-\kappa+\tau)/2. \tag{18}$$

З властивостей $\hat{G}$ випливає

$$\lim_{\kappa\to 0} K_1^\kappa = \varphi(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

За допомогою оцінок (17), (12) та нерівності (8) отримується

$$K_2^\kappa \le C \int\limits_{\tau}^{t_1(\kappa)} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\theta)^{-M-1}(\theta-\tau)^{-M-1+\gamma/2} E_c^2(t-\theta,x,y)E_c(\theta-\tau,y,\xi)dy \le$$

$$\le C(t-t_1(\kappa))^{-1}(t-\tau)^{-M}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi) \int\limits_{\tau}^{t_1(\kappa)} (\theta-\tau)^{-1+\gamma/2}d\theta \le$$

$$\le C(t-\tau+\kappa)^{-1}(t-\tau-\kappa)^{\gamma/2}(t-\tau)^{-M}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi).$$

Для оцінки K_3^κ запишемо

$$K_3^\kappa = \int\limits_{t_1(\kappa)}^{t-\kappa} d\theta \int\limits_{R^{n_2+n_3}} dy_2dy_3 \int\limits_{B_R^1} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\Delta_y^{X(t-\theta)}\varphi(t-\theta)(\theta,y;\tau,\xi)dy_1+$$

$$+\int\limits_{t_1(\kappa)}^{t-\kappa} d\theta \int\limits_{R^{n_2+n_3}} dy_2dy_3 \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}\setminus B_R^1} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\Delta_y^{X(t-\theta)}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy_1+$$

$$+\int\limits_{t_1(\kappa)}^{t-\kappa} d\theta \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)dy\right)\varphi(\theta,X(t-\theta);\tau,\xi) =: K_{31}^\kappa + K_{32}^\kappa + K_{33}^\kappa. \tag{20}$$

Для оцінки $|K_{31}^{\kappa}|$ для $x_1 \in B_{R/2}^1$, використовуючи (13), оцінимо спочатку повний приріст

$$\left|\Delta_y^{X(t-\theta)}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)\right| \le \left|\Delta_{(y_1,X_2(t-\theta),X_3(t-\theta))}^{X(t-\theta)}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)\right| + \left|\Delta_{(y_1,y_2,X_3(t-\theta))}^{(y_1,X_2(t-\theta),X_3(t-\theta))}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)\right| +$$
$$+\left|\Delta_y^{(y_1,y_2,X_3(t-\theta))}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)\right| \le C|x_1-y_1|^{\lambda_1^1}(\theta-\tau)^{-M-1+\lambda_2^1 m_1}\Big(E_c(\theta-\tau,X(t-\theta),\xi)+$$
$$+E_c(\theta-\tau,(y_1,X_2(t-\theta),X_3(t-\theta)),\xi)\Big) + C|X_2(t-\theta)-y_2|^{\lambda_1^2}(\theta-\tau)^{-M-1+\lambda_2^2 m_2}\times$$
$$\times\Big(E_c(\theta-\tau,(y_1,X_2(t-\theta),X_3(t-\theta),\xi) + E_c(\theta-\tau,(y_1,y_2,X_3(t-\theta)),\xi)+$$
$$+C|X_3(t-\theta)-y_3|^{\lambda_1^3}(\theta-\tau)^{-M-1+\lambda_2^3 m_3}\Big(E_c(\theta-\tau,(y_1,y_2,X_3(t-\theta),\xi)+E_c(\theta-\tau,y,\xi)\Big).$$

Далі використауємо (17), (7), (8), (9), (10) та (11).

Для оцінки $|K_{32}^{\kappa}|$ на підставі (12) та (9) отримуємо

$$\left|\Delta_y^{X(t-\theta)}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)\right| \le |\varphi(\theta,y;\tau,\xi| + |\varphi(\theta,X(t-\theta);\tau,\xi| \le$$
$$\le C(\theta-\tau)^{-M-1+\gamma/2}\Big(E_c(\theta-\tau,y,\xi)+E_c(t-\tau,x,\xi)\Big).$$

Далі використауємо (17), (16), (7) та (8).

В результаті для $x_1 \in B_{R/2}^1$ матимемо

$$K_{31}^{\kappa}| + |K_{32}^{\kappa}| \le C\int\limits_{t_1(\kappa)}^{t-\kappa}(t-\tau)^{-M}E_{c_2}(t-\tau,x,\xi)\Big((t-\theta)^{-1+\lambda_1^1 m_1}(\theta-\tau)^{-1+\lambda_2^1 m_1} + (t-\theta)^{-1+\lambda_1^1 m_1}\times$$
$$\times(\theta-\tau)^{-1+\lambda_2^1 m_1} + (t-\theta)^{-1+\lambda_1^2 m_2}(\theta-\tau)^{-1+\lambda_2^2 m_2} + (t-\theta)^{-1+\lambda_1^2 m_2}(\theta-\tau)^{-1+\lambda_2^2 m_2}+$$
$$+(t-\theta)^{-1+\lambda_1^3 m_3}(\theta-\tau)^{-1+\lambda_2^3 m_3} + (t-\theta)^{-1+\lambda_1^3 m_3}(\theta-\tau)^{-1+\lambda_2^3 m_3}\Big)d\theta.$$

Для оцінювання K_{33}^{κ} скористаємось оцінкою

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)dy\Big| \le C(D(x_1))^2\exp\{-c(t-\theta)(D(x_1))^2\}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\theta)^{-M}E_c(t-\theta,x,y)\,dy \le C(D(x_1))^2\exp\{-c(t-\theta)(D(x_1))^2\},$$

яка одержується за допомогою рівностей (6), (7) і (15), оцінки (5) та умови **2** для a_0. Тому

$$K_{33}^{\kappa} \le C(D(x_1))^2\int\limits_{t_1(\kappa)}^{t-\kappa}\exp\{-c(t-\theta)(D(x_1))^2\}d\theta =$$
$$= C\exp\{-c\kappa(D(x_1))^2\} - \exp\{-(c/2)(t-\tau_\kappa)(D(x_1))^2\}.$$

З (18), оцінок K_2^{κ}, $K_{31}^{\kappa}+K_{32}^{\kappa}$, K_{33}^{κ}, співвідношень (19) і (20) випливає існування $\lim\limits_{\kappa\to 0}K_j^{\kappa}$, $j\in\{1,2,3\}$, правильність формули (14).

□

4 Висновки

Знайдені з допомогою перетворення Фур'є ФРЗК для рівняння (1) дозволяє довести правильність формули (14) для похідної Лі об'много потенціалу, породженого цим ФРЗК. Наявність двох змінних виродження рівняння ускладнило дослідження у порівнянні з випадком, коли змінна виродження одна. Отримані результати будуть використані при реалізації методу Леві побудови Лі-ФРЗК та класичного ФРЗК для рівняння з двома групами просторових змінних і зростаючими коефіцієнтами при $|x_1| \to \infty$ та незалежними від змінних виродження рівняння.

Список літератури

[1] Di Francesco, M., Pascucci, A. *On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type* Applied Mathematics Research eXpress. 2005. (3), 77-116. https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77

[2] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**). htts://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9

[3] Ivasyshen S. D., Layuk V. V. *Fundamental solutions of the Cauchy problem for some degenerate parabolic equations of Kolmogorov type.* Ukr. Mat. J. 2011, **63** (11), 1469–1500. (in Ukrainian)

[4] Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P. *On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables.* J. Math. Sci. 2018. **231** (4), 507–526. https:doi.org//10.1007/s10958-018-3830-0.

[5] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. II.* J. Math. Sci. 2020. **247** (1), 1–23. https:doi.org//10.1007/s10958-020-04786-1.

[6] Medinskyi I., Pasichnyk H. *Fundamental solution to Cauchy problem for kolmogorov-type equation with unbounded coefficients that do not depend on degeneration variables.* Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2025, (3), 3–16. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.03.003 (in Ukrainian)

[7] Pasichnyk H. *Fundamental solution of the Cauchy problem for the dissipative ultraparabolic Kolmogorov equation with coefficients independent on variable degeneration.* Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics. 2025, 81(2), 130-137. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.20 (in Ukrainian)

Надійшло 26.02.2026

Pasichnyk H. S. *Lie derivative of a volume potential generated by the fundamental solution of the Cauchy problem for a degenerate ultraparabolic equation* , Bukovinian Math. Journal. **14**, 1 (2026), 104–111.

Estimates of the fundamental solution to the Cauchy problem have been obtained for a second-order ultraparabolic equation with two groups of spatial variables of degeneracy and growing coefficients depending on the time variable and the parametric variable of the main group of spatial variables. Formulas for the Lie derivative of the volume potential generated by this fundamental solution of the Cauchy problem have been established. The resulting expressions can be utilized in constructing the fundamental solution to the Cauchy problem for a second-order ultraparabolic equation with two groups of variables of degeneracy and growing coefficients.